- Διάνυσμα n-στοιχείων / Διατεταγμένη n-άδα

$$\mathbf{a} = \bar{a} = (a_1, a_2, \dots a_n) := a(\mathbb{N}_1^n), \quad \mathbb{N}_1^n := \{1, 2, 3, \dots, n\}$$ (σύνολο δεικτών)

όπου $a : \mathbb{N}_1^n = \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow A = \{a_i\}_{i=1}^n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ με

$$\mathbb{N}_1^n \ni n \xmapsto{a} a(n)$$

Άρα $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$

Τα στοιχεία a_i, $i = 1, 2, \dots, n$ εμπεριέχουν διάταξη, δηλ.

a_1 : 1^o στοιχείο του $\bar{a}$, a_2 : 2^o στοιχείο του $\bar{a}$, κ.λ.π.

Άρα το σύνολο δεικτών $\{1, 2, \dots, n\}$ καθορίζει τη διάταξη των στοιχείων (components) του διανύσματος $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

- Καρτεσιανό γινόμενο

$$A \times B := \{(a, b) \,/\, a \in A,\ b \in B\}$$

$$A \times B := \{(a, b) \,/\, a \in A,\ b \in B\} = \{(a, b)\}_{\substack{a \in A \\ b \in B}}$$

$$A^n := \underbrace{A \times A \times \dots A}_{n\text{-φορές}}$$

- πχ $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \,/\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$ (σύνολο πραγματικών τριάδων)

- Ακολουθίες

$a=(a_i)=(a_1,a_2,a_3,\dots):=f(\mathbb{N}_1^n)=f(\{1,2,\dots,n\})$, όπου

$\mathbb{N}_1^n \ni n \xmapsto{f} f(n):=a_n$. $\left(f:\mathbb{N}_1^n \longrightarrow \{a_i\}_{i=1}^n\right)$

Οι ακολουθίες λοιπόν μπορούν να θεωρηθούν ως διανύσματα απείρου μεγέθους (στοιχείων).

Αντίστοιχα, τα διανύσματα μπορούν να θεωρηθούν ως ακολουθίες πεπερασμένων στοιχείων.

- Διανυσματικοί Χώροι (Γραμμικοί Χώροι)

$\mathbb{V}$ F-διανυσματικός χώρος n-διάστασης $\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow}$ $\mathbb{V}=\{\bar{v}=(v_i)_{i=1}^n \,/\, v_i\in F\}$

όπου $F(+,\cdot)$ σώμα, στον οποίο ορίζουμε:

(α) Άθροισμα διανυσμάτων: $\bar{a}+\bar{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\dots a_n+b_n)$

όπου $\bar{a},\bar{b}\in\mathbb{V}$, $\bar{a}=(a_1,\dots,a_n)$, $\bar{b}=(b_1,\dots,b_n)$

(β) Γινόμενο διανύσματος επί αριθμό: $\lambda\bar{a}=\lambda\cdot\bar{a}=\bar{a}\cdot\lambda=(\lambda a_1,\dots\lambda a_n)$

$\lambda\in F$ και όπου $\bar{a}=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{V}$

$\dim(V)=n$

Ουσιαστικά, κάθε δ.χ. n-διάστασης μπορεί να αντιστοιχηθεί με τον F^n

π.χ. με τον $\mathbb{R}^n$

• π.χ. $\bar{u} = (1, \sqrt{2}, 4)$, $\bar{v} = (0, 1, 2)$, δηλ. $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^3$

Άρα $\bar{u} + \bar{v} = (1, \sqrt{2}, 4) + (0, 1, 2) = (1, \sqrt{2}+1, 6) \in \mathbb{R}^3$

• π.χ. $k(x, y) + \lambda(1, 2+x) = (kx, ky) + (\lambda, 2\lambda + 2x)$

$= (kx + \lambda, ky + 2\lambda + 2x)$

• Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων.

$\bar{a}$ γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\bar{u}, \bar{v} \in F^n \overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow} \bar{a} = k\bar{u} + \lambda\bar{v}, \; k, \lambda \in F$

• Γραμμική επέκταση Δ.Χ.

$L\{(\bar{u}, \bar{v})\} := \{\lambda\bar{u} + \mu\bar{v}\}_{\lambda, \mu \in F}$ όπου $\bar{u}, \bar{v}$ F-δ.χ.

Γενικότερα, $L\{\bar{u}_i\}_{i=1}^{m} := \left\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \bar{u}_i\right\}_{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m) \in F^m}$

(και V)

• Μηδενικό διάνυσμα / Αντίθετο διάνυσμα

$0_F = \bar{0}_F \in V$ μηδενικό διάνυσμα $\overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \bar{0}_F = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n\text{-φορές}}) & \text{όπου } 0 = 0_F \text{ F-μηδενικό στοιχείο} \\ \text{και } V \text{ F-δ.χ. n-διάστασης } (V = F^n) \end{cases}$

Ισχύει $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$, $\bar{a} \in V$ (ουδετερότητα)

$-\bar{a} \in V$ αντίθετο του $\bar{a} \in V \overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow} -\bar{a} = (-1) \cdot \bar{a}$

Ισχύει $-\bar{a} + \bar{a} = a - \bar{a} = \bar{0}$ (αντιθετότητα)

• Γραμμική Εξάρτηση / Ανεξαρτησία

Έστω U F δ.χ. n-διάστασης $(U = F^n)$

• $\{\bar{u}_i\}_{i=1}^{m} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\} \subset U$ σύνολο γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων

$\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} \{(\lambda_i) \in F^n / \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \bar{u}_i = 0_F\} = \{\bar{0}_F\}$.

Δηλαδή, όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων προέρχονται μόνο από μηδενικούς συντελεστές

• $\{\bar{u}_i\}_{i=1}^{m} \subset U$ σύνολο γραμμικά εξαρτημένων διανυσμάτων

$\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} \{(\lambda_i) \in F^m / \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \bar{u}_i = 0_F\} \neq \{\bar{0}_F\}$.

Δηλαδή υπάρχει μη μηδενικός γραμμικός συνδυασμός (γραμμικώς) εξαρτημένων διανυσμάτων που δεν προέρχεται από μηδενικούς συντελεστές.

Πόρισμα.

(α) $\{\bar{0}_F\}$ σύνολο γραμμικών εξαρτημένων διανυσμάτων

$(\lambda \bar{0} = 0, \lambda \in F, \lambda \neq \bar{0}_F)$

(β) $\{\bar{u} \neq \bar{0}_F\}$ σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων

$(\lambda \bar{u} = \bar{0}_F \Rightarrow \lambda = 0_F$ καθώς $\bar{u} \neq \bar{0}_F)$

Πόρισμα

Έστω $\{\bar e_i\}_{i=1}^n = \{\bar e_1, \bar e_2, \dots, \bar e_n\} \subset F^n$ όπου $\bar e_i = (e_{ij})_{j=1}^n$, $i=1,2,\dots,n$.

$$e_{ij} := \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases} \quad i,j\in \mathbb{N}_1^n \quad \text{(σύμβολο Kronecker)}.$$

Έστω $\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar e_i = \bar 0 \Rightarrow \lambda_1\bar e_1+\lambda_2\bar e_2+\dots+\lambda_n\bar e_n=0$

$\Rightarrow \lambda_1(1,0,\dots,0)+\lambda_2(0,1,0,\dots,0)+\dots\lambda_n(0,0,\dots,1)$

$\Rightarrow (\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)=\bar 0 \Rightarrow \lambda_i=0,\ i=1,2,\dots,n$

$\Rightarrow \{\bar e_1,\dots,\bar e_n\}$ σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων

Πόρισμα

$\{\bar u_i\}_{i=1}^n$ σύνολο γραμμικών ανεξάρτητων διανυσμάτων του F^n

$\Rightarrow \bar u_k = \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\bar u_i + \sum_{i=k+1}^{n}\lambda_i\bar u_i = \lambda_1\bar u_1+\dots\lambda_{k-1}\bar u_{k-1}+\lambda_{k+1}\bar u_{k+1}+\dots+\lambda_k\bar u_k$

(καθώς εάν $\lambda_1\bar u_1+\dots+\lambda_n\bar u_n=\bar 0 \Rightarrow \exists\, \lambda_k\neq 0,\ k\in\mathbb{N}_1^n$

και άρα $\lambda_k\bar u_k = -\lambda_1\bar u_1-\dots-\lambda_n\bar u_n \Rightarrow \bar u_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\bar u_1+\dots+\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\bar u_n$)

- Άρα κάποιο διάνυσμα ενός συνόλου γραμμικών ανεξάρτητων διανυσμάτων γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Βάση δ.χ. (διανυσματική βάση)

$\{e_i\}_{i=1}^n \subset V$ V-διανυσματική βάση $\overset{\text{ορ.}}{\iff}$ $\{\bar e_i\}_{i=1}^n$ σύνολο γραμμικών ανεξάρτ. διαν. όπου $n=\dim(V)$

Πόρισμα. Έστω B U-βάση $(U = F^n)$ (η ζητητική απλετικά διαν.)

$\bar{u} \in U \Rightarrow \bar{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{e}_i$, $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^{n} = B$

Άρα τα διανύσματα μιας βάσης $\{\bar{e}_1, \dots \bar{e}_n\}$ καθορίζουν μονοσήμαντα ένα διάνυσμα, $\bar{u} \in U$ μέσω των συντελεστών του γραμ. συνδυασμού αυτού, δηλ. του $\bar{u} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \dots + \lambda_n \bar{e}_n$

Συντεταγμένες διανύσματος. Έστω $B = \{e_i\}_{i=1}^{n}$ F^n-βάση

$(x_i)_{i=1}^{n}$ $\bar{u}$-συντεταγμένες B-βάσης $\Leftrightarrow$ $\bar{u}_B = (x_i)_{i=1}^{n} \overset{ορ.}{\Leftrightarrow} \bar{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i$

- Ορθοκανονική βάση. Έστω U F-δ.χ. $(U = F^n)$

B U-ορθοκανονική βάση $\overset{ορ.}{\Leftrightarrow}$ $\begin{cases} B = \{\bar{e}_i\} \ U\text{-βάση} \\ \bar{e}_i = (\delta_{ij}), \ \delta_{ij} = \begin{cases} 1_F & i = j, \\ 0_F & i \neq j, \end{cases} \ i,j \in \mathbb{N}_1^n \end{cases}$

Άρα αν $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^{n}$ U-ορθοκανονική βάση $\Rightarrow$

$\bar{e}_i = (\underbrace{0_F, \dots, 0_F}_{(i-1)\text{-φορές}}, 1_F, \underbrace{0_F, \dots, 0_F}_{(n-i)\text{-φορές}})$

• Παράδειγμα

Έστω $\bar{u} = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$. Τότε B $\mathbb{R}^3$-ορθοκανονική βάση

$\Rightarrow B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, $\bar{e}_1 = (1,0,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1,0)$

και $\bar{e}_3 = (0,0,1)$

Άρα $\bar{u} = (1,2,3) = 1\cdot(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1)$

$\Rightarrow \bar{u}_B = (1,2,3)$, δηλ. $(1,2,3)_B = (1,2,3)$ ή $\bar{u}_B = \bar{u}$

Άρα στην ορθοκανονική βάση οι συντεταγμένες ενός διανύσματος ταυτίζονται με το διάνυσμα.

Επομένως το $\bar{u}$ έχει στοιχεία (components) τα $\{1,2,3\}$ και συντεταγμένες $(1,2,3) = \bar{u}$.

• Παράδειγμα.

Έστω $\bar{u} = (2,1)$, $\bar{v} = (0,3)$, $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^2$

Έστω $a_1\bar{u} + a_2\bar{v} = \bar{0} \Rightarrow a_1(2,1) + a_2(0,3) = \bar{0}$

$\Rightarrow (2a_1, a_1) + (0, 3a_2) = (0,0) \Rightarrow (2a_1, a_1 + 3a_2) = (0,0)$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} 2a_1 = 0 \\ a_1 + 3a_2 = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$$

Άρα $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων

$\Rightarrow (\dim(\mathbb{R}^2) = 2) \Rightarrow \{\bar{u}, \bar{v}\}$ $\mathbb{R}^2$-βάση

Παράδειγμα

Έστω $B = \{\bar{u}, \bar{v}\}$, $\bar{u} = (2,1)$, $v = (0,3)$ $\Rightarrow$ B $\mathbb{R}^2$-βάση

Έστω $\bar{a} = (1,1) \in \mathbb{R}^2$, $\bar{a}_B = ?$

Έχουμε $\bar{a} = \lambda_1 \bar{u} + \lambda_2 \bar{v}$

$\Rightarrow (1,1) = \lambda_1 (2,1) + \lambda_2 (0,3) = (2\lambda_1, \lambda_1 + 3\lambda_2)$

$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 = 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow \lambda_1 = 1/2$ $\Big\}$ $\Rightarrow 3\lambda_2 = 1 - \lambda_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lambda_2 = 3/2$

Άρα $(1,1)_B = (\lambda_1, \lambda_2) = (1/2, 3/2)$

(Προφανώς $\bar{u}_B = (2,1)$ και $\bar{v}_B = (0,3)$.

- π.χ. για $(2,2) = 2\bar{a} = 2(\lambda_1 \bar{u} + \lambda_2 \bar{v}) = 2\lambda_1 \bar{u} + 2\lambda_2 \bar{v}$

$\Rightarrow (2,2)_B = (2\lambda_1, 2\lambda_2) = (1, 3)$

- π.χ. για $\bar{\sigma} = (k,k) = k(1,1) = k\bar{a} = k(\lambda_1 \bar{u} + \lambda_2 \bar{v})$

$\Rightarrow (k,k) = k\lambda_1 \bar{u} + k\lambda_2 \bar{v} \Rightarrow (k,k)_B = (k\lambda_1, k\lambda_2) = \left(\frac{k}{2}, \frac{3k}{2}\right)$

• Παραδείγματα

Έστω $\bar{u}_1 = (3,0,-6)$, $\bar{u}_2 = (-4,1,7)$, $\bar{u}_3 = (-2,1,5)$, $u_1,u_2,u_3 \in \mathbb{R}^3$

Έστω $a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + a_3\bar{u}_3 = \bar{0} \Rightarrow a_1(3,0,-6) + a_2(-4,1,7) + a_3(-2,1,5)$

$\Rightarrow (3a_1, 0, -6a_1) + (-4a_2, a_2, 7a_2) + (-2a_3, a_3, 5a_3) = \bar{0}$

$\Rightarrow (3a_1 - 4a_2 - 2a_3, -4a_2 + a_3, -6a_1 + 7a_2 + 5a_3) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3a_1 - 4a_2 - 2a_3 = 0 \\ -4a_2 + a_3 = 0 \\ 6a_1 + 7a_2 + 5a_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3a_1 - 3a_3 - 2a_3 = 0 \\ 4a_2 = a_3 \\ 6a_1 + 7a_2 + 5a_3 = 0 \end{array}\right\} a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

Άρα $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ σύνολο γραμ. ανεξάρτητων διανυσμάτων

$\Rightarrow \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ $\mathbb{R}^3$-βάση

Έστω $\bar{a} = (1,1,1)_B = (?)$

Έστω $\bar{a} = (1,1,1) = \lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \lambda_3\bar{u}_3$

$\Rightarrow \lambda_1(3,0,-6) + \lambda_2(-4,1,7) + \lambda_3(-2,1,5) = (1,1,1)$

$\Rightarrow (3\lambda_1, 0, -6\lambda_1) + (-4\lambda_2, \lambda_2, 7\lambda_2) + (-2\lambda_3, \lambda_3, 5\lambda_3) = (1,1,1)$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3\lambda_1 - 4\lambda_2 - 2\lambda_3 = 1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ -6\lambda_1 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 = 1 \end{array}\right\}$$ (επίλυση γραμμ. συστήματος)

• Άσκηση. Έστω $\bar{a} = (0,1,x)$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{a}_B = (?)$

• Παράδειγμα. $(1,2,3)_B = (x,y,z)_{B^*}$, B^* $\mathbb{R}^3$-ορθ. βάση.

Έστω $(1,2,3)_B \Rightarrow 1\cdot\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + 3\bar{u}_3 = (3,0,-6) + 2(-4,1,7) +$
$+ 3(-2,1,5) = (-2, 2, 23)$

• Παράδειγμα Έστω $\bar{u}_1=(1,-2,-3)$, $\bar{u}_3=(-4,5,7)$, $\bar{u}_3=(-4,5,6)$

Έστω $a_1\bar{u}_1+a_2\bar{u}_2+a_3\bar{u}_3=\bar{0}$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} a_1-3a_2-4a_3=0 \\ -2a_1+5a_2+5a_3=0 \\ -3a_1+7a_2+6a_3=0 \end{cases}\right\}$$ (επίλυση γ.σ.ε.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (a_1,a_2,a_3)=(-5,-3,1)\neq\bar{0}$

$\Rightarrow \{u_i\}_{i=1}^{3}$ σύνολο γραμμ. εξαρτ. διανυσμάτων.

• Αλλαγή Διανυσματικής βάσης

Έστω $B = \{\bar{e}_i\}_{i=1}^{n} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots \bar{e}_n\}$ $\mathbb{R}^n$ - διαν. βάση

δηλ. B σύνολο n γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων.

Έστω $B' = \{\bar{e}_i'\}_{i=1}^{n} = \{\bar{e}_1', \bar{e}_2', \ldots, \bar{e}_n'\}$ διαν. βάση, $B' \neq B$

Έστω $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i$ (έναντι B διαν. βάσης)

με $(x_i)_{i=1}^{n} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (διάνυσμα συντεταγμένων του (ως προς B).

Έστω $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i' \bar{e}_i'$ (έναντι B' διαν. βάσης)

με $(\bar{x}')_{i=1}^{n} = (x_1, x_2', \ldots, x_n')$ (διάνυσμα συντεταγμένων του $\bar{x}$ ως προς B').

Έστω $\bar{e}_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{e}_j = a_{i1}\bar{e}_1 + a_{i2}\bar{e}_2 + \ldots + a_{in}\bar{e}_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

Άρα $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i' \bar{e}_i' = \sum_{i=1}^{n} x_i' \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i' a_{ij} \bar{e}_j = \sum_{\substack{j=1 \\ i=1}}^{n} x_j' a_{ji} \bar{e}_i$

Επίσης, $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i$

$\Rightarrow \quad x_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_j' a_{ji}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

Άσκηση. Έστω $\bar{u} = (1, 2)$ και $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ $\mathbb{R}^2$- διαν βάση

με $\bar{e}_1 = (3, 0)$ και $\bar{e}_2 = (-1, 2)$.

Το σύνολο B είναι σύνολο 2 γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων καθώς:

εάν $a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 = \bar{0}$ (μηδενικός γραμμικός συνδυασμός)

τότε $a_1(3,0) + a_2(-1,2) = \bar{0}$,

δηλ. $(3a_1, 0) + (-a_2, 2a_2) = \bar{0}$,

και άρα $(3a_1 - a_2, 2a_2) = (0,0)$,

δηλ. $\left\{\begin{aligned} 3a_1 - a_2 &= 0 \\ 2a_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$.

Άρα κάθε τυχαίος γραμμικός συνδυασμός που δίνει $\bar{0}$ έχει μηδενικούς συντελεστές, που δηλώνει ότι το σύνολο B είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων, και καθώς αυτά ανήκουν στο $\mathbb{R}^2$ τότε B $\mathbb{R}^2$- διαν. βάση.

Ισχύει τότε $\bar{u} = (2,1) = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$

δηλ. $u = (2,1) = x(3,0) + y(-1,2) = (3x - y, 2y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ 2y &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= (2+y)/3 = \frac{4+1}{6} = 5/6, \\ y &= 1/2. \end{aligned}\right.$

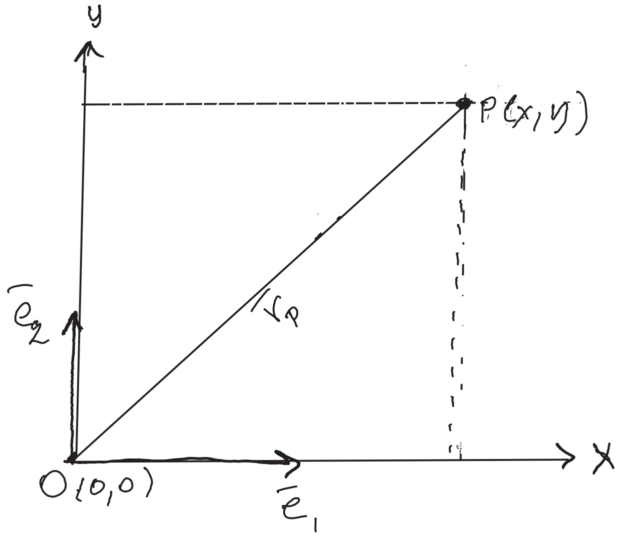
Άρα $\bar{u} = (1,2) = (5/6, 1/2)_B$ ή $\bar{u}_B = (5/6, 1/2)$

- Σημειακοί χώροι (ομοπαραλληλικοί χώροι ή αφινικοί χώροι) (affine spaces)

Έστω $P_B(x,y) \overset{ορ.}{\Leftrightarrow} \bar{r}_P = \overline{OP} \in V$ (V F^2-δ.χ.), με $\overline{OP}(x,y)_B$
ή $\bar{r}_P = (x,y)_B$ και B V-βάση
και όπου $O = \bar{r}(O) = \bar{0}_F = (0,0) \in F^2$

$\{E_1, E_2, E_3\}$ σημειακή βάση $\overset{ορ.}{\Leftrightarrow}$ $\{\overline{OE_1}, \overline{OE_2}\}$ F^2-διανυσματική βάση

Άρα, μια σημειακή βάση μπορεί να ταυτιστεί μία διαν



$\bar{r}_P$ (διάνυσμα θέσης του P)

$B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ F^2-διανυσματική βάση

Άρα $\overline{OP} = \bar{r}_P = (x,y)_B = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$

εάν B ορθοκανονική βάση

$\Rightarrow \bar{e}_1 = (1,0)_B, \ \bar{e}_2 = (0,1)_B$

Τότε $\{E_1, E_2, E_3\}$ σημ. βάση με

$\overline{OE_1} = \bar{e}_1$ και $\overline{OE_2} = \bar{e}_2$

Άσκηση. Έστω $A(1,2) \Rightarrow \begin{cases} A_B(x,y),\ B=\{B_1,B_2,B_3\} \text{ σημειακή βάση} \\ B_1(1,-1),\ B_2(3,3),\ B_3(0,4) \end{cases}$

Προφανώς B_i, $i=1,2,3$ δίνονται σε ορθοκανονική βάση. Άρα

$$\bar{r}_{B_1} = \overline{OB_1} = (1,-1),\quad \bar{r}_{B_2} = \overline{OB_2} = (-3,-3) \text{ και } \bar{r}_{B_3} = \overline{OB_3} = (0,1)$$

(διανύσματα θέσης της σημ. βάσης B)

Συμβ. $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\} := \{\overline{B_1B_2}, \overline{B_1B_3}\}$ διαν. βάση.

Έχουμε $A_B(x,y) \Rightarrow \bar{r}_A = \overline{OA} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$.

Χαρακτηρισμός της διαν. βάσης $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ μέσω της σημειακής B.

Έχουμε $\bar{e}_1 = \overline{B_1B_2} = \overline{B_1O} + \overline{OB_2} = -\overline{OB_1} + \overline{OB_2} = -\bar{r}_{B_1} + \bar{r}_{B_2} =$

$= -(1,-1) + (3,3) = (-1,1) + (3,3) = (2,4)$ και

$\bar{e}_2 = \overline{B_1B_3} = \overline{B_1O} + \overline{OB_3} = -\overline{OB_1} + \overline{OB_3} = -\bar{r}_{B_1} + \bar{r}_{B_3} =$

$= -(1,-1) + (0,4) = (-1,1) + (0,4) = (-1,5)$

Η διαν. βάση $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ είναι όντως διαν. βάση (και άρα και η B είναι όντως σημειακή βάση) καθώς εάν $\alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 = \bar{0}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,

έχουμε $\alpha_1(2,4) + \alpha_2(-1,5) = \bar{0} = (0,0)$

$\Rightarrow (2\alpha_1, 4\alpha_1) + (-\alpha_2, 5\alpha_2) = (0,0)$

$\Rightarrow 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ και $4\alpha_1 + 5\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ σύνολο γραμμ. ανεξάρτητων διαν. $\Rightarrow \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ διαν. βάση

(καθώς $\bar{e}_1, \bar{e}_2 \in \mathbb{R}^2$)

Τελικά, $\bar{r}_A = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 = x(2,4) + y(-1,5) = (2x, 4x) + (-y, 5y) \Big\} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x + 5y = 2 \end{cases}$

και ταυτόχρονα $\bar{r}_A = (1,2)$

Άσκηση. Έστω $A(1,2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_B(x,y),\ B=\{B_1,B_2,B_3\} \text{ σημειακή βάση} \\ B_1(1,-1),\ B_2(3,3),\ B_3(0,4) \end{array} \right.$

Προφανώς B_i, $i=1,2,3$ δίνονται σε ορθοκανονική βάση. Άρα

$$\bar{r}_{B_1} = \overline{OB_1} = (1,-1), \quad \bar{r}_{B_2} = \overline{OB_2} = (-3,-3) \text{ και } \bar{r}_{B_3} = \overline{OB_3} = (0,1)$$

(διανύσματα θέσης της σημ. βάσης B)

Έστω $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\} := \{\overline{B_1B_2}, \overline{B_1B_3}\}$ διαν. βάση.

Έχουμε $A_B(x,y) \Rightarrow \bar{r}_A = \overline{OA} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$

Υπολογισμός της διαν. βάσης $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$ μέσω της σημειακής B.

Έχουμε $\bar{e}_1 = \overline{B_1B_2} = \overline{B_1O} + \overline{OB_2} = -\overline{OB_1} + \overline{OB_2} = -\bar{r}_{B_1} + \bar{r}_{B_2} =$

$= -(1,-1) + (3,3) = (-1,1) + (3,3) = (2,4)$ και

$\bar{e}_2 = \overline{B_1B_3} = \overline{B_1O} + \overline{OB_3} = -\overline{OB_1} + \overline{OB_3} = -\bar{r}_{B_1} + \bar{r}_{B_3} =$

$= -(1,-1) + (0,4) = (-1,1) + (0,4) = (-1,5)$

Η διαν βάση $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$ είναι όντως διαν. βάση (και άρα και η B είναι όντως σημειακή βάση) καθώς εάν $a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 = \bar{0}$, $a_1,a_2 \in \mathbb{R}$,

έχουμε $a_1(2,4) + a_2(-1,5) = \bar{0} = (0,0)$

$\Rightarrow (2a_1, 4a_2) + (-a_2, 5a_2) = (0,0)$

$\Rightarrow 2a_1 - a_2 = 0$ και $4a_1 + 5a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ σύνολο γραμμ. ανεξάρτητων διαν. $\Rightarrow \{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$ διαν. βάση

(καθώς $\bar{e}_1,\bar{e}_2 \in \mathbb{R}^2$)

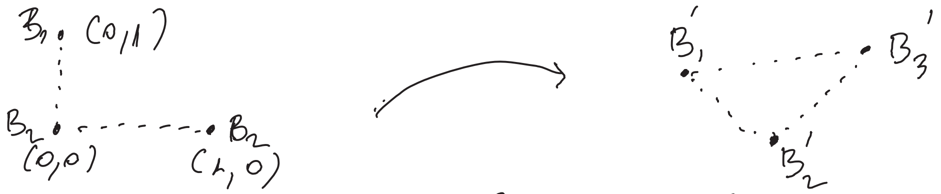
Τελικά, $\left.\begin{array}{l} \bar{r}_A = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 = x(2,4) + y(-1,5) = (2x,4x) + (-y,5y) \\ \text{και ταυτόχρονα } \bar{r}_A = (1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ 4x + 5y = 2 \end{array}\right.$

Σημείωση.

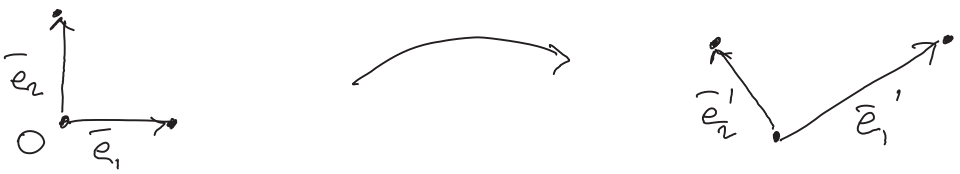
- Η προηγούμενη άσκηση ήταν ένα παράδειγμα μιας αλλαγής αφινικής βάσης από την ορθοκ. σημ. βάση $\{E_1, E_2, E_3\}$ στην $\{B_1, B_2, B_3\}$

  όπου $E_1 (1, 0)$, $E_2 (0, 1)$

- Η αλλαγή σημ. βάσης καθορίζει μια αλλαγή διαν. βάσης και αντίστροφα.



(ορθ. σημ. βάση $\{B_1, B_2, B_3\}$) (άλλη σημ. βάση $\{B_1', B_2', B_3'\}$)



(ορθ. διαν. βάση $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$) (άλλη διαν. βάση $\{\bar{e}_1', \bar{e}_2'\}$)

με $\bar{e}_1 := \overline{B_1 B_2}$, $\bar{e}_2 := \{\overline{B_1 B_3}\}$ με $\bar{e}_1' = \overline{B_1' B_2'}$, $\bar{e}_2' = \overline{B_1' B_3'}$