ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΜΗΤΡΕΣ

Άσκηση 1. *Έστω* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}$. *Να βρεθούν οι μήτρες:* $-2A$, $A+B$, B^t, AB^t *και* B^tA.

Λύση.

$$-2A = -2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}$$

$$\begin{aligned} AB^t &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 & 1\cdot 4 + 1\cdot 4 + 3\cdot 8 \\ 0\cdot 2 + (-1)\cdot 3 + 2\cdot 4 & 0\cdot 4 + (-1)\cdot 4 + 2\cdot 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 20 & 36 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^tA &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 4\cdot 0 & 2\cdot 2 + 4\cdot(-1) & 2\cdot 3 + 4\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 0 & 3\cdot 2 + 4\cdot(-1) & 3\cdot 3 + 4\cdot 2 \\ 4\cdot 1 + 8\cdot 0 & 4\cdot 2 + 8\cdot(-1) & 4\cdot 3 + 8\cdot 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 14 \\ 3 & 2 & 17 \\ 4 & 0 & 28 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}. \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση: Οι μήτρες δεν είναι μόνο μια δομή αποθήκευσης πληροφορίας, αλλά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μοντελοποίησουν και να λύσουν πολλές κατηγορίες προβλημάτων.

Άσκηση 2. *Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x - y + 3z &= 4 \\ x + 2y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

Λύση. Αν τεθεί

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

τότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση μητρών

$$AX = B.$$

Πράγματι,

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&3\\1&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1\cdot x+1\cdot y+1\cdot z\\2\cdot x+(-1)\cdot y+3\cdot z\\1\cdot x+2\cdot x+(-2)\cdot z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x+y+z\\2x-y+3z\\x+2y-2z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}.$$

Από την τελευταία ισότητα μητρών το αρχικό σύστημα των τριών εξισώσεων. Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση $AX=B$ από τα αριστερά με τη μήτρα

$$C=-\frac{1}{8}\begin{bmatrix}4&-4&-4\\-7&3&1\\-5&1&3\end{bmatrix}$$

έχουμε ότι

$$-\frac{1}{8}\begin{bmatrix}4&-4&-4\\-7&3&1\\-5&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&3\\1&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{bmatrix}4&-4&-4\\-7&3&1\\-5&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-8&0&0\\0&-8&0\\0&0&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-8\\-8\\-8\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Άρα, $x=y=z=1$. □

Άσκηση 3. *Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι αντίστροφες των παρακάτω μητρών:*

i) $A_1=\begin{bmatrix}1&2&1\\-2&-6&3\\1&2&3\end{bmatrix}$.

ii) $A_2=\begin{bmatrix}1&a&3\\-2&b&a\\0&1&2\end{bmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Λύση.

i) Η μήτρα A_1 αντιστρέφεται ανν η ορίζουσά της είναι μη μηδενική.

Για τον υπολογισμό της ορίζουσας της A_1 χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των οριζουσών καθώς και τον τύπο του αναπτύγματος. Είναι

$$|A_1|=\begin{vmatrix}1&2&1\\-2&-6&3\\1&2&3\end{vmatrix}\overset{R_3\to R_3-R_1}{=}\begin{vmatrix}1&2&1\\-2&-6&3\\0&0&2\end{vmatrix}$$

Στη συνέχεια αναπτύσσουμε κατά τα στοιχεία της 3ης γραμμής και προκύπτει ότι

$$|A_1|=0\cdot\begin{vmatrix}2&1\\-2&-6\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}1&1\\-2&3\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}1&2\\-2&-6\end{vmatrix}=2\cdot(1\cdot(-6)-(-2)\cdot 2)=-4\neq 0.$$

Άρα, η μήτρα A_1 αντιστρέφεται.

Για τον υπολογισμό της αντίστροφής της, χρησιμοποιούμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών και μετασχηματίζουμε τη μήτρα A_1 στη μήτρα I_3 (ταυτόχρονα μετασχηματίζουμε τη μήτρα I_3, εφαρμόζοντας τους ίδιους μετασχηματισμούς, και προκύπτει η αντίστροφη της A_1).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{=}{\overset{\substack{R_2 \to R_2 + 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}}{}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{=}{\overset{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2}{}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{=}{\overset{R_1 \to R_1 - 2R_2}{}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{=}{\overset{R_3 \to \frac{1}{2}R_3}{}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \underset{=}{\overset{\substack{R_1 \to R_1 - 6R_3 \\ R_2 \to R_2 + \frac{5}{2}R_3}}{}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ -9/4 & -1/2 & 5/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Άρα, $A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ -9/4 & -1/2 & 5/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.

Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι το αποτέλεσμα που βρήκαμε είναι σωστό πολλαπλασιάζοντας τις δύο μήτρες:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ -9/4 & -1/2 & 5/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-\frac{9}{4}) + 1 \cdot (-\frac{1}{2}) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot \frac{5}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} \\ (-2) \cdot 6 + (-6) \cdot (-\frac{9}{4}) + 3 \cdot (-\frac{1}{2}) & (-2) \cdot 1 + (-6) \cdot (-\frac{1}{2}) + 3 \cdot 0 & (-2) \cdot (-3) + (-6) \cdot \frac{5}{4} + 3 \cdot (1/2) \\ 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-\frac{9}{4}) + 3 \cdot (-\frac{1}{2}) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 3 \cdot 0 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot \frac{5}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι για την εύρεση της αντίστροφης μιας μήτρας δεν είναι υποχρεωτική η χρήση του κριτηρίου της ορίζουσας. Αν η μήτρα δεν αντιστρέφεται αυτό θα προκύψει κατά τη διαδικασία μετατροπής της σε ανηγμένη κλιμακωτή, όπου θα εμφανισθούν μηδενικές γραμμές.

ii) Η εύρεση της αντίστροφης της μήτρας A_2 παρουσιάζει τη δυσκολία ότι δεν γνωρίζουμε ποιες είναι οι τιμές των a, b.

Εδώ το κριτήριο της ορίζουσας είναι ιδιαίτερα χρήσιμο, αλλά η διαδικασία μπορεί να γίνει και χωρίς αυτό, όπως παρουσιάζεται παρακάτω:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ -2 & b & a \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{=}{\overset{R_2 \to R_2 + 2R_1}{}} \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & b+2a & a+6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επειδή δεν γνωρίζουμε αν $b + 2a \neq 0$ δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον στοιχειώδη μετασχηματισμό $R_2 \to \frac{1}{b+2a}R_2$ χωρίς να πάρουμε περιπτώσεις. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα όμως μπορούμε να εναλλάξουμε τις γραμμές 2 και 3 και να συνεχίσουμε τη διαδικασία χωρίς περιπτώσεις:

$$\underset{=}{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc} 1 & a & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & b+2a & a+6 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{=}{\substack{R_1 \to R_1 - aR_2 \\ R_3 \to R_3 - (b+2a)R_2}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3-2a \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a+6-2(b+2a) \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -b-2a \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3-2a \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6-2b-3a \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -b-2a \end{array}\right]$$

Τώρα, προκειμένου να συνεχίσουμε πρέπει οπωσδήποτε να διακρίνουμε περιπτώσεις:

Αν $6-2b-3a=0$, ή ισοδύναμα $b=3-\frac{3}{2}a$ τότε η μήτρα A_2 δεν αντιστρέφεται, αφού είναι R-ισοδύναμη με τη μήτρα

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3-2a \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

η οποία περιέχει μηδενική γραμμή.

Αν $6-2b-3a \neq 0$ τότε έχουμε ότι

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3-2a \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6-2b-3a \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -b-2a \end{array}\right] \underset{=}{R_3 \to \frac{1}{6-2b-3a}R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3-2a \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{6-2b-3a} & \frac{1}{6-2b-3a} & \frac{-b-2a}{6-2b-3a} \end{array}\right] \underset{=}{\substack{R_1 \to R_1 - (3-2a)R_3 \\ R_2 \to R_2 - 2R_3}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} \frac{a-2b}{6-2b-3a} & -\frac{3-2a}{6-2b-3a} & -\frac{a^2-3b}{6-2b-3a} \\ -\frac{4}{6-2b-3a} & -\frac{2}{6-2b-3a} & \frac{a+6}{6-2b-3a} \\ \frac{2}{6-2b-3a} & \frac{1}{6-2b-3a} & \frac{-b-2a}{6-2b-3a} \end{array}\right].$$

Άρα, αν $6-2b-3a \neq 0$ τότε

$$A_2^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{a-2b}{6-2b-3a} & -\frac{3-2a}{6-2b-3a} & -\frac{a^2-3b}{6-2b-3a} \\ -\frac{4}{6-2b-3a} & -\frac{2}{6-2b-3a} & \frac{a+6}{6-2b-3a} \\ \frac{2}{6-2b-3a} & \frac{1}{6-2b-3a} & \frac{-b-2a}{6-2b-3a} \end{array}\right] = \frac{1}{6-2b-3a} \left[\begin{array}{ccc} a-2b & 2a-3 & 3b-a^2 \\ -4 & -2 & a+6 \\ 2 & 1 & -b-2a \end{array}\right].$$

Ας δούμε, τώρα, τι πληροφορίες μας παρέχει το κριτήριο της ορίζουσας για τη μήτρα A_2 (αναπτύσσοντάς κατά τα στοιχεία της τρίτης γραμμής)

$$|A_2| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & a & 3 \\ -2 & b & a \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right| = -1 \cdot \left|\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ -2 & a \end{array}\right| + 2 \cdot \left|\begin{array}{cc} 1 & a \\ -2 & b \end{array}\right| = -1 \cdot (a+6) + 2(b+2a) = 2b+3a-6$$

Άρα, επιβεβαιώνουμε και πάλι ότι η μήτρα A_2 αντιστρέφεται αν και μόνο αν $2b+3a-6 \neq 0$. Με τη βοήθεια αυτού του κριτηρίου, γνωρίζουμε εξ αρχής ποιες περιπτώσεις πρέπει να διακρίνουμε κατά τη διαδικασία μετατροπής της A_2 σε ανηγμένη κλιμακωτή μήτρα. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ
ΜΗΤΡΕΣ

1. (Αντιστροφή μήτρας) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι αντίστροφες των παρακάτω μητρών:

i) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

ii) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

iii) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

iv) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

v) $A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 2a \\ 1 & 4 & 3a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

vi) $A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & a \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

vii) $A_7 = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 12 & -8 & 9 \\ -9 & 8 & 12 & 0 \\ -8 & -9 & 0 & 12 \end{bmatrix}$.

viii) $A_8 = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 & 0 \\ 24 & 17 & 7 & 0 \\ -32 & 10 & 6 & 0 \\ 16 & 14 & 10 & 1 \end{bmatrix}$.

ix) $A_8 = \begin{bmatrix} 18 & -38 & 7 & -37 \\ 7 & 21 & -26 & -28 \\ 73 & 81 & 17 & -49 \\ 19 & -43 & -49 & -47 \end{bmatrix}$.

2. (Μήτρες Hilbert) Να βρεθούν οι αντίστροφες των παρακάτω μητρών, που ονομάζονται **μήτρες Hilbert**.

$$H_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad H_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix},$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

3. (Δυνάμεις μήτρας) Να βρεθούν οι μήτρες B^n, όπου $n \in \mathbb{N}^*$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

ii) $B_2 = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

iii) $B_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

iv) $B_4 = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$.

v) $B_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

vi) $B_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

vii) $B_7 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

viii) $B_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

ix) $B_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

x) $B_{10} = \begin{bmatrix} -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 \end{bmatrix}$.

xi) $B_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

xii) $B_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Σε κάθε περίπτωση, η εικασία σας να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή.

4. (Μήτρα στροφής) Αν $A = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}$ να δειχθεί ότι

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos na & -\sin na \\ \sin na & \cos na \end{bmatrix},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

5. (Ειδικές μήτρες)

   i) Αν $A, B \in \mathcal{M}_n$ με $AB = BA = O_n$, να δειχθεί ότι $(A+B)^\nu = A^\nu + B^\nu$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

   ii) Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ και $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, να υπολογισθούν οι μήτρες A^ν, B^ν και C^ν, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

6. (Διαγώνιες μήτρες) Έστω A, B διαγώνιες μήτρες με $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}$ και $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

   i) Να δειχθεί ότι $A^t = A$.

   ii) Να δειχθεί ότι αν $A^n = [c_{ij}]$ τότε $c_{ij} = a_{ij}^n$.

   iii) Να εξετασθεί πότε η A αντιστρέφεται και να βρεθούν τα στοιχεία c_{ij} της A^{-1}.

   iv) Να δειχθεί ότι οι μήτρες $A+B$, $A-B$, AB είναι επίσης διαγώνιες μήτρες.

7. (Αντιμετάθεση μητρών) Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$. Σε ποια περίπτωση ισχύει η ταυτότητα $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;

   Επίσης, πότε ισχύει η ταυτότητα $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$;

8. (Αντιμετάθεση μητρών) Έστω $A, B, C \in \mathcal{M}_n$. Αν $AC = CA$ και $BC = CB$ να δειχθεί ότι
$$C(AB+BA) = (AB+BA)C.$$

9. (Αντιμετάθεση μητρών) Έστω $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$. Αν $ABCD = I$ να δειχθεί ότι
$$ABCD = DABC = CDAB = BCDA = I.$$

10. (Πράξεις μητρών) Έστω A, B, C μήτρες τύπου $n \times n$. Ορίζουμε $A * B = AB - BA$.

    Να δειχθεί ότι $A * A = O_n$ και
$$(A*B)*C + (B*C)*A + (C*A)*B = O_n.$$

11. (Ορθογώνια μήτρα) Να εξετασθεί αν η μήτρα
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
    είναι ορθογώνια.

12. (Ορθογώνιες μήτρες) Έστω $A, B, C \in \mathcal{M}_n$.

    i) Να δειχθεί ότι αν η A είναι ορθογώνια τότε και η μήτρα A^{-1} είναι ορθογώνια.

    ii) Να δειχθεί ότι αν A, B είναι ορθογώνιες τότε και η μήτρα AB είναι ορθογώνια.

    iii) Να δειχθεί ότι αν $AB = BA$ και C είναι ορθογώνια, τότε οι μήτρες C^tAC και C^tBC αντιμετατίθεται.

13. (Συμμετρικές μήτρες) Να βρεθεί ο μέγιστος αριθμός διαφορετικών στοιχείων που μπορεί να έχει μια συμμετρική $n \times n$ μήτρα A.

14. (Συμμετρικές μήτρες) Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$.

    i) Να δειχθεί ότι οι μήτρες AA^t και A^tA είναι συμμετρικές.

    ii) Να δειχθεί ότι αν η μήτρα A είναι συμμετρική τότε και η μήτρα B^tAB είναι συμμετρική.

15. (Ίχνος μήτρας) Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$.

    i) Να δειχθεί ότι $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$ και $tr(AB) = tr(BA)$.

    ii) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $AX - XA = I_n$ είναι αδύνατη.

16. (Εξισώσεις με μήτρες)

    i) Έστω $A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & a \end{bmatrix}$, όπου $a \neq 0$.

       Να βρεθούν όλες οι μήτρες B ώστε $A_1B = BA_1$.

    ii) Έστω $A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, όπου $ab \neq 0$.

       Να βρεθούν όλες οι μήτρες B ώστε $A_2B = BA_2$.

iii) Έστω $A_3 = \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}$, όπου $ab \neq 0$. Να βρεθούν όλες οι μήτρες B ώστε $A_3B = BA_3$.

iv) Να προσδιορισθούν όλες οι αδύναμες μήτρες $A_4 = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & c \end{bmatrix}$, όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$.

v) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε η μήτρα $A_5 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ να είναι ορθογώνια.

17. (Αντιπαραδείγματα)

i) Να δοθεί ένα παράδειγμα δύο μη διαγώνιων μητρών A, B για τις οποίες η μήτρα AB είναι διαγώνια.

ii) Να δοθεί ένα παράδειγμα τριών μητρών A, B, C για τις οποίες $tr(ABC) \neq tr(ACB)$.

iii) Να δοθεί ένα παράδειγμα μητρών A, B τύπου 2×2 ώστε $AB = O_2$ και $BA \neq O_2$.

iv) Να δοθεί ένα παράδειγμα μη μηδενικών μητρών A, B τύπου 2×2 για τις οποίες $A + B = AB$.

18. (Ειδικές μήτρες) Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$. Να δειχθεί ότι αν $A + B = AB$ τότε

(i) $(A - I_n)(B - I_n) = (B - I_n)(A - I_n)$,

(ii) $AB = BA$.

19. (Αντιστρέψιμες μήτρες) Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$. Να δειχθεί ότι αν η μήτρα AB είναι αντιστρέψιμη, τότε και οι μήτρες A, B είναι επίσης αντιστρέψιμες.

20. (Αντιστρέψιμες μήτρες) Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Να δειχθεί ότι αν η μήτρα A^4 είναι αντιστρέψιμη, τότε και η μήτρα A είναι επίσης αντιστρέψιμη.

21. (Αδύναμες μήτρες) Έστω $A \in \mathcal{M}_n$ και $A \neq I_n$. Να δειχθεί ότι αν A είναι αδύναμη, τότε η A δεν αντιστρέφεται.

22. (Αυτοαντίστροφες μήτρες) Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Η μήτρα A ονομάζεται **αυτοαντίστροφη** αν $A^2 = I_n$.

(i) Να δειχθεί ότι αν η A είναι αδύναμη, τότε η μήτρα $2A - I_n$ είναι αυτοαντίστροφη.

(ii) Να δειχθεί ότι αν η A είναι αυτοαντίστροφη, τότε η μήτρα $(A + I)/2$ είναι αδύναμη.

23. (Αντιστρέψιμες μήτρες) Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Να δειχθεί ότι αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}^*$ ώστε $A^k = O_n$, τότε η μήτρα $A + I$ είναι αντιστρέψιμη.

24. (Αντιστρέψιμες μήτρες) Έστω $A \in \mathcal{M}_n$ με $A^2 = A - I_n$. Να δειχθεί ότι οι μήτρες A και $A - 2I_n$ είναι αντιστρέψιμες.

25. (Αντιστρέψιμες μήτρες) Έστω $A \in \mathcal{M}_n$ με $A^2 + 2A - 3I_n = O_n$.

(i) Να δειχθεί ότι οι μήτρες A, $A + 2I$ είναι αντιστρέψιμες.

(ii) Να δειχθεί ότι η μήτρα $A - kI$ είναι αντιστρέψιμη για κάθε $k \neq 1, 3$.

26. (Αντιστρέψιμες μήτρες) Έστω A, B αντιστρέψιμες $n \times n$ μήτρες. Να δειχθεί ότι

(i) $(I_n - B^{-1}AB)^{-1} = B^{-1}(I_n - A)B$.

(ii) $A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(B + A)B^{-1}$.

(iii) $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B$.

27. (Συμμετρικές μήτρες) Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Να δειχθεί ότι η μήτρα $A + A^t$ είναι συμμετρική, ενώ η μήτρα $A - A^t$ είναι αντισυμμετρική.

28. (Ανάλυση μητρών σε άθροισμα) Να δειχθεί ότι κάθε τετραγωνική μήτρα γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα μιας συμμετρικής και μιας στρεβλά συμμετρικής μήτρας.

29. (Άθροισματα στηλών και γραμμών) Να εξετασθεί αν είναι δυνατό να κατασκευασθεί μια $n \times n$ μήτρα με τις παρακάτω ιδιότητες:

α) το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής της να είναι θετικό.

β) το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης της να είναι αρνητικό.

30. (Πολυπλοκότητα πολλαπλασιασμού μητρών)

i) Να υπολογισθεί ο αριθμός των πολλαπλασιασμών και των προσθέσεων που πρέπει να κάνουμε για να υπολογίσουμε το γινόμενο μιας μήτρας A τύπου $1 \times n$ με μια μήτρα B τύπου $n \times 1$.

ii) Να υπολογισθεί ο αριθμός των πολλαπλασιασμών και των προσθέσεων που πρέπει να κάνουμε για να υπολογίσουμε το γινόμενο μιας μήτρας A τύπου $m \times n$ με μια μήτρα B τύπου $n \times k$.

31. (Cayley - Hamilton για 2×2 μήτρες) Έστω η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

i) Να δειχθεί ότι η A ικανοποιεί την εξίσωση $A^2 - 4A + 5I = O$.

ii) Να δειχθεί ότι η μήτρα A^n (όπου $n \geqslant 2$) μπορεί να γραφεί με την μορφή $A^n = a_n A + b_n I_2$.

iii) Να δειχθεί ότι $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ και $b_{n+1} = -5a_n$.

iv) Να υπολογισθούν οι μήτρες A^3, A^4, A^5.

v) Να υπολογισθεί η μήτρα A^{-1}.

32. (Τεχνάσματα μητρών) Έστω η μήτρα $A = \begin{bmatrix} -2 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

(i) Να δειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι
$$A^{n+2} - A^n = A^2 - I_n.$$

(ii) Να βρεθεί η μήτρα A^{2016}.

33. (LU-ανάλυση μήτρας) Να βρεθεί, αν υπάρχει, μια LU-ανάλυση για τις παρακάτω μήτρες:

i) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

ii) $A_2 = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 5 & 26 & 35 \\ 3 & 14 & 25 \end{bmatrix}$

iii) $A_3 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -6 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 6 & -10 \end{bmatrix}$

iv) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

v) $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

vi) $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Σημείωση: Οι επόμενες ασκήσεις απαιτούν γνώσεις από το κεφάλαιο των αλγεβρικών δομών.

34. (Ορθογώνιες μήτρες) Έστω O_n το σύνολο των ορθογωνίων μητρών. Να δειχθεί ότι σύνολο O_n εφοδιασμένο με την πράξη του πολλαπλασιασμού μητρών είναι ομάδα.

35. (Ομάδα Pauli) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο των επόμενων μητρών αποτελεί ομάδα ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού μητρών:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix},$$
$$G = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

η οποία ονομάζεται ομάδα του Pauli.