(3) Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής, αν υπάρχει, ονομάζεται **κύριο στοιχείο της γραμμής**.

Παράδειγμα:

Τα κύρια στοιχεία της παρακάτω μήτρας φαίνονται μέσα σε κύκλους.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Η A λέγεται **κλιμακωτή μήτρα** (row echelon form (ref)) αν

(i) Ο δείκτης κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι **μικρότερος** από το δείκτη κάθε μηδενικής γραμμής. (Δηλαδή, όλες οι μηδενικές γραμμές, αν υπάρχουν, βρίσκονται στο κάτω μέρος της μήτρας)

(ii) Σε κάθε δύο μη μηδενικές γραμμές ο δείκτης στήλης του κύριου στοιχείου της κατώτερης γραμμής είναι μεγαλύτερος από το δείκτη στήλης του κύριου στοιχείου της ανώτερης γραμμής, (δηλαδή το κύριο στοιχείο της κατώτερης γραμμής βρίσκεται δεξιότερα από το κύριο στοιχείο της ανώτερης γραμμής).

Παραδείγματα

Οι επόμενες μήτρες είναι κλιμακωτές

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ενώ οι μήτρες

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν είναι κλιμακωτές.

(4) Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Η A λέγεται **υποβαθμισμένη (ή ανηγμένη) κλιμακωτή μήτρα** (reduced row echelon form (**rref**)) αν η A είναι κλιμακωτή και επιπλέον ισχύουν οι ιδιότητες.

(iii) Αν μια γραμμή έχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό στοιχείο, τότε το κύριο στοιχείο της γραμμής ισούται με 1.

(iv) Κάθε στήλη που περιέχει κύριο στοιχείο μιας γραμμής έχει όλα τα άλλα στοιχεία μηδενικά.

Παραδείγματα

Οι επόμενες μήτρες είναι υποβαθμισμένες κλιμακωτές

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ενώ οι μήτρες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

δεν είναι υποβαθμισμένες κλιμακωτές.

1.8 Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών (στηλών)

Έστω η απεικόνιση $\theta : \mathcal{M}_{m\times n} \to \mathcal{M}_{m\times n}$. Θα λέμε ότι η θ είναι ένας **στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών (στηλών)** αν και μόνο αν για κάθε $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, η μήτρα $\theta(A)$:

(i) προκύπτει από την A με εναλλαγή δύο, οποιωνδήποτε, γραμμών (στηλών) της A, ή

(ii) προκύπτει από την A με πολλαπλασιασμό μιας γραμμής (στήλης) της A επί $\lambda \in \mathbb{R}^*$, ή

(iii) προκύπτει από την A με πολλαπλασιασμό μιας γραμμής (στήλης) της A επί $\lambda \in \mathbb{R}$ και πρόσθεση αυτής σε μια άλλη γραμμή (στήλη).

Παρατήρηση: Κάθε στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών ονομάζεται και **γραμμοπράξη**.

Έστω $R_1, R_2, \ldots, R_m$ οι γραμμές και $C_1, C_2, \ldots, C_n$ οι στήλες της μήτρας $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Θα συμβολίζουμε με

$R_i \leftrightarrow R_j$ την εναλλαγή των i και j γραμμών της μήτρας A, όπου $i, j \in [m]$, $i \neq j$.

$R_i \to \lambda R_i$ τον πολλαπλασιασμό της R_i επί $\lambda \in \mathbb{R}^*$, όπου $i \in [m]$.

$R_i \to R_i + \lambda R_j$ την πρόσθεση στην R_i της λR_j, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και $i, j \in [m]$, $i \neq j$.

Αντίστοιχα για τις στήλες (με C_i, C_j αντί για R_i, R_j).

Παράδειγμα: Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, τότε:

- Η εφαρμογή της γραμμοπράξης $R_2 \leftrightarrow R_3$ στην A δημιουργεί την μήτρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Η εφαρμογή της γραμμοπράξης $R_2 \to 3R_2$ στην A δημιουργεί την μήτρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Η εφαρμογή της γραμμοπράξης $R_2 \to R_2 + 2R_3$ στην A δημιουργεί την μήτρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήσεις:

(1) Η απεικόνιση θ είναι αμφιμονοσήμαντη. Άρα, ορίζεται και ο αντίστροφος μετασχηματισμός θ^{-1} με

$$\theta(A) = B \Leftrightarrow \theta^{-1}(B) = A.$$

(2) Έστω θ ένας στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών (στηλών), $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και θ^{-1} ο αντίστροφος στοιχειώδης μετασχηματισμός του θ.

(i) Αν $\theta(A) = B$ με $A \overset{R_i \leftrightarrow R_j}{\sim} B$, τότε $\theta^{-1}(B) = A$ με $B \overset{R_i \leftrightarrow R_j}{\sim} A$.

(ii) Αν $\theta(A) = B$ με $A \overset{R_i \to \lambda R_i}{\sim} B$, τότε $\theta^{-1}(B) = A$ με $B \overset{Ri \to \frac{1}{\lambda} R_i}{\sim} A$.

(iii) Αν $\theta(A) = B$ με $A \overset{R_i \to R_i + \lambda R_j}{\sim} B$, τότε $\theta^{-1}(B) = A$ με $B \overset{R_i \to R_i - \lambda R_j}{\sim} A$.

Έστω $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Θα λέμε ότι η μήτρα B είναι ***R*-ισοδύναμη** (αντ. ***C*-ισοδύναμη**) με την μήτρα A και θα γράφουμε

$$\mathbf{A} \overset{\mathbf{R}}{\sim} \mathbf{B} \text{ (αντ. } \mathbf{A} \overset{\mathbf{C}}{\sim} \mathbf{B})$$

αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία μητρών A_0, A_1, ..., A_k έτσι ώστε $A_0 = A$, $A_k = B$ και η μήτρα A_{i+1} προκύπτει από την A_i από κάποιο στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών (αντ. στηλών), για κάθε $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Παρατήρηση: Προφανώς, από τον ορισμό της R (αντ. C)-ισοδυναμίας προκύπτει ότι ότι αν $A \overset{R}{\sim} B$ (αντ. $A \overset{C}{\sim} B$) τότε υπάρχουν στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών (αντ. στηλών) $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{k-1}, \theta_k$ τέτοιοι ώστε

$$\begin{aligned} B &= (\theta_k \circ \theta_{k-1} \circ \cdots \circ \theta_2 \circ \theta_1)(A) \\ &= \theta_k(\theta_{k-1}(\cdots \theta_2(\theta_1(A)) \cdots)). \end{aligned}$$

Πρόταση 1.11. *Οι σχέσεις* $\overset{R}{\sim}$ *και* $\overset{C}{\sim}$ *είναι σχέσεις ισοδυναμίας στο* $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Απόδειξη. Άσκηση. □

Πρόταση 1.12. *Κάθε μήτρα* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *είναι* R*-ισοδύναμη με μια κλιμακωτή μήτρα.*

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 2 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \overset{R_2 \to R_2 - 2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 2 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \overset{R_4 \to R_4 - 2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \overset{R_4 \to R_4 + 4R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Πρόταση 1.13. *Κάθε μήτρα* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *είναι R-ισοδύναμη με μια υποβαθμισμένη κλιμακωτή μήτρα.*

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_1 \to R_1 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -17 & -30 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_3 \to -R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -17 & -30 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_1 \to R_1 + 17R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_2 \to R_2 - 5R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Πρόταση 1.14. *Έστω* $A \in \mathcal{M}_n$ *μια υποβαθμισμένη κλιμακωτή μήτρα. Αν η μήτρα* A *δεν έχει μηδενική γραμμή, τότε* $A = I_n$.

1.8.1 Αλγόριθμος του Gauss

Παρακάτω, περιγράφεται αναλυτικά βήμα προς βήμα η διαδικασία που ακολουθείται στα προηγούμενα παραδείγματα, και της οποίας η εφαρμογή μας οδηγεί στη μετατροπή μιας μήτρας σε **υποβαθμισμένη κλιμακωτή μορφή**. Η διαδικασία μετατροπής μιας μήτρας σε **υποβαθμισμένη κλιμακωτή** είναι γνωστή ως **απαλοιφή των Gauss–Jordan**, ενώ η διαδικασία μετατροπής μιας μήτρας απλά σε **κλιμακωτή** είναι γνωστή ως **απαλοιφή του Gauss**.

Έστω $n \times m$ μήτρα $A = [a_{ij}]$. Η απαλοιφή του Gauss για τη μετατροπή της A σε απλή κλιμακωτή μορφή αποτελείται από τα εξής βήματα:

Βήμα 1. Εντοπίζουμε το αριστερότερο και υψηλότερο μη μηδενικό στοιχείο στην μήτρα, δηλαδή ένα στοιχείο $a_{ij} \neq 0$, τέτοιο ώστε τα i, j να είναι όσο το δυνατόν μικρότερα. (Πάντα υπάρχει τέτοιο στοιχείο εκτός αν $A = \mathbf{0}$.)

Εναλλάσσουμε τη γραμμή i με την πρώτη γραμμή του πίνακα. ($R_1 \leftrightarrow R_i$)

Βήμα 2. Αν μετά το βήμα 1, το πρώτο στοιχείο της νέας πρώτης γραμμής είναι a, τότε πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με $1/a$, δηλαδή δημιουργούμε κύριο στοιχείο (pivot) 1. ($R_1 \to \frac{1}{a}R_1$)

Βήμα 3. Προσθέτουμε πολλαπλάσια της πρώτης γραμμής στις άλλες γραμμές έτσι ώστε να προκύψουν μηδενικά στοιχεία κάτω από το κύριο στοιχείο 1.

($R_i \to R_i - a_{i1}R_1$, για κάθε i με $a_{i1} \neq 0$)

Βήμα 4. Αγνοούμε την πρώτη γραμμή και εφαρμόζουμε τα βήματα 1-3 στην υπομήτρα που προκύπτει, μέχρις ότου εξαντληθούν οι γραμμές.

Η μήτρα A' που προκύπτει είναι κλιμακωτή.

Εκτελώντας, την ίδια διαδικασία στην A' μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία πάνω από κάθε κύριο στοιχείο 1 και έτσι καταλήγουμε σε μια υποβαθμισμένη κλιμακωτή μήτρα. Υπολογιστικά είναι αποδοτικότερο να εφαρμόσουμε την διαδικασία με αντίστροφη φορά, δηλαδή από το τελευταίο στοιχείο της τελευταίας γραμμής και με φορά προς τα πάνω και αριστερά.

Η διαδικασία που περιλαμβάνει και τις δύο παραπάνω φάσεις ονομάζεται απαλοιφή των Gauss-Jordan.

Παρατήρηση: Σημειώνουμε ότι η υποβαθμισμένη κλιμακωτή μορφή μιας μήτρας είναι **μοναδική**. Αυτό δεν συμβαίνει στην κλιμακωτή μορφή, όπου αλλαγή της ακολουθίας των στοιχειωδών πράξεων μπορεί να οδηγήσει σε **διαφορετική κλιμακωτή μήτρα**.

1.9 Στοιχειώδεις μήτρες

Κάθε μήτρα που προκύπτει από την μοναδιαία μήτρα I_n με εφαρμογή **μιας μόνο** στοιχειώδους πράξης γραμμών επί του I_n λέγεται **στοιχειώδης μήτρα**.

Για παράδειγμα, από τη μοναδιαία μήτρα

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

προκύπτουν οι στοιχειώδεις μήτρες

$$I_3 \overset{R_2 \to 3R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_3 \overset{R_2 \longleftrightarrow R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$I_3 \overset{R_3 \to R_3 + 3R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 1.15. *Αν η στοιχειώδης μήτρα E προκύπτει από την εφαρμογή μιας συγκεκριμένης στοιχειώδους πράξης γραμμών θ στην μοναδιαία μήτρα I_m, και A είναι μια $m \times n$ μήτρα, τότε το γινόμενο EA είναι η μήτρα που προκύπτει όταν η θ εφαρμοσθεί επί της A, δηλαδή $\theta(A) = \theta(I_m)A = EA$.*

Για παράδειγμα, έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

και θ ο μετασχηματισμός $R_3 \to R_3 + 3R_1$.

Αν

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \theta(I_3),$$

τότε, πράγματι

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix},$$

που είναι ίδια με τη μήτρα που προκύπτει αν στην A προστεθεί στην τρίτη γραμμή το τριπλάσιο της πρώτης.

Άρα,

$$\theta(A) = \theta(I_3)A = EA.$$

Παρατήρηση: Με επαγωγή μπορεί να δειχθεί η γενίκευση της προηγούμενης πρότασης:

Πρόταση 1.16. *Αν $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών, $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ και $E_i = \theta_i(I_n)$, $i \in [k]$, τότε*

$$(\theta_k \circ \theta_{k-1} \circ \cdots \circ \theta_2 \circ \theta_1)(A) = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A.$$

Παρατήρηση: Επειδή κάθε στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών θ είναι αντιστρέψιμος και η αντίστοιχη στοιχειώδης μήτρα $E = \theta(I_n)$ είναι επίσης αντιστρέψιμη και η αντίστροφή της προκύπτει εφαρμόζοντας στην μοναδιαία μήτρα I_n τον αντίστροφο μετασχηματισμό γραμμών.

Για παράδειγμα, αν $E = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ τότε επειδή $E = \theta(I_n)$ όπου θ είναι ο μετασχηματισμός $R_1 \to R_1 + 4R_2$ έπεται ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός θ^{-1} είναι ο $R_1 \to R_1 - 4R_2$ επομένως η αντίστροφη μήτρα της E ισούται με $E^{-1} = \theta^{-1}(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Πρόταση 1.17. *Έστω $A \in \mathcal{M}_n$, $A \neq \mathbb{O}_n$ και $A \overset{R}{\sim} B$, όπου $B \in \mathcal{M}_n$ μια κλιμακωτή μήτρα. Η μήτρα A είναι μη αντιστρέψιμη αν και μόνο αν μια τουλάχιστον γραμμή της B είναι μηδενική.*

Παράδειγμα:

Η μήτρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 2 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

είναι μη αντιστρέψιμη αφού (όπως είδαμε νωρίτερα) είναι R-ισοδύναμη με την κλιμακωτή μήτρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 1.18. *Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(i) *Η μήτρα A είναι αντιστρέψιμη.*

(ii) *Η μήτρα A είναι R-ισοδύναμη με την μήτρα I_n.*

(iii) *Η μήτρα A είναι γινόμενο πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών μητρών.*

Παράδειγμα: Η μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμη, διότι είναι R-ισοδύναμη με τη μήτρα I_n. Πράγματι,

$$A \overset{R_2 \to R_2 - R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_2 \to \frac{1}{3}R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_1 \to R_1 + R_2 \\ R_3 \to R_3 - R_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_1 \to R_1 - R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

Επίσης, αφού όπως μόλις δείξαμε, η A είναι αντιστρέψιμη, θα είναι γινόμενο πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών μητρών. Πράγματι, ισχύει ότι (άσκηση):

$$A = E_1 E_2 E_3 E_4 E_5$$

όπου οι μήτρες E_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ είναι οι παρακάτω στοιχειώδεις μήτρες:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I_3 \overset{R_2 \to R_2 + R_1}{\sim} E_1),$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I_3 \overset{R_2 \to 3R_2}{\sim} E_2),$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I_3 \overset{R_1 \to R_1 - R_2}{\sim} E_3),$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (I_3 \overset{R_3 \to R_3 + R_2}{\sim} E_4),$$

$$E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I_3 \overset{R_1 \to R_1 + R_3}{\sim} E_5),$$

Παράδειγμα: Έστω οι στοιχειώδεις μήτρες

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I_3 \overset{R_2 \to R_2 - R_1}{\sim} E_1),$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I_3 \overset{R_2 \to \frac{1}{3}R_2}{\sim} E_2),$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I_3 \overset{R_1 \to R_1 + 2R_2}{\sim} E_3).$$

Τότε η μήτρα

$$
\begin{aligned}
A &= E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

είναι αντιστρέψιμη.

1.10 Μέθοδος εύρεσης της αντίστροφης μιας μήτρας

Έστω $A \in \mathcal{M}_n$ μια αντιστρέψιμη μήτρα.

Τότε $A \overset{R}{\sim} I_n$. Άρα υπάρχουν στοιχειώδεις μετασχηματισμοί $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ με

$$(\theta_k \circ \cdots \circ \theta_2 \circ \theta_1)(A) = I_n,$$

ή, ισοδύναμα (λόγω της Πρότασης 1.16) υπάρχουν στοιχειώδεις μήτρες $E_1, E_2, \ldots, E_k$ με

$$(E_k \cdots E_2 E_1)A = I_n.$$

Δηλαδή η μήτρα $(E_k \cdots E_2 E_1)$ είναι η αντίστροφη της A.

Άρα,

$$A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1 = E_k \cdots E_2 E_1 I_n.$$

Άρα, εφαρμόζοντας και πάλι την Πρόταση 1.16 για τη μήτρα I_n, προκύπτει ότι

$$A^{-1} = (\theta_k \circ \cdots \circ \theta_2 \circ \theta_1)(I_n).$$

Δηλαδή, **οι μετασχηματισμοί** $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ **που μετασχηματίζουν την** A **στην** I_n**, μετασχηματίζουν και την** I_n **στην** A^{-1}.

Έτσι, για να βρούμε την αντίστροφη μιας τετραγωνικής μήτρας A (αν η A είναι αντιστρέψιμη), ή για να αποδείξουμε ότι η A δεν είναι αντιστρέψιμη, γράφουμε τις μήτρες A και I_n, τη μια δίπλα στην άλλη και με κατάλληλους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, που **εκτελούμε ταυτόχρονα και στις δύο μήτρες** A και I_n, μετασχηματίζουμε την A σε μια υποβαθμισμένη κλιμακωτή μήτρα B και την I_n σε μια μήτρα C.

- Αν $B = I_n$, τότε η A είναι αντιστρέψιμη και $A^{-1} = C$.
- Αν $B \neq I_n$, τότε η A δεν είναι αντιστρέψιμη.

Παρατήρηση: Αν στην προσπάθεια μετασχηματισμού της A σε υποβαθμισμένη κλιμακωτή φτάσουμε σε κλιμακωτή μήτρα με μηδενική γραμμή, δεν χρειάζεται να συνεχίσουμε αφού, βάσει της Πρότασης 1.17, γνωρίζουμε ότι η A δεν είναι αντιστρέψιμη.

Παράδειγμα. *Να δειχθεί ότι η μήτρα*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμη, και να βρεθεί η αντίστροφή της

Λύση. Εργαζόμαστε ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \overset{R_3 \to (-1)R_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_1 \to R_1 - R_3 \\ R_2 \to R_2 + R_3}}{\sim}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A^{-1}.$$

□

Παράδειγμα. *Να εξετασθεί αν η μήτρα*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμη.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 4R_1 \\ R_3 \to R_3 - 7R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2 \\ R_3 \to -\frac{1}{6}R_3}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{7}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \overset{R_3 \to R_3 - R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Αφού η κλιμακωτή μήτρα, που δημιουργήθηκε ως R-ισοδύναμη της A, είναι η $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, η οποία έχει μηδενική γραμμή, η A δεν είναι αντιστρέψιμη (βάσει της Πρότασης 1.17). □