Δρ. Χ.Κοκορέλης

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Εάν δίνονται ο (τετραγωνικός) n x n πίνακας A, ένας μοναδιαίος n x n πίνακας I και ένας πίνακας στήλη n x 1 και όπου λ ένας αριθμός διάφορος του μηδενός, τότε η εξίσωση

$$Ax = \lambda X \Rightarrow (A - \lambda I) X = 0$$

ορίζει ένα σύστημα n ομογενών εξισώσεων. Εκτός από την λύση

$$X = 0$$

της σχέσης (1), μη μηδενικές λύσεις υπάρχουν εάν

$$|A - \lambda I| = 0$$

που αναγνωρίζουμε σαν την χαρακτηριστική εξίσωση (ΧΕ) του πίνακα A.

Οι ρίζες της ΧΕ, τις οποίες θα συμβολίζουμε σαν

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$$

ονομάζονται ιδιοτιμές του πίνακα A. Στην ξένη βιβλιογραφία οι ιδιοτιμές αναφέρονται σαν eigenvalues.
Σημείωση : Εάν ένας πίνακας X ικανοποιεί την (1) τότε και ο πίνακας

$$\rho X$$

είναι λύση της (1), όπου ρ είναι σταθερά.

Στο παρακάτω παράδειγμα θα δείξουμε τον υπολογισμού ιδιοτιμών ενός πίνακα 3 x 3, στον οποίο οι δύο (2) από τις τρεις (3) ιδιοτιμές είναι ίδιες.

ΑΣΚΗΣΗ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ – Υπολογισμός ιδιοδιανυσμάτων στην περίπτωση που υπάρχουν δύο ίδιες ιδιοτιμές

Να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

Λύση

Από την χαρακτηριστική εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$det(A-\lambda I)=(-4)(\lambda^2+4\lambda+4)=(\lambda-4)(\lambda+2)^2 \qquad \textbf{(3)}$$

προκύπτουν οι λύσεις της (3) που είναι και οι ιδιοτιμές του πίνακα Α και είναι οι

λ = - 2 (διπλή ρίζα) , λ= + 4 .

Η ιδιοτιμή λ = - 2 ειναι διπλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης και άρα περιμένουμε να υπάρχουν δύο (2) ιδιοδιανύσματα, ένα για κάθε ιδιοτιμή.
Τα ιδιοανύσματα

$$|\chi> \qquad \textbf{(4)}$$

προκύπτουν από την λύση της εξίσωσης

(Α - λ Ι) |χ> =0 **(5)**

Θα υπολογίσουμε τώρα τα δύο ιδιοδιανύσματα τα οποία αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή <u>λ= - 2</u>

Αντικαθιστώντας

λ =- 2 ,

και **(6)**

$$|\chi>=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

στην χαρακτηριστική εξίσωση (3), προκύπτει ότι

$$\begin{pmatrix} 1-(-2) & -3 & 3 \\ 3 & -5-(-2) & 3 \\ 6 & -6 & 4-(-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

(7)

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

(8)

$$\begin{pmatrix} 3x-3y+3z \\ 3x-3y+3z \\ 6x-6y+6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

3x + 3y + 3z = 0
3x – 3y + 3z = 0 **(9)**
6x – 6y + 6z = 0
από όπου προκύπτει η ισοδύναμη εξίσωση

$$x - y + z = 0 \qquad (10)$$

Η εξίσωση (10) έχει 3 μεταβλητές x, y, z και άπειρες λύσεις. Διαλέγοντας την x-μεταβλητή σαν την ανεξάρτητη μεταβλητή οι y, z μεταβλητές θα χρησιμοποιηθούν σαν παράμετροι.
Τα δύο ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα θα προκύψουν από τις διαφορετικές λύσεις τριάδων τιμών που ικανοποιούν την (10) . Διαλέγουμε τις τριάδες τιμών

$$(x, y, z) = (1, 1, 0) \qquad (11)$$

και

$$(x, y, z) = (1, 2, 1) \qquad (12)$$

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα

$$|\chi_1> = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (13)$$

$$|\chi_2> = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (14)$$

Το ιδιοδιάνυσμα το οποίο αντιστοιχεί στην 3η ιδιοτιμή, λ= +4, προκύπτει από την αντικατάσταση της ιδιοτιμής λ = +4 στην εξίσωση (5). Το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει σε αυτή την περίπτωση είναι το

$$(A - \lambda I)|x_3> = 0 \qquad (15a)$$

$$\begin{pmatrix} 1-(4) & -3 & 3 \\ 3 & -5-(4) & 3 \\ 6 & -6 & 4-(4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad (15b)$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad (16)$$

$$\begin{pmatrix} -3x - 3y + 3z \\ 3x - 9y + 3z \\ 6x - 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad (17)$$

$$-3x - 3y + 3z = 0 \Rightarrow -x - y + z = 0 \qquad (18)$$
$$3x - 9y + 3z = 0 \Rightarrow x - 3y + z = 0 \qquad (19)$$
$$6x - 6y = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y \qquad (20)$$

$$(18) \stackrel{\lambda o \gamma \omega\ (20)}{\Longrightarrow} z = 2y \qquad (21)$$

Η (19) ικανοποιείται από τις (20) και (21), άρα το ιδιοδιάνυσμα

$$|\chi_3>=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} \qquad (22)$$

Επειδή το y είμαι μία παράμετρος μπορώ να διαλέξω σαν τιμή της παραμέτρου μία οποιαδήποτε ακέραια τιμή. Διαλέγω το y=1, άρα

$$|\chi_3>=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$