5η ΔΙΑΛΕΞΗ (03.03.2020)

ΜΗΤΡΕΣ

Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών

Στοιχειώδεις μήτρες

Μέθοδος εύρεσης της αντίστροφης μιας μήτρας

8. Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών (στηλών)

Έστω η απεικόνιση $\theta : \mathcal{M}_{m\times n} \to \mathcal{M}_{m\times n}$. Θα λέμε ότι η θ είναι ένας **στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών (στηλών)** αν και μόνο αν για κάθε $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ η μήτρα $\theta(A)$ είναι:

i) Η μήτρα που προκύπτει από την A με εναλλαγή δύο, οποιωνδήποτε, γραμμών (στηλών) της A, ή

ii) Η μήτρα που προκύπτει από την A με πολλαπλασιασμό μιας γραμμής (στήλης) της A επί $\lambda \in \mathbb{R}^*$, ή

iii) Η μήτρα που προκύπτει από την A με πολλαπλασιασμό μιας γραμμής (στήλης) της A επί $\lambda \in \mathbb{R}$ και πρόσθεση αυτής σε μια άλλη γραμμή (στήλη).

Παρατήρηση Κάθε στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών ονομάζεται και **γραμμοπράξη**.

Έστω R_1, R_2, ..., R_m οι γραμμές και C_1, C_2, ..., C_n οι στήλες της μήτρας $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Θα συμβολίζουμε με

$R_i \leftrightarrow R_j$ την εναλλαγή των i και j γραμμών της μήτρας A, όπου $i, j \in [m]$, $i \neq j$.

$R_i \to \lambda R_i$ τον πολλαπλασιασμό της R_i επί $\lambda \in \mathbb{R}^*$, όπου $i \in [m]$.

$R_i \to R_i + \lambda R_j$ την πρόσθεση στην R_i της λR_j, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και $i, j \in [m]$, $i \neq j$.

Αντίστοιχα για τις στήλες (με C_i, C_j αντί για R_i, R_j).

Παράδειγμα: Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, τότε:

- Η εφαρμογή της γραμμοπράξης $R_2 \leftrightarrow R_3$ στην A δημιουργεί την μήτρα
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$
- Η εφαρμογή της γραμμοπράξης $R_2 \to 3R_2$ στην A δημιουργεί την μήτρα
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$
- Η εφαρμογή της γραμμοπράξης $R_2 \to R_2 + 2R_3$ στην A δημιουργεί την μήτρα
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήσεις

(1) Η απεικόνιση θ είναι αμφιμονοσήμαντη. Άρα, ορίζεται και ο αντίστροφος μετασχηματισμός θ^{-1} με

$$\theta(A) = B \Leftrightarrow \theta^{-1}(B) = A.$$

(2) Έστω θ ένας στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών (στηλών), $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και θ^{-1} ο αντίστροφος στοιχειώδης μετασχηματισμός του θ.

(α′) Αν $\theta(A) = B$ με $A \overset{R_i \leftrightarrow R_j}{\sim} B$, τότε $\theta^{-1}(B) = A$ με $B \overset{R_i \leftrightarrow R_j}{\sim} A$.

(β′) Αν $\theta(A) = B$ με $A \overset{R_i \to \lambda R_i}{\sim} B$, τότε $\theta^{-1}(B) = A$ με $B \overset{Ri \to \frac{1}{\lambda} R_i}{\sim} A$.

(γ′) Αν $\theta(A) = B$ με $A \overset{R_i \to R_i + \lambda R_j}{\sim} B$, τότε $\theta^{-1}(B) = A$ με $B \overset{R_i \to R_i - \lambda R_j}{\sim} A$.

Έστω $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

Θα λέμε ότι η μήτρα B είναι **R-ισοδύναμη** (αντ. **C-ισοδύναμη**) με την μήτρα A και θα γράφουμε

$$\mathbf{A} \overset{\mathbf{R}}{\sim} \mathbf{B}$$

(αντ. $\mathbf{A} \overset{\mathbf{C}}{\sim} \mathbf{B}$) αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία μητρών A_0, A_1, …, A_k έτσι ώστε $A_0 = A$, $A_k = B$ και η μήτρα A_{i+1} προκύπτει από την A_i από κάποιο στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών (αντ. στηλών), για κάθε $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Παρατήρηση Προφανώς, από τον ορισμό της R (αντ. C)-ισοδυναμίας προκύπτει ότι ότι αν $A \overset{R}{\sim} B$ (αντ. $A \overset{C}{\sim} B$) τότε υπάρχουν στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών (αντ. στηλών) $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{k-1}, \theta_k$ τέτοιοι ώστε

$$\begin{aligned} B &= (\theta_k \circ \theta_{k-1} \circ \cdots \circ \theta_2 \circ \theta_1)(A) \\ &= \theta_k(\theta_{k-1}(\cdots \theta_2(\theta_1(A)) \cdots)). \end{aligned}$$

Πρόταση 9. *Οι σχέσεις* $\overset{R}{\sim}$ *και* $\overset{C}{\sim}$ *είναι σχέσεις ισοδυναμίας στο* $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Απόδειξη. Άσκηση. □

Πρόταση 10. *Κάθε μήτρα $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ είναι R-ισοδύναμη με μια κλιμακωτή μήτρα.*

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 2 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_2 \to R_2 - 2R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 2 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_4 \to R_4 - 2R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_4 \to R_4 + 4R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Πρόταση 11. *Κάθε μήτρα $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ είναι R-ισοδύναμη με μια υποβαθμισμένη κλιμακωτή μήτρα.*
Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_1 \to R_1 - 3R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -17 & -30 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_3 \to -R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -17 & -30 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_1 \to R_1 + 17R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_2 \to R_2 - 5R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Πρόταση 12. *Έστω $A \in \mathcal{M}_n$ μια υποβαθμισμένη κλιμακωτή μήτρα. Αν η μήτρα A δεν έχει μηδενική γραμμή, τότε $A = I_n$.*

9. Στοιχειώδεις μήτρες

Κάθε μήτρα που προκύπτει από την μοναδιαία μήτρα I_n με εφαρμογή **μιας μόνο** στοιχειώδους πράξης γραμμών επί του I_n λέγεται **στοιχειώδης μήτρα**.

Για παράδειγμα, από τη μοναδιαία μήτρα

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

προκύπτουν οι στοιχειώδεις μήτρες

$$I_3 \overset{R_2 \to 3R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_3 \overset{R_2 \longleftrightarrow R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$I_3 \overset{R_3 \to R_3 + 3R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 13. *Αν η στοιχειώδης μήτρα E προκύπτει από την εφαρμογή μιας συγκεκριμένης στοιχειώδους πράξης θ στην μοναδιαία μήτρα I_m, και A είναι μια $m \times n$ μήτρα, τότε το γινόμενο EA είναι η μήτρα που προκύπτει όταν η θ εφαρμοσθεί επί της A, δηλαδή $\theta(A) = \theta(I_m)A = EA$.*

Για παράδειγμα, έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

και θ ο μετασχηματισμός $R_3 \to R_3 + 3R_1$.

Αν

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \theta(I_3),$$

τότε, πράγματι

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix},$$

που είναι ίδια με τη μήτρα που προκύπτει αν στην A προστεθεί στην τρίτη γραμμή το τριπλάσιο της πρώτης.

Άρα,

$$\theta(A) = \theta(I_3)A = EA.$$

Παρατήρηση: Με επαγωγή μπορεί να δειχθεί η γενίκευση της προηγούμενης πρότασης:

Πρόταση 14. *Αν $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ στοιχείωδεις μετασχηματισμοί γραμμών, $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ και $E_i = \theta_i(I_n)$, $i \in [k]$, τότε*

$$(\theta_k \circ \theta_{k-1} \circ \cdots \circ \theta_2 \circ \theta_1)(A) = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A.$$

Πρόταση 15. *Έστω $A \in \mathcal{M}_n$, $A \neq \mathbb{O}_n$ και $A \overset{R}{\sim} B$, όπου $B \in \mathcal{M}_n$ μια κλιμακωτή μήτρα. Η μήτρα A είναι μη αντιστρέψιμη αν και μόνο αν μια τουλάχιστον γραμμή της B είναι μηδενική.*

Παράδειγμα: Η μήτρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 2 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

είναι μη αντιστρέψιμη αφού (όπως είδαμε νωρίτερα) είναι R-ισοδύναμη με την κλιμακωτή μήτρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 16. *Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(1) Η μήτρα A είναι αντιστρέψιμη.

(2) Η μήτρα A είναι R-ισοδύναμη με την μήτρα I_n.

(3) Η μήτρα A είναι γινόμενο πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών μητρών.

Παράδειγμα 1: Η μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμη, διότι είναι R-ισοδύναμη με τη μήτρα I_n. Πράγματι,

$$A \overset{R_2 \to R_2 - R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_2 \to \frac{1}{3} R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{R_1 \to R_1 + R_2 \\ R_3 \to R_3 - R_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_1 \to R_1 - R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

Επίσης, αφού όπως μόλις δείξαμε, η A είναι αντιστρέψιμη, θα είναι γινόμενο πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών μητρών.

Πράγματι, ισχύει ότι (Άσκηση):

$$A = E_1 E_2 E_3 E_4 E_5$$

όπου οι μήτρες E_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ είναι οι παρακάτω στοιχειώδεις μήτρες:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I_3 \overset{R_2 \to R_2 + R_1}{\sim} E_1),$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I_3 \overset{R_2 \to 3R_2}{\sim} E_2),$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I_3 \overset{R_1 \to R_1 - R_2}{\sim} E_3),$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (I_3 \overset{R_3 \to R_3 + R_2}{\sim} E_4),$$

$$E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I_3 \overset{R_1 \to R_1 + R_3}{\sim} E_5),$$

Παράδειγμα 2: Έστω οι στοιχειώδεις μήτρες

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ (I_3 \overset{R_2 \to R_2 - R_1}{\sim} E_1),$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ (I_3 \overset{R_2 \to \frac{1}{3}R_2}{\sim} E_2),$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ (I_3 \overset{R_1 \to R_1 + 2R_2}{\sim} E_3).$$

Τότε η μήτρα

$$\begin{aligned} A &= E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

είναι αντιστρέψιμη.

10. Μέθοδος εύρεσης της αντίστροφης μιας μήτρας

Έστω $A \in \mathcal{M}_n$ μια αντιστρέψιμη μήτρα.
Τότε $A \overset{R}{\sim} I_n$. Άρα υπάρχουν στοιχειώδεις μετασχηματισμοί $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ με

$$(\theta_k \circ \cdots \circ \theta_2 \circ \theta_1)(A) = I_n,$$

ή, ισοδύναμα (λόγω της Πρότασης 14) υπάρχουν στοιχειώδεις μήτρες $E_1, E_2, \ldots, E_k$ με

$$(E_k \cdots E_2 E_1)A = I_n.$$

Δηλαδή η μήτρα $(E_k \cdots E_2 E_1)$ είναι η αντίστροφη της A.

Άρα,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= E_k \cdots E_2 E_1 \\ &= E_k \cdots E_2 E_1 I_n. \end{aligned}$$

Άρα, εφαρμόζοντας και πάλι την Πρόταση 14 για τη μήτρα I_n, προκύπτει ότι

$$A^{-1} = (\theta_k \circ \cdots \circ \theta_2 \circ \theta_1)(I_n).$$

Δηλαδή, **οι μετασχηματισμοί** $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ **που μετασχηματίζουν την** A **στην** I_n**, μετασχηματίζουν και την** I_n **στην** A^{-1}.

Έτσι, για να βρούμε την αντίστροφη μιας τετραγωνικής μήτρας A (αν η A είναι αντιστρέψιμη), ή για να αποδείξουμε ότι η A δεν είναι αντιστρέψιμη, γράφουμε τις μήτρες A και I_n, τη μια δίπλα στην άλλη και με κατάλληλους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, που **εκτελούμε ταυτόχρονα και στις δύο μήτρες** A και I_n, μετασχηματίζουμε την A σε μια υποβαθμισμένη κλιμακωτή μήτρα B και την I_n σε μια μήτρα C.
Αν $B = I_n$, τότε η A είναι αντιστρέψιμη και $A^{-1} = C$.
Αν $B \neq I_n$, τότε η A δεν είναι αντιστρέψιμη.

Παρατήρηση: Αν, στην προσπάθεια μετασχηματισμού της A σε υποβαθμισμένη κλιμακωτή, φτάσουμε σε κλιμακωτή μήτρα με μηδενική γραμμή, δεν χρειάζεται να συνεχίσουμε, αφού, βάσει της Πρότασης 15, γνωρίζουμε ότι η A δεν είναι αντιστρέψιμη.

Παραδείγματα:

(1) Για να δειχθεί ότι η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμη, και να βρεθεί η αντίστροφή της εργαζόμαστε ως εξής:

$$\left[\begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \underset{\sim}{R_1 \leftrightarrow R_3}$$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right] \underset{\sim}{\substack{R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1}}$$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{matrix}\right] \underset{\sim}{R_3 \to (-1)R_3}$$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{matrix}\right] \underset{\sim}{\substack{R_1 \to R_1 - R_3 \\ R_2 \to R_2 + R_3}}$$

$$I_3 = \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{matrix}\right] = A^{-1}.$$

(2) Για τη μήτρα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ έχουμε

$$\left[\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 4R_1 \\ R_3 \to R_3 - 7R_1}}{\sim}$$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \overset{\substack{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2 \\ R_3 \to -\frac{1}{6}R_3}}{\sim}$$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{7}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \end{matrix}\right] \overset{R_3 \to R_3 - R_2}{\sim} \left[\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{matrix}\right].$$

Αφού η κλιμακωτή μήτρα, που δημιουργήθηκε ως R-ισοδύναμη της A, είναι η $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, η οποία έχει μηδενική γραμμή, η A δεν είναι αντιστρέψιμη (βάσει της Πρότασης 15).