Κεφάλαιο 2

Ορίζουσες

2.1 Βασικοί ορισμοί και συμβολισμοί

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n.$$

Ορίζουσα της μήτρας A λέγεται το άθροισμα

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

όπου S_n είναι το σύνολο των μεταθέσεων του $[n]$ και συμβολίζεται με $\det(A)$ ή $D(A)$ ή $|A|$.

Έτσι, η ορίζουσα της μήτρας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ συμβολίζεται με $\det(A)$, ή $D(A)$, ή $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Αν $A \in \mathcal{M}_n$, η $\det(A)$ λέγεται **ορίζουσα τάξης** n. Προφανώς, στην περίπτωση όπου $n = 1$ και $A = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$ ορίζουμε $\det(A) = a$.

Το άθροισμα

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

έχει $n!$ προσθετέους, όσες και οι μεταθέσεις του S_n.

Κάθε προσθετέος είναι γινόμενο n στοιχείων της μήτρας, που κάθε ένα είναι στοιχείο μιας μόνο γραμμής και μιας μόνο στήλης.

Το ε_σ (ή $\mathrm{sgn}(\sigma)$) καθορίζει το πρόσημο κάθε προσθετέου, αφού

$$\varepsilon_\sigma = \begin{cases} 1, & \text{αν η } \sigma \text{ είναι άρτια.} \\ -1, & \text{αν η } \sigma \text{ είναι περιττή.} \end{cases}$$

Υπενθυμίζουμε ότι μια μετάθεση λέγεται **άρτια** (αντ. **περιττή**) αν γράφεται ως γινόμενο άρτιου (αντ. περιττού) πλήθος αντιμεταθέσεων. (Η ταυτοτική μετάθεση θεωρείται άρτια.)

Παραδείγματα

1. Έστω
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$
Τότε
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)}.$$
Αλλά,
$$S_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$$
όπου
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Η (ταυτοτική) μετάθεση σ_1 είναι άρτια, ενώ η $\sigma_2 = (12)$ είναι περιττή. Επομένως, $\varepsilon_{\sigma_1} = 1$ και $\varepsilon_{\sigma_2} = -1$.

Άρα,
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} = \varepsilon_{\sigma_1} a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} + \varepsilon_{\sigma_2} a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

2. Έστω
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$
Τότε
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}.$$
Αλλά, $S_3 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$ όπου
$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{(ταυτοτική)} & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23), \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12), & \sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (13)(12), \\ \sigma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (12)(13), & \sigma_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13), \end{aligned}$$
και
$$\begin{aligned} \varepsilon_{\sigma_1} = \varepsilon_{\sigma_4} = \varepsilon_{\sigma_5} = 1, \\ \varepsilon_{\sigma_2} = \varepsilon_{\sigma_3} = \varepsilon_{\sigma_6} = -1. \end{aligned}$$
Άρα
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{33}.$$

Παρατήρηση:

Σύμφωνα με τον ορισμό της ορίζουσας, η εύρεση της $\det(A)$ απαιτεί τον προσδιορισμό όλων των μεταθέσεων του συνόλου S_n, την εύρεση του ε_σ για κάθε $\sigma \in S_n$, την εύρεση των $n!$ γινομένων $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ και τέλος την εύρεση του αθροίσματος αυτών!

Στη συνέχεια θα αναπτύξουμε μια επιπλέον μέθοδο εύρεσης της ορίζουσας, λιγότερο περίπλοκη και λιγότερο χρονοβόρα.

Με τη μέθοδο αυτή, η εύρεση της ορίζουσας n τάξης, ανάγεται στην εύρεση οριζουσών $n-1$ τάξης.

2.2 Υπομήτρα μήτρας

Έστω η μήτρα $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$, δηλαδή η απεικόνιση $A : [m] \times [n] \to F$, όπου $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

Θα λέμε **υπομήτρα** της μήτρας A κάθε περιορισμό της απεικόνισης A στο $L \times K$, όπου $\varnothing \neq L \subseteq [m]$ και $\varnothing \neq K \subseteq [n]$.

Η παράσταση μιας υπομήτρας της μήτρας A προκύπτει με την διαγραφή κάποιων γραμμών ή/και στηλών, από τις γραμμές ή/και τις στήλες της A.

Παράδειγμα: Αν

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 5}$$

τότε η μήτρα

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

που προκύπτει με διαγραφή της γραμμής R_3 και των στηλών C_2, C_4, C_5 είναι υπομήτρα της A και συμβολίζεται με $A^{1,3}_{1,2}$. Εδώ $L = \{1, 2\} \subset [3]$ και $K = \{1, 3\} \subset [5]$.

Προφανώς, τα L και K δείχνουν τις γραμμές και στήλες της A που δεν διαγράφονται (αν και τελικά, συνήθως, χάνουν κάποια στοιχεία τους λόγω της διαγραφής άλλων στηλών και γραμμών).

Ονομάζουμε **υποορίζουσα** της $\det(A)$ οποιαδήποτε ορίζουσα μιας (προφανώς τετραγωνικής) υπομήτρας της A.

2.3 Ανάπτυγμα ορίζουσας

Έστω $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathcal{M}_n$, $n \geqslant 2$. Έστω M_{ij} η $(n-1) \times (n-1)$ υπομήτρα της A που προκύπτει με διαγραφή της i γραμμής και j στήλης.

Η $\det(M_{ij})$ λέγεται **ελάσσων ορίζουσα** του στοιχείου a_{ij} και συμβολίζεται με D_{ij}.

Αλγεβρικό συμπλήρωμα A_{ij} του στοιχείου a_{ij} ονομάζεται το γινόμενο

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}.$$

Παράδειγμα: Έστω η μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_5.$$

Τότε

$$M_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4,$$

$$D_{13} = \det(M_{13})$$

και

$$A_{13} = (-1)^{1+3} D_{13} = D_{13}.$$

Όμοια

$$M_{34} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4,$$

$$D_{34} = \det(M_{34})$$

και

$$A_{34} = (-1)^{3+4} D_{34} = -D_{34}.$$

Πρόταση 2.1. *Έστω $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathcal{M}_n$. Τότε, για κάθε $i, j \in [n]$ ισχύει ότι*

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in}$$

καθώς επίσης και

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj}.$$

Η πρώτη ισότητα λέγεται **ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της** i **γραμμής**, ενώ η δεύτερη λέγεται **ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της** j **στήλης**.

Παραδείγματα

1. $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-2) - 2 \cdot 3 = 2 - 6 = -4.$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = 1.$

3. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 4 \cdot 6 = 0.$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (0 - 4) - 1 \cdot (-4 + 2) + 3 \cdot (8 - 0) = 18.$

   (Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής.)

   $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4(-1 - 6) - 2(4 + 1) = 18.$

   (Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής.)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -1(-4+2) - 2(4-12) = 18.$$

(Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία της δεύτερης στήλης.)

5.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (45-48) - 2 \cdot (36-42) + 3 \cdot (32-35)$$

$$= -3 - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) = -3 + 12 - 9 = 0.$$

(Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής.)

6.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} &= -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -2 \cdot \left(3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) - 2 \cdot \left(2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 + (-2) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right) \\
&\quad + 3 \cdot \left(2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 0 + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) \\
&= (-2) \cdot (3 \cdot 7 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-4)) - 2 \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot 5) + 3 \cdot (2 \cdot (-4) - 2 \cdot 0) \\
&= -2 \cdot 10 - 2(-8) + 3(-8) = -20 + 16 - 24 = -28.
\end{aligned}$$

(Ανάπτυγμα της αρχικής 4×4 ορίζουσας κατά τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής και μετά, ανάπτυγμα των τριών 3×3 οριζουσών κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής, της πρώτης στήλης και της πρώτης στήλης αντίστοιχα.)

Πρόταση 2.2. *Έστω* $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n$, $p, q \in [n]$ *και* $p \neq q$. *Τότε*

$$a_{p1}A_{q1} + a_{p2}A_{q2} + \cdots + a_{pn}A_{qn} = 0,$$

και

$$a_{1p}A_{1q} + a_{2p}A_{2q} + \cdots + a_{np}A_{np} = 0.$$

2.3.1 Κανόνας του Sarrus

Για τον υπολογισμό των **3 × 3 οριζουσών**, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ο παρακάτω πρακτικός τρόπος: Αντιγράφουμε τις δύο πρώτες στήλες μετά την ορίζουσα, και παίρνουμε τα γινόμενα όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα:

$$\begin{array}{ccc} + & + & + \\ \end{array}$$
$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right. = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1,$$

$$\begin{array}{ccc} - & - & - \\ \end{array}$$

το οποίο **είναι** το ανάπτυγμα της 3×3 ορίζουσας.

Παράδειγμα:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & -3 & 5 & -2 \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot (-1)(-2) - 5 \cdot 2 \cdot 1 - (-2) \cdot 4 \cdot 2 - (-3)(-1) \cdot 3$$
$$= -12 + 60 + 2 - 10 + 16 - 9 = 47.$$

Παρατήρηση: Τονίζουμε ότι ο παραπάνω πρακτικός τρόπος, που ονομάζεται **κανόνας του Sarrus**, μπορεί να εφαρμοστεί **μόνο για 3×3 ορίζουσες**.

2.4 Ιδιότητες των οριζουσών

Έστω $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n$. Ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες.

(1) $\det(I_n) = 1$.

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

(2) $\det(A) = \det(A^t)$.

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$

(3) Αν A' είναι η μήτρα που προκύπτει από την A με εναλλαγή δύο γραμμών, τότε

$$\det(A') = -\det(A).$$

Προφανής συνέπεια της ιδιότητας αυτής είναι ότι αν A' είναι η μήτρα που προκύπτει από την A με p διαδοχικές εναλλαγές γραμμών, τότε

$$\det(A') = (-1)^p \det(A).$$

Παραδείγματα

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -(-8) = 8.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot 8 = 8.$$

(4) Αν δύο γραμμες μιας μήτρας A είναι ίσες, τότε $\det(A) = 0$.

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

(5) Αν A' είναι η μήτρα που προκύπτει από την A με πολλαπλασιασμό μιας γραμμής της A επί $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\det(A') = \lambda \det(A).$$

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 = 24.$

(6) Αν η μήτρα A έχει μηδενική γραμμή, τότε $\det(A) = 0$.

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$

(7) Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 2^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 8 = 64.$

(8) Έστω A' η μήτρα που προκύπτει από την A αν σε μια γραμμή της A προσθέσουμε μια άλλη γραμμή της A πολλαπλασιασμένη επί $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\det(A') = \det(A).$$

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8$, αφού η R_2 της πρώτης ορίζουσας ισούται με $R_2 + 2R_1$ της δεύτερης.

(9) Αν μια γραμμή της μήτρας A είναι γραμμικός συνδυασμός k άλλων γραμμών, $(k < n)$, τότε $\det(A) = 0$.

Προφανής συνέπεια της ιδιότητας αυτής είναι ότι αν R_i, R_j δύο γραμμές της μήτρας A και $R_i = \lambda R_j$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\det(A) = 0$.

Παραδείγματα

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$, αφού $R_2 = 2R_1 + 3R_3$.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$, αφού $R_2 = 2R_1$.

(10) Αν

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & & \\ b_{i1} + c_{i1} & \cdots & b_{ij} + c_{ij} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ & \ddots & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & & \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ & \ddots & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & & \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ & \ddots & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

τότε

$$\det(A) = \det(A_1) + \det(A_2).$$

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8.$

Παρατηρήσεις:

(1) Από τις προηγούμενες ιδιότητες προκύπτουν οι εξής κανόνες:
Έστω $A \in \mathcal{M}_n$ και θ στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών με $\theta(A) = A'$. Τότε,

- i) Αν $A \overset{R_i \leftrightarrow R_j}{\sim} A'$, τότε $\det(A') = -\det(A)$.
- ii) Αν $A \overset{R_i \to kR_i}{\sim} A'$, τότε $\det(A') = k\det(A)$.
- iii) Αν $A \overset{R_i \to R_i + kR_j}{\sim} A'$, τότε $\det(A') = \det(A)$.

(2) Λόγω της ιδιότητας (2), είναι προφανές ότι όλες οι ιδιότητες, που αναφέρονται σε γραμμές εξακολουθούν να ισχύουν αν αναφερθούν αντίστοιχα σε στήλες.

2.5 Ορίζουσα τριγωνικής μήτρας

Πρόταση 2.3. *Έστω $A \in \mathcal{M}_n$ με $A = [a_{ij}]$. Αν η A είναι άνω ή κάτω τριγωνική τότε*

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2(-2)3 = -12.$

Παρατήρηση: Η παραπάνω πρόταση σε συνδυασμό με τις προηγούμενες ιδιότητες μας δίνει άλλη μια μέθοδο υπολογισμού της ορίζουσας μιας τετραγωνικής μήτρας χωρίς την χρήση του ορισμού ή του αναπτύγματος.

Παράδειγμα. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα της μήτρας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.*

Λύση. Ισχύει ότι $\det(A) \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) \cdot (-2) = 8.$ □

Παράδειγμα. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Λύση.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - 2R_1}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 + 2R_2}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Ιδιότ. 5}}{=} -(-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_4 \to R_4 - 4R_3}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-3) = -9. \qquad \square$$

Παράδειγμα. *Να λυθεί η εξίσωση* $\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix} = 0$, *όπου* a, b *είναι πραγματικές παράμετροι.*

Λύση. Αν D η ορίζουσα τότε

$$D \overset{R_1 \to R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{=} \begin{vmatrix} 2x+a+b & 2x+a+b & 2x+a+b & 2x+a+b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Ιδιότ. 5}}{=} (2x+a+b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \\ C_4 \to C_4 - C_1}}{=}$$

$$= (2x+a+b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & a-x & b-x & 0 \\ x & b-x & a-x & 0 \\ b & x-b & x-b & a-b \end{vmatrix}$$

$$= (2x+a+b)(a-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & a-x & b-x \\ x & b-x & a-x \end{vmatrix}$$

$$= (2x+a+b)(a-b) \begin{vmatrix} a-x & b-x \\ b-x & a-x \end{vmatrix}$$

$$= (2x+a+b)(a-b)((a-x)^2 - (b-x)^2)$$

$$= (2x+a+b)(a-b)(a-x+b-x)(a-x-b+x)$$

$$= (2x+a+b)(a-b)(a+b-2x)(a-b) = (a-b)^2(a+b+2x)(a+b-2x).$$

Άρα,

- Αν $a = b$, τότε $D = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Αν $a \neq b$, τότε $D = 0 \Leftrightarrow (a+b+2x)(a+b-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a+b}{2}, \text{ ή} \\ x = -\frac{a+b}{2}. \end{cases}$ $\square$