Σύστημα Γραμμικών Εξισώσεων (Σ.Γ.Ε.)

Παραδείγματα. ΣΓΕ 2 γραμμών 3 αγνώστων.

(Α) $\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta, \\ \kappa x + \lambda y + \mu z = \nu, \end{cases}$

$\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (συντελεστές Γ.ΣΕ.)

$\delta, \nu \in \mathbb{R}$ (σταθεροί όροι όροι)

$x, y \in \mathbb{R}$ (άγνωστοι όροι)

(β) $\begin{cases} \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = \gamma_1, \\ \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z = \gamma_2, \end{cases}$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ (συντελ.)

$\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ (σταθ. όροι)

$x, y \in \mathbb{R}$ (άγνωστα)

(γ) $\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots a_{mn} x_n = b_m, \end{cases}$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ $i = 1, 2, \dots, m$ $j = 1, 2, \dots n$. (συντελεστές αγνώστων)

$b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ (σταθ. όροι)

$x_1, x_2, \dots, x_n$ (άγνωστοι)

(ΣΓΕ m εξισώσεων, n αγνώστων)

(Δ) Πίνακας συντελεστών) (στήλη-διάνυσμα αγνώστων) (στήλη-διάνυσμα σταθερών όρων)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} \quad \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

ή $(a_{ij})_{m\times n} \cdot (x_i)_{n\times 1} = (b_i)_{m\times 1}$ ή $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ (γραφή πινάκων).

(ΣΓΕ m-γραμμών/εξισώσεων × n-στηλών/αγνώστων ή ΣΓΕ m×n)

Παράδειγμα

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y-z=4 \\ x-y+7z=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

$\Rightarrow A \cdot \bar{x} = \bar{b}$, όπου $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Όντως, $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y-z \\ x-y+7z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα

$$2x+3y-z=4 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}_{1\times 3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3\times 1} = (2x+3y-z)_{1\times 1} = (4)_{1\times 1} \simeq 4 \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} 2x+3y-z=4 \\ 3x+3y-z=4 \\ 2x+3y-z=4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 2x+3y-z \\ 3x+3\ \ -z \\ 2x+3y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

32

ή $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{3\times 1} \cdot (x\ y\ z)_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 2x+3y-z \\ 2x+3y-z \\ 2x+3y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

(ειδική περίπτωση)

Επίλυση ΣΓΕ – Μέθοδος Πινάκων (ή μέθοδος αντιστροφής πίνακα)

Έστω $A\bar{x}=\bar{b}$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\bar{x}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$, $\bar{b}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$

(ΣΓΕ $n\times n$ ή n-γραμμών/εξισώσεων n-στηλών/αγνώστων)

Γνωρίζουμε ότι για την απλή γραμμική εξίσωση $ax=b$, $a,b\in\mathbb{R}$, ισχύει ότι $x=b/a$, εάν $a\neq 0$ ($a\in\mathbb{R}^*$)

Έστω $ax=b$, $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$.

Αναλυτικά: $ax=b$

$\Rightarrow (a^{-1})\cdot(ax)=(a^{-1})b$ (πολλαπλ. με $a^{-1}=1/a$, δηλ. με αντίστροφο στοιχείο του a)

$\Rightarrow (a^{-1}\cdot a)x=a^{-1}\cdot b$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

$\Rightarrow 1\cdot x=a^{-1}\cdot b=\frac{1}{a}\cdot b$ (ιδιότητα αντιστρ.)

$x=\frac{b}{a}$ (ιδιότητα μοναδιαίου)

(Θυμίζουμε: $\frac{a}{b}=\frac{1}{a}\cdot b=b\frac{1}{a}:=\frac{a}{b}$)

Άρα έχουμε λύση όταν $\exists a^{-1}=\frac{1}{a}\in\mathbb{R}$

δηλ. πρέπει να υπάρχει ο αντίστροφος a^{-1} του συντελεστή a

ο οποίος υπάρχει πάντα όταν $a\neq 0$.

Έστω λοιπόν $\exists A^{-1}$, δηλ. A μη-ιδιάζων πίνακας (αντιστρέψιμος)

Τότε $A\bar{x}=\bar{b} \Rightarrow (A^{-1})\cdot(A\bar{x})=A^{-1}\cdot B$

$\Rightarrow (A^{-1}\cdot A)\cdot\bar{x}=A^{-1}\cdot\bar{b}$

$\Rightarrow I_n\cdot\bar{x}=A^{-1}\cdot B \Rightarrow \bar{x}=A^{-1}\cdot B$ ($A^{-1}\cdot B\neq B\cdot A^{-1}$).

Σημείωση.

Στην περίπτωση $A\bar{x}=\bar{b}$ όπου $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $m\neq n$ (A μη-τετραγωνικός)

$$A\bar{x}=\bar{b},\quad A\in\mathbb{R}^{m\times n},\quad \bar{x}\in\mathbb{R}^{n\times 1},\quad \bar{b}\in\mathbb{R}^{m\times 1} \text{ με } m\neq n.$$

(ο αριθμός των εξισώσεων $\neq$ αριθμού των αγνώστων)

τότε "σπάμε" το σύστημα σε 2 συστήματα $A_1\cdot\bar{x}_1=\bar{b}$ όπου $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ και το άλλο $A_2\cdot\bar{x}_2=\bar{b}_2$ που θα πρέπει να προφανώς να επαληθεύει το προηγούμενο.

Παράδειγμα

$$\left.\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y=1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}$$

όπου $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

$\bar{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{2\times 1}$ $\bar{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{2\times 1}$

Άρα $\bar{x}=A^{-1}\cdot\bar{b}$ όταν $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ μη-ιδιάζον.

ο A^{-1} υπάρχει καθώς επιλύεται το σύστημα 2×2:

$$\left.\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x+y=1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} x=3+2y \\ y=1-2x \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} x=3+2y \\ y=1-2(3+2y)=1-6-4y \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} x=3+2y \\ 5y=-5 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=3-2=1, \\ y=-1, \end{cases} \quad \text{οπότε}$$

$$\bar{x}=A^{-1}\cdot\bar{b}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Θυμίζουμε τη γενική σχέση $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$, όταν $\alpha\delta\neq\beta\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$.

Παράδειγμα Παραμετρική ή αόριστη λύση.

$$\left\{\begin{array}{l} x-y=3 \\ -x+y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow x-y=3 \Rightarrow x=y+3 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+3 \\ y \end{pmatrix},\ y\in\mathbb{R}$$

(απειρία λύσεων ή παραμετρική λύση)

(αόριστο ΣΓΕ)

Παράδειγμα

$$\left\{\begin{array}{l} x-y=3 \\ x-y=\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b},\quad A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\quad \bar{x}=(x,y)^T=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \bar{b}=(3,\alpha)^T=\begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$\left\{\begin{array}{l} x-y=3 \\ x-y=\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow x-y=3=\alpha \Rightarrow \alpha=3 \Rightarrow x-y=3 \Rightarrow \bar{x}=(y+3,y)^T$$

Εάν όμως $\alpha\neq 3$ θα είχαμε $x-y=3=\alpha$ (άτοπο)

οπότε $\alpha\in\emptyset$ καθώς $\{\bar{x}\in\mathbb{R}^{2\times 1} / A\bar{x}=b\}=\emptyset$ (κενό σύνολο λύσεων ή αδύνατη λύση)

(αδύνατο ΣΓΕ)

Σημείωση. Στην περίπτωση αόριστης (παραμετρικής) λύσης στο ΣΓΕ $A\bar{x}=\bar{b}$, $n\times n$) τότε $\bar{x}\in V^k\subset\mathbb{R}^{n\times 1}$, όπου V^k $\mathbb{R}^n (=\mathbb{R}^{n\times 1})$ υπόχωρος με $\dim(V^k)=k<n$ δηλαδή $V^k=L\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\ldots,\bar{u}_k\}:=\{\alpha_1\bar{u}_1+\cdots+\alpha_k\bar{u}_k\in\mathbb{R}^n / \alpha_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\ldots,k\}$, όπου $\{\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_k\}$ κάποια $\mathbb{R}^n$-βάση ($\dim V=k$: πλήθος των γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων $\bar{u}_1,\bar{u}_2,\ldots,\bar{u}_k$ που παράγουν τον υπόχωρο των λύσεων V^k).

π.χ.

$$\left.\begin{array}{l} x-y=3 \\ -x+y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow x-y=3 \Rightarrow x=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+y \\ y \end{pmatrix},\ y\in\mathbb{R} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & y \\ & y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{x}=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ y\in\mathbb{R} \Rightarrow \bar{x}\in\{1\cdot\bar{u}_0+y\bar{u}_1\}_{y\in\mathbb{R}}\quad (V^1:=\{y\bar{u}_1\}_{y\in\mathbb{R}}=L\{\bar{u}_1\}$$

με $\bar{u}_0:=(3,0)^T$ και $\bar{u}_1:=(1,1)^T$, όπου έχουμε $\dim V^1=1$ καθώς το μονοσύνολο $\{\bar{u}_1\neq\bar{0}\}$ είναι πάντοτε ένα σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων.

Παράδειγμα. Επίλυση γραμμικού Σ2x2.

Έστω $\left\{\begin{array}{l} \alpha x+by=\kappa \\ \gamma x+\delta y=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow A\cdot\bar{x}=\bar{b}$, $A=\begin{pmatrix}\alpha & b\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$.

$\bar{x}=A^{-1}\cdot\bar{b}$, όπου $A\begin{pmatrix}\alpha & b\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, $\bar{b}=(\kappa,\lambda)^T$ και $\bar{x}=(x,y)^T$

Έχουμε ότι $A^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha & b\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\alpha\delta-b\gamma}\cdot\begin{pmatrix}\delta & -b\\ -\gamma & \alpha\end{pmatrix}$, όταν $\alpha\delta\neq b\gamma$.

Άρα $\bar{x}=A^{-1}\cdot\bar{b}=\frac{1}{\alpha\delta-b\gamma}\begin{pmatrix}\delta & -b\\ -\gamma & \alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\kappa\\ \lambda\end{pmatrix}=\frac{1}{\alpha\delta-b\gamma}\begin{pmatrix}\delta\kappa-b\lambda\\ -\kappa\gamma+\alpha\lambda\end{pmatrix}$

και άρα $x=\frac{\delta\kappa-\lambda b}{\alpha\delta-b\gamma}$ και $y=\frac{\alpha\lambda-\kappa\gamma}{\alpha\delta-b\gamma}$ $(\alpha\delta\neq b\gamma)$.

Εναλλακτικά, με επίλυση με αντικατάσταση:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha x+by=\kappa \\ \gamma x+\delta y=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{\kappa-by}{\alpha} \\ \delta y=\lambda-\gamma x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{\kappa-by}{\alpha} \\ \delta y=\lambda-\gamma\cdot\frac{(\kappa-by)}{\alpha}=\frac{\alpha\lambda-\gamma(\kappa-by)}{\alpha} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\frac{\kappa-by}{\alpha} \\ \alpha\delta y=\alpha\lambda-\gamma(\kappa-by) \Rightarrow \alpha\delta y=\alpha\lambda-\gamma(\kappa-by) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \alpha x=\kappa-by \\ \alpha\delta y=\alpha\lambda-\gamma\kappa+\gamma b y \end{array}\right. \Rightarrow (\alpha\delta-\gamma b)y=\alpha\lambda-\delta\kappa-\lambda\kappa$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\kappa-\frac{b}{\alpha}y \\ y=\frac{\alpha\lambda-\delta\kappa-\lambda\kappa}{\alpha\delta-\gamma b} \end{array}\right.$$

Υπολογισμός αντίστροφου πίνακα.

(A) Μέθοδος Επαυξημένου πίνακα.

Ορισμός. Επαυξημένος πίνακας. Έστω $A\bar{x}=\bar{b}$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\bar{b}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$

$(A|I_n)$ A-επαυξημένος πίνακας $\overset{\text{ορ.}}{\iff}$ $(A|I_n)=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times 2n}$

με $b_{ij}:=\begin{cases} a_{ij}, & i,j=1,2,\dots,n \\ \delta_{ij}, & i=1,2,\dots,n,\ j=1,2,\dots,2n \end{cases}$

• Θεώρημα. Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$

(α) A μη-ιδιάζον (αντιστρέψιμος) πίνακας $\Rightarrow$

(μέσω επιτρεπτών γραμμοπράξεων) $\Rightarrow$

$(A|I_n)=(I_n|A^{-1})$

(β) A ιδιάζον (μη-αντιστρέψιμος πίνακας)

(μέσω έγκυρων γραμμοπράξεων) $\Rightarrow$

$(A|I_n)=(K|B)$, K ανηγμένος κλιμακωτός

Ορισμός. Ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας.

$K\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ανηγμένος κλιμακωτός $\overset{\text{ορ.}}{\iff}$ $\begin{cases} K\in\mathbb{R}^{n\times n}_{U} & \text{(άνω τριγωνικός)} \\ K=(a_{ij}),\ a_{kk}=0,\ k\in\mathbb{N}_1^{-}. \end{cases}$

(B) Μέθοδος προσαρτημένου πίνακα. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $|A| \neq 0$.

Ισχύει: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$ όπου $Adj(A)$ ο προσαρτημένος πίνακας του A

δηλαδή ο ανάστροφος $(A_{ij})^T$ του πίνακα των (A_{ij}) των αλγ. συμπληρ. του A, δηλ. $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$, $i,j = 1,2,\dots,n$ και $M_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ ο (i,j)-ελάσσων πίνακας (ή υποπίνακας), δηλ. ο υποπίνακας που προκύπτει από τον A με τη διαγραφή της i-γραμμής και j-στήλης του. Η ορίζουσα $|M_{ij}|$ καλείται ελάσσων (i,j)-υποορίζουσα του A.

Πόρισμα. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ μη-ιδιάζων (αντιστρέψιμος) $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

Άρα για να επιλυθεί ένα $n\times n$ ΣΓΕ $A\bar{x} = \bar{b}$ θα πρέπει $|A| \neq 0$ (θυμίζουμε ότι για να επιλυθεί μια γραμμική εξίσωση $\alpha x = b$ θα πρέπει $\alpha \neq 0$, οπότε θα έχουμε $x = \frac{1}{\alpha}\cdot b = \frac{b}{\alpha} \in \mathbb{R}$.

Στην περίπτωση του $A\bar{x} = \bar{b}$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ θα πρέπει

$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \Leftrightarrow \alpha\delta \neq \beta\gamma$.

Τότε, θυμίζουμε ότι θα έχουμε $A^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Έχουμε $(A \mid I_3) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2 := r_2 - 2r_1 \\ r_3 := r_3 - 4r_1 \end{array}$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2 := r_3 \\ r_3 := r_2 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) r_3 := r_3 + r_2$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right) r_1 := r_1 - 2r_3$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right) r_1 := r_1 - r_3 \to (I_3 \mid A^{-1})$$

Παράδειγμα. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A \mid I_3) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) r_2 := r_2 - 2r_1$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to (K \mid B)$$

όπου K άνω κλιμακωτός.

Σημείωση. Στην περίπτωση των επαυξημένων πινάκων (δηλ. μέθοδο εύρεσης του αντιστρόφου) εάν A ιδιάζων, επιλύουμε μόνο ως μεθόδου Gauss.

Λύση. $\left\{\begin{array}{l} 2x+y+z = 5 \\ 4x-6y = -2 \\ -2x+7y+2z = 9 \end{array}\right\}$ $A\bar{x} = \bar{b}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

$\bar{x} = (x,y,z)^T$, $\bar{b} = (5,-2,9)^T$

Μέθοδος πινάκων. Έχουμε $\bar{x} = A^{-1}\cdot\bar{b}$ εάν A μη-ιδιάζων.

(A) Μέθοδος επαυξημένου πίνακα (για την εύρεση του A^{-1})

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2 := r_2 - 2r_1 \\ r_1 := r_1 + r_3 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) r_3 := r_3 + r_2$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) r_2 := r_2 + 2r_3$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) r_2 := -(1/8)r_2$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -3/8 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) r_1 := r_1 - r_3$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -3/8 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) r_1 := r_1 - r_2$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1/2 & -1+3/8 & -1-1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -3/8 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) r_1 := r_1/2$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & -5/8 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = (I_3 \mid A^{-1}) \text{ καλώς } |A| \neq 0$$

(Β) Μέθοδος προσαρτημένου πίνακα (εύρεσης του A^{-1})

Έχουμε:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ -6 & 0 \\ 7 & 2 \end{matrix}$$

(κανόνας Sarrus)

$$= 4(-6) + 1\cdot 0\cdot 7 + 1(-6)\cdot 2 - (-2)(-6)\cdot 1 - 7\cdot 0\cdot 2 - 2(-6)\cdot 1 \neq 0$$

ή (μέσω της μεθόδου υποοριζουσών)

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$$

(ανάπτυξη ως προς την 3η στήλη)

Αλγεβρικά συμπληρώματα:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot 2\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot[(-6)\cdot 2 - 7\cdot 0) = -24.$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot 1\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -[4\cdot 2 - (-2)\cdot 0] = 8.$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot 1\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot[4\cdot 7 - (-2)(-6)]$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -4[1\cdot 2 - 7\cdot 1]$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot(-6)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (-6)[2\cdot 2 - (-2)\cdot 1].$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = (-2)[1\cdot 0 - (-6)\cdot 1]$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\cdot 7\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -7\cdot[2\cdot 0 - 4\cdot 1]$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\cdot 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 2[2(-6) - 4\cdot 1].$$

Άρα $A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A) = \frac{1}{A}(A_{ji})$.

Παράδειγμα. $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+2y+2z=0 \\ 2x+2y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}=(4,0,-1)^T, \ \bar{x}=(x,y,z)^T$

και $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\2&2&1\end{pmatrix}$

Μέθοδος πινάκων (αντιστρόφου πίνακα). Έχουμε $\bar{x}=A^{-1}\cdot\bar{b}$ καθώς $|A|\neq 0$ οπότε A μη-ιδιάζον.

Όντως, $|A|=\left|\begin{matrix}1&1&1\\1&2&2\\2&2&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&1\\1&2\\2&2\end{matrix}$ (κανόνας Sarrus)

$= 1\cdot 2\cdot 1+1\cdot 2\cdot 2+1\cdot 2\cdot 1- 2\cdot 2\cdot 1-2\cdot 2\cdot 1-1\cdot 2\cdot 1=-1\neq 0.$

Αλγεβρικά συμπληρώματα.

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}2&2\\2&1\end{vmatrix}=-2,\qquad A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot 1\begin{vmatrix}1&2\\2&2\end{vmatrix}=-2,$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=3,\qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 2\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1,$

$A_{21}=(-1)^{1+2}\cdot 1\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=1,\qquad A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}=0,$

$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot 2\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=-1,\qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot 1\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=-1.$

Άρα $A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A)=\frac{1}{-1}\cdot(A_{ij})^T=-\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\3&1&1\\2&0&-1\end{pmatrix}$

Οπότε, $\bar{x}=A^{-1}\cdot\bar{b}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\3&1&1\\2&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 4+(-1)\cdot 0+0\cdot(-1)\\3\cdot 4+1\cdot 0+1(-1)\\2\cdot 4+0\cdot 0+(-1)(-1)\end{pmatrix}$

Ασκήσεις. Με μέθοδο (αντιστροφής) πινάκων + μέθοδο προσαρτημένου πίνακα.

(α). $\begin{cases} 2x+y+3z=1 \\ x+y+2z=0 \\ 4x+5y-2z=2 \end{cases}$ (α) $\begin{cases} x+\alpha y=1 \\ y-z=1 \\ \alpha x+z=-1, \ \alpha\in\mathbb{R} \end{cases}$

Ασκήσεις. Εύρεση A^{-1} με τη μέθοδο προσαρτημένου πίνακα.

(α) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}$

(β) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(γ) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(δ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -11 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(ε) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(στ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 4/3 & -1/3 \\ 3 & -7/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

Μέθοδος Οριζουσών. Έστω $A\bar{x}=\bar{b}$, όπου $A=(a_{ij})_{n\times n}=(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\dots,\bar{a}_n)$
$\bar{b}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$, $\bar{x}=(x_i)\in\mathbb{R}^{n\times 1}$.

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες: $D_i := |\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \dots\ \bar{a}_{i-1}\ \bar{b}\ \bar{a}_{i+1}\ \dots\ a_n| \in\mathbb{R}$, $i=1,2,\dots,n$.

(α) Εάν $D\neq 0 \Rightarrow \bar{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$ όπου $x_i=\dfrac{D_i}{D}$, $i=1,2,\dots,n$. (μοναδ. λύ

(β) Εάν $D=0$.

(β1) Εάν $D_k\neq 0$, $k\in\{1,2,\dots,n\}$ $\Rightarrow$ $\bar{x}\in\emptyset$ (αδύνατο ΣΓΕ) νετ.)
δηλ. $\{\bar{x}\in\mathbb{R}^{n\times 1} / A\bar{x}=\bar{b}\}=\emptyset$.

(β2) Εάν $D_1=D_2=\dots=D_n=0$ $\Rightarrow$ $\bar{x}\in V^k$ $\mathbb{R}^n$-υποχώρος λύσεων
δηλ. $V^k=L\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\dots,\bar{u}_k\}$ με $\dim V^k=k<n$
(k-διάστατος υπόχωρος λύσεων)
(αόριστο ΣΓΕ)

Σχόλιο: Θυμίζουμε ότι επειδή $\dim V^k=k$, τότε $\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\dots,\bar{u}_k\}$ σύνολο γραμμ. ανεξαρτήτων διανυσμάτων.

Παράδειγμα. Έστω $\left\{\begin{array}{l} x+2y=2 \\ 2x-y=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}=(2,-3)^T$, $A=\begin{array}{cc} \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}} \end{array}$, $\bar{x}=(x,y)^T$

Μέθοδος Οριζουσών (Cramer): Έχουμε $D=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1-4=-5\neq 0$.

Άρα $x=D_x/D$ και $y=D_y/D$ (μοναδική λύση), όπου

$$D_x=|\bar{b},\bar{\alpha}_2|=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}=-2-(-6)=4,$$

$$D_y=|\bar{\alpha}_1,\bar{b}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-3-4=-7.$$

Οπότε, $\bar{x}^T=(x,y)^T=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)^T=(-4/5,\,7/5)^T$.

Παράδειγμα. Έστω $\left\{\begin{array}{l} 2x+y=1 \\ 8x+4y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A\cdot\bar{x}=\bar{b}=(1,0)^T$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$, $\bar{x}=(x,y)^T$

Μέθοδος Οριζουσών (Cramer). Έχουμε $D=|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}=8-8=0$

Επομένως, $\bar{x}\in\emptyset$ (αδύνατο σύστημα) ή $\bar{x}\in V^1\subset\mathbb{R}^2$, υποχώρος διάστασης με $\dim(V^1)=1$ (<2).

Υπολογίζουμε: $D_x=|\bar{b},\bar{\alpha}_2|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=4\neq 0$

$$D_y=|\bar{\alpha}_1,\bar{b}|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}=-8\neq 0.$$

Άρα $\bar{x}\in\emptyset$ καθώς $D=0$ και $D_x\neq 0$ (ή $D_y\neq 0$)

Όντως, $\left\{\begin{array}{l} 2x+y=1 \\ 8x+4y=0 \Leftrightarrow 2x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1=0$ (άτοπο)

Παράδειγμα. Έστω $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 8x+4y=4 \end{cases} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}$ $(1,4)^T$, $A = \begin{array}{cc} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$, $\bar{x}=(x,y)^T$

Μέθοδος Οριζουσών (Cramer). Έχουμε $D=|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 8-8=0$.

Άρα $\bar{x}\in\emptyset$ (αδύνατο) ή $\bar{x}\in V'\subset\mathbb{R}^2$ υποχώρος του $\mathbb{R}^2$ με $\dim(V')=1<2$ (άπειρες)

Υπολογίζουμε $D_x=|\bar{b},\bar{a}_2|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}=4-4=0$

$$D_y=|\bar{a}_1\ \bar{b}|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}=8-8=0$$

Επομένως $\bar{x}\in V'\subset\mathbb{R}^2$, $\dim(V')=1$.

Όντως, $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 8x+4y=4 \end{cases} \Rightarrow 2x+y=1 \Rightarrow y=1-2x,\ x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow (x,y)^T=(x,\ 1-2x)^T=\begin{pmatrix} x \\ 1-2x \end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}$ (παραμετρική ή διανυσματική λύση)

$\Rightarrow \bar{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \bar{x}=\bar{u}_0+x\bar{u}_1,\ x\in\mathbb{R},\ \bar{u}_0=(0,1)^T,\ \bar{u}_1=(1,-2)^T$

$\Rightarrow \bar{x}\in\{\bar{u}_0+x\bar{u}_1\}_{x\in\mathbb{R}}$ $(\{x\bar{u}_1\}_{x\in\mathbb{R}}=L\{\bar{u}_1\}:=V_1$

με $\dim(V')=1$

(Σημείωση: το μονοσύνολο $\{\bar{u}_1\}$ είναι γραμμ. ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων).

Παράδειγμα. Έστω $\left.\begin{cases} x+y=b, \\ ax-y=0, \quad a,b\in\mathbb{R} \end{cases}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}=(b\ \ 0)^T,\ A=\begin{array}{cc} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & -1 \end{vmatrix},\ a,b\in\mathbb{R}$

$\bar{x}=(x,y)^T$

Μέθοδος Οριζουσών. Έχουμε $D=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & -1 \end{vmatrix}=-1-a,\ a\in\mathbb{R}$

(A) Έστω $D=|A|\neq 0 \Leftrightarrow -1-a\neq 0 \Leftrightarrow a\neq -1$.

Υπολογίζουμε: $D_x=|\bar{b},\bar{a}_2|=\begin{vmatrix} b & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-b,\ b\in\mathbb{R}$

$D_y=|\bar{a}_1,\bar{b}|=\begin{vmatrix} 1 & b \\ a & 0 \end{vmatrix}=-ab,\ a,b\in\mathbb{R}.$

Άρα $\bar{x}=(x,y)^T=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)^T=\left(\frac{-b}{1-a},\frac{-ab}{1-a}\right)^T=\left(\frac{b}{a-1},\frac{ab}{a-1}\right)^T$

(μοναδική λύση για κάθε $a,b\in\mathbb{R}$)

(B) Έστω $D=0 \Leftrightarrow a=-1$.

(B_1) Έστω $D_x=D_y=0 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -b=-ab=0 \\ a=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow -b=b \Rightarrow b=0.$

Τότε $\bar{x}\in V^k\subset\mathbb{R}^n$ υποχώρος λύσεων, $\dim V^k=k<2$

Έχουμε $\left.\begin{cases} x+y=0 \\ -x-y=0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow x+y=0 \Rightarrow \bar{x}=(x,-x),\ x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \bar{x}=x(1,-1)^T$

$\Rightarrow \bar{x}\in L\{(1,-1)^T\}:=V^1$

(B_2) Έστω $D_x\neq 0$ ή $D_y\neq 0 \Leftrightarrow b\neq 0$ ή $ab\neq 0 \Leftrightarrow b\neq 0$.

Τότε $\bar{x}\in\emptyset$ (αδύνατο)

Όντως, $\left.\begin{cases} x+y=b \\ -x-y=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow b=0$ (άτοπο).

Άσκηση. Επίλυση με τη μέθοδο οριζουσών (Cramer)

(α) $\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=-2. \end{cases}$ (β) $\begin{cases} 2x+y=1, \\ -x+3y=1. \end{cases}$ (γ) $\begin{cases} x+by=a, \quad a,b\in\mathbb{R} \\ x-y=b. \end{cases}$

Παράδειγμα. $\left.\begin{cases} ax+2y=1 \\ 3x+ay=2 \end{cases}, \alpha\in\mathbb{R}\right] \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}:=(1,2)^T,\ A:=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix},\ \alpha\in\mathbb{R}.$ $\bar{x}=(x,y)^T$

(A) Μέθοδος Gauss. Έχουμε,

$$(A|\bar{b})=\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 2 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 \end{array}\right)\ r_2:=r_2-\frac{3}{\alpha}r_1\ (\alpha\neq 0)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & \alpha-3 & 2-3/\alpha \end{array}\right)\in\mathbb{R}^{2\times 2}_U$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} ax+2y=1 \\ (\alpha-3)y=2-\frac{3}{\alpha} \Rightarrow y=\frac{2\alpha-3}{\alpha(\alpha-3)},\ \alpha\in\mathbb{R}-\{0,3\} \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha^2-\alpha+6 \\ y=\frac{2\alpha-3}{\alpha(\alpha-3)},\ \alpha\in\mathbb{R}-\{0,3\} \end{cases}$$

(α) Έστω $\alpha:=0$. Τότε $A\bar{x}=\bar{b} \Rightarrow \left.\begin{cases} 2y=1 \\ 0=2 \text{ (άτοπο)} \end{cases}\right] \Rightarrow \bar{x}\in\emptyset$ (αδύνατο)

(β) Έστω $\alpha=3$. Τότε $A\bar{x}=\bar{b} \Rightarrow \left.\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 3x+3y=2 \end{cases}\right] \Rightarrow (A|\bar{b})=\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{array}\right)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\in\mathbb{R}^{2\times 2}_U$$

Άρα $\left.\begin{cases} 3x+2y=1 \\ y=1 \end{cases}\right] \Rightarrow \bar{x}=(x,y)^T=(1,1)^T$ (μοναδική λύση).

(B) Μέθοδος οριζουσών. Έχουμε $D:=|A|=\begin{array}{cc} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 \\ \hline \end{array}\begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ 3 & \alpha \end{vmatrix}=\alpha^2-6$

(α) Έστω $D\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq\pm\sqrt{6} \Rightarrow \bar{x}=(x,y)^T=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)$ (μοναδική λύση), όπου

$$D_x:=|\bar{b}\ \bar{a}_2|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \pm\sqrt{6} \end{vmatrix}=\pm\sqrt{6}-4,\quad D_y:=|\bar{a}_1\ \bar{b}|=\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=2\alpha-3.$$

(β) Έστω $D=0 \Leftrightarrow \alpha=\pm\sqrt{6} \Rightarrow \bar{x}\in\emptyset$ ($D_x\neq 0$ και $D_y\neq 0$).

(γ) Έστω $D=D_y=0 \Leftrightarrow \alpha=\pm\sqrt{6}=3/2$ (άτοπο).

Άρα εάν $\alpha=\pm\sqrt{6} \Rightarrow \bar{x}\in\emptyset$ (αδύνατο ΣΓΕ) και εάν $x\neq\pm\sqrt{6} \Rightarrow \bar{x}=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)$.

Παράδειγμα. Έστω $\left\{\begin{array}{l} 2x+2y+3z=55 \\ 4x+2y+4z=74 \\ 3x-y+2z=30 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}=(55,74,30)^T,\ A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$

$\bar{x}=(x,y,z)$

Μέθοδος Οριζουσών (Cramer). Έστω $D=|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right| = -6 \neq 0.$ (κανόνας Sarrus)

Άρα $\bar{x}=\left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D}\right)$ (μοναδική λύση), όπου,

$D_x=|\bar{b}, \bar{a}_2, \bar{a}_3| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 55 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 74 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 30 & -1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right| = -18 \neq 0$ (κανόνας Sarrus).

$D_y=|\bar{a}_1, \bar{b}, \bar{a}_3| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 55 & 3 & 55 & 3 \\ 4 & 74 & 4 & 74 & 4 \\ 3 & 30 & 2 & 30 & 2 \end{array}\right| = -30 \neq 0$ (κανόνας Sarrus)

$D_z=|\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & 55 & 2 & 55 \\ 4 & 2 & 74 & 2 & 74 \\ 3 & -1 & 30 & -1 & 30 \end{array}\right| = -78 \neq 0$ (Κανόνας Sarrus)

Άρα $\bar{x}=\left(\frac{-18}{-6}, \frac{-30}{-6}, \frac{-78}{-6}\right)^T = (3, 5, 13)^T.$

Παράδειγμα. Έστω $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 2x-y+2z=-1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}=(2,-1,1)^T$, $\bar{x}=(x,y,z)^T$, $A=\begin{array}{c} \begin{matrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

Μέθοδος Οριζουσών (Cramer). Έχουμε $D=\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 0$

Άρα $\bar{x}\in\varnothing$ (αδύνατο ΣΓΕ) ή $\bar{x}\in V^k\subset\mathbb{R}^3$ υπόχωρος διάστασης $\dim(V^k)=k<3$.

Υπολογίζουμε: $D_x=|\bar{b},\bar{a}_2,\bar{a}_3|=\left|\begin{matrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 0,$

$D_y=(\bar{a}_1,\bar{b},\bar{a}_3)=\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{matrix} = 0,$

$D_z=(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{b})=\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{matrix} = 0.$

Επομένως, $\bar{x}\in V^k\subset\mathbb{R}^3$ υπόχωρος, $\dim(V^k)=k<3$, αφού $D=D_x=D_y=D_z=0$.

Με επίλυση με αντικατάσταση, έχουμε:

$$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 2x-y+2z=-1 \\ x+y+z=1 \quad (1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-z-2y \quad (2) \\ 2x=-1-2z+y \end{cases} \Rightarrow 2(-1-2z+y)=2-z-2y$$

$$\Rightarrow 3x=4(z-1) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \bar{x}=(x,y,z)^T=(-z,1,z),\ z\in\mathbb{R}$$

($\bar{x}$ παραμετρική/άπειρες λύσεις $\Rightarrow$ αόριστο ΣΓΕ)

Εναλλακτικά, εφαρμόζουμε στη τη μέθοδο των οριζουσών σε εκείνο το 2×2 υπο-σύστημα που έχει ορίζουσα πίνακα μη-μηδενική (μη-ιδιάζον υποσύστημα). Με τον παραπάνω τρόπο υπολογίζουμε τον υποχώρο των άπειρων λύσεων. Επιλέγουμε λοιπόν το υποσύστημα που ορίζουν οι 2 πρώτες εξισώσεις.

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=2 \\ 2x-y+2z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow A^*\bar{x}^*=\bar{b}^*=(2-z,-1-2z),\ z\in\mathbb{R},\ A^*=\begin{array}{cc} \bar{a}_1^* & \bar{a}_2^* \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\bar{x}^*=(x,y)^T$$

καθώς $D^*:=|A^*|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1-4=-5\neq 0$.

Για το υποσύστημα λοιπόν $A^*\bar{x}^*=\bar{b}^*$ θα έχουμε,

$$\bar{x}^*=(x,y)^T=\left(\frac{D_x^*}{D^*},\frac{D_y^*}{D^*}\right)$$ (μοναδική λύση, εκάστοτε των $z\in\mathbb{R}$).

Έχουμε $D_x^*=|\bar{b}^*,\bar{a}_2^*|=\begin{vmatrix} 2-z & 2 \\ -1-2z & -1 \end{vmatrix}=z-2-2(-1-2z)=5z,\ z\in\mathbb{R}$.

$$D_y^*=|\bar{a}_1^*\,\bar{b}|=\begin{vmatrix} 1 & 2-z \\ 2 & -1-2z \end{vmatrix}=-1-2z-2(2-z)=-5$$

Άρα $\bar{x}^*=(x,y)^T=\left(\frac{D_x^*}{D^*},\frac{D_y^*}{D^*}\right)=\left(\frac{5z}{-5},\frac{-5}{-5}\right)^T=(-z,1)^T,\ z\in\mathbb{R}$.

οπότε $\bar{x}=(x,y,z)^T=(-z,1,z)^T=\begin{pmatrix} -z \\ 1 \\ z \end{pmatrix}=z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\bar{u}_0+z\bar{u}_1$, $\bar{u}_0:=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{u}_1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

και συνεπώς, $\bar{x}=\{z\bar{u}_1\}_{z\in\mathbb{R}}=L\{\bar{u}_1\}=V_1\subset\mathbb{R}^3$ όπου V_1 $\mathbb{R}^3$-υποχώρος με $\dim V_1=1$ καθώς $\{\bar{u}_1\neq\bar{0}\}$ γραμμ. ανεξ.
($\bar{x}$ ο μονοδιάστατος υποχώρος λύσεων).

Παρατηρούμε επίσης ότι η παραμετρική λύση $\bar{x}=(-z,1,z)^T$ επαληθεύει την 3η εξ.

Συμπέρασμα. Αν δεν υπάρχει μη-ιδιάζον υπο-σύστημα, εφαρμόζουμε Cramer σε τυχαίο υποσύστημα (οπότε παίρνουμε άπειρες λύσεις).

Παράδειγμα. Έστω $\left\{\begin{array}{l} ax+y+z=2 \\ x+ay+z=3 \\ x+y+az=4 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}=(2,3,4)^T$, $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$
$\bar{x}=(x,y,z)^T$

Μέθοδος Οριζουσών. Έχουμε $D:=|A|=\begin{array}{ccc} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \hline a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{array}\left|\begin{array}{cc} & \\ 1 & 1 \\ a & 1 \\ 1 & a \end{array}\right. = a^3+1+a^2-a-1-a^2$
$= a^3-a = a(a-1)(a+1)$

(A) Έστω $D\neq 0 \Leftrightarrow a(a-1)(a+1)\neq 0 \Leftrightarrow a\in\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$. Τότε,

$\bar{x}=(x,y,z)^T=\left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D}\right)$ (μοναδική λύση για κάθε $a\neq 0,\pm 1$).

$D_x:=|\bar{b},\bar{a}_2,\bar{a}_3| = \left|\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 3 & a & 1 \\ 4 & 1 & a \end{array}\right|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ a & 1 \\ 1 & a \end{array} = 2a^2+1+a^2-4a-1-a^2$
$\Rightarrow D_x = 2a^2-4a = 2a(a-2)$

$D_y:=|\bar{a}_1,\bar{b},\bar{a}_3| = \left|\begin{array}{ccc} a & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & a \end{array}\right|\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & a \end{array} = 3a^2+8+3a-3-8-3a$
$\Rightarrow D_y = 3a^2-3 = 3(a-1)(a+1)$.

$D_z:=|\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{b}| = \left|\begin{array}{ccc} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ a & 3 \\ 1 & 4 \end{array} = 4a^2+3+8a-2a-3-6a$
$\Rightarrow D_z = 4a^2-2a = 2a(a^2-1)$

Άρα $\bar{x}=(x,y,z)^T=\left(\frac{2(a-2)}{(a-1)(a+1)}, \frac{3}{a}, \frac{2}{a}\right)^T$ (μοναδική λύση για κάθε $a\neq 0,\pm 1$)

(B) Έστω $D=0 \Leftrightarrow a\in\{0,\pm 1\}$.

(B_1) Έστω $D_x=D_y=D_z=0 \Leftrightarrow a\in\{0,2\}\cap\{0,\pm 1\}\cap\{0,\pm 1\} \Leftrightarrow a=0 \Rightarrow$ Α.Ο.

(B_2) Έστω $D_x\neq 0$ ή $D_y\neq 0$ ή $D_z\neq 0 \Leftrightarrow a\in\{0,2\}\cup\{0,\pm 1\}\cup\{0,\pm 1\}$
$\Leftrightarrow a\in\{0,\pm 1,2\}$.

Επομένως, εάν $a=0 \Rightarrow \bar{x}\in V^k\subset\mathbb{R}^3$ υποχώρος λύσεων (αόριστο ΣΓΕ).
Ενώ εάν $a=\pm 1 \Rightarrow \bar{x}\in\emptyset$ (αδύνατο σύστημα).

Παράδειγμα. $\left\{\begin{array}{l} 2x-y-z=6 \\ x-2y+z=b \\ x+\alpha y-2z=b^2,\ \alpha,b\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}:=(6,b,b^2)^T,\ A:=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & \alpha & -2 \end{pmatrix}$

Μέθοδος οριζουσών. Έχουμε

$$D:=|A|=\begin{array}{ccc} \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 & \bar{\alpha}_3 \\ \end{array}$$
$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & \alpha & -2 \end{array}\right|\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ -2 & 1 \\ \alpha & -2 \end{array} = -8+\alpha-\cancel{4}+2+\alpha+4 = -6+2\alpha.$$

(A) Έστω $D:=|A|\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 3$.

Άρα $\bar{x}=(x,y,z)^T=\left(\dfrac{D_x}{D},\dfrac{D_y}{D},\dfrac{D_z}{D}\right)^T$ (μοναδική λύση για κάθε $\alpha\neq 3$), όπου

$$D_x:=|\bar{b},\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2|=\left|\begin{array}{ccc} 6 & -1 & -1 \\ b & -2 & 1 \\ b^2 & \alpha & -2 \end{array}\right|\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ -2 & 1 \\ \alpha & -2 \end{array} = -24-\cancel{\alpha}-\cancel{4}+2b^2+\cancel{\alpha}+\cancel{4} = 2b^2-24$$

$$D_y:=|\bar{\alpha}_1,\bar{b},\bar{\alpha}_3| \quad \left|\begin{array}{ccc} 2 & 6 & -1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & b^2 & -1 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 6 & -1 \\ b & 1 \\ b^2 & -1 \end{array} = -2b+\cancel{6b^2}+b+b-\cancel{6b^2}-b = -b$$

$$D_z:=|\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\bar{b}|=\left|\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & b \\ 1 & \alpha & b^2 \end{array}\right|\begin{array}{cc} -1 & 6 \\ -2 & b \\ \alpha & b^2 \end{array} = -4b^2-\alpha\cancel{b}-12\cancel{b^2}+12+\alpha\cancel{b}+12\cancel{b^2} = -4b^2+12$$

Άρα, $\bar{x}=(x,y,z)^T=\left(\dfrac{b^2-12}{\alpha-3},\dfrac{-b}{2\alpha-6},\dfrac{6-2b^2}{\alpha-3}\right)^T,\ \alpha\neq 3, b\in\mathbb{R}.$

(B) Έστω $D=0 \Leftrightarrow \alpha=3$

(B_1) Έστω $D_x=D_y=D_z=0 \Leftrightarrow b\in\{\pm\sqrt{12}\}\cap\{0\}\cap\{\pm\sqrt{3}\}$ (άτοπο)

(μη-ύπαρξη άπειρων λύσεων).

(B_2) Έστω $D_x\neq 0$ ή $D_y\neq 0$ ή $D_z\neq 0 \Leftrightarrow b\in\{0,\pm\sqrt{3},\pm\sqrt{12}\}$

Τότε $\bar{x}\in\emptyset$ (αδύνατο σύστημα).

Επομένως, εάν $\alpha=3 \Rightarrow \bar{x}\in\emptyset$ και εάν $\alpha\neq 3 \Rightarrow \bar{x}$ μοναδική λύση για $\alpha\neq 3, b\in\mathbb{R}$

Ασκήσεις. Επίλυση τρίων της μεθόδου των οριζουσών (Cramer).

(α) $\begin{cases} x+3y+z=2 \\ 2x+y+2z=1 \\ 2x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3/2 \\ y=3/4 \\ z=1/4 \end{cases}$

(β) $\begin{cases} x+3y-4z=-1 \\ 2x+y-z=2 \\ 2x+4y-5z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3/2 \\ y=3/2 \\ z=1/4 \end{cases}$

(γ) $\begin{cases} 2x-y-z=6 \\ x-2y+z=\alpha \\ x+\beta y-2z=\beta^2 \end{cases}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

(διερεύνηση λύσης)

(δ) $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+y+z=2 \\ x-3y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

(ε) $\begin{cases} x+3y-4z=-1 \\ 2x+y-z=2 \\ 2x+4y-5z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=30 \\ z=22 \end{cases}$

(στ) $\begin{cases} x+2y-z=5 \\ 4x-y+z=-1 \\ -2x+y+z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8/10 \\ y=49/10 \\ z=7/10 \end{cases}$

Επίλυση ΣΓΕ – Μέθοδος (επαυξημένου πίνακα) Gauss.

Επιτρεπτές γραμμο-πράξεις: Έστω $\Sigma \cdot \bar{x} = \bar{b}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $\bar{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

(α) $A = (\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n) \to (\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \dots \bar{a}_i\ \kappa\bar{a}_{i+1} \dots \bar{a}_n)^{(T)}$, $\kappa \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

(β) $A \to (\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \dots \bar{a}_i + \lambda \bar{a}_j \dots \bar{a}_m)^{(T)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $i,j = 1,2,\dots,n$.

όπου $A = (\Sigma \mid \bar{b}) := (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_n, \bar{b})$, και $\Sigma = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_n)$, $\bar{\sigma}_i \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Ο πίνακας $A = (\Sigma \mid \bar{b}) \in \mathbb{R}^{n\times(n+1)}$ καλείται ως ο επαυξημένος πιν. Gauss του ΣΓΕ.

Εάν $(\Sigma \mid \bar{b}) \to$ γραμμοπράξεις $\to \dots \to \begin{cases} (I_n \mid \bar{b}^*) \Rightarrow \bar{x} = (\bar{b}^*) & \text{(μοναδ. λύση)} \\ (K \mid \bar{b}^*) \text{ κάτω κλιμακωτός} \end{cases}$

$\Rightarrow \bar{x} \in \emptyset$ ή $\bar{x} \in V^k \subset \mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + y + 8z = 2 \end{cases} \Rightarrow A\bar{x} = \bar{b},\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 3},\quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3\times 1},\quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

Έστω
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 : r_3 - 4r_1]{r_2 : r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \end{array}\right) r_3 : -r_3$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 : r_1 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

Άρα $\begin{cases} x = -11 \\ y = -2 \\ z = -6 \end{cases}$ καθώς $(A \mid \bar{b}) \to \dots \to (I_3 \mid \bar{x})$ με $\bar{x} = (-11, -2, -6)^T$.

Παράδειγμα. $\left\{\begin{array}{l} 2x+y+z=1 \\ 4x+y=-2 \\ -2x+y+z=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A\cdot\bar{x}=\bar{b}=(1,-2,7)^T, \quad A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \bar{x}=(x,y,z)^T \end{array}\right.$

Μέθοδος (επαυξημένου πίνακα) Gauss. Έχουμε

$$(A|\bar{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2:=r_2-2r_1 \\ r_3:=r_3-r_1 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right) r_3:=r_3+2r_2$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{3\times 4}_{\upsilon}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+y+z=1 \\ -y-2z=-4 \\ -2z=0 \Rightarrow z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=4 \Big\} \Rightarrow 2x+4+0=1 \Rightarrow x=-3/2.$$

Παράδειγμα.

$$\left.\begin{cases} x+3y+4z=-13 \\ 2x+4y+2z=-14 \\ x+2y=-6 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A\bar{x}=\bar{b}=(-13,-14,-6)^T, \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \bar{x}=(x,y,z)^T \end{cases}$$

Μέθοδος (επαυξημένου πίνακα) Gauss.

$$(A\,|\,\bar{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 2 & 4 & 2 & -14 \\ 1 & 2 & 0 & -6 \end{array}\right) \; r_2:=r_2-2r_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \end{array}\right) \; \begin{array}{l} r_2:=r_3 \\ r_3:=r_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \in \mathbb{R}_U^{3\times 4}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} x+3y+4z=-13 \\ 2y=-6 \Rightarrow y=-3 \\ 2z=-2 \Rightarrow z=-1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=-13-3y-4z=-13+9+4=0 \\ y=-3 \\ z=-1 \end{cases}$$

Παράδειγμα. $\left\{\begin{array}{l} x+3y+4z=8 \\ 2x+4y+2z=10 \\ 4x+12y+16z=32 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}=(8,10,32)^T,\ \bar{x}=(x,y,z)^T,\ A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 12 & 16 \end{pmatrix}$

Μέθοδος (επαυξημένου πίνακα) Gauss. Έχουμε,

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 2 & 10 \\ 4 & 12 & 16 & 32 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2:=r_2-2r_1 \\ r_3:=r_3-4r_1 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (K|\bar{b}^*)$$

, K ανω τριγωνικός, δηλ. $K\in\mathbb{R}_U^{3\times 4}$ με $a_{33}=0$.

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+3y+4z=8 \\ -2y-6z=-6 \Rightarrow y+3z=3 \Rightarrow y=3-3z,\ z\in\mathbb{R} \\ 0=0 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow\ x+3(3-3z)=8-4z$

$\Rightarrow\ x=8-9-4z+9z \Rightarrow x=-1+5z,$

και άρα $\bar{x}=(x,y,z)^T=(-1+5z,\ 3-3z,\ z)^T=\begin{pmatrix} -1+5z \\ 3-3z \\ 0+z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},\ z\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \bar{x}=\bar{u}_0+z\bar{u}_1,\ z\in\mathbb{R},\ \bar{u}_0:=(-1,0,0)^T,\ \bar{u}_1:=(5,-3,1)^T$

$\Rightarrow \bar{x}=\{\bar{u}_0+z\bar{u}_1\}_{z\in\mathbb{R}} \subset V_1:=L\{\bar{u}_1\}$ $\mathbb{R}^3$-υπόχωρος, $\dim V'=1$

(μονοδιάστατος υπόχωρος λύσεων).

Παράδειγμα.
$$\begin{cases} x+3y+4z=8 \\ 2x+4y+2z=10 \\ 4x+12y+16z=36 \end{cases} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}=(8,10,36)^T,\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$
$$x=(x,y,z)^T$$

Μέθοδος (επαυξημένου πίνακα) Gauss. Έχουμε,

$$(A\,|\,\bar{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 2 & 10 \\ 4 & 12 & 16 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2:=r_2-2r_1 \\ r_3:=r_3-4r_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) = (K\,|\,\bar{b}^*),\ K\in\mathbb{R}^{3\times 4} \text{ άνω κλιμακωτός}$$
$$(\text{δηλ. } K\in\mathbb{R}_{\triangledown}^{3\times 4},\ a_{33}=0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3y+4z=8 \\ -2y-6z=-6 \\ 0=4 \ (\text{άτοπο}) \end{cases} \Rightarrow \bar{x}\in\emptyset \ (\text{αδύνατο ΣΓΕ}).$$

Επίλυση ΣΓΕ $n \times m$ με $m \neq n$. $(m>n)$

(A) Μέθοδος Gauss. Εφαρμόζουμε την μέθοδο Gauss σε ένα υπο-σύστημα $n \times n$ (με παραμέτρους τους υπόλοιπους $m-n$ αγνώστους) το οποίο θα πρέπει να επαληθεύει τις υπόλοιπες $m-n$ εξισώσεις.

(B) Μέθοδος Οριζουσών. Επιλέγουμε ένα υπο-σύστημα $n \times n$ με μη μηδενική ορίζουσα με τους υπόλοιπους αγνώστους να παραμένουν στους σταθερούς όρους σαν παράμετροι. Οι υπόλοιπες $m-n$ εξισώσεις θα πρέπει να επαληθεύουν το παραπάνω υπο-σύστημα. Αν δεν το επαληθεύουν το σύστημα είναι αδύνατο (μη-ύπαρξη λύσης).

Παράδειγμα. $\left\{\begin{array}{l} x+y+2z = 6 \\ 2x+4y+4z+w = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x} = \bar{b} = (6,12)^T, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 4}$

$\bar{x} = (x,y,z,w)^T$

(A) Μέθοδος επαυξημένου πίνακα) Gauss.

Έχουμε $(A|\bar{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 12 \end{array}\right) \; r_2 := r_2 - 2r_1$

$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 5}_U$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+2z = 6 \\ 2y+w = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}w \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x = 6-2z+\frac{1}{2}w, & z\in\mathbb{R} \\ y = -\frac{1}{2}w, & w\in\mathbb{R} \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \bar{x} = (x,y,z,w)^T = \left(6-2z+\frac{1}{2}w, -\frac{1}{2}w, z, w\right)^T = \begin{pmatrix} 6-2z+\frac{1}{2}w \\ -\frac{1}{2}w \\ z \\ w \end{pmatrix}, \; z,w\in\mathbb{R}$ (παραμετρική 2διάστατη λύση)

στήλη σταθερών όρων

στήλη όρων του z

στήλη όρων του w

$= \begin{pmatrix} 6 & -2z & \frac{1}{2}w \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}w \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}w \\ -\frac{1}{2}w \\ 0 \\ w \end{pmatrix}, \; z,w\in\mathbb{R}.$

$= \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; z,w\in\mathbb{R}$

$= \bar{u}_0 + z\bar{u}_1 + w\bar{u}_2$, όπου $\bar{u}_0 := (6,0,0,0)^T$, $z,w\in\mathbb{R}$.

$\bar{u}_1 := (-2,0,1,0)^T$

$\bar{u}_2 := \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1\right)^T$

$\Rightarrow \bar{x} = (x,y,z,w)^T = \bar{u}_0 + \alpha\bar{u}_1 + b\bar{u}_2, \; \alpha,b\in\mathbb{R}.$

$\Rightarrow \bar{x} \in V^2 := L\{\bar{u}_1,\bar{u}_2\}$ $\mathbb{R}^4$-υπόχωρος με $\dim(V^2) = 2$

καθώς $\{\bar{u}_1,\bar{u}_2\}$ γραμμ. ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$

(Έστω $\alpha\bar{u}_1 + b\bar{u}_2 = \left(-2\alpha+\frac{1}{2}b, -\frac{1}{2}b, \alpha, b\right)^T = \bar{0}, \; \alpha,b\in\mathbb{R} \Rightarrow \alpha = b$).

(β) Μέθοδος Οριζουσών (Cramer). Επιλύουμε το 2×2 υποσύστημα

$$\begin{cases} x+y = 6-2a, \\ 2x+4y = 12-4a-b, \ a,b\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^*\vec{x}^* = \vec{b}^* := (6-2a,\ 12-4a-b)^T, \ a,b\in\mathbb{R} \\ \vec{x}^* = (x,y)^T, \ A^* := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \vec{a}_1^{\,*} \ \ \vec{a}_2^{\,*} \end{cases}$$

καθώς $D^* := |A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4-2 = 2 \neq 0.$

Υπολογίζουμε: $D_x^* := |\vec{b}^*\ \vec{a}_2^{\,*}| = \begin{vmatrix} 6-2a & 1 \\ 12-4a-b & 4 \end{vmatrix} = 4(6-2a)-(12-4a-b) = 12-4a+b, \ a,b\in\mathbb{R}$

$D_y^* := |\vec{a}_1^{\,*}, \vec{b}^*| \ \begin{vmatrix} 1 & 6-2a \\ 2 & 12-4a-b \end{vmatrix} = 12-4a-b-2(6-2a) = 4a-b$

Άρα $\vec{x}^* = (x,y)^T = \left(\dfrac{D_x^*}{D^*}, \dfrac{D_y^*}{D^*}\right)^T = \left(\dfrac{12-4a+b}{2}, \dfrac{4a-b}{2}\right)^T = \left(6-2a+\dfrac{b}{2}, 2a-\dfrac{b}{2}\right)^T$ (μοναδική λύση υποσυστήματος).

Επομένως, $\vec{x} = (x,y,z,w)^T = \left(6-2a+\dfrac{b}{2}, 2a-\dfrac{1}{2}b, a, b\right)^T, \ a,b\in\mathbb{R}.$

και σύμφωνα με τα προηγούμενα $\vec{x}\in V^2 := L\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ (δηλ. $\vec{x}$ ανήκει σε ένα 2-διάστατο υπόχωρο λύσεων του $\mathbb{R}^4$).

Άσκηση.

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcr} -2x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -3x_4 & +x_5 & = & -4 \\ 3x_1 & -3x_2 & -x_3 & +4x_4 & +x_5 & = & 5 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & -2x_4 & +3x_5 & = & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\cdot\bar{x} = \bar{b}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{b}^T = (-4 \ \ 5 \ \ 2)^T = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$$

(Α) Μέθοδος (επαυξημένου πίνακα) Gauss:

Έχω $(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 2 & 3 & -3 & 1 & -4 \\ 3 & -3 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 := r_3 \\ \\ r_3 := r_1 \end{array}$

(επαυξημένος πίνακας Gauss)

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 3 & -3 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2 := r_2 - 3r_1 \\ r_3 := r_3 + 2r_1 \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & 7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2 := r_3 \\ r_3 := r_2 \end{array}$$

(κάτω κλιμακωτός)

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & -8 & -1 \end{pmatrix} \ r_3 := r_3 + r_2$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \ r_2 := \tfrac{1}{7} r_2$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \ r_1 := r_1 - 2r_2$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_5 = 2 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ -x_5 = -1 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 1 \\ x_3 - x_4 = -1 \\ x_5 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2 + 1,\ x_2 \in \mathbb{R}, \\ x_3 = x_4 - 1,\ x_4 \in \mathbb{R}, \\ x_5 = 1. \end{array} \right.$$

(δι-παραμετρική λύση)

Άρα $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (x_2+1, x_2, x_4-1, x_4, 1)^T$, $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$,

$\Rightarrow (a+1, a, b-1, b, 1)^T$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = a \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\bar{u}} + b \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\bar{v}} + \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}^{\bar{w}} = a\bar{u} + b\bar{v} + \bar{w},\ a, b \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \bar{x} \in V^2 := L\{\bar{u}, \bar{v}\}$ με V^2 $\mathbb{R}^4$-υποχώρος, $\dim(V^2) = 2$ καθώς $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ σύνολο γραμμ. ανεξ. διανυσμάτων.

(Έστω $a\bar{u} + b\bar{v} = \bar{0} \Rightarrow (a+1, a, b-1, b)^T = \bar{0} \Rightarrow a = b = 0$).

Άρα $\bar{x} \in \mathbb{R}^5$ είναι δι-διάστατος υποχώρος λύσεων του $\mathbb{R}^3$.

Σημείωση. Μέθοδος Gauss στον ΣΓΕ $m \neq n$ ή όταν A ιδιάζον ($|A| = 0$).

(Β) Μέθοδος οριζουσών. Επίλυση υπο-συστήματος, έστω $A^* \bar{x}^* = \bar{b}^*$, του αρχικού $A\bar{x} = \bar{b}$, όπου A μη-ιδιάζον.

Εάν $A^* = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ (υπο-πίνακας 2×2 του A), έχουμε $|A|^* = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$

Επιπλέον, εάν $A^*_{2\times2}$ A-υποπίνακας $\Rightarrow |A_{2\times2}| = 0$
(δηλ. όλοι οι 2×2 υποπίνακες του A είναι ιδιάζοντες).

Επιλέγουμε λοιπόν έναν $A^* := \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \bar{a}_1^* & \bar{a}_2^* & \bar{a}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times3} \end{array}$ με $|A^*| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{matrix}$

$$= (-2)(-2)\cdot 2 + 2(-1)(-1) + 3(-2)\cdot 2$$
$$- 4(-2)\cdot 3 - (-1)(-1)\cdot 2 - 2(-2)\cdot 3 \neq 0.$$

Επιλύουμε λοιπόν το 3×3 υποσύστημα $A\bar{x}^* = \bar{b}^* = \begin{pmatrix} -4+3x_4-x_5 \\ 5-4x_4-x_5 \\ 2+2x_4-3x_5 \end{pmatrix}$.
όπου $\bar{x}^* = (x_1, x_2, x_3)^T$

Υπολογίζουμε τα $D_1^* := |\bar{b}, \bar{a}_2, \bar{a}_3^*| = \begin{vmatrix} -4+3x_4-x_5 & 2 & 3 \\ 5-4x_4-x_5 & -2 & -1 \\ 2+2x_4-3x_5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$D_2^* = \begin{vmatrix} -2 & -4+3x_4-x_5 & 3 \\ 3 & 5-4x_4-x_5 & -1 \\ 4 & 2+2x_4-3x_5 & 2 \end{vmatrix}$, $D_3^* := \begin{vmatrix} -2 & 2 & -4+3x_4-x_5 \\ 3 & -2 & 5-4x_4-x_5 \\ 4 & -1 & 2+2x_4-3x_5 \end{vmatrix}$

Άρα $\bar{x}^* = (x_1, x_2, x_3)^T = \left(\dfrac{D_1^*}{D^*}, \dfrac{D_2^*}{D^*}, \dfrac{D_3^*}{D^*} \right)$ με $D^* := |A^*| \neq 0$
(μοναδική λύση για $x_4, x_5 \in \mathbb{R}$).

με $x_1 = x_1(x_4, x_5)$, $x_2 = x_2(x_4, x_5)$ και $x_3 = x_3(x_4, x_5)$, $x_4, x_5 \in \mathbb{R}$.
($\bar{x} \in V^2$ $\mathbb{R}^5$-υπόχωρος λύσεων, $\dim(V^2) = 2$, δηλ.
$\bar{x} \in$ 2-διάστατος υπόχωρος λύσεων).

Εφαρμογή. Έστω $p=p(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$.

Έστω $A,B,\Gamma\in Gr(p)=\{(x,p(x))\}_{x\in\mathbb{R}}$ με $A(0,2), B(-1,3), \Gamma(1,0)$.

Εύρεση $p=p(x)$, $x\in\mathbb{R}$ (με $A,B,\Gamma\in Gr(p)$).

Έστω $(x_i,y_i)\in Gr(p)$, $i=1,2,3$

$\Rightarrow \alpha x_i^3+\beta x_i^2+\gamma x_i+\delta=p(x_i)=y_i$, $i=1,2,3$.

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1^3\alpha+x_1^2\beta+x_1\gamma+\delta=y_1 \\ x_2^3\alpha+x_2^2\beta+x_2\gamma+\delta=y_2 \\ x_3^3\alpha+x_3^2\beta+x_3\gamma+\delta=y_3 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}=(y_1,y_2,y_3)^T,\ A=\begin{pmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{x}=(\alpha,\beta,\gamma,\delta)^T$

(Σ.Γ.Ε 3×4)

Επειδή $A(0,2), B(-1,3), \Gamma(1,0) \Rightarrow \begin{cases} x_1=0,\ x_2=-1,\ x_3=1, \\ y_1=2,\ y_2=3,\ y_3=0. \end{cases}$

Άρα, $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times4}$, $\bar{b}=(2,3,0)^T$, $\bar{x}=(\alpha,\beta,\gamma,\delta)^T\in\mathbb{R}^{3\times4}$.

(Α) Επίλυση υπο-συστήματος 3×3 $A^*\bar{x}^*=\bar{b}^*$, αλλά $|A^*|=0$ (μηδενικές υπο-οριζ.)

Επίλυση υπο-συστήματος 2×2 $A'\bar{x}'=\bar{b}':=\begin{pmatrix} y_2-\delta-x_2\gamma \\ y_3-\delta-x_3\gamma \end{pmatrix}_{2\times2}=\begin{pmatrix} 3-\delta-x_2\gamma \\ 0-\delta-x_3\gamma \end{pmatrix}$

όπου $A':=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{2\times2}$, $\bar{x}':=(\alpha,\beta)^T$

Εναλλακτικά, $\left\{\begin{array}{ll} 1\delta & =2 \\ -\alpha+\beta-\gamma+\delta & =3 \\ \alpha+\beta+\gamma+\delta & =0 \end{array}\right.$ (αρχικό ΣΓΕ 3×4).

Άρα $\delta=2$, οπότε $\left\{\begin{array}{l} -\alpha+\beta=3+\gamma-\delta \\ \alpha+\beta=-\gamma-\delta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-2+\gamma=\gamma+1 \\ -\gamma-2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A'\cdot\bar{x}'=\bar{b}':=\begin{pmatrix} \gamma+1 \\ -2-\gamma \end{pmatrix}_{2\times1} \Rightarrow A':=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{2\times2}$, $\bar{x}'=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$,

με $|A'|=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq0$.

Άρα το υπο-σύστημα 2×2 $A'\bar{x}'=\bar{b}'$ επιλύεται με τη μέθοδο Cramer

Σύμφωνα με τη μέθοδο Cramer $\bar{x}' = \binom{\alpha}{b} = \left(\frac{D'_\alpha}{D'}, \frac{D'_b}{D'}\right)^T$, (μοναδική λύση, για $\gamma \in \mathbb{R}$ $\delta = 2$)

όπου $D' := |A'| = -2 \ (\neq 0)$.

και $D'_\alpha = \begin{vmatrix} \gamma+1 & 1 \\ -2-\gamma & 1 \end{vmatrix} = 1+\gamma-(-2-\gamma) = 2\gamma+3$, $\gamma \in \mathbb{R}$

$$D'_b = \begin{vmatrix} -1 & \gamma+1 \\ 1 & -2-\gamma \end{vmatrix} = \gamma+2-(\gamma+1) = 1$$

Επομένως $\alpha = \frac{D'_\alpha}{D'} = -\frac{3}{2} - \gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$ και $b = \frac{D'_b}{D'} = -\frac{1}{2}$

Άρα $\bar{x} = (\alpha, b, \gamma, \delta)^T = \left(-\frac{3}{2}-\gamma, -\frac{1}{2}, \gamma, 2\right)^T$, $\gamma \in \mathbb{R}$

ή $\bar{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ b \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2-\gamma \\ -1/2 \\ \gamma \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & -\gamma \\ -1/2 & +0 \\ 0 & \gamma \\ 2 & +0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\gamma \\ 0 \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \bar{x} = \bar{u}_0 + \gamma \bar{u}_1$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\bar{u}_0 := (-3/2, -1/2, 0, 2)^T$, $\bar{u}_1 = (-1, 0, 1, 0)^T$

$\Rightarrow \bar{x} \in V' := L\{\bar{u}_1\}$, $\dim V' = 1$ (μονοδιάστατος υποχώρος λύσεων)

Άρα $p = p(x) = \alpha x^3 + b x^2 + \gamma x + \delta = \left(-\frac{3}{2} - \gamma\right) x^3 - \frac{1}{2} x^2 + \gamma x + 2$, $\gamma \in \mathbb{R}$

(Β) Εναλλακτικά. Επίλυση υπο-συστήματος 3x3 με τη μέθοδο Cramer)
(μη-μηδενική ορίζουσα συντελεστών).

$$A\bar{x} = \bar{b} = (2,3,0)^T, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^* \bar{x}^* = \bar{b}^* := \begin{pmatrix} y_1 - 0\cdot\gamma \\ y_2 - (-1)\gamma \\ y_3 - 1\gamma \end{pmatrix}_{3\times 1}, \quad A^* = \begin{array}{c} \begin{matrix} \bar{a}_1^* & \bar{a}_2^* & \bar{a}_3^* \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \end{array}, \quad \bar{x}^* = (\alpha, \beta, \delta)^T$$

Μέθοδος Cramer. $D^* = |A^*| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 1 - (-1) - 1 = -1 \neq 0.$

Άρα $\bar{x}^* = (\alpha, \beta, \delta)^T = \left(\dfrac{D_\alpha^*}{D^*}, \dfrac{D_\beta^*}{D^*}, \dfrac{D_\delta^*}{D^*} \right)$ (μοναδική λύση υπο-συστήματος $A^*\bar{x}^* = \bar{b}^*$).

όπου $D_\alpha^* = |\bar{b}^*, \bar{a}_2^*, \bar{a}_3^*| = \begin{vmatrix} 2 - 0\gamma & 0 & 1 \\ 3 - (-1)\gamma & 1 & 1 \\ 0 - 1\cdot\gamma & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2\gamma$

$D_\beta^* = |\bar{a}_1^*, \bar{b}^*, \bar{a}_3^*| = \begin{vmatrix} 0 & 2-\gamma & 1 \\ -1 & 3+\gamma & 1 \\ 1 & -\gamma & 1 \end{vmatrix} = 1$

$D_\delta^* = |\bar{a}_1^*, \bar{a}_2^*, \bar{b}^*| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2-\gamma \\ -1 & 1 & 3+\gamma \\ 1 & 1 & -\gamma \end{vmatrix} = -4.$

Άρα $\bar{x}^* = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \left(\dfrac{D_\alpha^*}{D^*}, \dfrac{D_\beta^*}{D^*}, \dfrac{D_\delta^*}{D^*} \right)^T = \begin{pmatrix} -3+2\gamma \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 + \gamma \\ -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}, \gamma \in \mathbb{R}$ (μοναδική λύση για $\gamma \in \mathbb{R}$)

Άρα $\bar{x} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)^T = \left(-\frac{3}{2} + \gamma, -\frac{1}{2}\gamma, \gamma, 2\right)^T, \gamma \in \mathbb{R}.$

Οπότε $p = p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = \left(-\frac{3}{2} + \gamma\right)x^3 - \frac{1}{2}\gamma x^2 + \gamma x + 2, \ x\ \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}.$

Άσκηση.

(α) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=3 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ (β) $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-y+z=-3 \\ x-3y+2z=0 \end{cases}$

(γ) $\begin{cases} x+y+z+2=w \\ 2x-y-z+w=1 \\ x+2y+2z-w=3 \end{cases}$ (δ) $\begin{cases} 2x-y+3z-w=0 \\ x+y-2z=2-w \\ x-y=w \end{cases}$

(ε) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-4y= \\ x-6y=-1 \\ 3x+14y=1 \end{cases}$ (στ) $\begin{cases} x+y+2z+w=5 \\ 2x+3y-z-2w=2 \\ 4x+5y+3z=7 \end{cases}$ (αδύνατο)

(ζ) $\begin{cases} 5y+35z-24w=1 \\ 2x+y-z+w=1 \\ 3x+2y-2z-w=1 \\ 5x+3y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -43 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \alpha\in\mathbb{R}$

(η) $\begin{cases} 2x-y+z=-1 \\ -x+y+2z+w=5 \\ x+2z+2w=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$

$\begin{cases} x+y-2z+w+3t=1 \\ 2x-y+2z+2w+6t=2 \\ 3x+2y-4z-3w-9t=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$

Ορισμός. Ομογενές Σύστημα. Έστω $A\bar{x}=\bar{b}$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\bar{b}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$

$A\bar{x}=\bar{b}$ ομογενές σύστημα $\Leftrightarrow \bar{b}=\bar{0}$ $\left(\Leftrightarrow \bar{0}\in\{\bar{x} \,/\, Ax=0\}\right)$

(A) Έστω $|A|\neq 0 \Rightarrow$ (μέθοδος οριζουσών) $\Rightarrow \bar{x}=\bar{0}$ (Τετριμμένη λύση)

(B) Έστω $|A|=0 \Rightarrow$ (μέθοδο οριζουσών) $\Rightarrow \bar{x}\in V\subset\mathbb{R}^{k}$ υπόχωρος (αόριστο σύστημα)

Παράδειγμα. $\begin{cases} 2x+4y=0 \\ 3x+6y=0 \end{cases} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{0}$, $\bar{x}=(x,y)^T$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

Έχουμε $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=12-12=0$ (αόριστο σύστημα)

(A) Επίλυση ΟΣΓΕ με αντικατάσταση (καθώς ΟΣΓΕ 2×2)

Άρα $\left.\begin{cases} 2x+4y=0 \Rightarrow x+2y=0 \\ 3x+6y=0 \Rightarrow x+2y=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow x+2y=0$,

$\Rightarrow \bar{x}=(x,y)^T=(-2y,y)^T=\begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}=y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \bar{x}\in L\{(-2,1)^T\}=:V^1$ $\mathbb{R}^2$-υπόχωρος, $\dim(V^1)=1$

(μονοδιάστατος υπόχωρος λύσεων).

(B) Επίλυση ειδικότερου ΟΣΓΕ με $x:=1$ ή $y:=1$.

(Μέθοδος αντικατάστασης για 2×2 ΟΣΓΕ, μέθοδο Cramer για 3×3 ΟΣΓΕ)..

Έχουμε $A\bar{x}=0$, $y:=1 \Rightarrow \begin{cases} 2x+4=0 \\ 3x+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ (μέθοδο αντικατάστ.)

Άρα $\bar{x}_0=(x,y)^T=(-2,1)^T$ (ειδική λύση για $y:=1$)

Άρα $\bar{x}=\alpha\bar{x}_0$, $\alpha\in\mathbb{R} \Rightarrow x\in\{\alpha\bar{x}_0\}_{\alpha\in\mathbb{R}}=:V=L\{\bar{x}_0\}$ (μονοδιάστ. υποχ. λύσεων).

Σημείωση. Έστω $A\bar{x}=\bar{0}$ (ΟΣΓΕ με διάνυσμα αγνώστων $\bar{x}$) $\Rightarrow \alpha(A\bar{x})=\alpha\cdot\bar{0}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow A(\alpha\bar{x})=\bar{0}$ (ΟΣΓΕ με διάνυσμα αγνώστων/λύσεων $\alpha\bar{x}$, $\alpha\in\mathbb{R}$).

Άρα $\{x\in\mathbb{R}^{n\times 1} \,/\, A\bar{x}=\bar{0}\}=\{\alpha x_0\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$, όπου $A\bar{x}_0=\bar{0}$.

Παράδειγμα. $\begin{cases} x+ay=0 \\ 3x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\bar{x}=\bar{0} \\ \bar{x}=(x,y)^T \end{cases}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

Έστω $|A|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & a \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1-3a=0$.

(Α) Έστω $|A|=0 \Leftrightarrow 1-3a=0 \Leftrightarrow a=1/3$. (αόριστο ΣΓΕ)

Τότε $\begin{cases} x+\frac{1}{3}y=0 \\ 3x+y=0 \end{cases} \Rightarrow 3x+y=0 \Rightarrow y=-3x,\ x\in\mathbb{R}$,

$\Rightarrow \bar{x}=(x,y)^T=(x,-3x)^T = x\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}$ (επίλυση με αντικατάσταση).

$\Rightarrow \bar{x}\in V' := L\{(1,-3)^T\}$ $\mathbb{R}^2$-υποχώρος $\dim(V')=1$

(μονοδιάστατος υποχώρος λύσεων.

Σημείωση. Αναμενόμενη διάσταση του V' καθώς $\dim(V')\le 2$ ($\bar{x}\in\mathbb{R}^2$).

(Β) Έστω $|A|\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 1/3$. (μοναδική, τετριμμένη λύση).

Τότε $\begin{cases} x+ay=0 \Rightarrow 3x+3ay=0 \\ 3x+y=0 \end{cases} \Rightarrow -y+3ay=0 \Rightarrow (3a-1)y=0$

$\Rightarrow y=0$ (καθώς $a\neq 1/3$)

$\Rightarrow x=y=0$ (τετριμμένη λύση).

(επίλυση με αντικατάσταση).

Παράδειγμα. $\left.\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x-y+2z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{0}$, $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&-1&2\\1&1&1\end{pmatrix}$, $\bar{x}=(x,y,z)^T$.

Έχουμε $|A|=\left|\begin{matrix}1&2&1\\2&-1&2\\1&1&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}2&1\\-1&2\\1&1\end{matrix} = 0.$

Επομένως, $\bar{x}\in V^k \subset \mathbb{R}^3$ υπόχωρος $\dim(V^k)=k<3$ (αόριστο ΣΓΕ).

(Α) Εύρεση γενικής λύσης του ΟΣΓΕ μέσω 2×2 υπο-συστήματος (Cramer/αντ.)

Έστω $z:=1$ (ή $x:=1$ ή $y:=1$) και επιλέγουμε το υποσύστημα 2×2 το οποίο έχει μη-μηδενική ορίζουσα (μη-ιδιάζον υποσύστημα).

Άρα $A\bar{x}=\bar{0} \Rightarrow \left|\begin{matrix} x+2y=-1 \\ 2x-y=-2 \\ x+y=-1 \end{matrix}\right.$ (πρέπει να επαληθεύεται την $\bar{x}^*=(x,y)^T$ λύση). $\left.\begin{matrix} x+2y=-1 \\ 2x-y=-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left|\begin{matrix} A^*\bar{x}^*=\bar{b}^*:=(-1,-2)^T, \\ \bar{x}^*=(x,y)^T \end{matrix}\right.$ $A^*=\begin{array}{c} \begin{matrix}\bar{a}_1^* & \bar{a}_2^*\end{matrix} \\ \begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}\end{array}$

Επιλέγουμε το 2×2 υποσύστημα $A^*\bar{x}^*=\bar{b}^*$ (μη-ομογενές) για τη μέθοδο των Οριζουσών. Αυτό το σύστημα έχει μια μοναδική λύση καθώς

$$D^*:=|A^*|=\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}=-1-4=-5\neq 0.$$

Η λύση αυτή είναι $\bar{x}^*=(x,y)^T=\left(\dfrac{D_x^*}{D^*},\dfrac{D_y^*}{D^*}\right)$ (μοναδική λύση), όπου

$$D_x^*:=|\bar{b}^*,\bar{a}_2^*|=\begin{vmatrix}-1&2\\-2&-1\end{vmatrix}=1-(-4)=5$$

$$D_y^*:=|\bar{a}_1,\bar{b}|=\begin{vmatrix}1&-1\\2&-2\end{vmatrix}=-2-(-2)=0.$$

Άρα, $\bar{x}^*=(x,y)^T=\left(\dfrac{D_x^*}{D^*},\dfrac{D_y^*}{D^*}\right)=(-1,0)^T$,

οπότε $x+y=-1$ (επαλήθευση 3ης εξίσωσης) $\Big\} \Rightarrow$

με $x=-1$, $y=0$, $z=1$

και τελικά $\bar{x}=(x,y,z=1)^T=(-1,0,1)^T$ (μια λύση για $z:=1$)

Επίσης, $\bar{x}=\alpha\bar{u}_0$, $\bar{u}_0\in\mathbb{R}^3$ έχουμε την αόριστη λύση

$\bar{x}=\alpha(-1,0,1)^T \Rightarrow \bar{x}\in V^1:=L\{(-1,0,1)^T\}$, $\dim(V^1)=1$ (μονοδιάστατος υπόχωρος λύσεων).

(Β) Επίλυση 2×2 υπο-συστήματος (μέθοδος Cramer ή αντικατάστασης).

Εναλλακτικά επιλύουμε ένα 2×2 μη-ιδιάζον υποσύστημα του αρχικού 3×3 ΣΓΕ παραμετροποιώντας έναν άγνωστο (μεταφέροντάς τον στη στήλη των σταθ. όρων). Αναμένουμε έτσι ένα αόριστο σύστημα με την παραλειπόμενη εξίσωση να ικανοποιείται από την αόριστη αυτή λύση.

Συγκεκριμένα,
$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x-y+2z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=-z \\ 2x-y=-2z \end{cases} \Rightarrow A^*\bar{x}^*=\bar{b}^*=(-z,-2z)^T,\ z\in\mathbb{R}$$
$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2},\quad \bar{x}^*=(x,y)^T$$

με το 2×2 υπο-σύστημα $A^*\bar{x}^*=\bar{b}^*$ να έχει A^* μη-ιδιάζον, καθώς $|A^*|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-5\neq 0$.

Οπότε θα έχει $\bar{x}^*=\left(\frac{D_x^*}{D^*},\frac{D_y^*}{D^*}\right)$ (μοναδική λύση για κάθε $z\in\mathbb{R}$), όπου

$$D_x^*:=|\bar{b}^*,\bar{a}_2^*|=\begin{vmatrix} -z & 2 \\ -2z & -1 \end{vmatrix}=z-2(-2z)=5z,\ z\in\mathbb{R}$$

$$D_y^*=|\bar{a}_1^*,\bar{b}^*|=\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 2 & -2z \end{vmatrix}=-2z-2(-z)=-2z+2z=0$$

Άρα $\bar{x}^*=(x,y)^T=\left(\frac{5z}{-5},\frac{0}{-5}\right)^T=(-z,0),\ z\in\mathbb{R}$ (μοναδική λύση για κάθε $z\in\mathbb{R}$).

(Επομένως $\bar{x}=(x,y,z)^T=(-z,0,z)^T,\ z\in\mathbb{R}$ (παραμετρική/αόριστη λύση)
με $\bar{x}=z(-1,0,1)^T$, δηλ. $\bar{x}^*\in\{z\bar{u}\}_{z\in\mathbb{R}}\subset V^1:=L\{\bar{u}\}$ $\mathbb{R}^3$-υπόχωρος
(μονοδιάστατος υπόχωρος λύσεων).

Σημείωση. Τους παραπάνω 2 τρόπους τους χρησιμοποιούμε για ευκολία, καθώς επιλύουμε υπο-συστήματα 2×2 και όχι το αρχικό 3×3 σύστημα.

Παράδειγμα. $\begin{cases} x+6y+z+2w=0 \\ x+4y+2z-2w=0 \\ x-2y+z-w=0 \\ 3x+8y+4z-4w=0 \end{cases} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{0}$, όπου $A=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

Έχουμε $|A|=0$ (δηλαδή έχουμε αόριστο ΣΓΕ). Επιλέγουμε να απομονώσουμε ένα 3×3 μη-ιδιάζον υπο-σύστημα σταθεροποιώντας έναν άγνωστο (έτσι ώστε να οδηγηθούμε σε μοναδική λύση για το υπο-σύστημα).

Έστω $A\bar{x}=\bar{0}$ με $x:=1 \Rightarrow \begin{cases} 6y+z+2w=-1 \\ 4y+2z-2w=-1 \\ -2y+z-4z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^*\bar{x}^*=\bar{b}^*=(-1,-1,-1)^T \\ \bar{x}^*=(y,z,w)^T \end{cases}$

και $8y+4z-4w=-3$ να επαληθεύει τη λύση.

$A^*=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

Επιλέγουμε το παραπάνω 3×3 υποσύστημα $A^*\bar{x}^*=\bar{b}^*$ καθώς $|A^*|\neq 0$, οπότε αναμένουμε η λύση του υποσυστήματος να είναι μοναδική ως προς $(y,z,w)^T$, οπότε μία λύση του αρχικού ΣΓΕ θα είναι η $\bar{x}_0=(1,y_0,z_0,w_0)^T\in\mathbb{R}^4$ (καθώς είχαμε $x:=1$).

(Επιπλέον, $\bar{x}\in V'$ $\mathbb{R}^4$-υπόχωρος με $\dim(V')=1$, οπότε $\bar{x}=\alpha(1,y_0,z_0,w_0)^T$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Ο υπόχωρος λύσεων V' του αρχικού ΣΓΕ περιμένουμε να είναι μονοδιάστατος ($\dim V'=1$), καθώς επιλέγουμε ένα $(4-1)\times(4-1)$ υπο-σύστημα του αρχικού συστήματος (4×4) για το οποίο βρίσκουμε μία λύση και επειδή ξέρουμε ότι θα είναι αόριστο τότε το σύνολο λύσεων του θα είναι γραμμικός συνδυασμός αυτής, δηλ. $\bar{x}=\alpha\cdot(1,y_0,z_0,w_0)\in\mathbb{R}^4$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Η μοναδική λύση $\bar{x}^*=(y_0,z_0,w_0)\in\mathbb{R}^3$ του υπο-συστήματος $A\bar{x}^*=\bar{b}^*$ θα δίνεται (σύμφωνα με τη μέθοδο Cramer) ως

$\bar{x}^*=(D^*_x/D^*,\ D^*_y/D^*,\ D^*_z/D^*)^T$, όπου, κατά τα γνωστά,

$D^*_x:=|\bar{b}^*,\bar{a}^*_2,\bar{a}^*_3|$, $D^*_y:=|\bar{a}^*_1,\bar{b}^*,\bar{a}^*_3|$ και $D^*_z:=|\bar{a}^*_1,\bar{a}^*_2,\bar{b}^*|$.

Ασκήσεις.

(α) $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+y+2z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$

(β) $\begin{cases} x-2y-z=0 \\ -2x+y+2z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$

(γ) $\left.\begin{cases} x+3y-4z=0 \\ x+y-z=0 \\ 2x+4y-5z=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix},\ a\in\mathbb{R}.$

(δ) $\begin{cases} 2x-8y=0 \\ 3x+ay=0 \end{cases},\ a\in\mathbb{R}$

(ε) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y+2z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$

(στ) $\left.\begin{cases} x-z+w=0 \\ 2x+y-z+w=0 \\ -x+2y+z=0 \\ x+2z-3w=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$