Η μήτρα $A - B$ ονομάζεται **διαφορά** των A και B.

Παράδειγμα:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

τότε

$$A - B = \begin{bmatrix} -2-1 & 0-4 & 3+5 \\ 1-2 & 4+1 & 7-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 8 \\ -1 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

(3) **Πολλαπλασιασμός μήτρας με πραγματικό αριθμό**

Στο σύνολο $\mathcal{M}_{m\times n}$ ορίζουμε την (εξωτερική) πράξη $\cdot$ (με σύνολο τελεστών το $\mathbb{R}$) ως εξής: Για κάθε $A = [a_{ij}]$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\lambda \cdot A = A \cdot \lambda = [\lambda a_{ij}]$$

για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$.

Παράδειγμα:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lambda \cdot A = A \cdot \lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 4\lambda & -5\lambda \\ 2\lambda & -\lambda & 0 \end{bmatrix}.$$

Έτσι,

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & 12 & -15 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 1.3. *Για κάθε $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι*

(i) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

(ii) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

(iii) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.

(iv) $1A = A$.

Απόδειξη. Έστω $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$. Τότε

(i)

$$\begin{aligned} \lambda(A + B) &= \lambda([a_{ij}] + [b_{ij}]) = \lambda[a_{ij} + b_{ij}] \\ &= [\lambda(a_{ij} + b_{ij})] = [\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}] \\ &= [\lambda a_{ij}] + [\lambda b_{ij}] = \lambda[a_{ij}] + \lambda[b_{ij}] \\ &= \lambda A + \lambda B. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)A &= (\lambda+\mu)[a_{ij}] = [(\lambda+\mu)a_{ij}] \\ &= [\lambda a_{ij} + \mu a_{ij}] = [\lambda a_{ij}] + [\mu a_{ij}] \\ &= \lambda[a_{ij}] + \mu[a_{ij} = \lambda A + \mu A.\end{aligned}$$

(iii) Άσκηση.

(iv) Άσκηση. □

(4) **Γινόμενο μητρών**

Έστω

$$A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$$

και

$$B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times k}.$$

Ονομάζουμε **γινόμενο** της A επί B, και γράφουμε AB, τη μήτρα

$$C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times k},$$

όπου

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{\sigma=1}^{n} a_{i\sigma}b_{\sigma j}.$$

Παρατηρήσεις:

Από τον ορισμό του γινομένου μητρών είναι προφανές ότι το γινόμενο AB ορίζεται μόνο αν η μήτρα A έχει τόσες στήλες όσες είναι οι γραμμές της μήτρας B.

Το στοιχείο c_{ij} που δίνεται στην προηγούμενη ισότητα είναι το άθροισμα των n γινομένων $a_{i1}b_{1j}$, $a_{i2}b_{2j}$, …, $a_{in}b_{nj}$ των στοιχείων της i γραμμής της A με τα αντίστοιχα στοιχεία της j στήλης της B.

Παραδείγματα

i) Αν $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 3}$ και $B = \begin{bmatrix}4\\-5\\6\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}$, τότε ορίζονται τα γινόμενα AB και BA και ισχύει ότι $AB \in \mathcal{M}_{1\times 1}$ και $BA \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ με

$$AB = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\-5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 4 + 2\cdot(-5) + 3\cdot 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\end{bmatrix}$$

και

$$BA = \begin{bmatrix}4\\-5\\6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\cdot 1 & 4\cdot 2 & 4\cdot 3\\ (-5)\cdot 1 & (-5)\cdot 2 & (-5)\cdot 3\\ 6\cdot 1 & 6\cdot 2 & 6\cdot 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 8 & 12\\ -5 & -10 & -15\\ 6 & 12 & 18\end{bmatrix}.$$

ii) Αν $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ και $B = \begin{bmatrix}-5 & 6 & -7\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}$, τότε ορίζεται το γινόμενο AB, (αλλά όχι το γινόμενο BA), και ισχύει ότι $AB \in \mathcal{M}_{2\times 3}$ με

$$AB = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & 6 & -7\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot(-5) + 2\cdot 0 & 1\cdot 6 + 2\cdot 1 & 1\cdot(-7) + 2\cdot 2\\ 3\cdot(-5) + 4\cdot 0 & 3\cdot 6 + 4\cdot 1 & 3\cdot(-7) + 4\cdot 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5 & 8 & -3\\ -15 & 22 & -13\end{bmatrix}.$$

(5) **Δυνάμεις μήτρας**

Αν $A \in \mathcal{M}_n$, ορίζουμε τη **δύναμη** A^m, $m \in \mathbb{N}^*$ ως εξής:

$$A^0 = I_n$$

και

$$A^m = A^{m-1}A$$

για κάθε $m \geqslant 1$.

Πρόταση 1.4. *Για κάθε $A, B, C \in \mathcal{M}_n$, $n, m, k \in \mathbb{N}^*$, ισχύουν οι εξής ιδιότητες, (εφόσον φυσικά οι τύποι των μητρών είναι τέτοιοι ώστε να ορίζονται οι αντίστοιχες πράξεις):*

(i) $AI_n = A = I_nA$.

(ii) $(AB)C = A(BC)$.

(iii) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

(iv) $(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)(AB)$.

(v) $A(B + C) = AB + AC$.

(vi) $(A + B)C = AC + BC$.

(vii) $A^mA^k = A^{m+k}$.

(viii) $(A^m)^k = A^{mk}$.

Επιπλέον, ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πρόταση 1.5. *Για κάθε $A, B \in \mathcal{M}_n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι εξής ιδιότητες:*

(i) $(A + B)^t = A^t + B^t$.

(ii) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.

(iii) $(AB)^t = B^tA^t$.

Προσοχή! Στον πολλαπλασιασμό μητρών παρατηρούμε τα εξής:

(1) Δεν ισχύει πάντα $AB = BA$.

Παράδειγμα:

Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ τότε

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$$

ενώ

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(2) Αν η AB είναι μηδενική δεν συνεπάγεται ότι η A ή/και η B είναι μηδενική.

Παράδειγμα:

Ενώ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}_2$ και $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}_2$ έχουμε $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(3) Αν $A^k = \mathbb{O}$ δεν συνεπάγεται ότι $A = \mathbb{O}_n$.

Παραδείγματα

Ενώ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}_2$, ισχύει ότι $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

και ενώ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}_2$ ισχύει ότι $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(4) Αν $AB = AC$ δεν συνεπάγεται $B = C$.

Παράδειγμα:

Για $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ έχουμε ότι

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 15 & 24 \end{bmatrix}$$

και

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 15 & 24 \end{bmatrix} = AB$$

ενώ $B \neq C$.

1.6 Αντιστροφή μήτρας

Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Η μήτρα $B \in \mathcal{M}_n$ λέγεται **αντίστροφη** της μήτρας A, αν και μόνο αν

$$AB = BA = I_n.$$

Παράδειγμα: Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix},$$

τότε είναι

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

και

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Δηλαδή

$$AB = BA = I_2,$$

και επομένως, η μήτρα B είναι αντίστροφη της μήτρας A.

Φυσικά, και η μήτρα A είναι αντίστροφη της μήτρας B.

Αν μια μήτρα έχει αντίστροφη μήτρα, τότε λέμε ότι **αντιστρέφεται**, ή ότι είναι **αντιστρέψιμη**, ή **ομαλή**.

Παράδειγμα. *Να εξετασθεί αν η μήτρα*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$$

αντιστρέφεται.

Λύση. Αν η μήτρα A αντιστρέφεται, τότε υπάρχει

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$$

τέτοια ώστε

$$AB = BA = I_2.$$

Έχουμε λοιπόν,

$$\begin{aligned}
AB = I_2 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3b_{11} + 4b_{21} & 3b_{12} + 4b_{22} \\ 5b_{11} + 6b_{21} & 5b_{12} + 6b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3b_{11} + 4b_{21} = 1 \\ 3b_{12} + 4b_{22} = 0 \\ 5b_{11} + 6b_{21} = 0 \\ 5b_{12} + 6b_{22} = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3b_{11} + 4b_{21} = 1 \\ b_{12} = -\frac{4}{3}b_{22} \\ b_{11} = -\frac{6}{5}b_{21} \\ 5b_{12} + 6b_{22} = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3(-\frac{6}{5}b_{21}) + 4b_{21} = 1 \\ b_{12} = -\frac{4}{3}b_{22} \\ b_{11} = -\frac{6}{5}b_{21} \\ 5(-\frac{4}{3}b_{22}) + 6b_{22} = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{5}b_{21} = 1 \\ b_{12} = -\frac{4}{3}b_{22} \\ b_{11} = -\frac{6}{5}b_{21} \\ -\frac{2}{3}b_{22} = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b_{21} = \frac{5}{2} \\ b_{12} = -\frac{4}{3}b_{22} = (-\frac{4}{3})(-\frac{3}{2}) = 2 \\ b_{11} = -\frac{6}{5}b_{21} = (-\frac{6}{5})\frac{5}{2} = -3 \\ b_{22} = -\frac{3}{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(Πράγματι, είναι

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot (-3) + 4 \cdot \frac{5}{2} & 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-\frac{3}{2}) \\ 5 \cdot (-3) + 6 \cdot \frac{5}{2} & 5 \cdot 2 + 6 \cdot (-\frac{3}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.)$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$BA = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3)\cdot 3 + 2\cdot 5 & (-3)\cdot 4 + 2\cdot 6 \\ \frac{5}{2}\cdot 3 + (-\frac{3}{2})\cdot 5 & \frac{5}{2}\cdot 4 + (-\frac{3}{2})\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Άρα, η B είναι αντίστροφη μήτρα της A και επομένως, η A αντιστρέφεται. □

Παρατήρηση: Υπάρχουν μήτρες που δεν αντιστρέφονται.

Παράδειγμα: Έστω ότι η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ αντιστρέφεται. Τότε, υπάρχει

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$$

ώστε

$$AB = BA = I_2.$$

Αλλά

$$AB = I_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

το οποίο είναι αδύνατο.

Όμοια, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ δεν αντιστρέφεται. (Άσκηση.)

Πρόταση 1.6. *Η αντίστροφη μιας μήτρας, αν υπάρχει, είναι μοναδική.*

Απόδειξη. Πράγματι, έστω ότι η μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ έχει δύο αντίστροφες τις $B, C \in \mathcal{M}_n$. Τότε,

$$AB = BA = I_n$$

και

$$AC = CA = I_n.$$

Άρα

$$C = I_n C = (BA)C = B(AC) = BI_n = B,$$

άτοπο, διότι $B \neq C$. □

Η αντίστροφη της μήτρας A, αν υπάρχει, συμβολίζεται με $\mathbf{A}^{-1}$.

Πρόταση 1.7. *Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$, με $AB = I_n$. Τότε και $BA = I_n$. Άρα, αν $AB = I_n$, τότε $B = A^{-1}$.*

Παρατήρηση: Για να δειχθεί λοιπόν (για τετραγωνική μήτρα) ότι $B = A^{-1}$ δεν χρειάζεται να δειχθεί και $AB = I_n$ και $BA = I_n$. Αρκεί ένα από τα δύο.

Πρόταση 1.8. *Αν η μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ αντιστρέφεται τότε για κάθε $B, C \in \mathcal{M}_{n\times k}$ ισχύει ότι*

$$AB = AC \Rightarrow B = C.$$

Απόδειξη. Αφού η A αντιστρέφεται υπάρχει η αντίστροφή της A^{-1}, οπότε

$$AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow I_nB = I_nC \Rightarrow B = C.$$ □

Παρατηρήσεις:

i) Αντίστοιχα, για την αντιστρέψιμη μήτρα $A \in \mathcal{M}_k$ ισχύει και η ιδιότητα

$$BA = CA \Rightarrow B = C.$$

ii) Προφανώς, $I_n^{-1} = I_n$.

Πρόταση 1.9. *Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$.*

(i) *Αν οι A, B είναι αντιστρέψιμες, τότε και η μήτρα AB είναι αντιστρέψιμη, και είναι*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Γενικότερα, αν οι μήτρες $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_n$ είναι αντιστρέψιμες, τότε και η μήτρα $A_1A_2 \cdots A_k$ είναι αντιστρέψιμη, και είναι

$$(A_1A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

(ii) *Η A είναι αντιστρέψιμη, αν και μόνο αν η A^t είναι αντιστρέψιμη, και είναι*

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}.$$

(iii) *Αν η A είναι αντιστρέψιμη και $\lambda \in \mathbb{R}^*$ τότε και η λA είναι αντιστρέψιμη, και είναι*

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}.$$

(iv) *Αν η A είναι αντιστρέψιμη, τότε και η μήτρα A^m, όπου $m \in \mathbb{N}^*$, είναι αντιστρέψιμη, και είναι*

$$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m.$$

Απόδειξη.

(i) Λόγω της προσεταιριστικότητας, ισχύει ότι

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

Άρα, πράγματι $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Για τη γενίκευση μπορεί να χρησιμοποιηθεί επαγωγή ως προς το πλήθος k των μητρών (Άσκηση).

(ii) Έστω ότι η A είναι αντιστρέψιμη. Επειδή $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ και $I_n^t = I_n$ θα είναι

$$(AA^{-1})^t = I_n^t \Leftrightarrow (A^{-1})^tA^t = I_n$$

και

$$(A^{-1}A)^t = I_n^t \Leftrightarrow A^t(A^{-1})^t = I_n.$$

Από τις προηγούμενες ισότητες προκύπτει ότι η μήτρα $(A^{-1})^t$ είναι η αντίστροφη της A^t. Άρα, η A^t είναι αντιστρέψιμη και $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Αντίστροφα, έστω ότι η A^t είναι αντιστρέψιμη. Τότε λόγω του προηγούμενου και η $(A^t)^t = A$ είναι επίσης αντιστρέψιμη.

(iii) Άσκηση.

(iv) Άσκηση. □

Παρατήρηση: Αντί για $(A^m)^{-1}$ ή $(A^{-1})^m$ γράφουμε συνήθως $\mathbf{A^{-m}}$.

Πρόταση 1.10. *Έστω $\mathcal{N}_n$ το σύνολο των αντιστρέψιμων μητρών τύπου n. Η δομή $(\mathcal{N}_n, \cdot)$ είναι ομάδα.*

Απόδειξη. Άσκηση. □

Παρατήρηση: Το σύνολο $\mathcal{N}_n$ συμβολίζεται και με $GL(F, n)$.

1.7 Ειδικές μήτρες

(1) Η μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ λέγεται **ορθογώνια**, αν και μόνο αν $AA^t = A^tA = I_n$, δηλαδή αν έχει ως αντίστροφη την ανάστροφή της, (δηλαδή αν $A^{-1} = A^t$).

Παράδειγμα:

Οι μήτρες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

είναι ορθογώνιες.

$$AA^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

$$BB^t = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Παρατήρηση: Το σύνολο των ορθογώνιων μητρών τύπου $n \times n$ συμβολίζεται με O_n.

(2) Η μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ λέγεται **αδύναμη** ή **αυτοδύναμη** αν $A^2 = A$.

Παράδειγμα: Η μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

είναι αδύναμη.

Πράγματι,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = A.$$

Παρατήρηση: Αν η μήτρα A είναι αδύναμη, τότε ισχύει ότι $A^n = A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.