Μέθοδος Οριζουσών (ή Cramer).

Έστω $A\bar{x} = b$, $A \in (a_{ij})_{n\times n}$ (πίνακας συντελεστών αγνώστων)
$\bar{x} = (x_i)_{n\times 1}$ (στήλη αγνώστων).
$\bar{b} = (b_i)_{n\times 1}$ (στήλη σταθερών όρων).

Έστω $D := |A|$

(A) Έστω $D \neq 0$, τότε $\bar{x}$ μοναδική λύση ΣΓΕ $A\bar{x} = \bar{b}$)

Έστω $D_i = D_{x_i} = |\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots a_{i-1}\ \bar{b}\ a_{i+1} \cdots \bar{a}_n|$, όπου
$D = |a_{ij}| = |\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n|$, $a_i \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $i = 1, 2, \dots n$.

με $x_i = D_i / D$, $i = 1, 2, \dots, n$.

(B) Έστω $D = 0$

(B_1) Έστω $D_k \neq 0$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Τότε $\bar{x} \in \emptyset$, δηλ.
$\{x \in \mathbb{R}^{n\times 1} / A\bar{x} = \bar{b}\} = \emptyset$ (μη λύση, αδύνατο ΣΓΕ)

(B_2) Έστω $D_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, τότε $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1} / A\bar{x} = \bar{b}\} \supset \{\bar{x}_0\}$
(παραμετρική λύση (απειρία λύσεων, αόριστο ΣΓΕ).

Παράδειγμα.

Έστω $\left\{\begin{array}{l} x+2y=2 \\ 2x-y=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}$, $\bar{x}=(x,y)^T$, $\bar{b}=(2,-3)^T$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2}=(\bar{a}_1\ \bar{a}_2)_{2\times 2}$

Έχουμε $D=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1-4=-5\neq 0$.

Άρα $\bar{x}=(x,y)^T$, με $x=\frac{D_x}{D}$, $y=\frac{D_y}{D}$, όπου

$D_x=|\bar{b}\ \bar{a}_2|=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}=-2-(-6)=4$

$D_y=|\bar{a}_1\ \bar{b}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-3-4=-7$.

Οπότε $\bar{x}=(x,y)^T=(D_x/D,\ D_y/D)^T=(-4/5,\ 7/5)^T$.

Παράδειγμα.

Έστω $\left\{\begin{array}{l} 2x+y=1 \\ 8x+4y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}$, $\bar{x}=(x,y)^T$, $\bar{b}=(1,0)^T$

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2}=(\bar{a}_1\ \bar{a}_2)_{2\times 2}$

Έχουμε $D=|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}=8-8=0$

Έχουμε $D_x=|\bar{b}\ \bar{a}_2|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=4\neq 0$.

Άρα $\bar{x}\in\emptyset$ (αδύνατο ΣΓΕ).

Όντως $\left\{\begin{array}{l} 2x+y=1 \\ 8x+4y=0 \Rightarrow 2x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1=0$ (άτοπο) $\Rightarrow x,y\in\emptyset$

ή $\bar{x}\in\emptyset$.

Παράδειγμα

Έστω $\left\{\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ 8x + 4y &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A\bar{x} = \bar{b}$, $\bar{x} = (x,y)^T$, $\bar{b} = (1,4)^T$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2} = (\bar{a}_1 \ \bar{a}_2)_{2\times 2}.$$

Έχουμε $D = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 8 = 0.$

Έχουμε $D_x = |\bar{b} \ \bar{a}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0.$

$$D_y = |\bar{a}_1 \ \bar{b}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Οπότε επειδή $D = D_x = D_y$ έχουμε αόριστο ΣΓΕ

Όντως $\left\{\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ 8x + 4y &= 4 \Rightarrow 2x + y = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 2x,$

δηλ. $x = x(y) = 1 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$, και άρα

$$\bar{x} = (x,y)^T = (x, 1-2x)^T = \begin{pmatrix} x \\ 1-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + x \\ 1 - 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix}$$

οπότε $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, δηλ. $\bar{x} = \bar{a} + x\bar{b}$,
όπου $\bar{a} = (0 \ 1)^T$ και $\bar{b} = (1,-2)^T$. (παραμετρική λύση)

Παράδειγμα. Έστω

$$\left.\begin{cases} x+y=b \\ ax-y=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}, \quad \bar{x}=(x,y)^T, \quad \bar{b}=(b,0)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2}=(\bar{a}_1, \bar{a}_2)_{2\times 2}.$$

(A) Έστω $D=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, δηλ. $-1-a\neq 0$, ή $a\neq -1$.

Έχουμε $D_x=|\bar{b}\ \bar{a}_2|=\begin{vmatrix} b & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-b$

Έχουμε $D_y=|\bar{a}_1\ \bar{b}|=\begin{vmatrix} 1 & b \\ a & 0 \end{vmatrix}=-ab$.

Άρα $\bar{x}=(x,y)^T=(D_x/D, D_y/D)^T=\left(\frac{-b}{1-a}, \frac{-ab}{1-a}\right)^T$

(μοναδική λύση για $x\neq -1$.

(B) Έστω $D=0 \Leftrightarrow a=-1$

Τότε $D_x=-b$, $D_y=-ab=b$

(B_1) Έστω $D_x\neq 0 \Leftrightarrow b\neq 0$, τότε $\bar{x}\in\emptyset$ (αδύνατο ΣΓΕ)

(B_2) Έστω $D_y\neq 0 \Leftrightarrow b\neq 0 \Rightarrow \bar{x}\in\emptyset$.

(B_3) Έστω $D=D_x=D_y=0 \Leftrightarrow b=0$ $(a=-1)$.

Τότε $\left.\begin{cases} x+y=0 \\ -x-y=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow x=x(y)=-y, \ y\in\mathbb{R}$

Άρα $\bar{x}=(x,y)^T=(-y,y)^T=y(-1,1)^T$, $y\in\mathbb{R}$ (παραμετρική λύση)

Παράδειγμα, Έστω

$$\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ 3x + ay = 2 \end{cases} \Rightarrow A\bar{x} = \bar{b}, \quad \bar{x} = (x,y)^T \quad \bar{b} = (1,2)^T$$

Έχουμε $D = |A| = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a^2 - 6$

(A) Έστω $D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm\sqrt{6}$.

Έχουμε $D_x = |\bar{b}, \bar{a}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a^2 - 4$

Έχουμε $D_y = |\bar{a}_1, \bar{b}| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 3$

Άρα $\bar{x} = (x,y)^T = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right)^T = \left(\frac{a^2-4}{a^2-6}, \frac{2a-3}{a^2-6}\right)^T$, $a \in \mathbb{R}$ (μοναδ. λύση).

(B) Έστω $D = 0 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{6}$

Τότε $D_x = a^2 - 4 = 6 - 4 = 2 \neq 0$

Άρα $\bar{x} \in \emptyset$ (αδύνατο ΣΓΕ).

(B_1) Έστω $D_x = D_y = 0 \Leftrightarrow a = 3/2$, $a = \pm 2$ (άτοπο).

Άρα το ΣΓΕ δεν γίνεται αόριστο για $a \in \mathbb{R}$.

Σημείωση. Στα αόριστα ΣΓΕ 2×2, οι παραμετρικές λύσεις υπολογίζονται με αντικατάσταση στις εξισώσεις του ΣΓΕ (μέθοδος αντικατάστασης.

Παράδειγμα.

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y-3z=4 \\ x+3y+z=11 \\ 2x+5y-4z=13 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b},\quad \bar{x}=(x,y,z)^T,\ \bar{b}=(4,11,13)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}_{3\times3} = (\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{a}_3)_{3\times3}$$

(A) Μέθοδος αντιστροφής πίνακα.

Έχουμε

$$D=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{matrix} \quad (\text{κανόνας Sarrus}) = -2 \neq 0$$

(μοναδική λύση)

Άρα $\bar{x}=A^{-1}\cdot\bar{b}$, με $A^{-1}=\frac{1}{D}Adj(A) = -\frac{1}{2}(A_{ij})^T$, όπου.

$$Adj(A)=\begin{pmatrix} -17 & -7 & 11 \\ 6 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

οπότε $$\bar{x}=A^{-1}\cdot\bar{b}=\begin{pmatrix} 17/2 & 7/2 & -11/2 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Β) Μέθοδος Cramer.

Επειδή $D \neq 0$ $\quad \bar{x} = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D}\right)^T$ (μοναδική λύση)

Έχουμε $D_x = |\bar{b}\ \bar{a}_2\ \bar{a}_3| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 11 & 3 & 1 \\ 13 & 5 & -4 \end{vmatrix} = -2$

$$D_y = |\bar{a}_1\ \bar{b}\ \bar{a}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & 11 & 1 \\ 2 & 13 & 4 \end{vmatrix} = -6$$

$$D_z = |\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{b}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 11 \\ 2 & 5 & 13 \end{vmatrix} = -2$$

Άρα $\bar{x} = (x, y, z)^T = \left(-\frac{2}{-2}, -\frac{6}{-2}, -\frac{2}{-2}\right)^T = (1, 3, 1)^T.$

(Γ) Μέθοδος επαυξημένου πίνακα Gauss.

$$(A|\bar{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 11 \\ 2 & 5 & -4 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ r_2 := r_2 - r_1 \\ r_3 := r_3 - 2r_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 := r_1 - 2r_2 \\ \\ r_3 := r_3 - r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -11 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) r_3 := -\tfrac{1}{2} r_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -11 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 := r_1 + 11 r_3 \\ r_2 := r_2 - 4 r_3 \end{array} \sim (I_3 \,|\, (1\ 3\ 1)^T).$$

Παράδειγμα.

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=2 \\ 2x-y+2z=-1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}, \quad \bar{x}=(x,y,z)^T, \ \bar{b}=(2,-1,1)^T.$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)_{3\times 3}.$$

Έχουμε

$$D=\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} = 0 \quad (\text{κανόνας Sarrus})$$

$$D_x=\left|\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right| \Sigma_1 := \Sigma_1 - \Sigma_2 \quad = 0$$

$$D_y=\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right| \Sigma_2 := \Sigma_2 - \Sigma_3 \quad = 0$$

Άρα $D=D_x=D_y=0$ (αόριστο ΣΓΕ)

Για την επίλυση της παραμετρικής λύσης έχουμε γενικά τις επιλογές:

(α) Μέθοδο αντικατάστασης στο ΣΓΕ (ή εναλλακτικά μέθοδο επαυξημένου πίνακα Gauss.

(β) Μέθοδο οριζουσών (Cramer) σε 2×2 υποσύστημα με μη-ιδιάζον πίνακα συντελεστών.

Περίπτωση (α) Μέθοδο αντικατάστασης.

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=2 \\ 2x-y+2z=-1 \\ x+y+z=1 \;(1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2(2-2y-z)-y+2z=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4y-2z-y+2z=-5 \Rightarrow -5y=-5 \Rightarrow y=1 \overset{(1)}{\Rightarrow} x=-z$$

Άρα $\bar{x}=(x,y,z)^T=(-z,1,z)^T$, $z\in\mathbb{R}$.

Περίπτωση (α) Μέθοδο επαυξημένου πίνακα Gauss.

$$(A\,|\,\bar{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2:=r_2-2r_1 \\ r_3:=r_3-r_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) r_2:=-r_2/5$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) r_3:=r_3+r_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{3\times 4}_{\cup}.$$

Το ΣΓΕ που αντιστοιχεί στον παραπάνω επαυξημένο πίνακα είναι

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=2 \\ y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-z \\ y=1 \end{array}\right., \text{ οπότε } \bar{x}=(x,y,z)^T=(-z,1,z)^T,\; z\in\mathbb{R}$$

Περίπτωση (β) Μέθοδος υπο-συστήματος Cramer.

Επιλύουμε το υπο-σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=2 \\ 2x-y+2z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow A'\bar{x}'=\bar{b}', \quad \bar{x}'=(x,y)^T, \quad \bar{b}'=(2-z, -1-2z)^T$$

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=(\bar{a}_1' \; \bar{a}_2')_{2\times 2}$$

Έχουμε $D':=|A'|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1-4=-5\neq 0.$

$$D'_x=|\bar{b}' \; \bar{a}_2|=\begin{vmatrix} 2-z & 2 \\ -1-2z & -1 \end{vmatrix}=z-2+2(1+2z)=5z$$

$$D'_y=|\bar{a}_1' \; \bar{b}'|=\begin{vmatrix} 1 & 2-z \\ 2 & -1-2z \end{vmatrix}=-1-2z+(z+2)=-5$$

Άρα $\bar{x}'=(x,y)^T=(x(z),y(z))^T, \quad x(z)=\frac{D'_x}{D}=-z, \quad y(z)=\frac{D'_y}{D'}=1$

(μοναδική λύση του υπο-συστήματος σε παραμετρική μορφή). Οπότε $\bar{x}=(x,y,z)^T=(-z,1,z)^T, \; z\in\mathbb{R}$. (παραμετρική λύση του αρχικού συστήματος.

Σημείωση. Η παραμετρική λύση επαληθεύει την εξίσωση που προέκυψε από το υπο-σύστημα.

Αν δεν υπάρχει $(n-1)\times(n-1)$ υποσύστημα με μη-μηδενική ορίζουσα (με μοναδική λύση) τότε επιλέγουμε την επίλυση ενός $(n-2)\times(n-2)$ υπο-σύστημα με μη-μηδενική ορίζουσα

Παράδειγμα

$$\left.\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+2z=3 \\ x+2y+3z=2. \end{cases}\right\} A\bar{x}=\bar{b}, \quad \bar{x}=(x,y,z)^T, \ \bar{b}=(1\ 3\ 2)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3} = (\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ a_3)$$

Έχουμε $D=|A|=0$ και $Dx=|\bar{b}, \bar{a}_2\ \bar{a}_3|=(\bar{b}\ \bar{b}\ \bar{a}_3)=0$
$Dy=|\bar{a}_1, \bar{b}, \bar{a}_3|=D=0$ και $Dz=|\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{b}|=|\bar{a}_1\ \bar{b}\ \bar{b}|=0.$
Άρα ΣΓΕ αόριστο (παραμετρική λύση).

Επειδή $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3-2=1\neq 0$, επιλέγουμε το υπο-σύστημα 2×2

$$\left.\begin{cases} x+y=1+z \\ 2x+3y=3-2z \end{cases}\right\} \Rightarrow A'\bar{x}'=\bar{b}', \quad \bar{x}'=(x\,y)^T, \ \bar{b}'=(1+z, 3-2z)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2}=(\bar{a}_1'\ \bar{a}_2')_{2\times 2}$$

Επειδή $D'=|A'|=1\neq 0$, τότε $\bar{x}'=(x\,y)^T=\left(\frac{D_x'}{D}, \frac{D_y'}{D}\right)^T$ μοναδική λύση για κάθε παράμετρο $z\in\mathbb{R}$.

$$D_x'=|\bar{b}'\ \bar{a}_2'|=\begin{vmatrix} 1+z & 1 \\ 3-2z & 3 \end{vmatrix}=5z, \quad z\in\mathbb{R}$$

$$D_y'=|\bar{a}_1'\ \bar{b}'|=\begin{vmatrix} 1 & 1+z \\ 2 & 3-2z \end{vmatrix}=1-4z, \quad z\in\mathbb{R}$$

Άρα $\bar{x}=(x,y,z)^T=(5z, 1-4z, z)^T, \ z\in\mathbb{R}.$

Παράδειγμα.

$$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x+3y-2z=5 \\ 3x+y-z=6 \end{cases} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}\,,\quad \bar{x}=(x,y,z)^T,\ \bar{b}=(3,5,6)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{3\times3}=(\bar{a}_1,\bar{a}_2\,\bar{a}_3)_{3\times3}$$

Έχουμε $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{matrix}$ (κανόνας Sarrus) $=0$

$$D=|\bar{b}\ \bar{a}_2\ a_3|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \\ 6 & 1 \end{matrix} \Rightarrow D_x=-2\neq 0$$

Άρα $\bar{x}\in\varnothing$ (αδύνατο ΣΓΕ)

Παράδειγμα. Διερεύνηση ΣΓΕ.

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda x + y - \lambda z = 0 \\ 5\lambda x - 5\lambda y + 2z = 0 \\ x + 8y - 7z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x} = \bar{b} \ , \ \bar{x} = (x,y,z)^T, \ \bar{b} = \bar{0}$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -\lambda \\ 5\lambda & -5\lambda & 2 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}_{3\times 3} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2\ \bar{a}_3)_{3\times 3} \ , \ \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

$$D = |A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -\lambda \\ 5\lambda & -5\lambda & 2 \\ 1 & 8 & -7 \end{vmatrix} \overset{\Sigma_1 := \Sigma_1 + \Sigma_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\lambda \\ 5\lambda+2 & -5\lambda & 2 \\ -6 & 8 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5\lambda+2 & 2 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} - \lambda \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5\lambda+2 & -5\lambda \\ -6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -10\lambda^2 + 19\lambda + 2$$

(A) Έστω $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \notin \{-1/10, 2\}$ (και επειδή $\lambda \in \mathbb{R}_+$) $\Rightarrow \lambda \neq 2$
Τότε $\bar{x} = (x,y,z)^T = (Dx/D, Dy/D, Dz/D)^T \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ (μοναδική λύση)

(B) Έστω $D = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$

Ισχύει $Dx = Dy = Dz = 0$ (καθώς $\lambda = 2$). Άρα ΣΓΕ αόριστο.

Για την παραμετρική λύση του αόριστο ΣΓΕ έχουμε το ομογενές ΣΓΕ

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y - 2z = 0 \\ 10x - 10y + 2z = 0 \\ x + 8y - 7z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x} = \bar{b} \ , \ x = (x,y,z)^T, \ \bar{b} = \bar{0}$$

Επιλύουμε το 2x2 υποσύστημα με τη μέθοδο Cramer.

$$\left.\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ 10x - 10y + 2z = 0 \end{cases}\right\} A'\bar{x}' = \bar{b}', \quad \bar{x}' = (x,y)^T, \quad \bar{b}' = (2z, -2z)$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 10 & -10 \end{pmatrix}_{2\times 2} = (\bar{a}_1 \ \bar{a}_2)_{2\times 2}$$

Έχουμε $D' = |A'| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 10 & -10 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$

$$D'_x = (\bar{b}' \ \bar{a}'_2) = \begin{vmatrix} 2z & 1 \\ -2z & -10 \end{vmatrix} = -20z + 2z = -18z$$

$$D'_y = (\bar{a}'_1, \bar{b}') = \begin{vmatrix} 2 & 2z \\ 10 & -2z \end{vmatrix} = -4z - 20z = -24z$$

Άρα $\bar{x}' = (x,y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{-18z}{-30}, \frac{-24z}{-30}\right)^T = \left(\frac{3}{5}z, \frac{4}{5}z\right)^T$

Επομένως, $\bar{x} = (x,y,z) = \left(\frac{3}{5}z, \frac{4}{5}z, z\right)^T$, $z \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα.

$$\left\{\begin{array}{l} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=k \\ x+y+kz=k^2,\ k\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b},\ \bar{x}=(x,y,z)^T,\ \bar{b}=(1,k,k^2)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}_{3\times3} = (\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{a}_3)_{3\times3}$$

Έχουμε $D=|A|=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \overset{\Sigma_3:=\Sigma_3-\Sigma_2}{=} \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & k & 1-k \\ 1 & 1 & k-1 \end{vmatrix}$

$$= k\begin{vmatrix} k & 1-k \\ 1 & k-1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1-k \\ 1 & k-1 \end{vmatrix}$$

$$= k[k(k-1)-(1-k)] - [k-1-(1-k)]$$

$$= k(k-1)(k-1) - (k-1)(1+1)$$

$$= (k-1)(k^2+k-2) = (k-1)^2(k+2).$$

$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & 1 \\ k^2 & 1 & k \end{vmatrix} \overset{\Sigma_1:=\Sigma_1-\Sigma_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 \\ k^2-1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix}$

$$= (k^2-1)(1-k) = -(k-1)^2(k+1)$$

$D_y = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k^2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & k^2 \end{vmatrix} = (k-1)^2$

$$D_z = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & k \\ 1 & 1 & k^2 \end{vmatrix} \overset{\Sigma_3 := \Sigma_3 - \Sigma_2}{=} \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & k^2-1 \end{vmatrix} = (k^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = (k-1)^2(k+1)^2$$

(A) Έστω $D \neq 0 \Leftrightarrow k \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$. Τότε

$$x = \frac{D_x}{D} = -\frac{(k-1)^2(k+1)}{(k-1)^2(k+2)} = -\frac{k+1}{k+2}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{(k-1)^2}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{1}{k+2}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{(k-1)^2(k+1)^2}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{k+2}.$$ (μοναδική λύση)

(B$_1$) Έστω $k = 1$. Τότε $D_x = D_y = D_z = 0$ και το αόριστο ΣΓΕ είναι

$$\left.\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}\right\} \Rightarrow x+y+z=1 \Rightarrow z = z(x,y) = 1-x-y, \; x,y \in \mathbb{R}.$$

Άρα $\bar{x} = (x,y,z) = (x, y, 1-x-y)^T, \; x,y \in \mathbb{R}.$

(B$_2$) Έστω $k = -2$. Τότε $D_x = -(k-1)^2(k+1)\big|_{k=-2} = 9 \neq 0.$

Άρα $\bar{x} \in \varnothing$ (αδύνατο ΣΓΕ).

Παράδειγμα. Διερεύνηση ΣΓΕ

$$\left\{\begin{array}{l} ax+y+z=2 \\ x+ay+z=3 \\ x+y+az=4 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}, \quad \bar{x}=(x,y,z)^T, \; \bar{b}=(2,3,4)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}_{3\times 3} = (\bar{a}_1\, \bar{a}_2\, \bar{a}_3)_{3\times 3}$$

Εστω $D=|A|=\left|\begin{array}{ccc} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{array}\right|\begin{array}{cc} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 1 \end{array} = a(a-1)(a+1)$

Εστω $Dx=|\bar{b}\; \bar{a}_2\; \bar{a}_3| = \left|\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 3 & a & 1 \\ 4 & 1 & a \end{array}\right|\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & a \\ 4 & 1 \end{array}$

$$= 2a^2+4+3-4a-2-3a = 2a^2-7a+5.$$

Εστω $Dy=|\bar{a}_1, \bar{b}\; \bar{a}_3| = \left|\begin{array}{ccc} a & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & a \end{array}\right|\begin{array}{cc} a & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{array}$

$$= 3a^2+2+4-3-4a-2a = 3a^2-6a+3$$

Εστω $Dz=|\bar{a}_1, \bar{a}_2\; \bar{b}| = \left|\begin{array}{ccc} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right|\begin{array}{cc} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 1 \end{array}$

$$= 4a^2+3+2-2a-3a-4 = 4a^2-5a+1$$

(Α) Έστω $|A| \neq 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Τότε

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2a^2 - 7a + 5}{a(a-1)(a+1)}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{3a^2 - 6a + 3}{a(a-1)(a+1)}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{4a^2 - 5a + 1}{a(a-1)(a+1)}$$ (μοναδική λύση.)

(B_1) Έστω $a = 0$. Τότε $D_x = 5 \neq 0$. Άρα $\bar{x} = \emptyset$ (αδύνατο σύστημα)

(B_2) Έστω $a = 1$. Τότε $D_x = D_y = D_z = 0$ (αόριστο ή αδύνατο ΣΓΕ)

$$\left.\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + z = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases}\right\} \Rightarrow \bar{x} \in \emptyset$$ (αδύνατο ΣΓΕ)

(B_3) Έστω $a = -1$. Τότε $D_x = 14 \neq 0$ (αδύνατο ΣΓΕ)

Άρα το ΣΓΕ δεν μπορεί να έχει άπειρες λύσεις (αόριστο).

Παράδειγμα.

$$\left.\begin{cases} x + ay + 2z = 1 \\ x + (2a-1)y + 3z = 1 \\ x + ay + z = -1 \end{cases}\right\} \Rightarrow A\bar{x} = \bar{b}, \quad \bar{x} = (x,y,z)^T, \quad \bar{b} = (1,1,-1)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 2a-1 & 3 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}_{3\times3} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)_{3\times3}$$

Έστω $D = |A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 2a-1 & 3 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}$ $r_3 := r_3 - r_1$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 2a-1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 2a-1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (2a-1-a) = a-1.$$

Έστω $D_x = |\bar{b}, \bar{a}_2, \bar{a}_3| = \left|\begin{matrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 2a-1 & 3 \\ -1 & a & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & a \\ 1 & 2a-1 \\ 1 & a \end{matrix}$

$$= 2a-1 + 3a + 2a + 2(2a-1) - 3a - a$$
$$= 3(2a-1) + a = 7a-3$$

Έστω $D_y = |\bar{a}_1, \bar{b}, \bar{a}_3| = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$

$$= 1 + 3 - 2 - 2 + 3 - 1 = 2$$

Έστω $D_z = |\bar{a}_1, \bar{a}_2\, \bar{b}| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & a & 1 \\ 1 & 2a-1 & 1 \\ 1 & a & -1 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & a \\ 1 & 2a-1 \\ 1 & a \end{array}$

$$= 1 - 2a + a + a - (2a-1) - a + a$$

$$= 2(2a-1) + 2a = 6a - 2$$

(A) Έστω $D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$. Τότε

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{7a-3}{a-1}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{2}{a-1}, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{6a-2}{a-1} = 3$$

(B) Έστω $D = 0 \Leftrightarrow a = 1$. $D_y = 2 \neq 0$ και άρα $x \in \emptyset$ (αδύνατο)

Παράδειγμα.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + ay - 2z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x} = \bar{b}, \quad \bar{x} = (x,y,z)^T, \quad \bar{b} = (0,1,1)^T$$

$a, b \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}_{3\times 3} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2\ \bar{a}_3)_{3\times 3}$$

Έστω $D = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & a & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & a \end{matrix}$

$$= -8 - 1 - a - 2 - 2a - 2 = -3a - 13$$

Έστω $D_x = |\bar{b}, \bar{a}_2\ \bar{a}_3| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & a & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & a \end{matrix}$

$$= 0 - 1 - a - 2 - 2 = -5 - a$$

Έστω $D_y = |\bar{a}_1, \bar{b}\ \bar{a}_3| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$

$$= -4 + 0 - 1 + 1 - 2 + 0 = -6 \neq 0$$

(A) Έστω $D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -13/3$. Τότε

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-5-a}{-3a-13}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{6}{3a+13}, \quad z = \frac{D_z}{D}$$

(B) Έστω $D = 0 \Leftrightarrow a = -13/3$, και επειδή $D_y \neq 0 \Rightarrow \bar{x} \in \emptyset$.

Παράδειγμα.

$$\left\{\begin{array}{l} a^2x+y+z=1 \\ x+a^2y+z=1 \\ x+y+a^2z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}, \quad \bar{x}=(x,y,z)^T, \quad \bar{b}=(1,1,1)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} a^2 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix}_{3\times 3} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)^T$$

Έστω $D=|A|=\begin{vmatrix} a^2 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix}_{\Gamma_3 := \Gamma_3 - \Gamma_2} = \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & a^2-1 \end{vmatrix}$

$$= (1-a^2)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (a^2-1)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a^2 & 1 \\ 1 & a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a^2-1)(a^2-1) + (a^2-1)(a^4-1) = (a^2-1)^2(a^2+2)$$

(A) Έστω $D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm 1$, τότε $x=\frac{D_x}{D}$, $y=\frac{D_y}{D}$ και $\frac{D_z}{D}$ (μοναδική λύση), όπου

$$D_x = |\bar{b}\ \bar{a}_2\ \bar{a}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix}_{\Gamma_3 := \Gamma_3 - \Gamma_1}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{vmatrix} = (a^2-1)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} = (a^2-1)^2$$

$$D_y = |\bar{a}_1, \bar{b}, \bar{a}_3| = \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} \underset{r_3 := r_3 - r_2}{=} \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a^2-1)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (a^2-1)^2$$

$$D_z = |\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}| = \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1 := r_1 - r_3}{=} \begin{vmatrix} a^2-1 & 0 & 0 \\ 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a^2-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (a^2-1)^2.$$

Άρα $\quad x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{(a^2-1)^2}{(a^2-1)(a^2+2)} = \dfrac{1}{a^2+2}, \quad a \in \mathbb{R}$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{(a^2-1)^2}{(a^2-1)^2(a^2+2)} = \frac{1}{a^2+2}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{1}{a^2+2} \quad \text{(μοναδική λύση)}$$

Έστω $D = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1 \Rightarrow D_x = D_y = D_z = 0$, οπότε έχουμε (για $a = \pm 1$) το ΣΓΕ $x + y + z = 1$, δηλ. $z = z(x,y) = 1 - x - y$, $x, y \in \mathbb{R}$.
Άρα έχουμε αόριστο ΣΓΕ με παραμετρικές λύσεις

$$\bar{x} = (x, y, z)^T = (x, y, 1-x-y)^T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + x + 0 \\ 0 + 0 + y \\ 1 - x - y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+2z=6 \\ 2x+4y+4z+w=12 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}\,,\quad \bar{x}=(x,y,z,w)^T,\quad \bar{b}=(6,12)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

Επειδή το ΣΓΕ δεν είναι τετραγωνικό (δηλ. άγνωστοι όσες και εξισώσεις ή ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων να είναι τετραγωνικός) επιλύουμε με μέθοδο Cramer ένα τετραγωνικό υπο-σύστημα αυτού (συγκεκριμένα 2×2) με αντίστοιχη ορίζουσα πίνακα μη-μηδενική.

Έχουμε λοιπόν το υπο-σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=6-2z \\ 2x+4y=12-4z-w \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}\,,\quad \bar{x}=(x,y)^T,\quad \bar{b}(6-2z,12-4z-w)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2}=(\bar{a}_1\ \bar{a}_2)_{2\times 2}$$

Έχουμε $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=4-2=2\neq 0$

Έχουμε $D_x=|\bar{b}\ \bar{a}_2|=\begin{vmatrix} 6-2z & 1 \\ 12-4z-w & 4 \end{vmatrix}=12-4z+w\,,\ z,w\in\mathbb{R}$

Έχουμε $D_y=|\bar{a}_1\ \bar{b}|=\begin{vmatrix} 1 & 6-2z \\ 2 & 12-4z-w \end{vmatrix}=4z-w\,,\ z,w\in\mathbb{R}$

Επειδή $D\neq 0$, τότε $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{12-4z+w}{2}\,,\ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{4z-w}{2}\,,\ z,w\in\mathbb{R}$

(μοναδική λύση του υπο-συστήματος για $z,w\in\mathbb{R}$.

Άρα το αρχικό ΣΓΕ είναι αόριστο με παραμετρική λύση

$$\bar{x} = (x,y,z,w) = \left(6-2z+\tfrac{1}{2}w,\ 2z-\tfrac{w}{2},\ z,\ w\right)^T,\ z,w\in\mathbb{R}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -2z & +\frac{1}{2}w \\ 0 & 2z & -\frac{1}{2}w \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

στήλη σταθ. όρων

στήλη του z

στήλη του w

Εναλλακτικά (Μέθοδος Gauss)

$$(A\,|\,\bar{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 12 \end{array}\right) \quad r_2 := r_2 - 2r_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad r_1 := r_1 - \tfrac{1}{2}r_2 \qquad (*)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1/2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad r_2 := r_2/2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1/2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}\right) =: (A'\,|\,\bar{b}'),\ \bar{b}' = (6,0)^T,\ A' \in \mathbb{R}^{2\times 2}_{rref}$$

Άρα το αντίστοιχο ΣΓΕ λύσης είναι $x + 2z - 1/2\,w = 6$ και $y + \frac{1}{2}w = 0$

οπότε $\bar{x} = (x,y,z,w)^T = \left(6 - 2z + \frac{1}{2}w,\ -\frac{1}{2}w,\ z,\ w\right),\ z,w\in\mathbb{R}$.

Ο επαυξημένος πίνακας $(*)$ είναι $(A'\,|\,\bar{b}')$, $A' \in \mathbb{R}^{2\times 2}_{u}$ οπότε μεταβαίνουμε στο ΣΓΕ

Παράδειγμα.

$$\begin{cases} x-4y+z+w=1 \\ x-3y+z+7w=2 \\ 3x-14y+3z-9w=1 \end{cases} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b} := (1,2,1)^T,\ \bar{x}=(x,y,z,w)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 7 \\ 3 & -14 & 3 & -9 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Επίλυση υπο-συστήματος 2×2 με μέθοδο Cramer. Έχουμε

$$\begin{cases} x-4y = 1-z-w \\ x-3y = 2-z-7w \end{cases} \quad A'\bar{x}'=\bar{b}' := (1-z-w,\ 2-z-7w)^T,\quad \bar{x}'=(x,y)^T$$

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}_{2\times 2} = (\bar{a}_1',\ \bar{a}_2')_{2\times 2}$$

Έχουμε $D' := |A'| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3-(-4) = 1 \neq 0$. Άρα $\bar{x}'$ μοναδική λύση για $z, w \in \mathbb{R}$.

$$D_x' = |\bar{b}'\ \bar{a}_2'| = \begin{vmatrix} 1-z-w & -4 \\ 2-z-7w & -3 \end{vmatrix} = 3+3z+3w+4(2-z-7w) = 11-z-25w$$

$$D_y' = |\bar{a}_1'\ \bar{b}'| = \begin{vmatrix} 1 & 1-z-w \\ 1 & 2-z-7w \end{vmatrix} = 2-z-7w-1+z+w = 1-6w$$

Άρα $\bar{x}' = (x,y)^T = (D_x'/D',\ D_y'/D')^T = (11-z-25w,\ 1-6z)^T$

Επομένως, $\bar{x}=(x,y,z,w)^T = \begin{pmatrix} 11-z-25w \\ 1-6z \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\bar{u} + w\cdot\bar{v}$

με $\bar{u}=(-1,-6,1,0)^T$, $\bar{v}=(-25,0,0,1)^T$ (παραμετρική λύση)

Εφαρμογή. Έστω $p = p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Έστω $P_i(x_i, y_i) \in Gr(p) = \{(x, p(x))\}_{x \in \mathbb{R}}$ $i = 1, 2, 3$

Τότε $\alpha x_i^3 + \beta x_i^2 + \gamma x_i + \delta = p(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, 3$

δηλ ισχύει το ΣΓΕ

$$\left.\begin{cases} x_1^3 \alpha + x_1^2 \beta + x_1 \gamma + \delta = y_1 \\ x_2^3 \alpha + x_2^2 \beta + x_2 \gamma + \delta = y_2 \\ x_3^3 \alpha + x_3^2 \beta + x_3 \gamma + \delta = y_3 \end{cases}\right\} \Rightarrow A\bar{x} = \bar{b}, \quad \bar{x} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)^T, \quad \bar{b} = (y_1, y_2, y_3)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα. Έστω $A, B, \Gamma \in Gr(p)$, $A(0,2)$, $B(-1,3)$, $\Gamma(1,0)$

Άρα $\bar{x} = (x_i) = (0, -1, 1)^T$ και $\bar{y} = (y_i) = (2, 3, 0)^T$. Τότε,

$$\left.\begin{cases} 0 + 0 + 0 + \delta = y_1 = 2, \overset{(*)}{\Rightarrow} \delta = 2 \\ -\alpha + \beta - \gamma + \delta = y_2 = 3, \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = y_3 = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta - \gamma = 1 \\ \alpha + \beta + \gamma = -2 \end{cases}$$

Επίλυση 2×2 υπο-συστήματος $\left.\begin{cases} -\alpha + \beta = 1 + \gamma \\ \alpha + \beta = -2 - \gamma \end{cases}\right\} \Rightarrow A\bar{x} = \bar{b}$, $\bar{x} = (\alpha, \beta)^T$, $\bar{b} = (1+\gamma, -2-\gamma)^T$

και $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{2\times2} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2)_{2\times2}$ με $D = |A| = -2 \neq 0$.

Έχουμε $D_\alpha = |\bar{b}, \bar{a}_2| = \begin{vmatrix} 1+\gamma & 1 \\ -2-\gamma & 1 \end{vmatrix} = 2\gamma + 3$

$$D_\beta = |\bar{a}_1, \bar{b}| = \begin{vmatrix} -1 & 1+\gamma \\ 1 & -2-\gamma \end{vmatrix} = 1$$

Άρα $\alpha = \frac{D_\alpha}{D} = \frac{2\gamma+3}{-2}$ και $\beta = \frac{D_\beta}{D} = -\frac{1}{2}$ (μοναδική λύση υπο-συστ).

Άρα $\bar{x}=(\alpha,\beta,\gamma,\delta)^T = \left(-\gamma-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \gamma, 2\right)^T$, $\gamma\in\mathbb{R}$

ή
$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\gamma-3/2\\ -1/2\\ \gamma\\ 2\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}-3/2 & -\gamma\\ -1/2 & 0\\ 0 & \gamma\\ 2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3/2\\ -1/2\\ 0\\ 2\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, \gamma\in\mathbb{R}$$

Εναλλακτικά. Επίλυση υπο-συστήματος 3x3 με τη μέθοδο Cramer.

Από το ΣΓΕ (*) έχουμε

$$A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Επιλέγουμε το 3x3 υπο-σύστημα $A'\bar{x}'=\bar{b}'$, $\bar{x}'=(\alpha,\beta,\delta)^T$, με A' τις στήλες 1η, 2η και 4η., οπότε από το ΣΓΕ (*) έχουμε

$$\bar{b}' = \begin{pmatrix}y_1 - 0\gamma\\ y_2-(-1)\gamma\\ y_3 - 1\cdot\gamma\end{pmatrix}_{3\times 1} \quad \text{και} \quad A' = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}_{3\times 3} = (\bar{a}_1'\ \bar{a}_2'\ \bar{a}_3')_{3\times 3}$$

Έχουμε $D' = |A'| = -1 \neq 0$.

$$D_\alpha = |\bar{b}'\ \bar{a}_2'\ \bar{a}_3'| = \begin{vmatrix}2-0\gamma & 0 & 1\\ 3+\gamma & 1 & 1\\ -\gamma & 1 & 1\end{vmatrix} = 3+2\gamma$$

$$D_\beta' = |\bar{a}'\ \bar{b}'\ \bar{a}_3'| = \begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ -1 & 3+\gamma & 1\\ 1 & -\gamma & 1\end{vmatrix} = 1$$

$$D'_\delta = |\bar{a}_1' \ \bar{a}_2' \ \bar{b}'| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2-\gamma \\ -1 & 1 & 3+\gamma \\ 1 & 1 & -\gamma \end{vmatrix} = -4$$

Άρα $a = \frac{D'_a}{D'} = -\frac{3}{2}+\gamma$, $b = \frac{D'_b}{D} = -\frac{1}{2}$, $\frac{D'_\delta}{D'} = 2$

(μοναδική λύση για $\gamma \in \mathbb{R}$)

Άρα $\bar{x} = (a, b, \gamma) = (\gamma - 3/2, -1/2, \gamma, 2)^T$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Οπότε $p = p(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta = (\gamma - 3/2)x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \gamma x + 2$, $x \in \mathbb{R}$
για παράμετρο $\gamma \in \mathbb{R}$.

Εφαρμογή. Έστω $p=\varphi(x)= x^2+y^2+ax+bx+\gamma=0$, $x\in\mathbb{R}$, $a,b,\gamma\in\mathbb{R}$
Έστω $P_i(x_i,y_i)\in Gr(\varphi)$, $i=1,2,3$

Άρα ισχύει $x_i^2+y_i^2+ax_i+by_i+\gamma=0$, $i=1,2,3$.

δηλ. ισχύει το ΣΓΕ, $x_i^2+y_i^2+x_i a+y_i b+\gamma=0$, $i=1,2,3$, ή

$$\left\{\begin{array}{l} x_1\cdot a+y_1 b+\gamma=-x_1^2-y_1^2 \\ x_2 a+y_2 b+\gamma=-x_2^2-y_2^2 \\ x_3 a+y_3 b+\gamma=-x_3^2-y_3^2 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b},\quad \bar{x}=(a,b,\gamma)^T$$

$$\bar{b}=(-x_1^2-y_1^2,\,-x_2^2-y_2^2,\,-x_3^2-y_3^2)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}_{3\times3}=(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3)^T$$

Παράδειγμα. Έστω $A,B,\Gamma\in Gr(p)$, $A(0,-2)$, $B(1,-1)$, $\Gamma(1,-3)$, δηλ.
$\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)^T=(0,1,1)^T$, $\bar{y}=(y_1,y_2,y_3)^T=(-2,-1,-3)^T$.

Έχουμε $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ με $D=|A|=\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{matrix}$

οπότε $D=0-2-3+1+2=-2\neq 0$.

Έχουμε $\bar{b}=\begin{pmatrix} -x_1^2-y_1^2 \\ -x_2^2-y_2^2 \\ -x_3^2-y_3^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0^2-(-2)^2 \\ -1^2-(-1)^2 \\ -1^2-(-3)^2 \end{pmatrix}=(-4,-2,-10)^T$

$D_a=|\bar{b},\bar{a}_2\ \bar{a}_3|=\begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -10 & -3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} -4 & -2 \\ -2 & -2 \\ -10 & -3 \end{matrix}=4$

$$D_\beta = |\bar{a}_1 \ \bar{b} \ \bar{a}_3| = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -10 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -4 \\ 1 & -2 \\ 1 & -10 \end{matrix} = -8$$

$$D_\gamma = |\bar{a}_1, \bar{a}_2 \ \bar{b}| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -10 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{matrix} = -8$$

Επειδή $D \neq 0$, τότε $\alpha = D_\alpha / D$, $\beta = D_\beta / D$, $\gamma = D_\gamma / D$ (μοναδική λύση)

(Επίσης, εάν A, B, Γ μη-συνευθειακά $(\Leftrightarrow)$ $D \neq 0$)

Άρα $\alpha = \dfrac{4}{-2} = -2$, $\beta = \dfrac{-8}{-2} = 4$ και $\gamma = \dfrac{-8}{-2} = 4$

οπότε $\varphi = p(x) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$, και με συμπλήρωση ως προς x και y, έχουμε

$$p = p(x) = (x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) + 4 = 0$$

$$= (x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + (y^2 + 4y + 2^2 - 2^2) + 4 = 0$$

$$= (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + 4 = 0$$

$$= (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή $Gr(p) = C(K, \rho)$, όπου $\rho = 1$ και $K(1, -2)$.

Ασκήσεις.

(α) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=3 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$

(β) $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-y+z=-3 \\ x-3y+2z=0 \end{cases}$

(γ) $\begin{cases} x+y+z=w \\ 2x-y-z+w=1 \\ x+2y+2z-w=3 \end{cases}$

(δ) $\begin{cases} 2x-y+3z-w=0 \\ x+y-2z=2-w \\ x-y=w \end{cases}$

(ε) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-4y=0 \\ x-6y=-1 \\ 3x+14y=1 \end{cases}$

(στ) $\begin{cases} x+y+2z+w=5 \\ 2x+3y-z-2w=2 \\ 4x+5y+3z=7 \end{cases}$

(ζ) $\left.\begin{cases} 5y+35z-24w=1 \\ 2x+y-z+w=1 \\ 3x+2y-2z-w=1 \\ 5x+3y+z=1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -43 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$

(η) $\left.\begin{cases} 2x-y+z=-1 \\ -x+y+2z+w=5 \\ x+2z+2w=4 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$