Κεφάλαιο 1

Μήτρες

1.1 Βασικοί ορισμοί και συμβολισμοί

Έστω F ένα μη κενό σύνολο.

Μήτρα (ή **πίνακας**) **τύπου** $m \times n$, ή $m \times n$ **μήτρα**, **με στοιχεία από το** F, ονομάζεται κάθε απεικόνιση

$$A : [m] \times [n] \to F.$$

Η εικόνα του $(i, j) \in [m] \times [n]$[1] μέσω της απεικόνισης A συμβολίζεται με $\mathbf{a_{ij}}$ αντί για $A(i, j)$ και ονομάζεται **στοιχείο** της μήτρας A.

Παράδειγμα: Η απεικόνιση $A : [2] \times [3] \to \mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} a_{11} &= A(1,1) = 2 \\ a_{12} &= A(1,2) = 5 \\ a_{13} &= A(1,3) = 1 \\ a_{21} &= A(2,1) = 3 \\ a_{22} &= A(2,2) = 3 \\ a_{23} &= A(2,3) = 5 \end{aligned}$$

είναι μια 2×3 μήτρα με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς.

Μια $m \times n$ μήτρα A με στοιχεία $a_{ij} \in F$, (όπου $i \in [m],\ j \in [n]$), **παριστάνεται** διατάσσοντας τα στοιχεία a_{ij} σε m **γραμμές** και n **στήλες** ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα:

Η μήτρα $A : [2] \times [3] \to \mathbb{R}$ με

$$\begin{matrix} a_{11} = 2 & a_{12} = 5 & a_{13} = 1 \\ a_{21} = 3 & a_{22} = 3 & a_{23} = 5 \end{matrix}$$

παριστάνεται ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

[1](Υπενθύμιση $[n] = \mathbb{N}_n^* = \{1, 2, \ldots, n\}$).

Στα επόμενα θα ταυτίζουμε μια μήτρα με την αναπαράστασή της.

Το σύνολο όλων των $m \times n$ μητρών με στοιχεία από το F θα το συμβολίζεται με $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$.

Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Η διατεταγμένη n-άδα

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{in})$$

ονομάζεται **i-γραμμή της μήτρας** A και συμβολίζεται με R_i. Το i θα λέγεται **δείκτης** της γραμμής.

Η διατεταγμένη n-άδα

$$(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{mj})$$

ονομάζεται **j-στήλη της μήτρας** A και συμβολίζεται με C_j. Το j θα λέγεται **δείκτης** της στήλης.

Στο στοιχείο a_{ij} της μήτρας A, ο πρώτος δείκτης i είναι ο δείκτης της γραμμής R_i στην οποία ανήκει το στοιχείο, ενώ ο δεύτερος δείκτης j είναι δείκτης της στήλης C_j στην οποία ανήκει το στοιχείο.

Αν $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$ θα λέμε ότι ο **τύπος** της μήτρας A είναι $m \times n$. Στα επόμενα, θα θεωρούμε $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και θα γράφουμε απλά $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

Επίσης, για λόγους συντομίας θα χρησιμοποιούμε και τους συμβολισμούς

$$A = [a_{ij}]_{i\in[m], j\in[n]}, \text{ ή } A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$$

ή απλά

$$A = [a_{ij}]$$

όταν ο τύπος της μήτρας A είναι γνωστός.

Μια γραμμή ή στήλη μιας μήτρας λέγεται **μηδενική** αν όλα τα στοιχεία της είναι ίσα με 0.

Παράδειγμα: Η παρακάτω μήτρα έχει δύο μηδενικές γραμμές (την R_2 και την R_5) και μια μηδενική στήλη (την C_2).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.2 Ισότητα μητρών

Δύο μήτρες $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ είναι **ίσες** αν έχουν τον ίδιο τύπο $m \times n$ και ισχύει

$$a_{ij} = b_{ij} \text{ για κάθε } i \in [m] \text{ και } j \in [n]$$

1.3 Μορφές μητρών

Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

(1) Η A λέγεται **μήτρα γραμμή** αν $m = 1$.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

(2) Η A λέγεται **μήτρα στήλη** αν $n = 1$.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(3) Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **μηδενική μήτρα** και συμβολίζεται με $\mathbb{O}_{m\times n}$ αν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{O}_{2\times 3}.$$

Αν $m = n$ γράφουμε $\mathbb{O}_n$.

(4) Η μήτρα $B = [b_{ij}]$ λέγεται **ανάστροφη μήτρα** της $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και συμβολίζεται με A^t ή A^T, αν $B \in \mathcal{M}_{n\times m}$ και

$$b_{ij} = a_{ji}$$

για κάθε $i \in [n]$ και $j \in [m]$.

Παράδειγμα:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 4},$$

τότε

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 2}.$$

Παρατήρηση: Ισχύει ότι

$$(A^t)^t = A,$$

δηλαδή η ανάστροφη της ανάστροφης μήτρας της A ισούται με τη μήτρα A.

(5) Η μήτρα $B = [b_{ij}]$ λέγεται **αντίθετη μήτρα** της $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και συμβολίζεται με $-A$, αν $B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και

$$b_{ij} = -a_{ij}$$

για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$.

Παράδειγμα:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix},$$

τότε

$$-A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

(6) Η μήτρα $B = [b_{ij}]$ λέγεται **συζυγής μήτρα** της $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ και συμβολίζεται με $\overline{A}$ αν $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ και

$$b_{ij} = \overline{a}_{ij}$$

για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$.

Παράδειγμα:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2-i & 3+3i \\ 6 & -i & 5-4i \end{bmatrix}$$

τότε

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2+i & 3-3i \\ 6 & i & 5+4i \end{bmatrix}.$$

1.4 Τετραγωνικές μήτρες

Η μήτρα $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ ονομάζεται **τετραγωνική μήτρα** αν $m = n$.
Στην περίπτωση αυτή, αντί για $\mathcal{M}_{n\times n}$ γράφουμε $\mathcal{M}_n$.
Για τις τετραγωνικές μήτρες μόνο έχουμε και τους παρακάτω ορισμούς:

(i) Η **κύρια διαγώνιος** της A αποτελείται από τα στοιχεία a_{ii}, $i \in [n]$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \mathbf{a}_{nn} \end{bmatrix}.$$

Η **δευτερεύουσα διαγώνιος** της A αποτελείται από τα στοιχεία $a_{i,n-i+1}$, $i \in [n]$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1\ 1} & \mathbf{a}_{n-1\ 2} & \cdots & a_{n-1\ n} \\ \mathbf{a}_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

(ii) **Ίχνος της** $A = [a_{ij}]$ ονομάζεται το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου της και συμβολίζεται με $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$, δηλαδή

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Παράδειγμα:

Αν

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 7 \\ \sqrt{3} & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

τότε

$$\mathrm{tr}(A) = 1 + (-8) + 1 = -6.$$

(iii) Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **διαγώνια μήτρα** αν

$$a_{ij} = 0, \text{ για κάθε } i \neq j.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε και

$$A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}).$$

Έτσι στο συγκεκριμένο παράδειγμα

$$A = \text{diag}(-3, 4, 0).$$

Όμοια,

$$\text{diag}(1, 2, 0, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Παρατήρηση: Το σύνολο των διαγώνιων μητρών τύπου $n \times n$ συνήθως συμβολίζεται με $\mathcal{D}_n$.

(iv) Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **μοναδιαία** (ή **ταυτοτική**) **μήτρα** αν είναι διαγώνια μήτρα με $a_{ii} = 1$ για κάθε $i \in [n]$ και συμβολίζεται με I_n.

Παραδείγματα

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(v) Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **τριγωνική κάτω** αν

$$a_{ij} = 0 \text{ για κάθε } i < j.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **τριγωνική πάνω** αν

$$a_{ij} = 0 \text{ για κάθε } i > j.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

(vi) Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **συμμετρική μήτρα** αν

$$a_{ij} = a_{ji} \text{ για κάθε } i, j \in [n]$$

ή, ισοδύναμα, αν

$$A^t = A.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & 5 & -1 & 10 \\ 2 & -4 & 10 & 1 \end{bmatrix} = A^t.$$

(vii) Η A λέγεται **στρεβλά συμμετρική** αν

$$a_{ij} = -a_{ji} \text{ για κάθε } i, j \in [n]$$

ή, ισοδύναμα, αν

$$A = -A^t.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix} = -A^t.$$

(viii) Η $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ λέγεται **ερμιτιανή** αν

$$a_{ij} = \overline{a_{ji}} \text{ για κάθε } i, j \in [n]$$

ή, ισοδύναμα, αν

$$A = \overline{A^t}.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{bmatrix} = \overline{A^t}.$$

(ix) Η μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ λέγεται **στοχαστική** αν

$$a_{ij} \geqslant 0, \text{ για κάθε } i, j \in [n]$$

και

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1, \text{ για κάθε } i \in [n],$$

δηλαδή, το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής ισούται με 1.

Παράδειγμα: Η μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

είναι στοχαστική.

1.5 Πράξεις μητρών

(1) **Πρόσθεση μητρών**

Στο σύνολο $\mathcal{M}_{m\times n}$ ορίζουμε την πράξη $+$ ως εξής: Για κάθε $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ ορίζουμε

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$.

Η μήτρα $A + B$ ονομάζεται **άθροισμα** των A και B.

Παράδειγμα:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

τότε

$$A + B = \begin{bmatrix} -2+1 & 0+4 & 3-5 \\ 1+2 & 4-1 & 7+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 1.1. *Αν $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}$ τότε*

(i) $A + B = B + A$.

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

(iii) $A + C = B + C \Leftrightarrow A = B$.

Απόδειξη. Έστω $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$. Τότε

(i)

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = B + A.$$

(ii)

$$\begin{aligned}(A + B) + C &= ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] \\ &= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] \\ &= [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] = [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) \\ &= A + (B + C)\end{aligned}$$

(iii) Άσκηση. □

Πρόταση 1.2. *Η δομή $(\mathcal{M}_{m\times n}, +)$ είναι αβελιανή ομάδα.*

(2) **Αφαίρεση μητρών**

Στο σύνολο $\mathcal{M}_{m\times n}$ ορίζουμε την πράξη $-$ ως εξής: Για κάθε $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ ορίζουμε

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$$

για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$, ή ισοδύναμα

$$A - B = A + (-B).$$

Η μήτρα $A - B$ ονομάζεται **διαφορά** των A και B.

Παράδειγμα:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

τότε

$$A - B = \begin{bmatrix} -2-1 & 0-4 & 3+5 \\ 1-2 & 4+1 & 7-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 8 \\ -1 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

(3) **Πολλαπλασιασμός μήτρας με πραγματικό αριθμό**

Στο σύνολο $\mathcal{M}_{m\times n}$ ορίζουμε την (εξωτερική) πράξη $\cdot$ (με σύνολο τελεστών το $\mathbb{R}$) ως εξής: Για κάθε $A = [a_{ij}]$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\lambda \cdot A = A \cdot \lambda = [\lambda a_{ij}]$$

για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$.

Παράδειγμα:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lambda \cdot A = A \cdot \lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 4\lambda & -5\lambda \\ 2\lambda & -\lambda & 0 \end{bmatrix}.$$

Έτσι,

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & 12 & -15 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 1.3. *Για κάθε $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι*

(i) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

(ii) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

(iii) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.

(iv) $1A = A$.

Απόδειξη. Έστω $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$. Τότε

(i)

$$\begin{aligned} \lambda(A + B) &= \lambda([a_{ij}] + [b_{ij}]) = \lambda[a_{ij} + b_{ij}] \\ &= [\lambda(a_{ij} + b_{ij})] = [\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}] \\ &= [\lambda a_{ij}] + [\lambda b_{ij}] = \lambda[a_{ij}] + \lambda[b_{ij}] \\ &= \lambda A + \lambda B. \end{aligned}$$