Γραμμική Άλγεβρα

Σημειώσεις Παραδόσεων

Νικόλαος Π. Τσιρίβας – Δημήτριος Α. Μητσούδης

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών

Σχολή Μηχανικών

Νοέμβριος 2019

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές γράφτηκαν για τις ανάγκες του προπτυχιακού μαθήματος «Γραμμική Άλγεβρα» που διδάσκονται οι φοιτητές του Α΄ εξαμήνου του Τμήματος Ναυπηγών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής.

Φιλοδοξούν να αποτυπώσουν ένα περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος και σε καμία περίπτωση δεν αποτελούν ένα ολοκληρωμένο σύγγραμμα εισαγωγής στην Γραμμική Άλγεβρα. Επειδή πρόκειται για την πρώτη έκδοση των σημειώσεων αυτών και, αναπόφευκτα, υπάρχουν αρκετές ελλείψεις και αβλεψίες, οποιαδήποτε επισήμανση λαθών είναι εξαιρετικά ευπρόσδεκτη. Εξίσου ευπρόσδεκτα είναι σχόλια ή παρατηρήσεις που αφορούν το περιεχόμενό τους, καθώς και τον τρόπο παρουσίασης.

Το ύφος των σημειώσεων αυτών δεν είναι «αυστηρό» από μαθηματική σκοπιά και δεν δίνουμε έμφαση σε αποδείξεις. Από την άλλη μεριά, πιστεύουμε ότι η ύλη που περιέχουν είναι θεμελιώδους σημασίας για τους φοιτητές που σπουδάζουν θετικές επιστήμες, επιστήμες μηχανικού, οικονομικά, κλπ. Περιλαμβάνει γραμμικά συστήματα, πίνακες και ορίζουσες, καθώς και τη γνωριμία με την έννοια των γραμμικών χώρων και των γραμμικών απεικονίσεων, κυρίως ως μαθηματικές δομές που τις χρησιμοποιούμε για να μοντελοποιήσουμε ρεαλιστικά προβλήματα. Έχουμε τη γνώμη ότι οτιδήποτε μάθετε στο μάθημα αυτό θα σας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο στη συνέχεια των σπουδών σας.

Νοέμβριος 2019
Νίκος Τσιρίβας – Δημήτρης Μητσούδης

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στα συστήματα γραμμικών εξισώσεων

1.1 Εισαγωγή

Ένα από τα πρώτα και ταυτόχρονα σημαντικότερα προβλήματα που ώθησαν στην ανάγκη της εισαγωγής της γραμμικής άλγεβρας είναι τα γραμμικά συστήματα. Ας δούμε μερικά απλά προβλήματα τα οποία για να λυθούν απαιτούν την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων.

Πρόβλημα 1. Ο Αντώνης πήγε στη λαϊκή την Παρασκευή για ψώνια και πήρε 5 κιλά μήλα και 3 κιλά πατάτες και πλήρωσε 7 ευρώ και 40 λεπτά. Την επόμενη εβδομάδα πήγε και πάλι στη λαϊκή και πήρε 4 κιλά μήλα και 7 κιλά πατάτες και πλήρωσε 9 ευρώ και 60 λεπτά. Αν και θυμάται πόσο πλήρωσε συνολικά κάθε φορά, δεν θυμάται πόσο έκαναν το κιλό τα μήλα και οι πατάτες. Τώρα θέλει να ξαναπάει στη λαϊκή και να πάρει 3 κιλά μήλα και 5 κιλά πατάτες, και έχει 7 ευρώ. Θα του φτάσουν τα χρήματα; Υποθέτουμε ότι οι τιμές ανά κιλό δεν μεταβάλλονται.

Λύση. Για να δει ο Αντώνης αν του φτάνουν τα χρήματα χρειάζεται να λύσει ένα γραμμικό σύστημα. Έστω ότι ένα κιλό μήλα κάνει x ευρώ και ένα κιλό πατάτες κάνει y ευρώ. Τότε με βάση τα δεδομένα έχουμε ότι ισχύει το ακόλουθο σύστημα:

$$5x + 3y = 7.4 \tag{1.1}$$

$$4x + 7y = 9.6 \tag{1.2}$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1.1), (1.2), θα βρούμε πόσο κάνει το ένα κιλό μήλα και το ένα κιλό πατάτες.

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (1.1) με 4 και την (1.2) με 5 και παίρνουμε:

$$20x + 12y = 29.6 \tag{1.3}$$

$$20x + 35y = 48 \tag{1.4}$$

Αφαιρούμε την (1.3) από την (1.4) και παίρνουμε

$$23y = 18.4 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{18.4}{23} = 0.8 \text{ ευρώ}. \tag{1.5}$$

Τώρα, λύνουμε την (1.1) ως προς x και έχουμε

$$x = \frac{7.4 - 3y}{5}. \tag{1.6}$$

Αντικαθιστούμε την (1.5) στην (1.6) και παίρνουμε

$$x = \frac{7.4 - 3(0.8)}{5} = 1 \text{ ευρώ}.$$

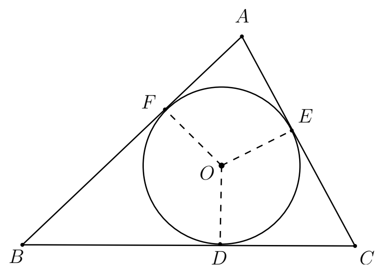
Άρα, ένα κιλό μήλα κάνει 1 ευρώ και ένα κιλό πατάτες κάνει 0.8 ευρώ. Επομένως, για να πάρει τρία κιλά μήλα και πέντε κιλά πατάτες ο Αντώνης θα πληρώσει:

$$3 \cdot 1 + 5 \cdot (0.8) = 7 \text{ ευρώ}.$$

Άρα τα χρήματά του του φτάνουν ακριβώς για να ψωνίσει.

Το επόμενο παράδειγμα αφορά ένα κλασσικό πρόβλημα Ευκλείδειας Γεωμετρίας που για να λυθεί απαιτείται η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος.

Πρόβλημα 2. Θεωρήστε το τρίγωνο ABC του Σχήματος 1.1.



Σχήμα 1.1:

Θεωρούμε τον εγγεγραμμένο κύκλο κέντρου O στο τρίγωνο ABC, ο οποίος εφάπτεται στις πλευρές BC, AC και AB του ABC στα σημεία D, E και F, αντίστοιχα. Θέτουμε $BC = a$, $AC = b$ και $AB = c$ και θεωρούμε γνωστές τις πλευρές του ABC. Θέλουμε να υπολογίσουμε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων BD, DC, CE, EA, AF, FB, που αποκόπτει ο εγγεγραμμένος κύκλος πάνω στις πλευρές.

Θέτουμε $BD = x$, $CE = y$ και $AF = z$. Γνωρίζουμε από την Ευκλείδεια Γεωμετρία ότι τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο στον κύκλο είναι ίσα, άρα

$$BD = BF = x, \quad CD = CE = y \quad \text{και} \quad AE = AF = z.$$

Έτσι από το τρίγωνο έχουμε:

$$BD + DC = a \quad \Leftrightarrow \quad x + y = a \tag{1.7}$$
$$CE + EA = b \quad \Leftrightarrow \quad y + z = b \tag{1.8}$$
$$AF + FB = c \quad \Leftrightarrow \quad z + x = c \tag{1.9}$$

Επομένως, για να βρούμε τα x, y, z αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (1.7)–(1.9). Προσθέτοντας κατά μέλη και τις τρεις ισότητες έχουμε:

$$2(x + y + z) = a + b + c \quad \Leftrightarrow \quad x + y + z = \frac{a + b + c}{2}. \tag{1.10}$$

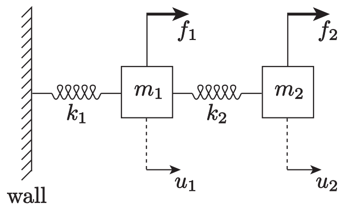
Προφανώς $a + b + c$ είναι η περίμετρος του τριγώνου. Ας συμβολίσουμε με τ την λεγόμενη *ημιπερίμετρο*:

$$\tau = \frac{a + b + c}{2}. \tag{1.11}$$

Αφαιρώντας την (1.7) από την (1.10) βρίσκουμε $z = \tau - a$. Παρόμοια, αφαιρώντας τις (1.8) και (1.9) από την (1.10) παίρνουμε $x = \tau - b$ και $y = \tau - c$. Άρα

$$x = \frac{a + c - b}{2}, \quad y = \frac{a + b - c}{2}, \quad \text{και} \quad z = \frac{b + c - a}{2}.$$

Πρόβλημα 3.[*] Ας θεωρήσουμε το σύστημα δύο σωμάτων και δύο ελατηρίων που είναι στερεωμένο σε έναν τοίχο, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 1.2.



Σχήμα 1.2: Ένα σύστημα δύο σωμάτων και δύο ελατηρίων στερεωμένο σε έναν τοίχο.

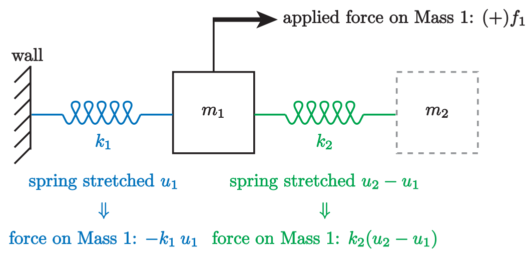
Υποθέτουμε ότι το Σώμα 1 έχει μάζα m_1 και το Σώμα 2 έχει μάζα m_2 και ότι τα δύο σώματα κινούνται πάνω σε οριζόντιο λείο επίπεδο χωρίς τριβές. Το Σώμα 1 συνδέεται με έναν τοίχο

[*] Από τις σημειώσεις: Linear Systems of Equations ... in a Nutshell, A.T. Patera, M. Yano, November 19, 2014

μέσω ενός ελατηρίου με σταθερά ακαμψίας k_1, και με το Σώμα 2 με ένα ελατήριο με σταθερά ακαμψίας k_2. (Το Σώμα 2 συνδέεται μόνο με το Σώμα 1 μέσω του ελατηρίου με σταθερά ακαμψίας k_2.) Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι $k_1, k_2 > 0$. Θα συμβολίζουμε με u_1, u_2 τις μετατοπίσεις των Σωμάτων 1 και 2, αντίστοιχα. Θετικές τιμές των μετατοπίσεων θα αντιστοιχούν σε μετατόπιση προς τα δεξιά (μακριά από τον τοίχο), και επιλέγουμε το σημείο αναφοράς έτσι ώστε αν δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις (δηλαδή τα ελατήρια δεν έχουν εκταθεί ή συμπιεστεί) $u_1 = u_2 = 0$. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε (σταθερές) δυνάμεις f_1 και f_2 στα Σώματα 1 και 2, αντίστοιχα (με θετικές τιμές να αντιστοιχούν σε δυνάμεις με φορά από τον τοίχο προς τα δεξιά). Αναζητούμε να βρούμε τις μετατοπίσεις u_1, u_2 των δύο σωμάτων σε κατάσταση ισορροπίας, για δεδομένες δυνάμεις f_1, f_2 και σταθερές ελατηρίων k_1, k_2.

Στο σημείο αυτό σημειώνουμε ότι αν και όλα τα ρεαλιστικά συστήματα εμπεριέχουν απόσβεση και, επομένως, το σύστημά μας θα έπρεπε κανονικά να συμπεριλαμβάνει και αποσβεστήρες, οι αποσβεστήρες δεν επηρεάζουν το σύστημα στην κατάσταση ισορροπίας και άρα μπορούμε να τους αγνοήσουμε. Φυσικά, το σύστημα μας θα φτάσει σε κατάσταση ισορροπίας ακριβώς λόγω της απόσβεσης.

Ας δούμε τώρα τις εξισώσεις που πρέπει να ικανοποιούν οι μετατοπίσεις u_1, u_2 σε κατάσταση ισορροπίας. Θεωρούμε αρχικά το Σώμα 1, βλ. Σχήμα 1.3.



Σχήμα 1.3: Οι δυνάμεις που ασκούνται στο Σώμα 1.

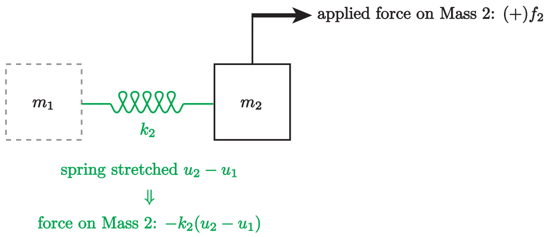
Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιούμε το νόμο του Hooke (μια καταστατική εξίσωση) για να συνδέσουμε τη δύναμη στο ελατήριο με την έκταση ή συμπίεση του ελατηρίου. Σε κατάσταση ισορροπίας η συνισταμένη των δυνάμεων (δηλαδή το άθροισμα των ασκουμένων δυνάμεων και των δυνάμεων εξαιτίας του ελατηρίου) στο Σώμα 1 πρέπει να είναι ίση με 0. Αυτό μας οδηγεί στην αλγεβρική εξίσωση

$$f_1 - k_1 u_1 + k_2(u_2 - u_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (k_1 + k_2)u_1 - k_2 u_2 = f_1,$$

όπου άγνωστοι είναι οι μετατοπίσεις u_1, u_2. (Σημειώστε ότι, γενικότερα, για ένα σύστημα που δεν βρίσκεται σε κατάσταση ισορρροπίας, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα θα επέβαλλε το δεύτερο μέλος να είναι ίσο με $m_1 u_1''$ αντί μηδέν.)

Με ανάλογα επιχειρήματα για τις δυνάμεις που ασκούνται στο Σώμα 2, βλ. Σχήμα 1.4, καταλήγουμε ότι πρέπει να ισχύει η αλγεβρική εξίσωση:

$$f_2 - k_2(u_2 - u_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -k_2u_1 + k_2u_2 = f_2.$$



Σχήμα 1.4: Οι δυνάμεις που ασκούνται στο Σώμα 2.

Έτσι, καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα των δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τα u_1, u_2:

$$(k_1 + k_2)u_1 - k_2u_2 = f_1 \tag{1.12}$$

$$-k_2u_1 + k_2u_2 = f_2 \tag{1.13}$$

Προσθέτουμε τις (1.12) και (1.13) κατά μέλη και έχουμε:

$$(k_1 + k_2)u_1 - k_2u_1 = f_1 + f_2 \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{f_1 + f_2}{k_1}.$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε την τιμή της u_1 που μόλις βρήκαμε στην (1.13) και λύνουμε ως προς u_2:

$$-k_2\frac{f_1 + f_2}{k_1} + k_2u_2 = f_2 \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{k_2f_1 + (k_1 + k_2)f_2}{k_1k_2}.$$

1.2 Μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Υπάρχουν πολλές μέθοδοι για να λύνουμε γραμμικά συστήματα. Η κατ' εξοχήν καθιερωμένη μέθοδος είναι η *μέθοδος της απαλοιφής του Gauss*. Ας την δούμε με ένα παράδειγμα.
Να λυθεί το σύστημα:

$$\left\{\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ x + 3y + z &= 11 \\ 2x + 5y - 4z &= 13. \end{aligned}\right. \tag{1.14}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση του συστήματος (1.14) με κατάλληλο συντελεστή κάθε φορά, έτσι ώστε αν την προσθέσουμε αρχικά στη δεύτερη και, στη συνέχεια, στην τρίτη, να πάρουμε δύο εξισώσεις στις οποίες δεν υπάρχει η μεταβλητή x. Συγκεκριμένα,

- πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί -1 και την προσθέτουμε στη δεύτερη,
- πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί -2 και την προσθέτουμε στην τρίτη.

Έτσι αντί για τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος (1.14) παίρνουμε την

$$y + 4z = 7,$$

και αντί για την τρίτη έχουμε την

$$y + 2z = 5.$$

Τις γράφουμε πάλι όλες μαζί και έχουμε το ακόλουθο (ισοδύναμο) σύστημα:

$$\left\{\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ y + 4z &= 7 \\ y + 2z &= 5. \end{aligned}\right. \tag{1.15}$$

Παρατηρήστε ότι γράφουμε τους συντελεστές έτσι ώστε οι αντίστοιχοι συντελεστές να είναι ο ένας κάτω από τον άλλον.
Στο επόμενο βήμα αγνοούμε την πρώτη εξίσωση και πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη εξίσωση του (1.15) με κατάλληλο συντελεστή έτσι ώστε αν την προσθέσουμε στην τρίτη να απαλείψουμε τον άγνωστο y από την τρίτη. Έτσι, πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη επί (-1) και την προσθέτουμε στην τρίτη, οπότε παίρνουμε την εξίσωση

$$-2z = -2.$$

Γράφουμε και πάλι τις εξισώσεις όλες μαζί προσέχοντας ώστε οι αντίστοιχοι συντελεστές να είναι ο ένας κάτω από τον άλλον και έχουμε:

$$\left\{\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ y + 4z &= 7 \\ -\,2z &= -2. \end{aligned}\right. \tag{1.16}$$

Λέμε τώρα ότι το σύστημα (1.16) έχει φτάσει σε **κλιμακωτή μορφή**. Τώρα που έχει φτάσει στη μορφή αυτή το σύστημα λύνεται εύκολα ξεκινώντας να λύσουμε πρώτα την τελευταία εξίσωση. Από την τρίτη εξίσωση λοιπόν, έχουμε:

$$-2z = -2 \quad \Rightarrow \quad z = 1.$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του z που βρήκαμε στην δεύτερη και παίρνουμε:

$$y + 4 \cdot 1 = 7 \quad \Rightarrow \quad y = 3,$$

οπότε βρήκαμε και το y. Τέλος, αντικαθιστούμε τις γνωστές πλέον τιμές των y και z στην πρώτη εξίσωση και παίρνουμε:

$$x + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

Έτσι η λύση του συστήματος είναι η τριάδα $(x, y, z) = (1, 3, 1)$.

Κεφάλαιο 2

Πίνακες

2.1 Ορισμοί

Οι πίνακες είναι ένα από τα δομικά θεμέλια της Γραμμικής Άλγεβρας. Εδώ θα κάνουμε μια μικρή εισαγωγή στους πίνακες κυρίως σε ότι αφορά τη σχέση τους με τα γραμμικά συστήματα. Αλλά τι είναι ένας πίνακας;

Έστω $m, n \in \mathbb{N}$, όπου με $\mathbb{N}$ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών. Θέτουμε $T_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ και $T_m = \{1, 2, \ldots, m\}$. Ένας πίνακας διάστασης $m \times n$ είναι μια συνάρτηση $f : T_m \times T_n \to \mathbb{R}$. Για κάθε $(i, j) \in T_m \times T_n$, θέτουμε $a_{ij} = f\big((i, j)\big)$. Έτσι, το πεδίο τιμών $f(T_m \times T_n)$ της f περιέχει τους αριθμούς a_{ij}, για όλα τα $i \in T_m$, $j \in T_n$. Αυτοί οι αριθμοί θεωρούμε ότι έχουν μια ορισμένη θέση στο σύνολο τιμών $f(T_m \times T_n)$, η οποία καθορίζεται από τους δύο δείκτες $(i, j) \in T_m \times T_n$. Αυτή είναι η αυστηρή μαθηματική θεώρηση των πινάκων η οποία δεν θα μας απασχολήσει από εδώ και στο εξής. (Όμως και στα μαθηματικά γενικότερα, αυτή η θεώρηση των πινάκων εφαρμόζεται κυρίως σε θέματα θεωρητικής φύσεως.)

Για εμάς, ένας πίνακας θα είναι μια ορθογώνια διάταξη αριθμών σε γραμμές και στήλες. Αν τα στοιχεία του πίνακα A είναι πραγματικοί αριθμοί τότε ο πίνακας λέγεται πραγματικός, ενώ αν είναι μιγαδικοί τότε ο A λέγεται μιγαδικός πίνακας. Επειδή στη συνέχεια θα ασχοληθούμε κυρίως με πραγματικούς πίνακες, όταν θα αναφερόμαστε σε έναν πίνακα χωρίς άλλο προσδιορισμό θα εννοούμε πραγματικό.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα πινάκων:

(α) Πίνακας 2×2: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

(β) Πίνακας 3×3: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \\ 9 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

(γ) Πίνακας 1×3: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(δ) Πίνακας 3×1: $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(ε) Πίνακας 1×1: (2019).

(στ) Πίνακας 2×3: $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 9 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

(ζ) Πίνακας 3×2: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$.

(η) Πίνακας $1 \times n$: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$, όπου $a_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

(θ) Πίνακας $n \times 1$: $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, όπου $b_j \in \mathbb{R}$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$.

Γενικώς, τα στοιχεία μέσα στους πίνακες μπορούν να είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί χωρίς κανέναν περιορισμό.
Κάθε πίνακας έχει γραμμές και στήλες οι οποίες είναι πλήρως καθορισμένες. Έτσι για παράδειγμα ο πίνακας στο Παράδειγμα (β) έχει τρεις γραμμές και τρεις στήλες. Η πρώτη, δεύτερη και τρίτη γραμμή του είναι

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

αντίστοιχα, ενώ η πρώτη, δεύτερη και τρίτη στήλη του είναι

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix},$$

αντίστοιχα.
Τέλος, η γενική μορφή ενός πίνακα $m \times n$ είναι

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Τα στοιχεία του πίνακα A είναι οι αριθμοί a_{ij}, για $i = 1, \ldots, m$ και $j = 1, \ldots, n$.
Ο A έχει m γραμμές και n στήλες. Οι m γραμμές του είναι οι εξής:

$$(a_{11} \;\; a_{12} \;\; \ldots \;\; a_{1n}), \quad (a_{21} \;\; a_{22} \;\; \ldots \;\; a_{2n}), \quad \ldots \quad (a_{m1} \;\; a_{m2} \;\; \ldots \;\; a_{mn}).$$

Οι n στήλες του είναι:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Έτσι, γενικά, η i-οστή γραμμή του πίνακα A είναι η

$$(a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; \ldots \;\; a_{in}) \quad \text{για } i = 1, 2, \ldots, m,$$

και η j-οστή στήλη του είναι η

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad \text{για } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Τον παραπάνω $m \times n$ πίνακα A τον συμβολίζουμε (για λόγους απλότητας και συντομίας) και ως $A = (a_{ij})$. Θα συμβολίζουμε τους πίνακες (συνήθως) με κεφαλαία γράμματα του ελληνικού ή του λατινικού αλφαβήτου, π.χ. $A, B, C, \ldots$. Υπάρχουν πολλά είδη πινάκων. Ας δούμε μερικούς από αυτούς που θα συναντήσουμε πολύ σύντομα στη συνέχεια.

- Ένας πίνακας $m \times n$ λέγεται **μηδενικός** αν όλα του τα στοιχεία είναι μηδέν. Θα συμβολίζουμε τον μηδενικό πίνακα $\mathbf{0}_{m\times n}$ (ή, απλώς, $\mathbf{0}$ όταν η διάστασή του προκύπτει από τα δεδομένα, και δεν πρέπει να τον συγχέουμε με τον αριθμό 0). Π.χ.

$$\mathbf{0}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Ένας πίνακας $m \times n$ λέγεται **τετραγωνικός** αν $m = n$, δηλαδή αν έχει τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών. Π.χ.,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Η διαγώνιος ενός $n \times n$ τετραγωνικού πίνακα (a_{ij}) αποτελείται από τα στοιχεία a_{11}, $a_{22}, \dots, a_{nn}$ και λέγεται *κύρια διαγώνιος* του πίνακα. Επομένως, η κύρια διαγώνιος του πίνακα A στο παράδειγμά μας είναι: $-1, -1, -3$.

- Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας λέγεται **διαγώνιος**, αν όλα τα στοιχεία που δεν βρίσκονται πάνω στην κύρια διαγώνιό του είναι ίσα με μηδέν. Δηλαδή

$$a_{ij} = 0 \;\text{ για }\; i \neq j,$$

όπου $i, j = 1, 2, \dots, n$. Π.χ.,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Ο διαγώνιος $n \times n$ πίνακας που όλα τα στοιχεία της διαγωνίου του είναι μονάδες λέγεται **μοναδιαίος** και συμβολίζεται με I_n. Π.χ.,

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας λέγεται **άνω τριγωνικός** αν όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιό του είναι 0. Δηλαδή, αν

$$a_{ij} = 0 \;\text{ για }\; i > j,$$

όπου $i, j = 1, 2, \dots, n$. Π.χ.,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας λέγεται **κάτω τριγωνικός** αν όλα τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιό του είναι 0. Δηλαδή, αν

$$a_{ij} = 0 \;\text{ για }\; i < j$$

όπου $i, j = 1, 2, \dots, n$. Π.χ.,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Παρατήρηση. Όπως γνωρίζουμε από την Αναλυτική Γεωμετρία της Β΄ Λυκείου, τα σημεία ενός επιπέδου τα συμβολίζουμε με (a, b), όπου $a, b \in \mathbb{R}$, και το (a, b) είναι το (διατεταγμένο) ζεύγος των πραγματικών αριθμών με πρώτο στοιχείο το a και δεύτερο το b (και όχι βέβαια το ανοικτό διάστημα (a, b)). Εμείς εδώ θα ταυτίζουμε το διατεταγμένο ζεύγος (a, b) είτε με τον 1×2 πίνακα $(a \quad b)$, ή με τον 2×1 πίνακα $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

Τέλος, ορίζουμε και τον ανάστροφο ενός πίνακα A.

Ορισμός 2.1.1. *Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας. Ο* **ανάστροφος** *του A συμβολίζεται με A^T και είναι ένας $n \times m$ πίνακας (b_{ij}) που έχει ως γραμμές τις στήλες του A (και ως στήλες τις γραμμές του A). Δηλαδή θα έχουμε $b_{ij} = a_{ji}$.*

Παράδειγμα.

$$\text{Αν } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{τότε} \quad A^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.2 Πράξεις μεταξύ πινάκων

Θα αναφέρουμε τους ορισμούς των πράξεων μεταξύ πινάκων για πίνακες μικρών διαστάσεων αλλά το ίδιο θα ισχύει και για πίνακες οποιασδήποτε διάστασης.
Έστω

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

- **Ισότητα πινάκων.** Λέμε ότι οι πίνακες είναι ίσοι, και συμβολίζουμε $A = B$, αν

  $$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, 2, \ j = 1, 2.$$

  Παρόμοια ορίζεται η ισότητα για οποιουσδήποτε πίνακες $m \times n$.

  (Επομένως, δύο πίνακες που δεν έχουν ίδιες διαστάσεις θα είναι κατ' ανάγκην διαφορετικοί.)

- **Άθροισμα πινάκων.** Το άθροισμα των πινάκων A και B είναι ένας 2×2 πίνακας, ο οποίος συμβολίζεται $A + B$ και είναι ο πίνακας

  $$A = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

  Το ίδιο ισχύει για το άθροισμα δύο πινάκων $m \times n$, για οποιουσδήποτε $m, n \in \mathbb{N}$.

- **Γινόμενο αριθμού επί πίνακα (βαθμωτό γινόμενο).** Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ορίζεται ο πίνακας λA, που είναι ο πίνακας

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}.$$

Ανάλογα ορίζεται το γινόμενο αριθμού με πίνακα $m \times n$, $m, n \in \mathbb{N}$.

- **Γινόμενο πινάκων.** Το γινόμενο των πινάκων A και B δεν ορίζεται με τον ίδιο «φυσιολογικό» και αναμενόμενο τρόπο όπως το άθροισμα πινάκων.

Π.χ., το γινόμενο των 2×2 πινάκων A και B, $C = AB$ (και όχι BA) είναι ένας 2×2 πίνακας $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ που τα στοιχεία του ορίζονται ως εξής:

Για το c_{11}, παίρνουμε την πρώτη γραμμή $(a_{11} \;\; a_{12})$ του πίνακα A και την πολλαπλασιάζουμε με την πρώτη στήλη $\left(\begin{smallmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{smallmatrix}\right)$ του πίνακα B ως εξής:

$$(a_{11} \;\; a_{12}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}.$$

Θα δούμε αργότερα ότι αυτού του είδους ο πολλαλασιασμός είναι το γνωστό μας από την Αναλυτική Γεωμετρία της Β΄ Λυκείου εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων (a_{11}, a_{12}) και (b_{11}, b_{21}). Επομένως,

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}.$$

Όμοια το c_{12} είναι ίσο με το (εσωτερικό) γινόμενο της πρώτης γραμμής $(a_{11} \;\; a_{12})$ του πίνακα A επί τη δεύτερη στήλη $\left(\begin{smallmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{smallmatrix}\right)$ του πίνακα B. Έτσι,

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}.$$

Εντελώς ανάλογα έχουμε

$$c_{21} = (a_{21} \;\; a_{22}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21},$$
$$c_{22} = (a_{21} \;\; a_{22}) \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}.$$

Δηλαδή, γενικά, το c_{ij} στοιχείο του $C = AB$ προκύπτει ως το εσωτερικό γινόμενο της i-γραμμής του A επί την j-στήλη του B.

Παράδειγμα.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + (-2)\cdot 5 & 1\cdot(-2)+(-2)\cdot(-1) \\ (-1)\cdot 4 + 3\cdot 5 & (-1)\cdot(-2)+3\cdot(-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 11 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Παρόμοια ορίζεται το γινόμενο δύο 3×3 πινάκων. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

όπου

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j},$$

για κάθε $i, j = 1, 2, 3$. Για παράδειγμα, παραπάνω έχουμε σχηματικά υπογραμμίσει πώς προκύπτει το c_{21} στοιχείο του πίνακα $C = AB$ (προσοχή! όχι του BA).

Παράδειγμα.

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 7 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)\cdot(-1)+2\cdot 1+1\cdot(-2) & (-1)\cdot 0+2\cdot 2+1\cdot 7 & (-1)\cdot 0+2\cdot 0+1\cdot 5 \\ 0\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+2\cdot(-2) & 0\cdot 0+(-1)\cdot 2+2\cdot 7 & 0\cdot 0+(-1)\cdot 0+2\cdot 5 \\ 1\cdot(-1)+(-4)\cdot 1+2\cdot(-2) & 1\cdot 0+(-4)\cdot 2+2\cdot 7 & 1\cdot 0+(-4)\cdot 0+2\cdot 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 11 & 5 \\ -5 & 12 & 10 \\ -9 & 6 & 10 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Εργαζόμενοι ανάλογα, μπορούμε πάντα να υπολογίσουμε το γινόμενο δύο $n \times n$ πινάκων για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$.

Γενικά, αν έχουμε έναν $k \times l$ πίνακα A και έναν $m \times n$ πίνακα B, όπου $k, l, m, n \in \mathbb{N}$, τότε το γινόμενο AB ορίζεται μόνον εάν $l = m$, δηλαδή, με άλλα λόγια, αν **ο αριθμός στηλών του A είναι ίσος με τον αριθμό γραμμών του B**.

Επομένως, για παράδειγμα, για δύο πίνακες A, B τα γινόμενα AB και BA ορίζονται και τα δύο μόνον αν ο A είναι διάστασης $m \times n$ και ο B είναι διάστασης $n \times m$, για κάποια $m, n \in \mathbb{N}$

(όχι απαραίτητα με $m = n$). Για να κατανοήσουμε καλύτερα τον πολλαπλασιασμό πινάκων ας δούμε δύο ακόμη παραδείγματα πολλαπλασιασμού μη τετραγωνικών πινάκων.

Παράδειγμα. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} AB &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + (-2)\cdot(-1) + 3\cdot 3 & 1\cdot 5 + (-2)\cdot 4 + 3\cdot 3 \\ 4\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 3 & 4\cdot 5 + (-1)\cdot 4 + 2\cdot 3 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}}_{2\times 2}. \end{aligned}$$

Ακόμη έχουμε

$$\begin{aligned} BA &= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 5\cdot 4 & 2\cdot(-2) + 5\cdot(-1) & 2\cdot 3 + 5\cdot 2 \\ (-1)\cdot 1 + 4\cdot 4 & (-1)\cdot(-2) + 4\cdot(-1) & (-1)\cdot 3 + 4\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 3\cdot 4 & 3\cdot(-2) + 3\cdot(-1) & 3\cdot 3 + 3\cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 22 & -9 & 16 \\ 15 & -2 & 5 \\ 15 & -9 & 15 \end{pmatrix}}_{3\times 3}. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι $AB \neq BA$.

Γενικά, αν έχουμε έναν $m \times k$ πίνακα A και έναν $k \times n$ πίνακα B, τότε το γινόμενο $C = AB$ είναι ο $m \times n$ πίνακας $C = (c_{ij})$, όπου το ij-στοιχείο του, c_{ij}, είναι ίσο με το εσωτερικό γινόμενο της i γραμμής $(a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; \dots \;\; a_{ik})$ του A επί την j στήλη $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{pmatrix}$ του B. Δηλαδή

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} a_{i\ell} b_{\ell j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj},$$

όπου $i = 1, \dots, m$ και $j = 1, \dots, n$.

2.2.1 Ιδιότητες των πράξεων πινάκων

Από τους ορισμούς της προηγούμενης παραγράφου προκύπτουν πολύ εύκολα οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. Έστω A, B δύο $m \times n$ πίνακες. Τότε $A + B = B + A$. (Μεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης.)

2. Έστω A, B, C τρεις $m \times n$ πίνακες. Τότε $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$. (Προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης.)

3. Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. Τότε $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$. (Ύπαρξη μηδενικού στοιχείου.)

4. Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. Τότε $A + (-A) = \mathbf{0}$. (Ύπαρξη αντιθέτου στοιχείου.)

5. Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.

6. Έστω A ένας $k \times \ell$ πίνακας, B ένας $\ell \times m$ πίνακας, και C ένας $m \times n$ πίνακας. Τότε $(AB)C = A(BC) = ABC$. (Προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού.)

7. Έστω A, B δύο $k \times m$ πίνακες και C ένας $m \times n$ πίνακας. Τότε $(A + B)C = AC + BC$. (Επιμεριστική ιδιότητα.)

8. Αν D είναι ένας $k \times m$ πίνακας και E, F δύο $m \times n$ πίνακες, τότε $D(E + F) = DE + DF$. (Επιμεριστική ιδιότητα.)

9. Αν A είναι τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας, τότε $AI_n = I_n A = A$. (Ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου στον πολλαπλασιασμό.)

Προσοχή, γενικά **δεν** ισχύει ότι $AB = BA$, ακόμη και αν οι πίνακες A και B είναι τετραγωνικοί. Δηλαδή ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι εν γένει αντιμεταθετικός.
Π.χ., ελέγξτε ότι αν

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

τότε

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{αλλά} \quad BA = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Αν για δύο πίνακες A και B ισχύει ότι $AB = BA$, τότε θα λέμε ότι οι πίνακες A και B **μετατίθενται**.
Επιπλέον, αν για παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

τότε είναι εύκολο να ελέγξετε ότι

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Επομένως, ακόμη και στην περίπτωση τετραγωνικών πινάκων, αν $AB = \mathbf{0}$, δεν ισχύει απαραίτητα ότι $BA = \mathbf{0}$, ούτε ότι $A = \mathbf{0}$ ή $B = \mathbf{0}$.

2.3 Στοιχειώδεις πράξεις γραμμών πίνακα.

Καταρχήν τονίζουμε και πάλι ότι οι πράξεις της πρόσθεσης πινάκων (ίδιας διάστασης) και του πολλαπλασιασμού αριθμού επί πίνακα δίνουν πάντα πίνακα ίδιας διάστασης με αυτή των αρχικών πινάκων. Αυτό δεν είναι απαραίτητο για τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Για να οριστεί το γινόμενο AB των πινάκων A και B πρέπει απαραιτήτως το πλήθος των στηλών του A να είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του B.
Στους πίνακες όμως μπορούμε να εφαρμόσουμε και κάποιου άλλου είδους πράξεις, που λέγονται **στοιχειώδεις πράξεις γραμμών**. Ας τις δούμε μέσω μερικών παραδειγμάτων.

Παράδειγμα. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ο A είναι ένας πίνακας 3×3. Οι τρεις γραμμές του είναι οι $(1\ \ 5\ \ 8)$, $(3\ \ 1\ \ 2)$ και $(7\ \ 6\ \ 4)$. Τις αριθμούμε με τη σειρά που εμφανίζονται στον πίνακα από πάνω προς τα κάτω και τις συμβολίζουμε ως εξής:

$$r_1 = (1\ \ 5\ \ 8), \quad r_2 = (3\ \ 1\ \ 2), \quad r_3 = (7\ \ 6\ \ 4).$$

Αν εναλλάξουμε αμοιβαία τη θέση των γραμμών r_1 και r_2 του A και διατηρήσουμε την r_3 όπως είναι, τότε παίρνουμε τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Για να συμβολίσουμε αυτή την εναλλαγή γραμμών και να καταλαβαίνουμε τι κάναμε γράφουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ανάλογα, για παράδειγμα, έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_3]{} \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ας δούμε άλλο ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_3]{}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_4]{} \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Με παρόμοιο τρόπο κάνουμε αμοιβαίες εναλλαγές γραμμών πάνω στις γραμμές οποιουδήποτε πίνακα και το συμβολίζουμε ανάλογα.

Η εναλλαγή γραμμών ενός πίνακα είναι η πρώτη στοιχειώδης πράξη γραμμών ενός πίνακα. Γενικά, αν έχουμε έναν $m \times n$ πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

θα συμβολίζουμε τις γραμμές του ως εξής:

$$r_i = (a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; \dots \;\; a_{in}), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

και θα σημειώνουμε την εναλλαγή των γραμμών i και j του A γράφοντας $r_i \leftrightarrow r_j$.

Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή ενός πίνακα με έναν **μη μηδενικό αριθμό** παίρνουμε έναν νέο πίνακα, που είναι παρόμοιος με τον προηγούμενο, με μόνη διαφορά ότι η γραμμή που πολλαπλασιάσαμε έχει φύγει και στη θέση της έχει πάει μια γραμμή που τα στοιχεία της είναι τα πολλαπλάσια των αντίστοιχων στοιχείων της αρχικής γραμμής.

Παράδειγμα. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τη γραμμή $r_2 = (3 \;\; 5 \;\; 2)$ του A επί 2, τότε παίρνουμε τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 10 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Για να συμβολίσουμε αυτόν τον πολλαπλασιασμό της γραμμής r_2 του A επί 2, γράφουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftarrow 2r_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 10 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Με παρόμοιο τρόπο θα παριστάνουμε τον πολλαπλασιασμό μιας γραμμής ενός πίνακα επί έναν μη μηδενικό πραγματικό αριθμό.

Γενικά δηλαδή έχουμε:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_i \leftarrow \lambda r_i]{} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ο πολλαπλασιασμός γραμμής ενός πίνακα επί έναν **μη μη μηδενικό πραγματικό αριθμό** είναι η δεύτερη στοιχειώδης πράξη γραμμών ενός πίνακα.

Η τρίτη στοιχειώδης πράξη γραμμών ενός πίνακα είναι η πρόσθεση δύο γραμμών ενός πίνακα και η αντικατάσταση της μιας από τις δύο γραμμές με το άθροισμα των γραμμών αυτών.

Παράδειγμα. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Αν προσθέσουμε τις γραμμές r_1 και r_2 του A και βάλουμε το άθροισμα $r_1 + r_2$ στη θέση της r_1, ενώ διατηρήσουμε τις r_2 και r_3 στη θέση τους στον πίνακα A, τότε παίρνουμε τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Συμβολίζουμε τα παραπάνω γράφοντας

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftarrow r_1 + r_2]{} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Με παρόμοιο τρόπο συμβολίζουμε το άθροισμα δύο γραμμών ενός γενικού πίνακα και την αντικατάσταση της μιας από τις δύο γραμμές με το άθροισμα των γραμμών αυτών.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_i \leftarrow r_i + r_j]{} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + a_{j_1} & a_{i2} + a_{j2} & \dots & a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Οι παραπάνω τρεις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών είναι αρκετές για να κάνουμε οποιουσδήποτε μετασχηματισμούς στις γραμμές ενός τυχαίου πίνακα. Τις δύο τελευταίες τις κάνουμε συνήθως ταυτόχρονα για εξοικονόμηση χώρου και χρόνου.

Παράδειγμα.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -1 & -8 & 7 \\ 2 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftarrow 3r_2]{} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -3 & -24 & 21 \\ 2 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftarrow r_2 + r_3]{} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -3 & -24 & 21 \\ -1 & -27 & 30 \end{pmatrix}.$$

Το παραπάνω το γράφουμε και με μία πράξη ως εξής:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -1 & -8 & 7 \\ 2 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftarrow r_3 + 3r_2]{} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -3 & -24 & 21 \\ -1 & -27 & 30 \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή προσθέσαμε σε μια γραμμή το πολλαπλάσιο με ένα μη μηδενικό αριθμό μιας άλλης γραμμής. □

Όταν εναλλάσουμε δύο γραμμές ενός πίνακα η πράξη αυτή θα πρέπει να εκτελείται ξεχωριστά και να φαίνεται καθαρά. Όταν όμως σε έναν πίνακα προσθέτουμε σε μια γραμμή το πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής αυτό μπορούμε να το κάνουμε ταυτόχρονα και για πολλές γραμμές μαζί.

Παράδειγμα.

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 7 & -8 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1 \leftarrow r_1 + 2r_3 \\ r_2 \leftarrow r_2 + 3r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 + 4r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 + 5r_1}]{} \begin{pmatrix} -8 & 3 & 11 \\ -2 & -5 & 10 \\ 13 & -6 & 8 \\ -3 & -13 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_3]{} \begin{pmatrix} 13 & -6 & 8 \\ -2 & -5 & 10 \\ -8 & 3 & 11 \\ -3 & -13 & 20 \end{pmatrix}.$$

Με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών μπορούμε να δημιουργήσουμε πολλούς νέους πίνακες. Επειδή αυτοί συνδέονται μεταξύ τους ουσιωδώς και ο καθένας από αυτούς έχει μια ιδιαίτερη σχέση με όλους τους υπόλοιπους θα χρειαστούμε έναν ορισμό για να ξεκαθαρίσουμε τη σχέση αυτή.

Ορισμός 2.3.1. *Ένας πίνακας* A *λέγεται* **γραμμοϊσοδύναμος** *ή και ισοδύναμος με τον πίνακα* B, *αν ο* B *έχει προκύψει από τον* A *μετά από ένα πεπερασμένο πλήθος στοιχειωδών πράξεων γραμμών.*

Αποδεικνύεται η εξής πρόταση:

Πρόταση 2.3.1. *Έστω* A *και* B *να είναι δύο* $m \times n$ *πίνακες. Αν ο* A *είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον* B, *τότε και ο* B *είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον* A.

Από αυτήν την πρόταση έπεται το ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 2.3.1. *Έστω* A, B, C *να είναι τρεις* $m \times n$ *πίνακες τέτοιοι ώστε ο* A *είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον* B *και ο ο* B *είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον* C. *Τότε καθένας από τους* A, B, C *είναι γραμμοϊσοδύναμος με τους δύο άλλους.*

Για να συμβολίσουμε ότι ο πίνακας A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον B γράφουμε $A \sim B$. Έτσι από τα παραπάνω έχουμε ότι αν $A \sim B$ τότε ισχύει και ότι $B \sim A$. Επίσης, αν A, B, C είναι τρεις πίνακες τέτοιοι ώστε $A \sim B$ και $B \sim C$, τότε από το Πόρισμα 2.3.1 ισχύουν επίσης τα εξής: $B \sim A, \quad C \sim B, \quad A \sim C \quad$ και $\quad C \sim A$.
Στη συνέχεια εισάγουμε μια βασική έννοια πίνακα.

2.4 Κλιμακωτός πίνακας

Για να εισαγάγουμε την έννοια του κλιμακωτού πίνακα θα μας χρειαστεί πρώτα κάποια ορολογία.

- Μια γραμμή ή στήλη ενός πίνακα λέγεται «μηδενική» εαν κάθε στοιχείο της είναι μηδέν.
- **Ηγετικό στοιχείο** μιας μη μηδενικής γραμμής r_i ενός πίνακα είναι το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της.

Παράδειγμα. Ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

έχει

- ηγετικό στοιχείο της πρώτης γραμμής το 1,
- ηγετικό στοιχείο της τρίτης γραμμής το -5,
- ηγετικό στοιχείο της τέταρτης γραμμής το -1. □

Έτσι, έστω ο $m \times n$ πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

και $r_i = (a_{i1} \ \ a_{i2} \ \ \dots \ \ a_{in})$ να είναι η i-οστή μη μηδενική γραμμή του πίνακα A, για κάποιο $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Ηγετικό στοιχείο της r_i είναι το a_{i1}, αν $a_{i1} \neq 0$, διαφορετικά ηγετικό στοιχείο της r_i είναι το a_{ij}, όπου $a_{ij} \neq 0$ και $a_{i1} = \cdots = a_{i,j-1} = 0$ και $j > 1$.

Είναι προφανές από τον ορισμό ότι κάθε μη μηδενική γραμμή ενός πίνακα έχει μοναδικό ηγετικό στοιχείο.

Ορισμός 2.4.1. *Ένας πίνακας λέγεται* **κλιμακωτός** *(row echelon form) όταν ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) Αν μια γραμμή του πίνακα είναι μηδενική τότε κάθε επόμενη γραμμή του είναι και αυτή μηδενική.

(ii) Το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής βρίσκεται στα δεξιά του ηγετικού στοιχείου κάθε προηγούμενης γραμμής.

Ας δούμε πώς εκφράζονται και τυπικά οι απαιτήσεις του Ορισμού 2.4.1. Ας πάρουμε τον προηγούμενο $m \times n$ πίνακα A.

Για το (i): Έστω i να είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ για τον οποίο ισχύει $r_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{in} = 0$, με την υπόθεση ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα τέτοιο i. Τότε για κάθε $j > i$ ισχύει επίσης ότι $r_j = \mathbf{0} \Leftrightarrow a_{j1} = a_{j2} = \cdots = a_{jn} = 0$, αν ισχύει βέβαια ότι $i < m$. Φυσικά, αν δεν υπάρχει $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ τέτοιο ώστε $r_i = \mathbf{0}$, τότε δεν έχουμε να ικανοποιήσουμε την απαίτηση (i) του Ορισμού 2.4.1 για να είναι ο πίνακα A κλιμακωτός.

Για το (ii): Ας υποθέσουμε καταρχήν ότι ο A έχει μη μηδενικές γραμμές. Έστω $r_i, i > 1$, μια μη μηδενική γραμμή του A, δηλαδή $r_i \neq \mathbf{0}$. Τότε $r_{i-1} \neq \mathbf{0}$, γιατί αν ήταν $r_{i-1} = \mathbf{0}$, τότε σύμφωνα με την απαίτηση (i) του Ορισμού 2.4.1, θα έπρεπε να ισχύει και $r_i = \mathbf{0}$, που δεν ισχύει. Έστω

a_{ij}, $a_{i-1,k}$ να είναι τα ηγετικά στοιχεία των γραμμών r_i και r_{i-1}, αντίστοιχα. Τότε ισχύει: $k < j$.

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η μορφή ενός πίνακα είναι τέτοια ώστε να μην έχει έννοια να ελεγχθεί το (i) ή το (ii). Τότε, αν ικανοποιείται η άλλη συνθήκη, και πάλι λέμε ότι ο πίνακας είναι κλιμακωτός.
Έτσι, αν ένας πίνακας έχει το πολύ μια μηδενική γραμμή εξετάζουμε μόνον αν ισχύει το (ii). Επίσης, αν ένας πίνακας έχει το πολύ μια μη μηδενική γραμμή (η οποία από το (i) οφείλει να είναι η πρώτη) εξετάζουμε μόνον αν ισχύει το (i).
Άρα, ένας πίνακας του οποίου μόνο η πρώτη γραμμή είναι μη μηδενική και όλες οι επόμενες (εφόσον υπάρχουν) είναι μηδενικές είναι κλιμακωτός. Επίσης, τον μηδενικό πίνακα τον θεωρούμε κλιμακωτό.

Παράδειγμα.
Οι ακόλουθοι πίνακες είναι κλιμακωτοί:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 8 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 0 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Οι παρακάτω πίνακες δεν είναι κλιμακωτοί.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση. Ελέγξτε με βάση τον ορισμό ότι οι πίνακες A_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, είναι κλιμακωτοί, και αιτιολογήστε γιατί οι πίνακες B_1, B_2 και B_3 δεν είναι κλιμακωτοί.

Μια ειδική κατηγορία κλιμακωτών πινάκων περιγράφεται μέσω του ακόλουθου ορισμού:

Ορισμός 2.4.2. *Ένας κλιμακωτός πίνακας λέγεται* **ανηγμένος κλιμακωτός** *(reduced row echelon form) αν, επιπλέον, το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι το* 1*, και είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία βρίσκεται.*

Παράδειγμα. Ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι κλιμακωτός αλλά όχι ανηγμένος κλιμακωτός.
Ο πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

επίσης είναι κλιμακωτός αλλά όχι ανηγμένος κλιμακωτός.
Ο πίνακας

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι ανηγμένος κλιμακωτός, ενώ ο πίνακας

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

δεν είναι κλιμακωτός. □

Οι κλιμακωτοί πίνακες έχουν μεγάλη σημασία και στη συνέχεια θα στηριχτούμε σε αυτούς για να λύσουμε γραμμικά συστήματα.

Παρατήρηση. Παραπάνω, για να ορίσουμε τον κλιμακωτό πίνακα στηριχθήκαμε στην αρχή του ελάχιστου φυσικού αριθμού η οποία αποδεικνύεται στη θεωρία συνόλων. Σύμφωνα με αυτή, αν μια ιδιότητα αληθεύει για πολλούς διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς, ακόμη και άπειρους, τότε ορίζεται ένας μοναδικός φυσικός αριθμός ο οποίος είναι ο ελάχιστος για τον οποίο ισχύει αυτή η ιδιότητα. Διαισθητικά βεβαίως η ιδιότητα αυτή είναι προφανής.

Η παρακάτω πρόταση συνδέει τις έννοιες των γραμμοϊσοδύναμων πινάκων και του κλιμακωτού πίνακα.

Πρόταση 2.4.1. *Κάθε πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν κλιμακωτό πίνακα.*

Μάλιστα, ισχύει κάτι περισσότερο από αυτό που μας λέει η Πρόταση 2.4.1. Συγκεκριμένα, ισχύει το εξής πόρισμα:

Πόρισμα 2.4.1. *Καθε μη μηδενικός πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με άπειρους διαφορετικούς (μη μηδενικούς αναγκαστικά) κλιμακωτούς πίνακες.*

Είναι πολύ σημαντικό τόσο για τα γραμμικά συστήματα, αλλά και για τη Γραμμική Άλγεβρα γενικότερα, να μπορούμε να βρίσκουμε έναν κλιμακωτό πίνακα που να είναι γραμμοϊσοδύναμος με δοσμένο πίνακα. Αυτό επιτυγχάνεται με μια διαδικασία που λέγεται κλιμακοποίηση και την οποία περιγράφουμε στη συνέχεια με ένα παράδειγμα. Η κλιμακοποίηση βασίζεται στη χρήση πολλών στοιχειωδών πράξεων γραμμών.

Παράδειγμα. Μετατρέψτε τον ακόλουθο πίνακα σε κλιμακωτό.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζουμε στον A τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών που περιγράφονται στα δεξιά του και παίρνουμε διαδοχικά τους ακόλουθους γραμμοϊσοδύναμους πίνακες μέχρι να καταλήξουμε στον πίνακα B που είναι κλιμακωτός.

$$A = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 10 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ r_2 \leftarrow r_2 - r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 - 2r_1 \\ r_5 \leftarrow r_5 - r_1 \end{array}$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 + r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 - r_2 \\ r_5 \leftarrow r_5 - 4r_2 \end{array}
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ r_4 \leftrightarrow r_5 \\ \\ \end{array}
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ r_4 \leftarrow r_4 + 2r_3 \\ \\ \end{array}
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.
$$

Ο πίνακας B στον οποίο καταλήξαμε είναι κλιμακωτός. □

2.5 Τάξη πίνακα

Σε κάθε πίνακα επισυνάπτουμε μια χαρακτηριστική παράμετρο, την τάξη του, η οποία είναι ένας φυσικός αριθμός. Όπως έχουμε ήδη πει, κάθε μη μηδενικός πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με άπειρους κλιμακωτούς πίνακες. Η επόμενη πρόταση συνδέει έναν πίνακα με τους γραμμοϊσοδύναμούς του κλιμακωτούς πίνακες.

Πρόταση 2.5.1. *Έστω A ένας μη μηδενικός πίνακας. Τότε όλοι οι κλιμακωτοί πίνακες οι οποίοι είναι γραμμοϊσοδύναμοι με τον A έχουν το ίδιο πλήθος μη μηδενικών γραμμών.*

Ο φυσικός αριθμός ο οποίος εκφράζει το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών ενός κλιμακωτού πίνακα, ο οποίος είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A ονομάζεται **τάξη (rank) του $\boldsymbol{A}$**, και συμβολίζεται με $r(A)$ ή $\operatorname{rank}(A)$.

Παρατηρήσεις

1. Ο ορισμός της τάξης ενός πίνακα δίνει ταυτόχρονα και μια μέθοδο για να υπολογίζουμε την τάξη ενός πίνακα A. Έτσι, για να βρούμε την τάξη ενός μη μηδενικού πίνακα A τον κλιμακοποιούμε, δηλαδή βρίσκουμε έναν γραμμοϊσοδύναμό του κλιμακωτό. Τότε, το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του κλιμακωτού πίνακα είναι η τάξη του A. Ο μηδενικός πίνακας θεωρούμε ότι έχει τάξη 0, και είναι ο μοναδικός $m \times n$ πίνακας που έχει τάξη 0. Η έννοια της τάξης ενός πίνακα θα μας χρειαστεί αμέσως παρακάτω για τη λύση των γραμμικών συστημάτων.

2. Έστω A ένας μη μηδενικός $m \times n$ πίνακας. Τότε ισχύει ότι:

$$1 \leq r(A) \leq \min\{m, n\},$$

όπου με $\min\{m, n\}$ συμβολίζουμε τον μικρότερο από τους αριθμούς m, n.

Μέχρι τώρα εισαγάγαμε όλες τις αναγκαίες έννοιες που θα μας χρειαστούν για την επίλυση των γραμμικών συστημάτων με τη βοήθεια των πινάκων, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 3

Γραμμικά συστήματα

3.1 Γραμμικά συστήματα - Εισαγωγή

Πριν αρχίσουμε τη μελέτη των γραμμικών συστημάτων θα πρέπει να πούμε λίγα λόγια για το σύνολο των λύσεών τους. Όπως γνωρίζουμε από τη Β΄ Λυκείου οι λύσεις ενός συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους (όταν υπάρχουν) είναι ζεύγη πραγματικών αριθμών.
Κατ' αναλογία, θεωρούμε τώρα τη γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος $m \times n$, δηλαδή m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους, όπου $m, n \in \mathbb{N}$ και $n \geq 2$ ώστε να μιλάμε για σύστημα. Η μορφή αυτού του συστήματος είναι η εξής:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \tag{3.1}$$

Βάζουμε ένα άγκιστρο στα αριστερά του συστήματος για να δηλώσουμε ότι οι εξισώσεις του συστήματος λαμβάνονται όλες μαζί ως ένα σύνολο. Τα a_{ij}, για $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$, είναι πραγματικοί αριθμοί και λέγονται οι **συντελεστές του συστήματος**, ενώ τα b_i, $i = 1, \ldots, m$, ονομάζονται **σταθεροί όροι του συστήματος**. Τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι οι **άγνωστοι του συστήματος**.
Λέμε ότι το σύστημα (3.1) έχει λύση την n-άδα $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, όπου $\xi_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, αν θέτοντας όπου $x_i = \xi_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, στις εξισώσεις του συστήματος (3.1), αυτές επαληθεύονται (ταυτόχρονα). Η θέση των αριθμών ξ_i για $i = 1, 2, \ldots, n$ στην n-άδα $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, δηλώνει και το σε ποιόν άγνωστο x_i αντιστοιχεί η κάθε μία ώστε να επαληθεύονται όλες οι εξισώσεις του συστήματος.
Δεν θα μας απασχολήσει το πώς ορίζεται αυστηρά στα μαθηματικά μια n-άδα $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, όπου $x_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, δηλαδή το τι πραγματικά είναι τα μαθηματικά αντικεί-

μενα $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ή αλλιώς όπως λέμε το οντολογικό status των αντικειμένων $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Αυτό είναι κάτι που αναφέρεται στη θεωρία συνόλων. Εμείς κρατάμε εδώ ότι το αντικείμενο $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, όπου $x_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, δηλώνει το σύνολο των (διατεταγμένων) πραγματικών αριθμών $x_1, x_2, \ldots, x_n$ στους οποίους η σειρά (διάταξη) με την οποία τους γράφουμε παίζει ουσιώδη ρόλο, και ότι κάποιοι από αυτούς μπορεί να εμφανίζονται παραπάνω από μια φορά σε αυτή τη συλλογή $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Το σύνολο όλων των διατεταγμένων n-άδων $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, όπου $x_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, το συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^n$ και το ονομάζουμε ο ***n*-διάστατος Ευκλείδειος χώρος**. Σε αυτό το μάθημα θα αναφερθούμε πολλές φορές στο σύνολο $\mathbb{R}^n$.

Λέμε ότι το σύστημα (3.1) είναι **συμβιβαστό** αν έχει τουλάχιστον μία λύση $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Αν το σύστημα (3.1) δεν έχει καμμία λύση λέμε ότι **το σύστημα είναι αδύνατο**. Σε ένα γραμμικό σύστημα ορίζεται καλά το σύνολο των λύσεων του εάν αυτό βέβαια είναι συμβιβαστό. Δύο συστήματα λέγονται **ισοδύναμα** αν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

Στο σύστημα (3.1) αντιστοιχούμε τρεις πίνακες:

(i) Τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

ο οποίος ονομάζεται **ο πίνακας (των συντελεστών) του συστήματος**.

(ii) τον πίνακα

$$C = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right), \tag{3.3}$$

ο οποίος λέγεται **επαυξημένος πίνακας** του συστήματος (3.1), και

(iii) τον πίνακα στήλη

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

ο οποίος ονομάζεται **η στήλη των σταθερών όρων του συστήματος**.

Είναι προφανές ότι σε κάθε γραμμικό σύστημα $m \times n$, οι τρεις πίνακες, ο πίνακας του συστήματος, ο επαυξημένος πίνακας, και ο πίνακας στήλη των σταθερών όρων είναι μοναδικά ορισμένοι. Επίσης είναι προφανές ότι ο επαυξημένος πίνακας έχει τουλάχιστον δύο στήλες. Αντίστροφα, σε κάθε πίνακα C, ο οποίος έχει τουλάχιστον δύο στήλες αντιστοιχεί ακριβώς ένα σύστημα το οποίο έχει επαυξημένο πίνακα τον C.
Τέλος, στο σύστημα (3.1) αντιστοιχούμε έναν ακόμα πίνακα, τον πίνακα στήλη:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

ο οποίος ονομάζεται **πίνακας στήλη των αγνώστων του συστήματος**.

Παράδειγμα. Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4 &=& 2 \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 9x_4 &=& 3 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 &=& 7 \\ 8x_1 - 9x_2 + x_3 + 2x_4 &=& 4 \\ 5x_1 - 6x_2 - x_3 - x_4 &=& -1 \end{array} \right. \tag{3.6}$$

Ο πίνακας του συστήματος (3.6) είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & -6 \\ 6 & -7 & 8 & -9 \\ -2 & 3 & 4 & -5 \\ 8 & -9 & 1 & 2 \\ 5 & -6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος (3.6) είναι ο

$$C = \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & -4 & 5 & -6 & 2 \\ 6 & -7 & 8 & -9 & 3 \\ -2 & 3 & 4 & -5 & 7 \\ 8 & -9 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & -6 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

Τον πίνακα C τον παίρνουμε από τον πίνακα A αν «επισυνάψουμε» τον πίνακα στήλη των σταθερών όρων του συστήματος (3.6), που είναι ο

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ως μια επιπλέον στήλη στα δεξιά του πίνακα A.
Ο πίνακας στήλη των αγνώστων του συστήματος είναι ο

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Ας επιστρέψουμε στο αρχικό γενικό σύστημα (3.1). Υπολογίζουμε το γινόμενο του πίνακα του συστήματος A επί τον πίνακα στήλη X των αγνώστων του συστήματος και έχουμε:

$$\begin{aligned} AX &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = B, \end{aligned}$$

όπου για να πάρουμε την ισότητα $(*)$ χρησιμοποιήσαμε το ότι αληθεύουν οι εξισώσεις του συστήματος (3.1).
Έτσι, για το τυχόν σύστημα (3.1) ισχύει η ισότητα πινάκων $AX = B$, μεταξύ των τριών χαρακτηριστικών πινάκων A, X και B, του συστήματος (3.1).
Αντίστροφα, ας πάρουμε έναν τυχαίο $m \times n$ πίνακα A, όπου

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Επίσης, ας πάρουμε δύο πίνακες στήλη, τον $n \times 1$ πίνακα στήλη $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ και τον $m \times 1$ πίνακα στήλη $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. Υποθέτουμε ότι οι a_{ij} και b_i είναι γνωστοί πραγματικοί αριθμοί για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$.

Εφ' όσον ο A είναι πίνακας $m \times n$ και ο X είναι πίνακας $n \times 1$, έχει νόημα το γινόμενο πινάκων AX, ο οποίος είναι ένας πίνακας $m \times 1$. Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει η ισότητα πινάκων

$$
\begin{aligned}
AX = B \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Δηλαδή, με την υπόθεση ότι ισχύει η ισότητα πινάκων $AX = B$ καταλήξαμε ότι το σύστημα (3.1) επαληθεύεται και έχει πίνακα του συστήματος τον A, πίνακα στήλη των σταθερών όρων τον B και πίνακα στήλη των αγνώστων τον X.

Επομένως, δείξαμε την ισοδυναμία:

> Το σύστημα (3.1) επαληθεύεται αν και μόνον αν ισχύει $AX = B$ για τους πίνακες A, X και B, όπως ορίζονται στις (3.2), (3.5) και (3.4), αντίστοιχα.

Επιμείναμε σε αυτή την ισότητα για να δείξουμε ότι σε κάθε γραμμικό σύστημα αντιστοιχίζεται μια ορισμένη εξίσωση πινάκων που συνδέονται με το σύστημά μας. Μέσω αυτής της διασύνδεσης (αναδιατύπωσης) των γραμμικών συστημάτων, μέσω πινάκων, η θεωρία πινάκων «εισβάλλει» στα γραμμικά συστήματα και μας βοηθά να τα λύσουμε.

Είπαμε προηγουμένως, όπως π.χ. στο Παράδειγμα της σελίδας 33, ότι σε τυχόν γραμμικό σύστημα αντιστοιχεί ένας μοναδικός επαυξημένος πίνακας που έχει τουλάχιστον δύο στήλες.

Αλλά και αντίστροφα, σε οποιονδήποτε πίνακα που έχει τουλάχιστον δύο στήλες αντιστοιχεί ένα μοναδικό γραμμικό σύστημα το οποίο έχει τον πίνακα αυτόν ως επαυξημένο.

Παράδειγμα. Έστω ο 3×5 πίνακας

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 & -5 & -6 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ -5 & -8 & 7 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Στον πίνακα C αντιστοιχεί το ακόλουθο γραμμικό σύστημα 3 εξισώσεων με 4 αγνώστους:

$$\left\{ \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 &= -6 \\ x_1 \qquad\quad + 4x_3 + 3x_4 &= 2 \\ -5x_1 - 8x_2 + 7x_3 - 4x_4 &= 11 \end{aligned} \right. \tag{3.7}$$

Το σύστημα (3.7) έχει επαυξημένο πίνακα τον C από τον οποίον ξεκινήσαμε και είναι το μοναδικό σύστημα το οποίο έχει ως επαυξημένο πίνακα τον C.

Άρα, γενικά, υπάρχει μια πλήρης αντιστοίχιση των γραμμικών συστημάτων με m εξισώσεις και n αγνώστους με τους πίνακες $m \times (n+1)$. Έχουμε διατυπώσει, μέχρι εδώ, όλες τις έννοιες που μας είναι απαραίτητες για να λύσουμε τα γραμμικά συστήματα με τη βοήθεια των πινάκων.

3.2 Επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη βοήθεια πινάκων

Αρχικά, ας αναφέρουμε κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με την τάξη ενός πίνακα.

Παρατηρήσεις.

1. Για κάθε πίνακα A ισχύει $A \sim A$, δηλαδή ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον εαυτό του.

2. Αν A, B είναι δύο πίνακες τέτοιοι ώστε $A \sim B$, τότε ισχύει $r(A) = r(B)$, δηλαδή δύο γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες έχουν την ίδια τάξη.

3. Η τάξη ενός κλιμακωτού πίνακα είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του.

4. Έστω A ένας κλιμακωτός πίνακας με τάξη $r(A)$. Τότε οι μη μηδενικές γραμμές του A είναι ακριβώς οι πρώτες $r(A)$ γραμμές του. Αν ο κλιμακωτός πίνακας A με τάξη $r(A)$ έχει m γραμμές με $m > r(A)$, τότε οι επιπλέον $m - r(A)$ μετά τις πρώτες $r(A)$ μη μηδενικές γραμμές του είναι όλες μηδενικές.

Παράδειγμα. Οι κλιμακωτοί πίνακες $A_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$, του Παραδείγματος της σελίδας 25 έχουν αντίστοιχα τάξεις:

$$r(A_1) = 4, \quad r(A_2) = 3, \quad r(A_3) = 3, \quad r(A_4) = 5, \quad r(A_5) = 5.$$

Ορισμός 3.2.1. *Για τις ανάγκες των σημειώσεων αυτών, θα ονομάζουμε ένα γραμμικό σύστημα κλιμακωτό αν ο αντίστοιχος επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι κλιμακωτός.*

Παρατήρηση. Έστω (Σ) να είναι ένα κλιμακωτό σύστημα. Τότε ο πίνακας του συστήματος είναι κλιμακωτός. Στο Παράδειγμα της σελίδας 27 κλιμακοποιήσαμε τον πίνακα A. Η ίδια διαδικασία της κλιμακοποίησης του A μας δίνει, όπως έχουμε πει, και την τάξη του A. Συγκεκριμένα, στο παράδειγμα αυτό δείξαμε ότι $A \sim B$, όπου ο B είναι κλιμακωτός, για τον οποίον φαίνεται από τη μορφή του ότι έχει 4 μη μηδενικές γραμμές. Άρα $r(A) = r(B) = 4$. Επομένως, το παράδειγμα αυτό αποτελεί ταυτόχρονα και παράδειγμα υπολογισμού της τάξης ενός πίνακα.

Η ακόλουθη πρόταση αποτελεί το κλειδί για τη λύση των γραμμικών συστημάτων με τη βοήθεια των πινάκων.

Πρόταση 3.2.1. *Αν δύο συστήματα (Σ) και (Σ΄) έχουν επαυξημένους πίνακες τους πίνακες C και C', αντίστοιχα, και ισχύει $C \sim C'$, τότε τα συστήματα (Σ) και (Σ΄) είναι ισοδύναμα, δηλαδή έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.*

Συμβολισμός. Ένα γραμμικό σύστημα που έχει πίνακα του συστήματος τον πίνακα A και στήλη των σταθερών όρων τη στήλη b, θα το συμβολίζουμε ως

$$Ax = b,$$

εννοώντας ότι x είναι ο πίνακας στήλη των αγνώστων του και ότι η εξίσωση $Ax = b$ είναι η μοναδική εξίσωση πινάκων που αντιστοιχεί στο σύστημα.

Η Πρόταση «κλειδί» 3.2.1 μας παρέχει ταυτόχρονα και μια μέθοδο για να λύνουμε γραμμικά συστήματα. Ας περιγράψουμε τη μέθοδο σε γενικές γραμμές.

Έστω ότι έχουμε να λύσουμε ένα σύστημα (Σ) που εκφράζεται μοναδικά με την εξίσωση πινάκων $Ax = b$, όπου A είναι ο πίνακας του συστήματος, b είναι ο πίνακας στήλη των σταθερών όρων και x είναι ο πίνακας στήλη των αγνώστων του. Θα συμβολίζουμε πιο παραστατικά με $(A|b)$ τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος (Σ), μιας και αυτός προκύπτει από τον A αν επισυνάψουμε στο τέλος του A μια επιπλέον στήλη, την b.

Κλιμακοποιούμε τον πίνακα $(A|b)$. Έστω C' να είναι ένας κλιμακωτός πίνακας που είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον $(A|b)$. Έστω (Σ΄) να είναι το γραμμικό κλιμακωτό σύστημα που ορίζει ο C'. Λύνουμε το (Σ′) και τότε το σύνολο λύσεων του (Σ′) (εφ' όσον υπάρχει) είναι ταυτόχρονα και σύνολο λύσεων του (Σ). Αν το (Σ′) είναι αδύνατο, τότε και το (Σ) είναι αδύνατο. Η διαδικασία της κλιμακοποίησης με την οποία λύνουμε ένα γραμμικό σύστημα με τη βοήθεια πινάκων είναι στην ουσία η γνωστή μας μέθοδος απαλοιφής του Gauss.

Γενικά, οποιοδήποτε γραμμικό σύστημα έχει τρεις δυνατότητες ως προς το σύνολο των λύσεών του:

(i) Να είναι αδύνατο, δηλαδή να μην έχει καμμία λύση.

(ii) Να έχει ακριβώς μία λύση.

(iii) Να έχει άπειρες λύσεις.

Έτσι, ένα γραμμικό σύστημα δεν μπορεί να έχει ακριβώς δύο λύσεις όπως, π.χ., συμβαίνει με τις εξισώσεις δευτέρου βαθμού.
Στη συνέχεια δίνουμε τρία παραδείγματα, ένα για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις.

Παράδειγμα (σύστημα με μοναδική λύση).
Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ \qquad\quad x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Αναζητούμε μια σειρά στοιχειωδών πράξεων γραμμών, που να μετατρέπουν τον $(A|b)$ σε έναν κλιμακωτό πίνακα. Εκτελούμε τα ακόλουθα βήματα:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)_{r_3 \leftarrow r_3 - \frac{3}{2}r_1} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{array}\right)_{r_3 \leftarrow r_3 - 5r_2} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \end{array}\right).$$

Επομένως, καταλήξαμε σ' έναν κλιμακωτό πίνακα που αντιστοιχεί στο ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = & 2 \\ \qquad\quad x_2 - 2x_3 = & 0 \\ \qquad\qquad\quad 8x_3 = & -2. \end{cases}$$

Λύνουμε την τελευταία και βρίσκουμε $x_3 = -1/4$. Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή στη δεύτερη και βρίσκουμε $x_2 = -1/2$. Τέλος, αντικαθιστούμε τις γνωστές πλέον τιμές των x_2 και x_3 στην πρώτη και βρίσκουμε $x_1 = 1$.

Παράδειγμα (σύστημα με άπειρες λύσεις).

Θεωρήστε το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 \qquad + 2x_3 \qquad = & 0 \\ \qquad x_2 - \ \ x_3 \qquad = & 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_4 = & -1 \end{cases}.$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

και βλέπουμε άμεσα ότι είναι (ανηγμένος) κλιμακωτός. Οπότε, λύνοντας από το τέλος προς την αρχή έχουμε

$$\begin{aligned} x_4 &= -1, \\ x_2 &= x_3, \\ x_1 &= -2x_3. \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $x_3 = s$, όπου s είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός καταλήγουμε ότι

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2x_3, x_3, x_3, -1) = (-2s, s, s, -1).$$

Δηλαδή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της παραπάνω μορφής.

Παράδειγμα (αδύνατο σύστημα).

Θεωρήστε το σύστημα

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 = 3 \\ 2x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

Εκτελούμε τα ακόλουθα βήματα:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} r_2 \leftarrow r_2 - \frac{2}{3} r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \; r_3 \leftarrow r_3 - 6r_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right).$$

Καταλήξαμε σ' έναν κλιμακωτό πίνακα όπου το ηγετικό στοιχείο της τελευταίας γραμμής είναι στην τελευταία στήλη. Επομένως, η τελευταία εξίσωση του ισοδύναμου γραμμικού συστήματος είναι $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 12$, συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο.

Άρα, όπως είδαμε παραπάνω, για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα το αναγάγουμε σε ένα ισοδύναμό του κλιμακωτό. **Θα δούμε παρακάτω ότι ένα κλιμακωτό $n \times n$ σύστημα του οποίου η διαγώνιος του επαυξημένου πίνακά του έχει όλα τα στοιχεία της μη μηδενικά είναι η απλούστερη και βασικότερη περίπτωση γραμμικού συστήματος, στην οποία βασίζεται γενικά η λύση των γραμμικών συστημάτων.**

3.3 Επίλυση κλιμακωτού συστήματος

Ας δούμε τώρα πώς επιλύονται τα απλούστερα κλιμακωτά γραμμικά συστήματα n εξισώσεων με n αγνώστους των οποίων τα διαγώνια στοιχεία είναι όλα μη μηδενικά. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε το ακόλουθο κλιμακωτό $n \times n$ σύστημα στη γενική του μορφή, για $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ddots \qquad\qquad\qquad\qquad & \vdots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n &= b_{n-1} \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

όπου υποθέτουμε ότι $a_{ii} \neq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$.

Για να λύσουμε το σύστημα αυτό ακολουθούμε μια διαδικασία η οποία λέγεται **οπισθοδρόμηση** ή **ανάδρομη αντικατάσταση**.
Συγκεκριμένα, βρίσκουμε τους αγνώστους έναν-έναν από το τέλος προς την αρχή. Αρχικά, βρίσκουμε το x_n από την τελευταία εξίσωση: $x_n = b_n/a_{nn}$, όπου $a_{nn} \neq 0$ από την υπόθεση. Μετά αντικαθιστούμε την τιμή του x_n στην αμέσως προηγούμενη εξίσωση του συστήματος, δηλαδή την $a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1}$. Αυτή τώρα είναι μια πρωτοβάθμια εξίσωση με μόνο άγνωστο το x_{n-1}. Την λύνουμε και βρίσκουμε τον άγνωστο x_{n-1}.
Αφού έχουμε βρει τώρα τους αγνώστους x_n και x_{n-1}, τους αντικαθιστούμε στην αμέσως προηγούμενη εξίσωση του συστήματος που περιέχει τα x_{n-2}, x_{n-1} και x_n. Αυτή είναι μια πρωτοβάθμια εξίσωση με μόνο άγνωστο πλέον το x_{n-2}. Την λύνουμε και βρίσκουμε τον άγνωστο x_{n-2}, κ.ο.κ. Έτσι συνεχίζουμε τη διαδικασία επαγωγικά προς τα πίσω, βρίσκοντας από κάθε μία από τις εξισώσεις και έναν άγνωστο, μέχρι στο τέλος να φτάσουμε στην πρώτη εξίσωση του συστήματος από την οποία υπολογίζουμε και τον x_1. *Το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση, αυτήν που βρίσκουμε με αυτήν τη διαδικασία.* Σε αυτήν τη διαδικασία έχουμε χρησιμοποιήσει ουσιωδώς την υπόθεση ότι $a_{ii} \neq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, αφού σε κάθε βήμα για να υπολογίσουμε τον συγκεκριμένο άγνωστο θα χρειαστεί να λύσουμε μια πρωτοβάθμια εξίσωση, η οποία έχει μοναδική λύση ακριβώς επειδή ο αντίστοιχος αριθμός a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$, είναι διάφορος του μηδενός.

3.4 Μεθοδολογία επίλυσης των γραμμικών συστημάτων με τη βοήθεια πινάκων

Τώρα είμαστε σε θέση να αναπτύξουμε με λεπτομέρειες τη μεθοδολογία επίλυσης των γραμμικών συστημάτων. Θεωρούμε πάλι ένα γραμμικό σύστημα στη γενική του μορφή:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.8}$$

Το σύστημα (3.8) έχει m εξισώσεις και n αγνώστους, όπου $m, n \in \mathbb{N}$. Θα συμβολίζουμε με $Ax = b$ την αντίστοιχη εξίσωση πινάκων του συστήματος (3.8), όπου A είναι ο $m \times n$ πίνακας του συστήματος, x είναι ο $n \times 1$ πίνακας στήλη των αγνώστων του, και b είναι ο $m \times 1$ πίνακας στήλη των σταθερών όρων του συστήματος. Θα συμβολίζουμε, ως συνήθως, με $(A|b)$ τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος
Το πρώτο πράγμα που εξετάζουμε σε ένα γραμμικό σύστημα είναι το αν έχει ή δεν έχει λύσεις. Για να το ελέγξουμε αυτό εκτελούμε την ακόλουθη διαδικασία:

(1) Από το αρχικό σύστημα (3.8) κατασκευάζουμε τον επαυξημένο πίνακα $C = (A|b)$ του συστήματος.

(2) Κλιμακοποιούμε τον πίνακα C και παίρνουμε έναν ισοδύναμό του κλιμακωτό πίνακα C'.

(3) Αν, κατά τη διαδικασία της κλιμακοποίησης, και πριν φτάσουμε στον κλιμακωτό πίνακα C' προκύψει (σε κάποιον ενδιάμεσο γραμμοϊσοδύναμο πίνακα του C) *ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη*, τότε το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο και η διαδικασία σταματά.

(4) Αν δεν προκύψει η περίπτωση στο (3), και το ηγετικό στοιχείο της τελευταίας μη μηδενικής γραμμής του πίνακα C' βρίσκεται στην τελευταία στήλη, τότε το σύστημα (3.8) είναι αδύνατο.

(5) Αν δεν προκύψουν τα (3) και (4), τότε το σύστημα (3.8) είναι συμβιβαστό, δηλαδή έχει τουλάχιστον μία λύση.

Παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι ο κλιμακωτός πίνακας C' στον οποίο καταλήξαμε είναι ο εξής:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 & 7 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 7 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Εφ' όσον η τελευταία γραμμή του πίνακα C' είναι μη μηδενική και το ηγετικό της στοιχείο βρίσκεται στην τελευταία στήλη, έπεται ότι το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο.
Ας θεωρήσουμε και τον πίνακα C', ο οποίος υποθέτουμε ότι είναι ο αντίστοιχος κλιμακωτός πίνακας κάποιου άλλου συστήματος

$$C' = \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Εδώ η τελευταία μη μηδενική γραμμή του C' είναι η $(0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 2)$ και δεν είναι της μορφής που περιγράφεται στο βήμα (4) παραπάνω. (Δηλαδή, το ηγετικό της στοιχείο είναι το 1 και δεν βρίσκεται στην τελευταία στηλη.) Επομένως το αρχικό σύστημα είναι συμβιβαστό.

Παρατήρηση. Υπάρχουν γραμμικά συστήματα $m \times n$ που είναι αδύνατα σε κάθε μία από τις περιπτώσεις: $m = n,\ m > n,\ m < n$.

Παραδείγματα.

(i) Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} x - y = \ \ 1 \\ x - y = -1 \end{cases}.$$

Αυτό είναι ένα γραμμικό σύστημα 2×2 και είναι αδύνατο γιατί αν υπήρχαν x και y τα οποία επαλήθευαν τις εξισώσεις του, τότε επειδή $1 = x - y = -1$, θα ίσχυε $1 = -1$, άτοπο.

(ii) Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} x - \ \ y = \ \ 1 \\ x - \ \ y = -1 \\ x + 2y = \ \ 3 \end{cases}.$$

Αυτό είναι ένα γραμμικό σύστημα 3×2, το οποίο είναι αδύνατο γιατί δεν μπορεί να αληθεύουν οι πρώτες δύο εξισώσεις του (όπως στο (i)).

(iii) Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}.$$

Αυτό είναι ένα γραμμικό σύστημα 2×3, το οποίο είναι αδύνατο γιατί διαφορετικά θα υπήρχαν αριθμοί $x, y, z \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $0 = x + y + z = 1 \Rightarrow 0 = 1$, άτοπο.

Ας έρθουμε τώρα στην περίπτωση όπου το αρχικό σύστημα (3.8) είναι συμβιβαστό. Ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.4.1. *Το σύστημα* (3.8) *είναι συμβιβαστό αν και μόνον αν ισχύει* $r(A) = r(A|b) = r(C)$*, δηλαδή μόνον στην περίπτωση που η τάξη του πίνακα του συστήματος είναι ίση με την τάξη του επαυξημένου πίνακα του συστήματος.*

Ο πίνακας A είναι πίνακας $m \times n$ και για την τάξη του, όπως έχουμε ήδη πει, ισχύει ότι $r(A) \leq \min\{m, n\}$, όπου με $\min\{m, n\}$ συμβολίζουμε τον μικρότερο από τους φυσικούς αριθμούς m και n.[*]

[*]Γενικά, αν έχουμε n πραγματικούς αριθμούς, έστω $a_1, a_2, \dots, a_n$, συμβολίζουμε με $\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ και $\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο, αντίστοιχα, από τους αριθμούς αυτούς.

Αφού λοιπόν, από τα προηγούμενα, για το συμβιβαστό σύστημα (3.8) ισχύει ότι:

$$r(A) = r(C) \leq n,$$

τότε υπάρχουν ακριβώς δύο δυνατότητες:

(i) **Να ισχύει $\boldsymbol{r(A) = r(C) = n}$.** Στην περίπτωση αυτή το σύστημα (3.8) έχει ακριβώς μία λύση.

(ii) **Να ισχύει $\boldsymbol{r(A) = r(C) < n}$.** Τότε το σύστημα (3.8) έχει άπειρες λύσεις.

Ας περιγράψουμε τώρα τη διαδικασία της λύσης του συστήματος (3.8). Αρχικά, ελέγχουμε αν το σύστημα (3.8) είναι συμβιβαστό. Για να το πετύχουμε αυτό στο πρώτο στάδιο κλιμακοποιούμε τον πίνακα $C = (A|b)$ και βρισκουμε έναν γραμμοϊσοδύναμό του κλιμακωτό πίνακα $C' = (A'|b')$, όπου A' είναι ο πίνακας του συστήματος το οποίο έχει ως επαυξημένο πίνακα τον C'. Προφανώς, ο A' είναι και αυτός κλιμακωτός. Στη συνέχεια,

(1) Βρίσκουμε την τάξη $r(C')$ του $C' = (A'|b')$ και την τάξη $r(A')$ του A'. Η τάξη του C' και η τάξη του A' είναι το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών τους και, φυσικά, τις προσδιορίζουμε απλώς κοιτώντας τους πίνακες C' και A', αντίστοιχα. Τότε το (3.8) είναι συμβιβαστό αν και μόνον αν $r(A') = r(C') \leq n$.*

Στην πράξη αυτό σημαίνει: α) ότι το ηγετικό στοιχείο της τελευταίας μη μηδενικής γραμμής του πίνακα C' δεν βρίσκεται στην τελευταία στήλη, οπότε $r(A') = r(C')$, και β) ότι $r(C') \leq n$.

(2) Έστω λοιπόν ότι από τον έλεγχο που κάναμε στο προηγούμενο βήμα βρήκαμε ότι το (3.8) είναι συμβιβαστό. Μετά ελέγχουμε αν ισχύει $r(C') = n$ ή $r(C') < n$. Αν ισχύει $r(C') = n$, τότε το αρχικό σύστημα έχει ακριβώς μία λύση, ενώ αν $r(C') < n$, τότε το αρχικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τη μεθοδολογία για την επίλυση του συστήματος σε κάθε μία από τις δύο αυτές περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: $\boldsymbol{r(A') = r(C') = n}$.

Όπως έχουμε δει, ισχύει ότι $r(A') = r(A) \leq \min\{m, n\} \Rightarrow r(A) \leq m$. Επομένως, έπεται ότι $n \leq m$. Έτσι εδώ έχουμε δύο περιπτώσεις:

$$\textbf{(α)}\ \boldsymbol{m = n} \qquad \text{και} \qquad \textbf{(β)}\ \boldsymbol{m > n}.$$

*Προφανώς, έχουμε ότι $A \sim A'$ και $C \sim C'$, άρα λόγω της Παρατήρησης 2 στη σελίδα 36 έχουμε ότι $r(A) = r(A')$ και $r(C) = r(C')$. Συνεπώς το σύστημα είναι συμβιβαστό $\Leftrightarrow r(A) = r(C) \Leftrightarrow r(A') = r(C')$.

Η διαδικασία της λύσης του συστήματος είναι παρόμοια και για τις δύο αυτές περιπτώσεις (α) και (β).

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση (α), όπου $m = n = r(C')$.

Σε αυτήν την περίπτωση τα διαγώνια στοιχεία του C' είναι όλα διάφορα του 0. Δηλαδή, $c'_{ii} \neq 0$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, r(C') = m = n$. Τότε το μοναδικό γραμμικό σύστημα που αντιστοιχεί στον πίνακα C', έστω (Σ΄), είναι ένα κλιμακωτό σύστημα της μορφής που έχουμε ήδη εξετάσει στην Παράγραφο 3.3. Λύνουμε αυτό το σύστημα (Σ΄) με οπισθοδρόμηση, όπως περιγράψαμε στην Παράγραφο 3.3, και προσδιορίζουμε τη μοναδική του λύση. Αυτή είναι και η μοναδική λύση του αρχικού συστήματος (3.8).

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση (β), όπου $m > n = r(C')$.

Εδώ οι $m - n$ τελευταίες γραμμές του πίνακα C' είναι μηδενικές. Αυτό σημαίνει ότι οι τελευταίες $m - n$ εξισώσεις του (μοναδικού) γραμμικού συστήματος που αντιστοιχεί στον πίνακα C' είναι μηδενικές, δηλαδή είναι της μορφής:

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0.$$

Αυτές τις μηδενικές εξισώσεις δεν τις λαμβάνουμε υπ' όψιν και έτσι προκύπτει ένα κλιμακωτό σύστημα όπως αυτό της προηγούμενης περίπτωσης (α). Το λύνουμε όπως πριν, και η μοναδική του λύση είναι και η μοναδική λύση του αρχικού συστήματος (3.8).

Έχουμε ήδη δει, στη σελίδα 38, ένα παράδειγμα συστήματος με μοναδική λύση στην περίπτωση που $m = n = 3$. Ας δούμε και ένα παράδειγμα στην περίπτωση που $m > n$.

Παράδειγμα. Να επιλυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = & 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = & 11 \\ x_1 + x_2 - 9x_3 = & -5 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = & 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = & 13 \end{array}\right. \tag{3.9}$$

Εδώ έχουμε ένα σύστημα 5×3 ($m = 5, n = 3$). Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο 5×4 πίνακας C που τον κλιμακοποιούμε ως εξής:

$$C = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & -9 & -5 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ r_2 \leftarrow r_2 - r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 - r_1 \\ r_5 \leftarrow r_5 - 2r_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 + r_2 \\ \\ r_5 \leftarrow r_5 - r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ r_3 \leftrightarrow r_4 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ r_4 \leftarrow r_4 - 2r_3 \\ r_5 \leftarrow r_5 - 2r_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = C'.$$

Έτσι, κλιμακοποιήσαμε τον επαυξημένο πίνακα C του αρχικού γραμμικού συστήματος (3.9) και πήραμε τον κλιμακωτό πίνακα C'. Η τελευταία μη μηδενική γραμμή του C' είναι η

$$(0 \;\; 0 \;\; -1 \;\; -1),$$

της οποίας το ηγετικό στοιχείο δεν βρίσκεται στην τελευταία στήλη. Άρα το αρχικό σύστημα είναι συμβιβαστό. Επίσης, το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του C' (και του A') είναι ίσο με 3. Άρα $r(C') = r(A') = 3 = n$. Άρα το αρχικό σύστημα έχει ακριβώς μία λύση. Παρατηρούμε επίσης, ότι τα διαγώνια στοιχεία (των μη μηδενικών γραμμών) του C' είναι όλα διάφορα του μηδενός.

Για να βρούμε τώρα τη μοναδική λύση του αρχικού συστήματος γράφουμε ένα νέο γραμμικό σύστημα για το οποίο ο C' είναι ο επαυξημένος πίνακάς του. Δηλαδή έχουμε να λύσουμε το κλιμακωτό σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = & 4 \\ x_2 + 4x_3 = & 7 \\ -\, x_3 = & -1 \end{array} \right. \tag{3.10}$$

Όπως είδαμε στην Παράγραφο 3.3, λύνουμε το σύστημα αυτό με οπισθοδρόμηση. Έτσι, από την τρίτη εξίσωση του συστήματος (3.10) παίρνουμε $x_3 = 1$.

Αντικαθιστούμε την τιμή του x_3 στη δεύτερη εξίσωση του (3.10) και έχουμε:

$$x_2 = 7 - 4x_3 = 7 - 4 \cdot 1 = 3.$$

Τέλος, αντικαθιστούμε τις τιμές των x_2 και x_3 που βρήκαμε στην πρώτη εξίσωση του (3.10) και παίρνουμε:

$$x_1 = 4 - 2x_2 + 3x_3 = 4 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 1.$$

Άρα η μοναδική λύση του αρχικού μας συστήματος (3.9) είναι η $(x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 1)$. $\square$

Παρατήρηση. Για να είμαστε ακριβέστεροι το γραμμικό σύστημα που αντιστοιχεί στον πίνακα C' είναι το εξής:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = \;\;4 \\ \qquad\;\; x_2 + 4x_3 = \;\;7 \\ \qquad\qquad\; - x_3 = -1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = \;\;0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = \;\;0 \end{cases} \tag{3.11}$$

Προφανώς όμως, μπορούμε να αγνοήσουμε τις δύο τελευταίες εξισώσεις μιας και είναι μηδενικές (δηλαδή έχουν όλους τους συντελεστές μηδέν), και επομένως δεν επηρεάζουν τη λύση του αρχικού συστήματος. Φυσικά το σύστημα (3.11) είναι ισοδύναμο με το (3.10) (είναι προφανές ότι κάθε λύση του ενός συστήματος είναι λύση και του άλλου).

Μας έχει απομείνει να εξετάσουμε την ακόλουθη:

Περίπτωση 2: $r(A') = r(C') < n$. Στην περίπτωση αυτή το αρχικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Για να φτάσουμε να αποφασίσουμε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, ξεκινάμε όπως πριν. Πρώτα ελέγχουμε αν το σύστημα είναι συμβιβαστό, κλιμακοποιώντας τον αρχικό επαυξημένο πίνακα C του συστήματος (3.8) και παίρνοντας τον ισοδύναμό του κλιμακωτό πίνακα C'. Υπολογίζουμε την τάξη $r(C')$, και ελέγχουμε ότι $r(A') = r(C') < n$, οπότε καταλήγουμε ότι το αρχικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις.
Εδώ, βεβαίως, μπορεί να έχουμε και τις τρεις δυνατότητες για τους αριθμούς m και n:

$$m < n \qquad \text{ή} \qquad m = n \qquad \text{ή} \qquad m > n.$$

Φυσικά, ισχύει πάντα ότι $r(C') \leq m$. **Στη συνέχεια θα εξετάσουμε δύο περιπτώσεις συστημάτων με άπειρες λύσεις:**

(α) Έστω $c'_{ii} \neq 0$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, r(C')$, όπου με c'_{ii} συμβολίζουμε τα διαγώνια στοιχεία του C'.

(β) Έστω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $i \in \{1, 2, \ldots, r(C')\}$, ώστε να ισχύει $c'_{ii} = 0$.

Θα εξετάσουμε αρχικά την περίπτωση (α) που είναι η πιο «εύκολη». Σε αυτή την περίπτωση ο πίνακας C' έχει την ακόλουθη μορφή:

$$C' = \left(\begin{array}{cccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right),$$

όπου, για απλότητα, έχουμε συμβολίσει $r = r(C')$. Δηλαδή, αν ισχύει ότι $r < m$, τότε ο C' έχει τις πρώτες r γραμμές του μη μηδενικές και τις υπόλοιπες $m - r$ γραμμές του μηδενικές, ενώ αν $r = m$, τότε ο C' δεν θα έχει καμμία μηδενική γραμμή. Τα πρώτα r διαγώνια στοιχεία $a'_{11}, a'_{22}, \dots, a'_{rr}$ του C', σύμφωνα με την υπόθεσή μας, είναι μη μηδενικά. Τότε το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα του πίνακα C' είναι:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1r}x_r + \cdots + a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2r}x_r + \cdots + a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ \ddots \qquad\qquad & & \vdots \\ a'_{rr}x_r + \cdots + a'_{rn}x_n & = & b'_r \\ 0\,x_1 + \;\; 0\,x_2 + \cdots + \;\; 0\,x_r + \cdots + \;\; 0\,x_n & = & 0 \\ \vdots \qquad\qquad & & \vdots \\ 0\,x_1 + \;\; 0\,x_2 + \cdots + \;\; 0\,x_r + \cdots + \;\; 0\,x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Τις τελευταίες $m-r$ γραμμές αυτού του συστήματος μπορούμε να τις αγνοήσουμε μιας και δεν επηρεάζουν το σύνολο λύσεων του αρχικού συστήματος (3.8). Επομένως, έχουμε να λύσουμε το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1r}x_r + \cdots + a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2r}x_r + \cdots + a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ \ddots \qquad\qquad & & \vdots \\ a'_{rr}x_r + \cdots + a'_{rn}x_n & = & b'_r \end{array}\right. \tag{3.12}$$

Σε κάθε εξίσωση του συστήματος (3.12) μεταφέρουμε τους $n - r$ *τελευταίους αγνώστους* x_{r+1}, $\dots$,x_n μαζί με τους αντίστοιχους συντελεστές τους στο δεύτερο μέλος, οπότε το (3.12) γράφεται και ως εξής:

$$\left\{\begin{aligned} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1r}x_r &= b'_1 - a'_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots a'_{1n}x_n \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2r}x_r &= b'_2 - a'_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots a'_{2n}x_n \\ \ddots \qquad & \qquad \vdots \\ a'_{rr}x_r &= b'_r - a'_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots a'_{rn}x_n \end{aligned}\right. \tag{3.13}$$

Τώρα θεωρούμε τους $n - r$ τελευταίους αγνώστους $x_{r+1}, \ldots, x_n$, ως *ελεύθερους αγνώστους*. Αυτό σημαίνει το εξής: Ας δώσουμε στους αγνώστους $x_{r+1}, \ldots, x_n$ αυθαίρετες αλλά σταθεροποιημένες τιμές. Δηλαδή, επιλέγουμε $n - r$ αυθαίρετες τιμές, έστω $\xi_1, \ldots, \xi_{n-r}$, και τις σταθεροποιούμε. Μετά θέτουμε $x_{r+1} = \xi_1, \ldots, x_n = \xi_{n-r}$. Τότε για τη συγκεκριμένη αυτή $(n-r)$-άδα τιμών $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-r})$, το σύστημα (3.13) είναι κλιμακωτό και τα διαγώνια στοιχεία του είναι μη μηδενικά. Άρα έχει μοναδική λύση για τους αγνώστους $x_1, x_2, \ldots, x_r$, οι οποίοι εκφράζονται μέσω της $(n - r)$-άδας $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r})$, που είναι η περίπτωση της Παραγράφου 3.3.

Ανάλογα, για οποιαδήποτε σταθεροποιημένη κάθε φορά επιλογή τιμών των μεταβλητών $x_{r+1}, \ldots, x_n$, το σύστημα (3.13) έχει μοναδική λύση για τους αγνώστους $x_1, x_2, \ldots, x_r$, η οποία εκφράζεται μέσω των ελεύθερων αγνώστων $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Με τον τρόπο αυτό προσδιορίζεται το άπειρο σύνολο λύσεων του αρχικού συστήματος. Ας περιγράψουμε την περίπτωση αυτή με ένα απλό παράδειγμα για να γίνει πιο κατανοητή.

Παράδειγμα. Να επιλυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}\right. \tag{3.14}$$

Κλιμακοποιούμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} C = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ r_2 \leftarrow r_2 + r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - r_1 \end{array} \\ \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 + r_2 \end{array} \\ \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right) & = C'. \end{aligned}$$

Άμεσα διαπιστώνουμε ότι $r(A') = r(C') = 3$. Εδώ $n = 4$, άρα $r(A') = r(C') = 3 < 4 = n$. Επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με $n - r(C') = 4 - 3 = 1$ ελεύθερο άγνωστο. Τα διαγώνια στοιχεία του C' είναι τα $1,\ 3,\ 2$, και είναι όλα μη μηδενικά. Άρα επιλέγουμε ως ελεύθερο άγνωστο τον x_4.
Γράφουμε τώρα το κλιμακωτό σύστημα που αντιστοιχεί στον πίνακα C':

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 2x_3 &= 5 \end{aligned}\right. \tag{3.15}$$

Το σύστημα (3.15) γράφεται και ως εξής:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 - x_4 \\ 3x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 2x_3 &= 5 \end{aligned}\right. \tag{3.16}$$

Λύνουμε τώρα το (3.16) με οπισθοδρόμηση, σαν ο ελεύθερος άγνωστος x_4 να είναι μια γνωστή σταθερά. Από την τρίτη εξίσωση του (3.16) παίρνουμε $x_3 = 5/2$. Αντικαθιστούμε την τιμή του x_3 στη δεύτερη εξίσωση και παίρνουμε

$$3x_2 + 4 \cdot \frac{5}{2} = 3 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{7}{3}.$$

Τέλος, αντικαθιστούμε τις τιμές των x_2 και x_3 που βρήκαμε στην πρώτη εξίσωση του (3.16) και υπολογίζουμε το x_1. Έχουμε:

$$x_1 + 2 \cdot \Big(-\frac{7}{3}\Big) + 3 \cdot \frac{5}{2} = 1 - x_4 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{11}{6} - x_4.$$

Άρα το σύνολο των λύσεων του συστήματος (3.14) είναι όλες οι τετράδες αριθμών της μορφής $\big(-\frac{11}{6} - x_4,\ -\frac{7}{3},\ \frac{5}{2},\ x_4\big)$, για όλα τα $x_4 \in \mathbb{R}$.

Έτσι, μας έμεινε πλέον η τελευταία περίπτωση όπου $r(A') = r(C') < n$, οπότε έχουμε ένα σύστημα με άπειρες λύσεις, και υπάρχει τουλάχιστον ένα $i \in \{1, 2, \ldots, r(C')\}$, ώστε να ισχύει $c'_{ii} = 0$ (βλ. περίπτωση (β) στη σελίδα 47). Στην περίπτωση αυτή δουλεύουμε ανάλογα με την περίπτωση (α). Δηλαδή αφού βρούμε τον $r(C')$ και εξασφαλίσουμε με τη συνθήκη $r(A') = r(C') < n$, ότι το σύστημα είναι συμβιβαστό και έχει άπειρες λύσεις, επιλέγουμε στη συνέχεια $n - r(C')$ ελεύθερους αγνώστους από τους αγνώστους $x_1, x_2, \ldots, x_n$ του συστήματος και «λύνουμε» το σύστημα ως προς τους υπόλοιπους.

Παρατήρηση. Η τελευταία αυτή περίπτωση (β) έχει μια ιδιαιτερότητα. Σε κάποιες περιπτώσεις είναι δυνατόν να κλιμακοποιήσουμε τον αρχικό πίνακα C με τέτοιο τρόπο ώστε να μην εμφανίζεται αυτή η περίπτωση (β), αλλά η προηγούμενη (α) που εξετάσαμε. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις πινάκων που αυτό μπορεί να μην είναι δυνατό. Οπότε αναγκαστικά πρέπει να εξετάσουμε αυτήν τη δεύτερη περίπτωση. Για τις απλές περιπτώσεις συστημάτων που εξετάζουμε εμείς εδώ, δηλαδή με πολύ μικρό αριθμό εξισώσεων και αγνώστων, είναι πολύ απλό να λύσουμε το κλιμακωτό σύστημα που θα προκύψει ως προς τους ελεύθερους αγνώστους, και έτσι δεν προκύπτει κάποια ιδιαίτερη δυσκολία. Στη γενική περίπτωση όμως που έχουμε να αντιμετωπίσουμε ένα σύστημα με ενδεχομένως μεγάλο αριθμό αγνώστων, αυτή η περίπτωση απαιτεί ειδικό χειρισμό.

Ας δούμε τώρα και ένα παράδειγμα για αυτή την περίπτωση.

Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 &= 5 \\ 5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 11x_4 + 5x_5 &= 11 \\ 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 + 7x_4 &= 7 \end{array}\right. \tag{3.17}$$

Έστω C να είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος. Τον κλιμακοποιούμε και έχουμε:

$$\begin{aligned} C = & \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 1 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 5 & 11 \\ 3 & 6 & -5 & 7 & 0 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ r_2 \leftarrow r_2 + (-2)r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 + (-5)r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 + (-3)r_1 \end{array} \\ \sim & \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ r_3 \leftarrow r_3 + (-2)r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 + (-1)r_2 \end{array} \\ \sim & \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = C'. \end{aligned}$$

Προφανώς το σύστημα είναι συμβιβαστό, αφού το ηγετικό στοιχείο της τελευταίας μη μηδενικής γραμμής του C' είναι το 4 και δεν βρίσκεται στην τελευταία στήλη. Έχουμε $r(A') = r(C') = 3 < 5 = n$, όπου n είναι το πλήθος των αγνώστων του συστήματος. Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με $n - r(C') = 5 - 3 = 2$ ελεύθερους αγνώστους.

Για να το λύσουμε σχηματίζουμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα που αντιστοιχεί στον επαυξημένο πίνακα C'.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - \ \ x_5 = \ \ 2 \\ \qquad\qquad\quad x_3 - 2x_4 + 3x_5 = \ \ 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 4x_5 = -1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = \ \ 0 \end{cases}$$

Προφανώς μπορούμε να παραλείψουμε την τελευταία μηδενική γραμμή του συστήματος αυτού, γιατί το νέο σύστημα που είναι κλιμακωτό έχει το ίδιο σύνολο λύσεων με το αρχικό. Έτσι παίρνουμε το κλιμακωτό σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - \ \ x_5 = \ \ 2 \\ \qquad\qquad\quad x_3 - 2x_4 + 3x_5 = \ \ 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 4x_5 = -1 \end{cases} \tag{3.18}$$

Από την τρίτη εξίσωση παίρνουμε $x_5 = -\frac{1}{4}$. Αντικαθιστούμε την τιμή του x_5 στη δεύτερη εξίσωση και έχουμε:

$$x_3 - 2x_4 + 3\big(-\frac{1}{4}\big) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 - 2x_4 = \frac{7}{4}. \tag{3.19}$$

Τώρα πρέπει να επιλέξουμε *δύο ελεύθερους αγνώστους* από τους x_1, x_2, x_3, x_4 έτσι ώστε *οι δύο άλλοι να προσδιορίζονται μοναδικά από αυτούς για κάθε αυθαίρετα επιλεγμένο σύνολο τιμών των δύο αυτών ελεύθερων μεταβλητών.*

Στη συγκεκριμένη περίπτωση αυτό γίνεται εύκολα. Αν διαλέξουμε ως ελεύθερους αγνώστους τους x_2, x_4, τότε η πρώτη εξίσωση του (3.18) και η (3.19) γραφονται ως εξής:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 &= 2 - 2x_2 - 3x_4 + x_5, \\ x_3 &= \frac{7}{4} + 2x_4, \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του $x_5 = -\frac{1}{4}$ στην πρώτη εξίσωση και παίρνουμε:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = \frac{7}{4} - 2x_2 - 3x_4 \\ \qquad\ \ x_3 = \frac{7}{4} + 2x_4 \end{cases} \tag{3.20}$$

Το σύστημα (3.20) τώρα είναι κλιμακωτό και για κάθε δεδομένο ζεύγος τιμών των x_2, x_4, δέχεται μοναδική λύση ως προς τους αγνώστους x_1, x_3. Αντικαθιστούμε τη δεύτερη εξίσωση του (3.20) στην πρώτη, και παίρνουμε:

$$x_1 - 2\Big(\frac{7}{4} + 2x_4\Big) = \frac{7}{4} - 2x_2 - 3x_4 \Leftrightarrow x_1 = \frac{21}{4} - 2x_2 + x_4.$$

Έτσι το σύνολο λύσεων του αρχικού συστήματος (3.17) αποτελείται από όλες τις 5-άδες:

$$\Big(\frac{21}{4} - 2x_2 + x_4,\ x_2,\ \frac{7}{4} + 2x_4,\ x_4,\ -\frac{1}{4}\Big),$$

για κάθε $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$. □

Παρατήρηση: Όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα ήταν εύκολο να προσδιορίσουμε τους δύο ελεύθερους αγνώστους x_2 και x_4 ως προς τους οποίους προσδιορίζουμε τους υπόλοιπους. Στη γενική περίπτωση, με μεγάλο πλήθος αγνώστων, μπορεί να είναι αρκετά δύσκολο να προσδιορίσουμε τους ελεύθερους αγνώστους.