ΠΙΝΑΚΕΣ (**από το σύγγραμμα του Σ. Πολύζου, Δ. Τσιώτα)**

Μία διάταξη στοιχείων σε μορφή ορθογωνίου σχήματος

a_{11}	a_{12}	a_{13}	……….		a_{1n}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	………		a_{2n}
..	..	..	…..	..	
..	..	..	…..	..	
a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	…..	a_{mn}	

ονομάζεται πίνακας. Για i=1,2,…..,m, έστω r_i= (a_{i1},a_{i2},a_{i3}, ……….,a_{in}) και για j=1,2,…..,n

$$c_{j=}\begin{pmatrix} a_{ij} \\ a_{2j}. \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Τότε τα r_i (i=1,2,..,m) ονομάζονται γραμμές του πίνακα και τα c_j (j=1,2,…,n) ονομάζονται στήλες του πίνακα. Ένας πίνακα με m γραμμές και n στήλες λέγεται mxn πίνακας. Το στοιχείο που βρίσκεται στην τομή της i-γραμμής και j-στήλης ονομάζεται (i,j) στοιχείο του πίνακα. Σε συντετμημένη μορφή ο πίνακας γράφεται $A=(\alpha_{ij})_{mxn}$

Παράδειγμα

1	0	-3	1
2	1	3	1
1	0	1	1

Είναι ένας 3x4 πίνακας, όπου (2,1,3,1) είναι μία γραμμή του πίνακα και $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι μία στήλη του πίνακα.

Ο πίνακας ονομάζεται πραγματικός ή μιγαδικός ανάλογα με το αν τα στοιχεία του είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί. Αν το πλήθος των γραμμών και των στηλών σε ένα πίνακα είναι το ίδιο, δηλαδή m=n τότε ο πίνακας ονομάζεται τετραγωνικός τάξεως m. Αν ο πίνακας είναι μόνο μία στήλη (n=1) , ή μία γραμμή (m=1) ονομάζεται διάνυσμα. Δύο ή περισσότεροι πίνακες με τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών λέμε ότι είναι του ίδιου τύπου. Δύο πίνακες ίδιου τύπου που έχουν τα στοιχεία στις ίδιες θέσεις ίσα μεταξύ τους ονομάζονται ίσοι.

Χαρακτηριστικά και μορφές πινάκων

Διαγώνιος του πίνακα: Σε έναν τετραγωνικό πίνακα τα στοιχεία a_{11},a_{22},a_{33}, ……….,a_{nn} ονομάζονται διαγώνια στοιχεία και όλα μαζί αποτελούν τη διαγώνιο του πίνακα. Η εν λόγω διαγώνιος ονομάζεται και πρωτεύουσα διαγώνιος ενώ τα στοιχεία $a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, \ldots\ldots\ldots, a_{n1}$ σχηματίζουν τη δευτερεύουσα διαγώνιο του πίνακα.

Πίνακας στοιχείο: Αν m=n=1, τότε ο πίνακας έχει μία γραμμή και μία στήλη και ονομάζεται πίνακας στοιχείο. Για παράδειγμα ο πίνακας A=[-2] είναι ένας πίνακας στοιχείο.

Πίνακας γραμμή ή στήλη: Αν m=1 και n>1 τότε ο πίνακας έχει διαστάσεις 1xn, είναι της μορφής $A=[\ a_{11}, a_{12}, a_{13}, \quad \ldots\ldots\ldots, a_{1n}]$ και ονομάζεται **πίνακας γραμμή**. Παρομοίως , αν m>1 και n=1, τότε ο πίνακας έχει διαστάσεις mx1 , είναι της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21}. \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

και ονομάζεται **πίνακας στήλη.**

Τριγωνικός πίνακας: Ένας πίνακας ονομάζεται **άνω τριγωνι**κός πίνακας αν ισχύει $α_{ij}=0$ για κάθε i>j. Παρομοίως, ονομάζεται **κάτω τριγωνικός** αν ισχύει $α_{ij}=0$ για κάθε i<j.. Παραδείγματα τέτοιων πινάκων είναι αντίστοιχα οι επόμενοι πίνακες A και B.

$$A= \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots\ldots & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots\ldots & & a_{2n} \\ .. & .. & .. & \ldots.. & .. & \\ .. & .. & .. & \ldots.. & .. & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots.. & & a_{nn} \end{array}$$

$$B= \begin{array}{cccccc} a_{11} & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots\ldots\ldots & & 0 \\ .. & .. & .. & \ldots.. & .. & 0 \\ .. & .. & .. & \ldots.. & & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots.. & & a_{nn} \end{array}$$

Διαγώνιος πίνακας: Ένας πίνακας διαστάσεων nxn ονομάζεται διαγώνιος και συμβολίζεται $diag(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ \ldots\ldots\ldots, a_{nn})$ αν έχει όλα τα στοιχεία του εκτός της διαγωνίου μηδενικά. Δηλαδή αν $α_{ij}=0$ για $i \neq j$.

Μοναδιαίος πίνακας: Ένας διαγώνιος πίνακας διαστάσεων nxn της μορφής diag(1,1,1,………,1) ονομάζεται μοναδιαίος πίνακας ή ταυτοτικός πίνακας και συμβολίζεται με $\mathbf{I_n}$ ή με I. Δηλαδή:

	1	0	0	……….		0
	0	1	1	………		0
I_n =	..	..	..	…..	..	0
	..	..	..	…..	..	0
	0	0	0	…..		1

Μηδενικός πίνακας: Ένας πίνακας ονομάζεται μηδενικός και συμβολίζεται με 0, όταν κάθε **στοιχείο του είναι μηδέν.**

Ίσοι και αντίθετοι πίνακες: Ένας πίνακας A είναι **ίσος** με τον πίνακα B, όταν τα οματάξια στοιχεία τους είναι ίσα και γράφουμε A=B

Ένας πίνακας A είναι **αντίθετος** με τον πίνακα B όταν τα ομοτάξια στοιχεία τους είναι αντίθετα και γράφουμε A=-B

Ανάστροφος πίνακας: Ο πίνακας B είναι ανάστροφος του πίνακα A, όταν ο B προκύπτει από την αναδιάταξη των στοιχείων του A, έτσι ώστε οι γραμμές του A να γίνουν στήλες του B και οι στήλες του A να γίνουν γραμμές του B και συμβολίζεται $B=A^T$.

Παράδειγμα

	1	-1	0	2
A=	3	-4	1	19
	2	0	-25	-1

Ο ανάστροφος του A είναι ο

	1	3	2
	-1	-4	0
B=	0	1	-25
	2	19	-1

Συμμετρικός Πίνακας: Ένας πίνακας ονομάζεται **συμμετρικός** όταν ισχύει η σχέση $A=A^T$, με άλλα λόγια για κάθε (i,j) να ισχύει $α_{ij}=a_{ji}$.

Ένας πίνακας ονομάζεται **αντισυμμετρικός**, όταν ισχύει η σχέση $A=-A^T$, με άλλα λόγια για κάθε (i,j) να ισχύει $α_{ij}=-a_{ji}$.

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A=(α_{ij})$ ονομάζεται **ορθογώνιος** εάν ισχύει η σχέση $A^{-1}=A^T$, όπου A^T ο ανάστροφος πίνακας του A και A^{-1} ο αντίστροφος του A.

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A=(α_{ij})$ ονομάζεται **ταυτοδύναμος** εάν ισχύει η σχέση $A^2=A$.

Ένας τετραγωνικός πίνακας A=($α_{ij}$) ονομάζεται **μηδενοδύναμος** εάν $\exists\, k \in \{1,2,3 \ldots\}$ισχύει η σχέση $A^k=0$.

Ένας τετραγωνικός πίνακας A=($α_{ij}$) ονομάζεται **ενελικτικός** εάν ισχύει η σχέση $A^2=I$.

Βασικές Πράξεις Πινάκων

Η αριθμητική των πινάκων περιορίζεται στις πράξεις του αθροίσματος πινάκων, γινομένου αριθμού επί πίνακα, διαφοράς πινάκων και γινομένου πινάκων. Αναλυτικά οι βασικές πράξεις των πινάκων πραγματοποιούνται ως εξής:

Άθροισμα πινάκων: Αν A=[$α_{ij}$] και B=[$β_{ij}$] είναι πίνακες του ιδίου τύπου mxn, τότε το άθροισμα των A και B είναι ένας πίνακας C=[c_{ij}], ο οποίος ορίζεται από το άθροισμα των στοιχείων των A και B που έχουν τις ίδιες θέσεις, δηλαδή $c_{ij}=α_{ij}+β_{ij}$ 1<=i<=m, 1<=j<=n

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, πίνακες διαφορετικού τύπου ή διαστάσεων δεν μπορούν να προστεθούν.

Παράδειγμα

Δίνονται οι πίνακες: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ και ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Να βρείτε το άθροισμά τους:

Απάντηση

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Για τους πίνακες A, B, και C, του ιδίου τύπου και των ιδίων διαστάσεων ισχύουν οι εξής ιδιότητες του αθροίσματος:

A+B=B+A (αντιμεταθετική)

(A+B)+C=A+(B+C) (προσεταιρεστική)

A+0=0+A=A (Ο μηδενικός πίνακας είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης)

Κάθε πίνακας έχει ένα μόνο αντίθετό του –A οποίος ικανοποιεί τη σχέση: A+(-A)=0

Άμεση συνέπεια αυτού είναι οι σχέσεις: -(-A)=A, -(A+B)=(-A)+(-B), A+C=B+C=>A=B

Τέλος όταν C=B-A, τότε A+C=B.

Γινόμενο αριθμού επί πίνακα

Αν A=[$α_{ij}$] είναι πίνακας τύπου mxn και k ένας αριθμός, τότε το γινόμενο του A επί k είναι ο πίνακας KA με στοιχεία το γινόμενο κάθε στοιχείου του A επί τον αριθμό k. Αν k=-1, ο πίνακας (-1)A=-A είναι αντίθετος του A. Έτσι για τους πίνακες A και B του ιδίου τύπου ορίζουμε την διαφορά τους ως τη σχέση: A-B=A+(-1)B. Το αποτέλεσμα της διαφοράς δύο πινάκων A και B είναι ο πίνακας με στοιχεία την διαφορά των ομοθέσεων στοιχείων των A και B.

Από τις ιδιότητες των πράξεων διαπιστώνουμε ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες αναφορικά με την πράξη του γινομένου αριθμού επί πίνακα:

k(A+B)=kA+kB =(A+B)k (επιμεριστική)

(k+m)A=kA+mA

k(mA)=(km)A

Γινόμενο πινάκων

Αν ο πίνακας A=[α_{ij}] είναι πίνακας τύπου mxn και ο πίνακας B=[β_{ij}] είναι τύπου nxk, τότε ορίζεται το γινόμενο του A επί B, το οποίο σημειώνεται ως AB. Το γινόμενο των δύο πινάκων θα είναι ο πίνακας C=[c_{ij}], τύπου mxk του οποίου κάθε στοιχείο θα υπολογίζεται από τη σχέση $c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{ji}$ όπου 1<=i<=m, 1<=j<=n

Με άλλα λόγια, το 1^{ο} στοιχείο της 1^{ης} γραμμής του νέου πίνακα θα είναι το άθροισμα των γινομένων των αντίστοιχων στοιχείων της πρώτης γραμμής του πίνακα A επί των στοιχείων της 1^{ης} στήλης του πίνακα B. Ομοίως το 2^{ο} στοιχείο της 1^{ης} γραμμής του νέου πίνακα θα είναι το άθροισμα των γινομένων των αντίστοιχων στοιχείων της πρώτης γραμμής του πίνακα A επί των στοιχείων της 2^{ης} στήλης του πίνακα B και ούτω καθεξής. Το τελευταίο στοιχείο της 1^{ης} γραμμής του νέου πίνακα θα είναι το άθροισμα των γινομένων των αντίστοιχων στοιχείων της πρώτης γραμμής του πίνακα A επί των στοιχείων της τελευταίας στήλης του πίνακα B.

Αναλόγως το 1^{ο} στοιχείο της 2^{ης} γραμμής του νέου πίνακα θα είναι το άθροισμα των γινομένων των αντίστοιχων στοιχείων της δεύτερης γραμμής του πίνακα A επί των στοιχείων της 1^{ης} στήλης του πίνακα B. Το 2^{ο} στοιχείο της 2^{ης} γραμμής του νέου πίνακα θα είναι το άθροισμα των γινομένων των αντίστοιχων στοιχείων της δεύτερης γραμμής του πίνακα A επί των στοιχείων της 2^{ης} στήλης του πίνακα B και ούτω καθεξής.

Παράδειγμα

A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ C=A.B=$\begin{pmatrix} 2x1+3x2 & 2x2=3x1 & 2x3+3x4 \\ 1x1+(-5)x2 & 1x2+(-5)x1 & 1x3+(-5)x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 18 \\ -9 & -3 & -17 \end{pmatrix}$

Παράδειγμα

Να ευρεθεί ο πίνακας C=A.B όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\kappa\alpha\iota$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 6 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Απάντηση

Με βάση τα παραπάνω θα έχουμε c_{11}=1x2+(-1)x3+2x(-2)+4x2=3

c_{12}=1x(-1)+(-1)x4+2x(-3)+4x4=5

c_{13}=1x(-3)+(-1)x6+2x1+4x5=13

c_{21}=2x2+(-3)x3+(-1)x(-2)+5x2=7

c_{22}=2x(-1)+(-3)x4+(-1)x(-3)+5x4=9

c_{23}=2x(-3)+(-3)x6+(-1)x1+5x5=0

c_{31}=(-2)x2+3x3+1x(-2)+1x2=5

c_{32}=(-2)x(-1)+3x4+1x(-3)+1x4=15

c_{33}=(-2)x(-3)+3x6+1x1+1x5=30

Τελικά ο πίνακας $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 13 \\ 7 & 9 & 0 \\ 5 & 15 & 30 \end{pmatrix}$

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι AB$\neq BA$. Αν όμως οι πίνακες είναι τετραγωνικοί διαστάσεων nxn και ισχύει η ισότητα A.B=B.A, τότε οι πίνακες ονομάζονται **αντιμεταθετικοί**.

Για κάθε πίνακα Α τύπου mxn ισχύει η ισότητα I_mA=AI_n=A

Με βάση τα προαναφερθέντα προκύπτει ότι, το γινόμενο δύο πινάκων μπορεί να ισούται με μηδέν, παρά το γεγονός ότι οι πίνακες είναι διάφοροι του μηδενός. Δηλαδή μπορεί να είναι AB=0 όταν A$\neq 0$ $\kappa\alpha\iota$ $B \neq 0$. Επίσης είναι δυνατόν να είναι ΑΒ=ΑΓ με τους πίνακες Β και Γ να μην είναι ίσοι.

Για το γινόμενο των πινάκων ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

Α(ΒΓ)=(ΑΒ)Γ (προσεταιριστική)

Α(Β$\pm \Gamma) = A B \pm A\Gamma$ (επιμεριστική)

κ(ΑΒ)=(κΑ)Β=Α(κΒ)

(Α$\pm B)\Gamma = A\Gamma \pm B\Gamma$

$(AB)^T = B^T A^T$

AI=IA=A (Το I είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού)

A0=0A=0.

Γενικότερα, για το γινόμενο των πινάκων μπορούμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

Το γινόμενο ΒΑ των πινάκων B_{nxk} και A_{mxn} δεν ορίζεται πάντοτε, ακόμη και όταν ορίζεται το γινόμενο ΑΒ. Για να ορίζεται το γινόμενο ΒΑ θα πρέπει να είναι k=m.

Αν ο πίνακας Α είναι τύπου mxn τότε:

α) το γινόμενο ΑΒ ορίζεται όταν ο πίνακας Β έχει n σειρές

β) Το γινόμενο ΒΑ ορίζεται όταν ο πίνακας Β έχει m στήλες

γ) Τα γινόμενα ΑΒ και ΒΑ ορίζονται όταν ο πίνακας Β είναι τύπου nxm Συνέπεια αυτού του περιορισμού είναι ότι ο πίνακας A^2=AA ορίζεται μόνο όταν είναι τετραγωνικός.

Δυνάμεις πίνακα

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα Α και για κάθε φυσικό αριθμό n ο πίνακας A^n=AAA (n φορές) ονομάζεται n-στη δύναμη του Α

Με βάση τα παραπάνω θα ισχύει:

A^0=I και A^1=A

Αν m και n είναι φυσικοί αριθμοί, τότε θα ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

$$A^m A^n = A^{m+n}, \quad (A^m)^n = A^{mn} \quad (kA)^n = k^n A^n \quad , \quad (AB)^n = A^n B^n \ \acute{o}\tau\alpha\nu \ AB = BA$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Δίνονται οι πίνακες Α= $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{8} \\ \mathbf{6} & \mathbf{8} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{9} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$ **και ο πίνακας Β=** $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{8} & \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ \mathbf{8} & \mathbf{3} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$

Να υπολογιστούν οι πίνακες α) Α+2Β, β) 3Α-Β, γ) Α*Β, δ) Β*Α

Λύση

3A= $\begin{pmatrix} 3 & 18 & 24 \\ 18 & 24 & 12 \\ 6 & 27 & 18 \end{pmatrix}$, 2B= $\begin{pmatrix} 4 & 16 & 14 \\ 0 & 10 & 14 \\ 16 & 6 & 16 \end{pmatrix}$

A+2B= $\begin{pmatrix} 5 & 22 & 22 \\ 6 & 18 & 18 \\ 18 & 15 & 22 \end{pmatrix}$, 3A-B= $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 17 \\ 18 & 19 & 5 \\ -2 & 24 & 10 \end{pmatrix}$

A*B= $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 4 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}$*$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 7 \\ 0 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 8 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1*2+6*0+8*8 & 1*8+6*5+8*3 & 1*7+6*7+8*8 \\ 6*2+8*0+4*8 & 6*8+8*5+4*3 & 6*7+8*7+4*8 \\ 2*2+9*0+6*8 & 2*8+9*5+6*3 & 2*7+9*7+6*8 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 66 & 62 & 113 \\ 44 & 100 & 130 \\ 52 & 79 & 125 \end{pmatrix}$

B*A=$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 7 \\ 0 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 4 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 2*1+8*6+7*2 & 2*6+8*8+7*9 & 2*8+8*4+7*6 \\ 0*1+5*6+7*2 & 0*6+5*8+7*9 & 0*8+5*4+7*6 \\ 8*1+3*6+8*2 & 8*6+3*8+8*9 & 8*8+3*4+8*6 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 64 & 139 & 90 \\ 44 & 103 & 62 \\ 42 & 144 & 124 \end{pmatrix}$

2) Δίνονται οι Πίνακες A=$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{7} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ και B=$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$ Να υπολογιστούν οι αριθμοί a,b,c έτσι ώστε AB=$\begin{pmatrix} \mathbf{13} & \mathbf{22} & \mathbf{5} \\ \mathbf{18} & \mathbf{33} & \mathbf{12} \end{pmatrix}$

Λύση

A*B=$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{7} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} \mathbf{4+4\boldsymbol{a}+5} & \mathbf{6+16+5\boldsymbol{b}} & \mathbf{2+8+5\boldsymbol{c}} \\ \mathbf{14+3\boldsymbol{a}+1} & \mathbf{21+12+\boldsymbol{b}} & \mathbf{7+6+\boldsymbol{c}} \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} \mathbf{9+4\boldsymbol{a}} & \mathbf{22+5\boldsymbol{b}} & \mathbf{10+5\boldsymbol{c}} \\ \mathbf{15+3\boldsymbol{a}} & \mathbf{33+\boldsymbol{b}} & \mathbf{13+\boldsymbol{c}} \end{pmatrix}$

Θα πρέπει $\begin{pmatrix} \mathbf{9+4\boldsymbol{a}} & \mathbf{22+5\boldsymbol{b}} & \mathbf{10+5\boldsymbol{c}} \\ \mathbf{15+3\boldsymbol{a}} & \mathbf{33+\boldsymbol{b}} & \mathbf{13+\boldsymbol{c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{13} & \mathbf{22} & \mathbf{5} \\ \mathbf{18} & \mathbf{33} & \mathbf{12} \end{pmatrix}$ οπότε έχουμε:

9+4a=13
15+3a=18 (Λύση του συστήματος δίνει a=1)

22+5b=22
33+b=33 (Λύση του συστήματος δίνει b=0)

10+5c=5
13+c=12 ((Λύση του συστήματος δίνει c=-1)

3) **Εάν A=$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ να υπολογιστεί ο πραγματικός αριθμός χ, έτσι ώστε να ισχύει A^3-10A-χI=0**

Λύση

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 * A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -10 \\ -30 & 13 \end{pmatrix}$$

Επομένως **A^3-10A-χI_2=0 =>** $\begin{pmatrix} 23 & -10 \\ -30 & 13 \end{pmatrix} - 10 * \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{1} \end{pmatrix} - \chi * \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} <=> \begin{pmatrix} \mathbf{23-20-\chi} & \mathbf{-10+10-0} \\ \mathbf{-30+30-0} & \mathbf{13-10-\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} <=> \begin{pmatrix} \mathbf{3-\chi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3-\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} <=> \boldsymbol{\chi = 3}$

4) **Εάν A=$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ και B=$\begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \boldsymbol{\kappa} \end{pmatrix}$ για ποια τιμή του κ οι πίνακες A, B είναι αντιμεταθετικοί;**

Λύση

Για να είναι δύο πίνακες αντιμεταθετικοί πρέπει να ισχύει η σχέση AB=BA.
Άρα έχουμε:

AB=$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{1} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \boldsymbol{\kappa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4(3-\boldsymbol{\kappa})} \\ \mathbf{-30} & \boldsymbol{\kappa}\mathbf{-20} \end{pmatrix}$

BA=$\begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \boldsymbol{\kappa} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-24} \\ \mathbf{5(3-\boldsymbol{\kappa})} & \boldsymbol{\kappa}\mathbf{-20} \end{pmatrix}$

Για να ισχύει το AB=BA θα πρέπει τα ομοβάθμια στοιχεία να είναι ίσα και συνεπώς θα πρέπει

4(3-κ)=-24

5(3-κ)=-30

Η λύση του συστήματος δίνει κ=9

5) **Να χαρακτηριστούν οι πίνακες: A=**$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$**,**
B=$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$**, C=**$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

Λύση

A^2=A*A=$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ $ά\rho\alpha\ A\ \tau\alpha\upsilon\tau o\delta ύ\nu\alpha\mu o\varsigma$

Με πράξεις $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ και $B^2 * B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ άρα ο B είναι μηδενοδύναμος

Με πράξεις $C^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **άρα ο C είναι ενελικτικός.**

6) **Μία επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα, για τα οποία χρησιμοποιεί τέσσερα διαφορετικά υλικά. Οι ποσότητες των υλικών που χρησιμοποιεί η επιχείρηση σε μονάδες εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα.**

	ΥΛΙΚΟ Υ1	**ΥΛΙΚΟ Υ2**	**ΥΛΙΚΟ Υ3**	**ΥΛΙΚΟ Υ4**
ΠΡΟΪΟΝ Π1	**8**	**1**	**0,5**	**0**
ΠΡΟΪΟΝ Π2	**5**	**15**	**0,5**	**0**
ΠΡΟΪΟΝ Π3	**8**	**2**	**1**	**0,5**

Οι τιμές των υλικών ανά μονάδα δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

ΥΛΙΚΟ Υ1	**ΥΛΙΚΟ Υ2**	**ΥΛΙΚΟ Υ3**	**ΥΛΙΚΟ Υ4**
3	**5**	**10**	**20**

Να υπολογιστεί το κόστος κάθε προϊόντος με χρήση των πινάκων των τιμών τους.

Λύση

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0{,}5 & 0 \\ 5 & 15 & 0{,}5 & 0 \\ 8 & 12 & 1 & 0{,}2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 95 \\ 54 \end{pmatrix}$$

ΚΛΙΜΑΚΩΤΗ ΜΟΡΦΗ ΠΙΝΑΚΑ

Έστω δύο πίνακες A και B mxn. Ο πίνακας B καλείται **γραμμοϊσοδύναμος** του πίνακα A εάν ο B προκύπτει από τον A μετά από μία πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.

Ένας πίνακας A ονομάζεται **κλιμακωτός** εάν:
α) Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο σε κάθε μη μηδενική γραμμή είναι ίσο με τη μονάδα.
β) Η πρώτη μονάδα σε κάθε μη μηδενική γραμμή βρίσκεται στα δεξιά της πρώτης μονάδας της προηγούμενης γραμμής.
γ) Οι μηδενικές γραμμές βρίσκονται κάτω από τις μη μηδενικές γραμμές.

Παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Ένας κλιμακωτός πίνακας ονομάζεται **ανηγμένος ή αναγμένος κλιμακωτός** εάν η πρώτη μονάδα σε κάθε γραμμή είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης που τον περιέχει.

Παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Κάθε mxn πίνακας μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα γραμμοϊσοδύναμό του κλιμακωτό πίνακα με τη βοήθεια στοιχειωδών γραμμικών πράξεων:

1) Πολλαπλασιασμός μίας γραμμής ή στήλης με ένα μη μηδενικό αριθμό
2) Άθροισμα μίας γραμμής (ή στήλης) με το πολλαπλάσιο μίας άλλης
3) Εναλλαγή δύο γραμμών (ή στηλών)

Παράδειγμα

Να μετασχηματιστεί ο πίνακας Α=$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -15 \\ -8 & 2 & -12 \\ 12 & 6 & -8 \end{pmatrix}$ σε κλιμακωτή μορφή.

Λύση

Διαιρούμε την $1^η$ γραμμή με το 3 και ο πίνακας γίνεται
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -8 & 2 & -12 \\ 12 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την $1^η$ γραμμή με 8 και την προσθέτουμε στην $2^η$ γραμμή.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 18 & -52 \\ 12 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$
Πολλαπλασιάζουμε την $1^η$ γραμμή με -12 και την προσθέτουμε στην $3^η$ γραμμή.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 18 & -52 \\ 0 & -18 & 52 \end{pmatrix}$$
Διαιρούμε την $2^η$ γραμμή με 18

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -26/9 \\ 0 & -18 & 52 \end{pmatrix}$$
Πολλαπλασιάζουμε την $2^η$ γραμμή με 18 και την προσθέτουμε στην $3^η$ γραμμή

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -26/9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Αλγόριθμος μετατροπής ενός πίνακα σε ανηγμένο κλιμακωτό.

Βήμα $1^ο$:
Με εναλλαγή γραμμών, μετατρέπουμε το πρώτο στοιχείο της πρώτης μη μηδενικής στήλης διάφορο του μηδενός. Το στοιχείο αυτό ονομάζεται βασικό, όπως και το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής.

Βήμα $2^ο$:
Μετατρέπουμε το $1^ο$ μη μηδενικό στοιχείο της $1^{ης}$ γραμμής σε μονάδα.

Βήμα 3ο :
Μετατρέπουμε σε μηδέν όλα τα στοιχεία που βρίσκονται στη στήλη της 1ης μονάδας της 1ης γραμμής και κάτω από αυτό.

Βήμα 4ο :
Στην συνέχεια αγνοούμε την 1η στήλη και την 1η γραμμή του πίνακα και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 έως 3 για τις επόμενες γραμμές (εάν οι επόμενες γραμμές είναι όλες μηδενικές, τότε παραλείπουμε το βήμα 4 και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα)

Βήμα 5ο :
Μετατρέπουμε σε μηδέν όλα τα στοιχεία που βρίσκονται σε κάθε στήλη που περιέχει την 1η μονάδα μίας γραμμής.

Βήμα 6ο :
Ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται όταν η πρώτη μονάδα σε κάθε γραμμή είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης που το περιέχει.

Παράδειγμα
Να μετασχηματιστεί ο πίνακας σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Λύση

Πολλαπλασιάζουμε την 1η γραμμή με -3 και την προσθέτουμε στην 2η γραμμή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την 1η γραμμή με -2 και την προσθέτουμε στην 3η γραμμή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την 1η γραμμή με 2 και την προσθέτουμε στην 4η γραμμή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την 2η γραμμή με -1 και την προσθέτουμε στην 4η γραμμή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την 4η γραμμή με το 1/3 (διαιρούμε την 4η γραμμή με το 3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Προσθέτουμε την 4η γραμμή στην 2η γραμμή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Προσθέτουμε την 4η γραμμή στην 3η γραμμή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αφαιρούμε την 4η γραμμή από την 1η γραμμή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Εναλλάσσουμε την 3η με την 4η γραμμή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Βαθμίδα (rank) Πίνακα

Βαθμίδα ή τάξη του πίνακα A είναι το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα A και συμβολίζεται με rank(A) ή r(A).

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η βαθμίδα του πίνακα A=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Λύση

Θα μετατρέψουμε τον πίνακα A σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή

Αντιμεταθέτουμε τις γραμμές ένα και δύο

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την 1η γραμμή με -3 και την προσθέτουμε στην 3η γραμμή

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{-9} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$$

Διαιρούμε την 3η γραμμή με το -3

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5/3} \end{pmatrix}$$

Αφαιρούμε την 3η γραμμή από την 1η γραμμή

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1/3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5/3} \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι το **πλήθος** των μη μηδενικών γραμμών στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A είναι 3 και επομένως r(A)=3

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η βαθμίδα του πίνακα A=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Λύση

Θα μετατρέψουμε τον A σε κλιμακωτή ανηγμένη μορφή

Διαιρούμε την 1η γραμμή με το 2 και έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την 1η γραμμή επί 4 και την αφαιρούμε από την 2η γραμμή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Αφαιρούμε την 1η γραμμή από την 3η γραμμή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την 4η γραμμή επί 2 και στην προσθέτουμε στην 2η γραμμή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Προσθέτουμε την 3η γραμμή στην 1η γραμμή και έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Εναλλάσσουμε την 2η με την 4η γραμμή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε με 3/2 την 2η γραμμή και την προσθέτουμε στην 3η γραμμή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την $3^η$ γραμμή με -2 και την προσθέτουμε στην $4^η$ γραμμή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Αφαιρούμε την $3^η$ γραμμή από την $1^η$ γραμμή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών είναι 3 και συνεπώς rank(A)=3