ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Αντίστροφος πίνακας

Αν για έναν τετραγωνικό πίνακα A nxn υπάρχει ένας πίνακας B nxn ο οποίος ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις $A.B=I_n$ και $B.A=I_n$ τότε ο πίνακας B ονομάζεται αντίστροφος του A και συμβολίζεται με A^{-1}. Ένας τετραγωνικός πίνακας που έχει αντίστροφο ονομάζεται **μη ιδιάζων (ισχύει det(A)$\neq \mathbf{0}$**) ή **αντιστρέψιμος** πίνακας ενώ ένας πίνακας που δεν έχει αντίστροφο ονομάζεται **ιδιάζων (ισχύει det(A)=0)**.

Παρατήρηση: Για να ελέγξουμε εάν ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος βρίσκουμε τον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα R του A και α) εάν $R=I_n$ τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. β) εάν ο R έχει μία μηδενική γραμμή , τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος. (Επίσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ορίζουσα του A και εάν det(A)$\neq 0$ τότε ο A είναι αντιστρέψιμος).

Άσκηση

Να ελέγξετε εάν οι πίνακες $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμοι

Λύση

α) τρόπος (μετατροπή του πίνακα A σε ανηγμένο κλιμακωτό)

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$ προσθέτω στην $2^η$ γραμμή την $1^η$ γραμμή και έχω

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

Από την $3^η$ γραμμή αφαιρώ την $1^η$ γραμμή και έω

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

Αφαιρώ την $2^η$ γραμμή από την $3^η$ γραμμή και έχω

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Άρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος

β) τρόπος (υπολογισμός της ορίζουσας του A)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 * 1 * 4 + 0 * 2 * 1 + 1 * (-1) * 1 - 0 * (-1) * 4 - 1 * 2 * 1 - 1 * 1 * 1 = 4 + 0 - 1 - 0 - 2 - 1 = 0$$

Άρα ο Α δεν είναι αντιστρέψιμος

α) τρόπος (Μετατροπή του πίνακα Β σε ανηγμένο κλιμακωτό

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Στην $1^η$ γραμμή προσθέτω την $3^η$ γραμμή και έχω:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Εναλλάσσω την $2^η$ και την $3^η$ γραμμή και έχω:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Από την $3^η$ γραμμή αφαιρώ την $1^η$ γραμμή και έχω:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζω την $2^η$ γραμμή επί 2 και την αφαιρώ από την $3^η$ γραμμή και έχω:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Διαιρώ την $3^η$ γραμμή με το -3 και την προσθέτω στην $2^η$ γραμμή και έχω:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζω την $3^η$ γραμμή επί 2 και την αφαιρώ από την $1^η$ γραμμή και έχω:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς ο Β είναι αντιστρέψιμος

β) Τρόπος με υπολογισμό της ορίζουσας

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= 1*2*1+(-1)*1*0+1*1*1-(-1)*1*1-1*1*1-1*2*0 = 2+0+1+1-1-0 = 3$$

Άρα ο Β είναι αντιστρέψιμος.

Εύρεση του αντιστρόφου ενός πίνακα Α με την χρήση στοιχειωδών μετασχηματισμών

Σύμφωνα με την εν λόγω μέθοδο ο αντίστροφος του Α μπορεί να ευρεθεί εφαρμόζοντας τους ίδιους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στον ανηγμένο κλιμακωτό $\mathbf{I_n}$ του Α που εφαρμόστηκαν στον Α για να ευρεθεί ο $\mathbf{I_n}$.

Θα εξηγήσουμε την μέθοδο με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα

Να ευρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα Α=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Λύση

Δίπλα στον Α τοποθετούμε τον $\mathbf{I_n}$ και εφαρμόζουμε τους στοιχειώσεις μετασχηματισμούς στον Α για να πάρουμε τον $\mathbf{I_n}$ με την διαφορά οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί εφαρμόζονται σε όλα τα στοιχεία της γραμμής των δύο πινάκων, δηλαδή του Α και του $\mathbf{I_n}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Πολλαπλασιάζουμε την 1η γραμμή επί 3 και την αφαιρούμε από ττην 2η γραμμή και έχουμε:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Εναλλάσσουμε την 2η με την 3η γραμμή και έχουμε:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Προσθέτουμε την 2η γραμμή στην 1η γραμμή και έχουμε:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0\end{array}\right)$$

Πολλαπλασιάζουμε την 2^{η} γραμμή επί 5 και την αφαιρούμε από την 3^{η} γραμμή και έχουμε:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 8 & -3 & 1 & -5\end{array}\right)$$

Πολλαπλασιάζουμε την 3^{η} γραμμή με το 1/8 και έχουμε:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3/8 & 1/8 & -5/8\end{array}\right)$$

Πολλαπλασιάζουμε την 3^{η} γραμμή επί 2 και την προσθέτουμε στην 2^{η} γραμμή και έχουμε:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -3/4 & 1/4 & -1/4\\ 0 & 0 & 1 & -3/8 & 1/8 & -5/8\end{array}\right)$$

Άρα ο πίνακας $A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -3/4 & 1/4 & -1/4\\ -3/8 & 1/8 & -5/8\end{pmatrix}$ είναι ο αντίστροφος του Α.

Επαλήθευση

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 4\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1*1+\frac{3}{4}-\left(\frac{6}{8}\right) & 1*0-1*\frac{1}{4}+2*\left(\frac{1}{8}\right) & 1*1-1*\left(-\frac{1}{4}\right)+2*\left(-\frac{5}{8}\right)\\ 3*1+2*\left(-\frac{3}{4}\right)+4*\left(-\frac{3}{8}\right) & 3*0+2*\left(\frac{1}{4}\right)+4*\left(\frac{1}{8}\right) & 3*1+2*\left(-\frac{1}{4}\right)+4*\left(-\frac{5}{8}\right)\\ 0*1+1*\left(-\frac{3}{4}\right)+(-2)*\left(-\frac{3}{8}\right) & 0*0+1*\left(\frac{1}{4}\right)+(-2)*\left(\frac{1}{8}\right) & 0*1+1*\left(-\frac{1}{4}\right)+(-2)*\left(-\frac{5}{8}\right)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Υπολογισμός του αντιστρόφου πίνακα με χρήση συμπληρωματικού ή προσαρτημένου (adj(A)) πίνακα.

Προσαρτημένος Πίνακας (adj(A))

Έστω ένας nxn (i,j =1,2,….n) πίνακας A. Συμβολίζουμε με A_{ij} για κάθε i,j ∈ $\{1,2,\ldots\ldots n\}$ τον υποπίνακα που προκύπτει από τον A εάν διαγράψουμε την i γραμμή και την j στήλη τον οποίο ονομάζουμε **συμπαράγοντα** πίνακα του στοιχείου $\mathbf{a_{ij}}$. .

Ο **προσαρτημένος πίνακας adjA** του A είναι ο nxn πίνακας που στη θέση (i,j) έχει το στοιχείο $(-1)^{i+j}detA_{ji}$

$$\boldsymbol{adjA} = (\boldsymbol{c_{ij}}) = \left((-1)^{i+j}detA_{ji}\right) = \left(\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}detA_{11} & \cdots & (-1)^{1+n}detA_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}detA_{1n} & \cdots & (-1)^{n+n}detA_{nn} \end{pmatrix}\right)$$

Έστω A ένας μη ιδιάζων πίνακας. Δημιουργούμε τον **συμπληρωματικό** ή **προσαρτημένο** πίνακα του A adj(A) αν αντικαταστήσουμε τα στοιχεία $\mathbf{a_{ij}}$ του πίνακα A με τιμή της ορίζουσας των αντίστοιχων συμπαραγόντων πινάκων A_{ij} και πάρουμε τον ανάστροφό του, δηλαδή:

$$adj(A) = A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

και διαιρέσουμε όλα τα στοιχεία του με την τιμή της ορίζουσας του πίνακα A, δηλαδή

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)}$$

Παράδειγμα

Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Λύση

Συμπαράγοντες υποπίνακες: $A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, det(A_{11})=$(-1)^{1+1}(1x1 - (-2)x(-1) = -1$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det(A_{12}) = (-1)^{1+2}(1x1 - (-2)x(-2) = 3$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \det(A_{13}) = (-1)^{1+3}(1x(-1) - 1x(-2) = 1$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det(A_{21}) = (-1)^{2+1}(2x(1) - (-1)x(-1) = -1$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det(A_{22}) = (-1)^{2+2}(1x(1) - (-1)x(-2) = -1$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \det(A_{23}) = (-1)^{2+3}(1x(-1) - (2)x(-2) = -3$$

$$A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \det(A_{31}) = (-1)^{3+1}(2x(-2) - (-1)x(1) = -3$$

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \det(A_{32}) = (-1)^{3+2}(1x(-2) - (-1)x(1) = 1$$

$$A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det(A_{33}) = (-1)^{3+3}(1x(1) - (2)x(1) = -1$$

Με βάση τα παραπάνω έχουμε

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 1.1.1 + 2(-2)(-2) + (-1).1.(-1) - 2.1.1 - 1.(-2).(-1) - (-1).1.(-2) = 1 + 8 + 1 - 2 - 2 - 2 = 4$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

Επαλήθευση: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) **Εάν οι nxn πίνακες Α, Β και Α+Β είναι αντιστρέψιμοι, να αποδειχθεί ότι ο πίνακας $A^{-1}+B^{-1}$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει**

$$(\boldsymbol{A^{-1} + B^{-1}})^{-1} = \boldsymbol{A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A}$$

Λύση

Αρκεί να αποδείξω ότι $(A^{-1}+B^{-1})[A(A+B)^{-1}B] = I \; και \; (A^{-1}+B^{-1})[B(A+B)^{-1}A] = I$

Με άλλα λόγια θα δείξουμε ότι ο αντίστροφος του $A^{-1}+B^{-1}$ είναι ο $A(A+B)^{-1}B$ ή ο $B(A+B)^{-1}A$

$$\begin{aligned}(A^{-1}+B^{-1})[A(A+B)^{-1}B] &= A^{-1}A(A+B)^{-1}B + B^{-1}A(A+B)^{-1}B \\ &= I(A+B)^{-1}B + (B^{-1}A)(A+B)^{-1}B = (I+(B^{-1}A)(A+B)^{-1}B \\ &= (B^{-1}B + B^{-1}A)(A+B)^{-1}B = \left(B^{-1}(B+A)\right)(A+B)^{-1}B \\ &= \left(B^{-1}(A+B)\right)(A+B)^{-1}B = B^{-1}((A+B)(A+B)^{-1}B) = B^{-1}IB \\ &= B^{-1}B = I\end{aligned}$$

Ομοίως

$$\begin{aligned}(A^{-1}+B^{-1})[B(A+B)^{-1}A] &= A^{-1}B(A+B)^{-1}A + B^{-1}B(A+B)^{-1}A \\ &= A^{-1}B(A+B)^{-1}A + (B^{-1}B)(A+B)^{-1}A \\ &= A^{-1}B(A+B)^{-1}A + I(A+B)^{-1}A = (A^{-1}B+I)(A+B)^{-1}A \\ &= (A^{-1}B + A^{-1}A)(A+B)^{-1}A = A^{-1}(B+A)((A+B)^{-1}A \\ &= A^{-1}(A+B)((A+B)^{-1}A = A^{-1}(A+B)((A+B)^{-1}A = A^{-1}IA \\ &= A^{-1}A = I\end{aligned}$$

Άσκηση

Εάν δύο τετραγωνικοί πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι τότε και ο A*B είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Λύση

$$(B^{-1}A^{-1}) * A * B = B^{-1}(A^{-1} * A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

$$A * B * (B^{-1}A^{-1}) = A(B * B^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

Άσκηση

Να επαληθεύσετε ότι ο πίνακας

A=$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

είναι αντιστρέψιμος και να βρείτε τον αντίστροφό του. Στην συνέχεια να επαληθεύσετε ότι είναι πράγματι ο αντίστροφος.

Λύση

Θα επαληθεύσουμε ότι ο πίνακας έχει αντίστροφο με την μέθοδο υπολογισμού της ορίζουσας.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= 3*1*1+(-1)*(-3)*4+4*5*(-1)-(-1)*5*1-3*(-3)*(-1)-4*1*4=3+12-20+5+9-16=-7$$

Άρα ο πίνακας έχει αντίστροφο

Θα βρούμε τον αντίστροφο με τη μέθοδο των στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Πολλαπλασιάζουμε την $1^η$ γραμμή με το 1/3 και έχουμε:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/3 & 4/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Πολλαπλασιάζουμε την $1^η$ γραμμή με το 5 και την αφαιρούμε από την $2^η$ γραμμή

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/3 & 4/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & -29/3 & -5/3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Πολλαπλασιάζουμε την $1^η$ γραμμή με το 4 και την αφαιρούμε από την $3^η$ γραμμή

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/3 & 4/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & -29/3 & -5/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & -13/3 & -4/3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Προσθέτουμε την $3^η$ γραμμή στην $1^η$ γραμμή και έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 8/3 & -29/3 & -5/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & -13/3 & -4/3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Διαιρούμε την $2^η$ γραμμή με το 8/3 και έχουμε:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -29/8 & -5/8 & 3/8 & 0 \\ 0 & 1/3 & -13/3 & -4/3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Διαιρούμε την $2^η$ γραμμή με το 3 και την αφαιρούμε από την $3^η$ γραμμή και έχουμε:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -29/8 & -5/8 & 3/8 & 0\\ 0 & 0 & -25/8 & -9/8 & -1/8 & 1\end{array}\right)$$

Διαιρούμε την 3η γραμμή με το -25/8 και έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -29/8 & -5/8 & 3/8 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 9/25 & 1/25 & -8/25\end{array}\right)$$

Πολλαπλασιάζουμε την 3η γραμμή επί 3 και την προσθέτουμε στην 1η γραμμή

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2/25 & 3/25 & 1/25\\ 0 & 1 & -29/8 & -5/8 & 3/8 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 9/25 & 1/25 & -8/25\end{array}\right)$$

Πολλαπλασιάζουμε την 3η γραμμή με το 29/8 και την προσθέτουμε στην 2η γραμμή και έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2/25 & 3/25 & 1/25\\ 0 & 1 & 0 & 17/25 & 13/25 & -29/25\\ 0 & 0 & 1 & 9/25 & 1/25 & -8/25\end{array}\right)$$

Επαλήθευση

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 5 & 1 & -3\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}\frac{2}{25} & \frac{3}{25} & \frac{1}{25}\\ \frac{17}{25} & \frac{13}{25} & -\frac{29}{25}\\ \frac{9}{25} & \frac{1}{25} & -\frac{8}{25}\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\frac{6}{25}-\frac{17}{25}+\frac{36}{25} & \frac{9}{25}-\frac{13}{25}+\frac{4}{25} & \frac{3}{25}+\frac{29}{25}-\frac{32}{25}\\ \frac{10}{25}+\frac{17}{25}-\frac{27}{25} & \frac{15}{25}+\frac{13}{25}-\frac{3}{25} & \frac{12}{25}-\frac{13}{25}+\frac{1}{25}\\ \frac{8}{25}-\frac{17}{25}+\frac{9}{25} & \frac{12}{25}-\frac{13}{25}+\frac{1}{25} & \frac{4}{25}+\frac{29}{25}-\frac{8}{28}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$