Απαλοιφή Gauss

Μέθοδος λύσης γραμμικών συστημάτων

Όταν το πλήθος των εξισώσεων είναι μεγάλο (χιλιάδες άγνωστοι) πρέπει να λαμβάνονται υπόψη ζητήματα όπως ο χρόνος επίλυσης, το μέγεθος της μνήμης, τα λάθη στρογγυλοποίησης. Η βάση των τεχνικών είναι η μέθοδος που θα αναλύσουμε για μικρά συστήματα.

Συμβολίζω τις γραμμές με Γ_n και εκτελώ τις επιτρεπτές στοιχιώδεις γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος.

$$\begin{aligned} x+y+2z&=9\\ 2x+4y-3z&=1\\ 3x+6y-5z&=0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9\\ 2 & 4 & -3 & 1\\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \ \Gamma_2\text{-}2\Gamma_1 \ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9\\ 0 & 2 & -7 & -17\\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \ \Gamma_3\text{-}3\Gamma_1 \ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9\\ 0 & 2 & -7 & -17\\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \ (1/2)\Gamma_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9\\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2\\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \ \Gamma_3\text{-}3\Gamma_2 \ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9\\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2\\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{bmatrix} \ \text{-}2\Gamma_3 \ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9\\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2\\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \ \Gamma_1\text{-}\Gamma_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/2 & 35/2\\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2\\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \ \Gamma_1\text{-}(11/2)\Gamma_3 \ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2\\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \ \Gamma_2\text{+}(7/2)\Gamma_3 \ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Οι λύσεις του συστήματος (1,2,3) είναι προφανείς από τον τελευταίο πίνακα, ο οποίος είναι σε **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή**.

Κλιμακωτή μορφή πίνακα

- Όταν μια σειρά δεν είναι μηδενική, το πρώτο μη μηδενικό νούμερο σε αυτή είναι το 1 (οδηγό στοιχείο).
- Οι μηδενικές σειρές βρίσκονται στο τέλος του πίνακα.
- Σε δύο διαδοχικές μη μηδενικές σειρές το οδηγό στοιχείο 1 στη χαμηλότερη σειρά είναι πιο δεξιά από το οδηγό στοιχείο 1 στην ψηλότερη σειρά

Ανηγμένη κλιμακωτή μορφή πίνακα

- Κλιμακωτή μορφή
- Κάθε στήλη που περιέχει οδηγό στοιχείο 1, έχει όλα τα άλλα στοιχεία της ίσα με το μηδέν.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ **Κλιμακωτή μορφή**

Ανηγμένη κλιμακωτή μορφή $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Στην κλιμακωτή μορφή κάτω από τα στοιχεία οδηγούς 1 υπάρχουν μηδενικά ενώ στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή υπάρχουν μηδενικά και πάνω και κάτω από τους οδηγούς 1.

Εάν ο επαυξημένος πίνακας ενός συστήματος μετατραπεί στον ισοδύναμο ανηγμένο κλιμακωτό, είναι προφανής η λύση του συστήματος.

Από τον επαυξημένο πίνακα ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων, προέκυψε ο παρακάτω ισοδύναμος πίνακας μετά από στοιχειώδεις πράξεις γραμμών.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Η λύση του συστήματος είναι (3, -1, 0, 5)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Κρίνοντας από την τελευταία σειρά το σύστημα είναι ασύμβατο.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι οδηγοί των δύο πρώτων σειρών αντιστοιχούν στους δύο πρώτους αγνώστους (έστω x,y).
Ο τρίτος άγνωστος (z) θα θεωρηθεί ελεύθερη μεταβλητή και οι άλλες δύο (x,y) θα εκφραστούν σε συνάρτηση με αυτή.
Παραμετρική μορφή λύσης (-1-3t, 2+4t, t)

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Δύο ελεύθερες μεταβλητές (y,z).
Παραμετρική μορφή λύσης (4+5s-t, s, t) : Γενική λύση

Η διαδικασία της απαλοιφής Gauss - Jordan είναι η προσπάθεα μετατροπής του επαυξημένου πίνακα του συστήματος σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, με επιτρεπτές πράξεις σειρών.

Εντοπίζουμε την πρώτη (πιο αριστερά) μη μηδενική στήλη

Αλλάζουμε αμοιβαία σειρές ώστε το πρώτο στοιχείο της παραπάνω μη μηδενικής στήλης να μην είναι μηδέν.

Με επιτρεπτές πράξεις μετατρέπουμε το παραπάνω στοιχείο σε 1 (πρώτος οδηγός).

Με επιτρεπτές πράξεις μετατρέπουμε όλα τα στοιχεία κάτω από τον πρώτο οδηγό σε μηδέν.

Καλύπτουμε την πρώτη σειρά κι επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία ώστε να φτάσουμε τον πίνακα σε κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

Ξεκινώντας από την τελευταία μη μηδενική σειρά κάνουμε επιτρεπτές πράξεις προς τα πάνω ώστε να μηδενιστούν και τα στοιχεία πάνω από τους οδηγούς σε κάθε στήλη μέχρι να φτάσουμε στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Εντοπίζουμε την πρώτη (πιο αριστερά) μη μηδενική στήλη.

$$\begin{array}{c} \uparrow\downarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Αλλάζουμε αμοιβαία σειρές ώστε το πρώτο στοιχείο της παραπάνω μη μηδενικής στήλης να μην είναι μηδέν.

$$\begin{array}{c} (1/2)\Gamma_1 \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Με επιτρεπτές πράξεις μετατρέπουμε το παραπάνω στοιχείο σε 1 (πρώτος οδηγός).

$$\begin{array}{c} \\ \\ \Gamma_3\text{-}2\Gamma_1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Με επιτρεπτές πράξεις μετατρέπουμε όλα τα στοιχεία κάτω από τον πρώτο οδηγό σε μηδέν.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Καλύπτουμε την πρώτη σειρά κι επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία ώστε να φτάσουμε τον πίνακα σε κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ξεκινώντας από την τελευταία μη μηδενική σειρά κάνουμε επιτρεπτές πράξεις προς τα πάνω ώστε να μηδενιστούν και τα στοιχεία πάνω από τους οδηγούς σε κάθε στήλη μέχρι να φτάσουμε στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$