Κεφάλαιο 2 Πίνακες

2.1 Βασικοί ορισμοί και πίνακες

Σε πάρα πολλές δραστηριότητές του ο άνθρωπός χρησιμοποιεί διατάξεις αριθμητικών δεδομένων σε γραμμές και στήλες ώστε να μπορέσει να τα παρουσιάσει και να τα επεξεργαστεί. Έτσι δημιουργεί πίνακες αριθμών, οι γραμμές και οι στήλες των οποίων έχουν κάποια σχέση με τα δεδομένα.

Παραδείγματα: Ο πίνακας πωλήσεων ανά τρίμηνο μίας εταιρείας για τρία είδη που εμπορεύεται:

	1° Τρίμηνο	2° Τρίμηνο	3° Τρίμηνο	4° Τρίμηνο
Είδος Α	12	34	56	33
Είδος Β	2	23	1	0
Είδος Γ	9	2	3	23

Ο πίνακας δικτύου αεροπορικών συνδέσεων τεσσάρων πόλεων (1 υπάρχει σύνδεση, -1 δεν υπάρχει) :

	Αθήνα	Θεσσαλονίκη	Ηράκλειο	Αλεξανδρούπολη
Αθήνα	0	1	1	1
Θεσσαλονίκη	1	0	1	-1
Ηράκλειο	1	1	0	-1
Αλεξανδρούπολη	1	-1	-1	0

Στην Γραμμική Άλγεβρα επίσης ορίζουμε και μελετάμε τους πίνακες.

Ορισμός πίνακα

Ένας πραγματικός (μιγαδικός) πίνακας **Α** διάστασης $m\times n$ είναι μία διάταξη $n\cdot m$ πραγματικών (μιγαδικών αριθμών) σε m γραμμές και n στήλες.

Παράδειγμα: Πραγματικοί πίνακες 3×4και 2×2.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & 19 \\ 2 & 0 & -25 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$$

Ένας πίνακας που αποτελείται από μία στήλη $(m\times 1)$ ή μία γραμμή $(1\times n)$, ονομάζεται **πίνακας-στήλη (διάνυσμα στήλη ή απλά διάνυσμα)** ή **πίνακας-γραμμή (ή διάνυσμα γραμμή)** αντίστοιχα. Ένας πίνακας 1×1 λέγεται πίνακας στοιχείο.

Παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

Συχνά συμβολίζουμε τον πίνακα ως $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ και το στοιχείο της i γραμμής και j στήλης με a_{ij} ή ij-στοιχείο του πίνακα. Συνήθως για τα ονόματα των πινάκων χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα και για τα ονόματα των διανυσμάτων πεζά.

Από εδώ και πέρα όταν αναφερόμαστε σε πίνακες θα εννοούμε πραγματικούς πίνακες.

Αν $m = n$, τότε ο πίνακας **A** είναι ένας **τετραγωνικός** πίνακας τάξης n. Η **κύρια διαγώνιος** ενός τετραγωνικού πίνακα τάξης n αποτελείται από τα στοιχεία $a_{ii}\ \forall\ 1 \le i \le n$.

Ισότητα πινάκων

Δύο πίνακες μπορούν αν συγκριθούν εάν είναι της ίδιας διάστασης. Δύο πίνακες (ιδίας διάστασης) είναι **ίσοι** όταν έχουν ένα προς ένα τα στοιχεία τους ίσα.

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}\ \ \forall\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$$

Παράδειγμα: Οι παρακάτω πίνακες δεν μπορούν να συγκριθούν γιατί δεν έχουν την ίδια διάσταση.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & 19 \\ 2 & 0 & -25 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -25 \end{bmatrix}$$

Ενώ για τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -25 \end{bmatrix}$$

ισχύει $A \neq B$ διότι $a_{33} \neq b_{33}$.

Τέλος εάν

$$C = \begin{bmatrix} 6x & 9 \\ z & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 12 & 3y \\ \sqrt{2} & 3 \end{bmatrix}$$

τότε

$$C = D \Leftrightarrow x = 2, y = 3, z = \sqrt{2}.$$

Βασικοί πίνακες

- Ένας πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μηδενικά ονομάζεται μηδενικός και συμβολίζεται συνήθως με $O_{m \times n}$.
- Ένας τετραγωνικός πίνακας **D** που έχει στοιχεία μόνο στη διαγώνιο του ονομάζεται **διαγώνιος** (*diagonal*).
- Ένας τετραγωνικός πίνακας $\mathbf{U}$ που έχει όλα τα στοιχεία κάτω από την κυρία διαγώνιο μηδενικά ονομάζεται **άνω-τριγωνικός** (*upper triangular*).
- Ένας τετραγωνικός πίνακας $\mathbf{L}$ που έχει όλα τα στοιχεία πάνω από την κυρία διαγώνιο μηδενικά ονομάζεται **κάτω-τριγωνικός** (*lower triangular*).

$$U=\begin{bmatrix} u_{1\,1} & u_{2\,2} & . & . & . & u_{1\,n-1} & u_{1\,n} \\ 0 & u_{2\,2} & . & . & . & u_{2\,n-1} & u_{2\,n} \\ . & 0 & . & & & & . \\ . & . & . & . & & & . \\ . & . & & . & . & & . \\ 0 & . & . & . & 0 & u_{n-1\,n-1} & u_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & u_{n\,n} \end{bmatrix} \quad , \quad L=\begin{bmatrix} l_{1\,1} & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ l_{2\,1} & l_{2\,2} & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & . & & & . \\ . & . & & . & . & & . \\ l_{n-1\,1} & l_{n-1\,2} & . & . & . & l_{n-1\,n-1} & 0 \\ l_{n\,1} & l_{n\,2} & . & . & . & l_{n\,n-1} & l_{n\,n} \end{bmatrix}$$

U άνω τριγωνικός $u_{ij} \equiv 0$ όταν $i > j$ $\qquad$ L κάτω τριγωνικός $l_{ij} \equiv 0$ όταν $i < j$

- Ένας διαγώνιος πίνακας I_n του οποίου τα διαγώνια στοιχεία είναι ίσα με 1, ονομάζεται **μοναδιαίος**.

$$D=\begin{bmatrix} d_{1\,1} & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & d_{2\,2} & . & . & . & 0 & 0 \\ . & 0 & . & & & & . \\ . & . & . & . & & & . \\ . & . & & . & . & & . \\ 0 & . & . & . & 0 & d_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & d_{n\,n} \end{bmatrix} \quad , \quad I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & . & & & . \\ . & . & & . & . & & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

U διαγώνιος $d_{ij} \equiv 0$ όταν $i \neq j$ $\qquad$ I μοναδιαίος: διαγώνιος και $I_{ii} \equiv 1$

- Ένας τετραγωνικός πίνακας ο οποίος έχει μη μηδενικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο και σε ίσο αριθμό άνω και κάτω διαγωνίων, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μηδέν, ονομάζεται **πίνακας δέσμη** (banded). Όταν ο αριθμός των μη μηδενικών γειτονικών προς την κύρια διαγώνιο είναι ένα τότε ο πίνακας λέγεται **τριδιαγώνιος** (*tridiagonal*).

$$T=\begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & 0 & . & . & 0 & 0 \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & a_{3\,2} & a_{3\,3} & a_{3\,4} & 0 & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & a_{n-1\,n-2} & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & . & . & 0 & a_{n\,n-1} & a_{n\,n} \end{bmatrix}$$

T τριδιαγώνιος

- Ο **ανάστροφος** $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ (transpose) ενός πίνακα προκύπτει εάν στον πίνακα αλλάξουμε τις γραμμές σε στήλες και τις στήλες σε γραμμές.
- Ένας τετραγωνικός πίνακας $\mathbf{A}$ λέμε ότι είναι **συμμετρικός** αν ισχύει η σχέση $\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ όπου $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, ο ανάστροφος του $\mathbf{A}$.
- Σε έναν **πίνακα Z με μιγαδικά στοιχεία** ο πίνακας με τα συζυγή στοιχεία του λέγεται συζυγής πίνακας $\overline{Z}=\left[\overline{z_{ij}}\right]$. Ο **ανάστροφος συζυγής** του πίνακα Z

συμβολίζεται με $Z^* = \overline{Z}^T$. Εάν ισχύει $Z = Z^*$ τότε ο πίνακας ονομάζεται **ερμιτιανός**.

Παραδείγματα:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & 19 \\ 2 & 0 & -25 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -25 \\ 2 & 19 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+i & 3i \\ 2 & 2-5i \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ -3i & 2+5i \end{bmatrix}$$

2.2 Πίνακες και πράξεις.

Ορίζεται το **γινόμενο (πραγματικού ή μιγαδικού) αριθμού επί πίνακα** ως ένας πίνακας που έχει ως στοιχεία το γινόμενο του αριθμού επί το στοιχείο του πίνακα σε κάθε θέση.

$$kA = \left[ka_{ij} \right]$$

Δύο πίνακες μπορούν να προστεθούν εάν είναι της ίδιας διάστασης. Το **άθροισμα** δύο πινάκων (ιδίας διάστασης) είναι ένας πίνακας ιδίας διάστασης που έχει ως στοιχεία το άθροισμα (στην αντίστοιχη θέση) των στοιχείων των προσθετέων.

$$C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \;\; \forall \; 1 \le i \le m, \; 1 \le j \le n$$

Η **διαφορά πινάκων** ορίζεται ως $A - B = A + (-B)$

Για την πρόσθεση πινάκων (εννοείται κατάλληλων πινάκων ώστε να γίνεται η πράξη) ισχύει:

- $A + B = B + A$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)
- $(A+B)+C = A+(B+C)$ (προσεταιρισική)
- $A + O = A$(ουδέτερο στοιχείο)
- $A + (-A) = O$

Για το γινόμενο αριθμού επί πίνακα ισχύει:

- $(k+l)A = kA + lA$
- $k(A+B) = kA + kB$
- $k(lA) = (kl)A$

- $1A = A$
- Αν $lA = O$ τότε ή $l = 0$ ή $A = O$

(Εννοείται ότι οι πινάκες είναι κατάλληλοι ώστε να γίνεται η πράξη.)

Παραδείγματα:

$$3\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 9 & -12 & 3 \\ 6 & 0 & -75 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -24 \end{bmatrix}$$

Αφού τα διανύσματα είναι ένα είδος πίνακα, το **γινόμενο πραγματικού αριθμού επί ένα διάνυσμα** είναι ένα διάνυσμα:

$$a\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ ay \\ az \end{bmatrix} \text{ π.χ. } 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Κάθε συνιστώσα (ή συντεταγμένη) πολλαπλασιάζεται επί τον αριθμό.

Επίσης, ανάλογα ορίζεται και το **άθροισμα** δύο διανυσμάτων:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix} \text{ π.χ. } \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ορίζουμε το γινόμενο **πίνακα-γραμμή (ή διάνυσμα γραμμή)** $1\times n$ **επί πίνακα-στήλη (διανύσματος)** $n\times 1$ **:**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n-1,1} \\ b_{n,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1,n-1}b_{n-1,1} + a_{1,n}b_{n,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} \end{bmatrix}$$

Το αποτέλεσμα της πράξης αυτής είναι ένας πίνακας στοιχείο. Όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο θα ορίσουμε το στοιχείο του πίνακα αυτού ως **εσωτερικό γινόμενο** των δύο διανυσμάτων.

Παραδείγματα:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 9 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3\\9\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\times1+0\times9+9\times(-1)+(-1)\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+0-9-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\end{bmatrix}$$

Εάν $x=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$ τότε $x^T x=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=[1]$

Ορίζουμε το γινόμενο **πίνακα** $m\times n$ **επί πίνακα-στήλη (διάνυσμα)** $n\times1$ ως τον πίνακα-στήλη (διάνυσμα) που στην i-συνιστώσα του έχει το εσωτερικό γινόμενο της i-γραμμής του πίνακα το διάνυσμα.

$$\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}\\b_{21}\\ \vdots\\ b_{n-11}\\ b_{n\,1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+\ldots+a_{1n}b_{n1}\\ a_{21}b_{11}+\ldots+a_{2n}b_{n1}\\ \vdots\\ a_{m-1,1}b_{11}+\ldots+a_{m-1\,n}b_{n1}\\ a_{m1}b_{11}+\ldots+a_{mn}b_{n1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}a_{1i}b_{i1}\\ \sum_{i=1}^{n}a_{2i}b_{i1}\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{n}a_{n-1,i}b_{i1}\\ \sum_{i=1}^{n}a_{n,i}b_{i1}\end{bmatrix}$$

Παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 9 & -1\\ -1 & 0 & 2 & 9\\ 23 & -4 & -5 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3\\9\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times3+0\times9+9\times(-1)+(-1)\times2\\ -1\times3+0\times9+2\times(-1)+9\times2\\ 23\times3-4\times9-5\times(-1)+0\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\13\\38\end{bmatrix}$$

Ορίζουμε το γινόμενο **πίνακα A** $m\times n$ **επί πίνακα B** $n\times k$ ως τον πίνακα $m\times k$ για τον οποίο

το (i, j)- στοιχείο προκύπτει από το γινόμενο της i-γραμμής του πίνακα A επί της j-στήλης του πίνακα B.

$$C=AB\Rightarrow[c_{ij}]=\left[\sum_{p=1}^{n}a_{ip}b_{pj}\right]$$

Οπότε για να ορίζεται το γινόμενο ο αριθμός των στηλών του πίνακα A θα πρέπει να είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του πίνακα B.

Παράδειγμα:

Έστω $A=\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 4\end{bmatrix}$, όπου $x\in\mathbb{R}$.

Από τις παρακάτω παραστάσεις να υπολογισθούν όσες έχουν νόημα *AB*, *BA*, AA^T, *CB*, *BC*, B^2, $A+B$.

Έχουμε

$$AB=\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+x\times0 & 1\times3+x\times0 & -2\times1+3\times x\\ 0\times1+2\times0 & 3\times1+2\times0 & -2\times0+2\times3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2+3x\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

$$AA^T=\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ x & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+x\times x & 1\times0+x\times2\\ 1\times0+x\times2 & 0\times0+2\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+x^2 & 2x\\ 2x & 4\end{bmatrix},$$

$$BC=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times(-1)+3\times2-2\times4\\ -1\times0+2\times0+3\times4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\ 12\end{bmatrix}.$$

Οι υπόλοιπες παραστάσεις δεν έχουν νόημα. Για παράδειγμα, το πλήθος των στηλών του *B* δεν είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του *A* και επομένως δεν ορίζεται το γινόμενο BA. Το άθροισμα *A*+*B* δεν ορίζεται γιατί οι πίνακες *A*, *B* είναι διαφορετικού μεγέθους

Για το γινόμενο πινάκων (εννοείται η επιλογή κατάλληλων διαστάσεων πινάκων ώστε να γίνεται η πράξη) ισχύει:

- $(AB)C=A(BC)$ (προσεταιρισική)
- $A(B+C)=AB+AC$ (επιμεριστική από αριστερά ιδιότητα)
- $(B+C)A=BA+CA$ (επιμεριστική από δεξιά ιδιότητα)
- $AO=O$ ή $OA=O$
- γενικά $AI=A$ ή $IA=A$ και για τετραγωνικούς $IA=AI=A$
- $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

Γενικά, ακόμη και αν ορίζεται το γινόμενο, για πίνακες δεν ισχύει η αντιμεταθετικότητα $AB\neq BA$.

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

Ορίζεται και η **κ-δύναμη τετραγωνικού πίνακα** ως $A^k=\underbrace{A\cdots A}_{k\text{ φορές}}$. και $A^0=I$.

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

Για έναν διαγώνιο τετραγωνικό πίνακα η κ-δύναμη του είναι ένας διαγώνιος τετραγωνικός πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις κ-δυνάμεις των διαγώνιων στοιχείων του αρχικού.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{10} = \begin{bmatrix} 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{10} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{10} \end{bmatrix}$$

Τώρα που ορίσαμε τις πράξεις μπορούμε να παραθέσουμε τις ακόλουθες ιδιότητες:

Ιδιότητες Αναστρόφων πινάκων

- $\left(A^T\right)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Ως **ίχνος του τετραγωνικού πίνακα A** (trace) ονομάζουμε το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Ιδιότητες ίχνους τετραγωνικού πίνακα

- $tr\left(A+B\right) = tr(A) + tr(B)$
- $tr\left(AB\right) = tr(BA)$
- $tr\left(kA\right) = k \cdot tr(A)$
- $tr\left(A^T\right) = tr(A)$

Παράδειγμα:

Ο πίνακας των πωλήσεων της εταιρείας του πρώτου παραδείγματος είναι ο

$$\begin{bmatrix} 12 & 34 & 56 & 33 \\ 2 & 23 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 3 & 23 \end{bmatrix}$$

Το ετήσιο σύνολο των πωλήσεων ανά είδος δίνεται από το γινόμενο

$$\begin{bmatrix} 12 & 34 & 56 & 33 \\ 2 & 23 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 3 & 23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 135 \\ 26 \\ 37 \end{bmatrix}$$

Το σύνολο των πωλήσεων ανά τρίμηνο δίνεται από το γινόμενο

$$\begin{bmatrix} 12 & 34 & 56 & 33 \\ 2 & 23 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 3 & 23 \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 9 \\ 34 & 23 & 2 \\ 56 & 1 & 3 \\ 33 & 0 & 23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 59 \\ 60 \\ 56 \end{bmatrix}$$

Εάν το κέρδος για το πρώτο προϊόν είναι 10 € για το δεύτερο 3 € και για το τρίτο 2 € το συνολικό κέρδος ανά τρίμηνο δίνεται από το γινόμενο

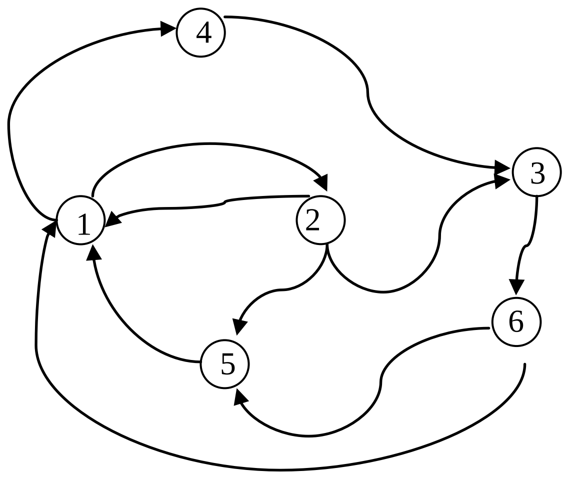
$$\begin{bmatrix} 12 & 34 & 56 & 33 \\ 2 & 23 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 3 & 23 \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 9 \\ 34 & 23 & 2 \\ 56 & 1 & 3 \\ 33 & 0 & 23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 144 \\ 413 \\ 569 \\ 376 \end{bmatrix}$$

και το ετήσιο σύνολο των κερδών

$$\begin{bmatrix} 144 \\ 413 \\ 569 \\ 376 \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 144 & 413 & 569 & 376 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [1502]$$

Παράδειγμα:

Η αναπαράσταση ενός κατευθυνόμενου γραφήματος όπως το παρακάτω



δίνεται με την μορφή του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

όπου

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{υπάρχει κατευθυνόμενο τόξο από τον κόμβο } i \text{ στον κόμβο } j \\ 0 & \text{δεν υπάρχει κατευθυνόμενο τόξο από τον κόμβο } i \text{ στον κόμβο } j \end{cases}$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων μετάβασης (συνδέσεων) από τον κόμβο *i* στον κόμβο *j* διατρέχοντας ακριβώς *2* κατευθυνόμενα τόξα (ακολουθώντας την φορά τους) είναι ίσος προς τον αριθμό:

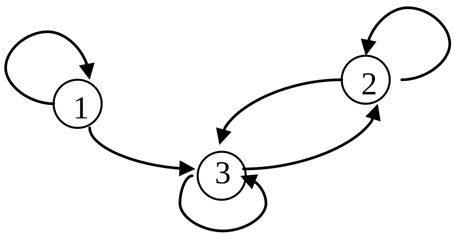
$$a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \cdots + a_{i6}a_{6j}$$

(δηλαδή μέσω του κόμβου 1 ή μέσω του κόμβου 2 ή … ή μέσω του κόμβου 6). Από τον ορισμό του γινομένου πινάκων διαπιστώνουμε ότι ο αριθμός αυτός είναι το στοιχείο (*i,j*) του πίνακα A^2. Παρόμοια, ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων μετάβασης από τον κόμβο *i* στον κόμβο *j* διατρέχοντας ακριβώς *3* κατευθυνόμενα τόξα (ακολουθώντας την φορά τους) είναι ίσος προς το στοιχείο (*i,j*) του πίνακα A^3 κ.ο.κ..

Αν ο πίνακας *A* έχει την εξής μορφή

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και αντιστοιχεί στο διάγραμμα



Τότε ο

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Διαπιστώνουμε για παράδειγμα ότι ο κόμβος 1 μπορεί να επικοινωνήσει με τον κόμβο 2 με τη χρήση δύο τόξων με ένα τρόπο (1→3→2), ενώ ο κόμβος 1 μπορεί να επικοινωνήσει με τον κόμβο 3 με τη χρήση δύο τόξων κατά δύο τρόπους (1→1→3,1→3→3) ενώ ο κόμβος 2 μπορεί να επικοινωνήσει με εαυτό του κόμβο 2 με τη χρήση δύο τόξων κατά δύο τρόπους (2→3→2,2→2→2).

Για σύνδεση με τη χρήση τριών τόξων υπολογίζουμε:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

2.3 Ο αντίστροφος πίνακας.

Ένας τετραγωνικός πίνακας $\mathbf{A}$ λέμε ότι είναι **μη ιδιάζων** (non singular) ή αντιστρέψιμος εάν υπάρχει πίνακας $\mathbf{A}^{-1}$ για τον οποίο ισχύει

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = I \ .$$

Ο πίνακας $\mathbf{A}^{-1}$ ονομάζεται ο **αντίστροφος** (inverse) του $\mathbf{A}$. Ένας πίνακας για τον οποίο δεν υπάρχει αντίστροφος λέγεται **ιδιάζων** (singular) .

Παραδείγματα:

Ας εξετάσουμε αν ο $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή αν υπάρχει $B=\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}$ τέτοιος ώστε $AB=BA=I.$ Παρατηρούμε ότι

$$AB=I\Rightarrow\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}3x+2z & 3y+2w\\ x+z & y+w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3x+2z=1\\ 3y+2w=0\\ x+z=0\\ y+w=1.\end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $x=1, y=-2, z=-1, w=3.$ Μέχρι στιγμής δεν έχουμε δείξει ότι ο *A* είναι αντιστρέψιμος, αλλά έχουμε εντοπίσει έναν υποψήφιο πίνακα για το *B*. Θέτοντας $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ εύκολα επαληθεύεται ότι $AB=BA=I.$ Άρα ο *A* είναι αντιστρέψιμος.

Τώρα, ας εξετάσουμε αν ο $A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος. Έστω $B=\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}$.

Παρατηρούμε ότι

$$AB=I\Rightarrow\begin{bmatrix}2x+2z & 2y+2w\\ x+z & y+w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x+2z=1\\ 2y+2w=0\\ x+z=0\\ y+w=1.\end{cases}$$

Το σύστημα αυτό δεν έχει λύση, γιατί από την πρώτη και τρίτη εξίσωση παίρνουμε 1 = 0. Άρα δεν υπάρχει πίνακας B με $AB=I.$ Συνεπώς ο *A* δεν είναι αντιστρέψιμος.

Όταν μας δίνεται ή υπολογίζουμε κάποιον αντίστροφο καλό είναι να επαληθεύουμε ότι πράγματι ισχύει η σχέση $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=I$. Δεν χρειάζεται ωστόσο να υπολογίσουμε και τα δύο γινόμενα $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1},\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}$, αρκεί το ένα από αυτά. Για παράδειγμα εάν έχουμε υπολογίσει ότι για

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & -1 & 1\end{bmatrix}\text{ ισχύει }A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

θα πρέπει

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&1&-2\\-2&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}\\\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}+\frac{6}{4}-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{2}{4}&-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{6}{4}&-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\\\frac{2}{4}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}&\frac{2}{4}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}&\frac{6}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Για έναν διαγώνιο πίνακα η αντίστροφος του είναι ένας διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τους αντίστροφους των διαγώνιων στοιχείων του αρχικού.

$$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

επίσης υπάρχουν πίνακες που εάν υψωθούν σε μία δύναμη μας δίνουν τον μοναδιαίο π.χ.

$\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ (για αυτόν $\mathrm{A}^2=I$ οπότε $\mathrm{A}^{-1}=\mathrm{A}$)

Ισχύουν (εφόσον υπάρχουν οι αντίστροφοι):

- $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ (η απόδειξη παρατίθεται ως άσκηση στο τέλος του κεφαλαίου)
- $(\mathrm{A}^{-1})^{-1}=\mathrm{A}$
- $(\mathrm{A}^{T})^{-1}=(\mathrm{A}^{-1})^{T}$
- $(\mathrm{A}^{k})^{-1}=(\mathrm{A}^{-1})^{k}$

2.4 Αλγόριθμος υπολογισμός του αντιστρόφου με τη μέθοδο του επαυξημένου πίνακα

Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και εφαρμόζουμε σε αυτόν στοιχειώδεις γραμμοπράξεις που μετατρέπουν τον *A* σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα *K*. Τότε ο $[A|I]$ έχει μετατραπεί σε έναν πίνακα της μορφής $[K\,|\,B]$

- Αν $K=I,$ τότε ο *A* είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1}=B.$
- Αν $K\neq I$, τότε ο *A* δεν είναι αντιστρέψιμος.

Παραδείγματα

Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω στον $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{bmatrix}.$

Έχουμε διαδοχικά

$$[A\,|\,I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\2&-1&3&0&1&0\\4&1&8&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\4&1&8&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-4\Gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&1&0&-4&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&0&-4&0&1\\0&-1&-1&-2&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3+\Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&0&-4&0&1\\0&0&-1&-6&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_3\to-\Gamma_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&0&-4&0&1\\0&0&1&6&-1&-1\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-2\Gamma_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-11&2&2\\0&1&0&-4&0&1\\0&0&1&6&-1&-1\end{array}\right].$$

Επειδή στο αριστερό μισό του τελευταίου πίνακα εμφανίστηκε ο μοναδιαίος, συμπεραίνουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1}=\begin{bmatrix}-11&2&2\\-4&0&1\\6&-1&-1\end{bmatrix}$.

Τώρα, εξετάζουμε αν ο $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&4&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος.

Έχουμε

$$[A\,|\,I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\2&4&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&0&0&-2&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&-2&1&0\end{array}\right].$$

Στο αριστερό μισό του τελευταίου πίνακα υπάρχει ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας $\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ που δεν είναι ίσος με τον μοναδιαίο. Άρα ο Α δεν είναι αντιστρέψιμος.

2.5 Επίλυση συστημάτων με τη χρήση του αντιστρόφου

Ένα γραμμικό σύστημα $n\times n$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $\mathbf{Ax}=b$. Εφόσον υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα A, η **λύση** του συστήματος δίνεται από τον τύπο $x=A^{-1}b$

Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες για κάθε τετραγωνικό πίνακα

- Το σύστημα $\mathbf{Ax}=0$ έχει μοναδική λύση το $\mathbf{x}=0$.
- Το σύστημα $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ έχει μοναδική λύση για κάθε διάνυσμα $\mathbf{b}$.

- Ο πίνακας είναι μη ιδιάζων (δηλαδή αντιστρέφεται).

Παράδειγμα: Ας δούμε το γνωστό μας σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l}2u+v+w=5\\4u-6v=-2\\-2u+7v+2w=9\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2&1&1\\4&-6&0\\-2&7&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-2\\9\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&1\\4&-6&0\\-2&7&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5\\-2\\9\end{bmatrix}$$

θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\left[A\,|\,I\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\4&-6&0&0&1&0\\-2&7&2&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3+\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\0&-8&-2&-2&1&0\\0&8&3&1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3+\Gamma_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\0&-8&-2&-2&1&0\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2+2\Gamma_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\0&-8&0&-4&3&2\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&2&-1&-1\\0&-8&0&-4&3&2\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_2\to\frac{1}{-8}\Gamma_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&2&-1&-1\\0&1&0&1/2&-3/8&-1/4\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&3/2&-5/8&-3/4\\0&1&0&1/2&-3/8&-1/4\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_1\to\frac{1}{2}\Gamma_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3/4&-5/16&-3/8\\0&1&0&1/2&-3/8&-1/4\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right]$$

Οπότε

$$\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&1\\4&-6&0\\-2&7&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5\\-2\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3/4&-5/16&-3/8\\1/2&-3/8&-1/4\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\-2\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

2.6 Μεταθετικοί Πίνακες.

Οι παρακάτω πίνακες εφαρμόζουν γραμμοπράξεις όταν πολλαπλασιάσουν από αριστερά έναν πίνακα Α.

Ο πίνακας που εφαρμόζει τη γραμμοπράξη $\Gamma_i \to \kappa\ \Gamma_i$ (δηλαδή πολλαπλασιάζει την i γραμμή επί k) είναι ο

$$P_i(\kappa)=\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&k&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix}$$

όπου το k βρίσκεται στην ii-θέση.

Για παράδειγμα ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ πολλαπλασιάζει την 3η γραμμή ενός 3x3 πίνακα επί -2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ 4 & -14 & -4 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας που εφαρμόζει τη γραμμοπράξη $\Gamma_i \to \Gamma_i + \kappa\, \Gamma_j$ (δηλαδή πολλαπλασιάζει την j γραμμή επί k και την προσθέτει στην i) είναι ο

$$\Gamma_{ij}(\kappa) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & \kappa & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

όπου το k βρίσκεται στην ij -θέση.

Για παράδειγμα ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, όπου το (2,1) στοιχείο του είναι -2, πολλαπλασιάζει την 1η γραμμή ενός 3x3 πίνακα επί -2 και την προσθέτει στη 2η.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2\times 2+4 & -2\times 1-6 & -2\times 1+0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Ενώ ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, όπου το (1,2) στοιχείο του είναι 3, πολλαπλασιάζει την 2η γραμμή ενός 3x3 πίνακα επί 3 και την προσθέτει στην 1η.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3\times 4 & 1+3\times(-6) & 1+3\times 0 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -17 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Τέλος, ο πίνακας που εφαρμόζει τη γραμμοπράξη $\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$ (δηλαδή εναλλάσσει την i γραμμή με την j γραμμή)

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

όπου οι μονάδες βρίσκονται στην ij -θέση και στην ji -θέση.

Για παράδειγμα ο πίνακας $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ εναλλάσσει πολλαπλασιάζει την 1^{η} γραμμή με την 3^{η} γραμμή

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 2 \\ 4 & -6 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ας δούμε τώρα το γνωστό μας σύστημα και να εκτελέσουμε όλες τις γραμμοπράξεις με τη χρήση μεταθετικών πινάκων:

$$\left.\begin{aligned} 2u+v+w&=5 \\ 4u-6v&=-2 \\ -2u+7v+2w&=9 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

από όπου με προς τα πίσω αντικατάσταση παίρνω τη λύση.

Κάνοντας το ίδιο για το παράδειγμα εύρεσης του αντιστρόφου του ίδιου πίνακα, το γινόμενο των μεταθετικών πινάκων είναι:

$$\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1/8 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 4 & -6 & 0\\ -2 & 7 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 4 & -6 & 0\\ -2 & 7 & 2\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}3/4 & -5/16 & -3/8\\ 1/2 & -3/8 & -1/4\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

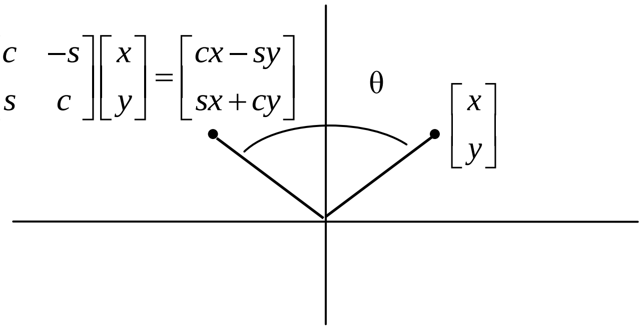
2.7 Πίνακες μετασχηματισμών.

Τέλος, ας δούμε μία εφαρμογή των πινάκων που σχετίζεται με τα γραφικά υπολογιστών. Εάν πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα

$$Q_\vartheta = \begin{bmatrix}\cos\vartheta & -\sin\vartheta\\ \sin\vartheta & \cos\vartheta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c & -s\\ s & c\end{bmatrix} \text{ όταν } \begin{matrix}c = \cos\vartheta\\ s = \sin\vartheta\end{matrix}$$

με το διάνυσμα των συντεταγμένων $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ ενός σημείου του καρτεσιανού επιπέδου τότε παίρνουμε τις συντεταγμένες του σημείου που προκύπτει από την αριστερόστροφη στροφή γύρω από την αρχή των αξόνων (0,0) κατά γωνία ϑ.

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} = Q_\vartheta\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c & -s\\ s & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}cx - sy\\ sx + cy\end{bmatrix}$$



Παραδείγματα:

Εάν στρέψουμε ένα σημείο κατά $\frac{\pi}{2}$ ο πίνακας στροφής είναι ο

$$Q_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

οπότε το σημείο $\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ στρέφεται και πάει στο $\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ και οι συντεταγμένες του σημείου $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ πετά την περιστροφή είναι $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-y\\ x\end{bmatrix}$.

Εάν στρέψουμε ένα σημείο κατά $\frac{\pi}{4}$ ο πίνακας στροφής είναι ο

$$Q_{\frac{\pi}{4}}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

οι συντεταγμένες του σημείου $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ πετά την περιστροφή είναι $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y\\ \frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y\end{bmatrix}$.

Εάν εκ νέου περιστρέψουμε κατά $\frac{\pi}{4}$ ο τελικός πίνακας περιστροφής θα είναι ο

$$Q_{\frac{\pi}{4}}Q_{\frac{\pi}{4}}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι ο $Q_{\frac{\pi}{2}}$.

Με τη χρήση απλών τριγωνομετρικών τύπων μπορούμε να βρούμε ότι

$$Q_{2\vartheta}=\begin{bmatrix}\cos\vartheta & -\sin\vartheta\\ \sin\vartheta & \cos\vartheta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\vartheta & -\sin\vartheta\\ \sin\vartheta & \cos\vartheta\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta & -2\cos\vartheta\sin\vartheta\\ 2\cos\vartheta\sin\vartheta & \cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2\vartheta & -\sin 2\vartheta\\ \sin 2\vartheta & \cos 2\vartheta\end{bmatrix}$$

και γενικότερα ότι $Q_{\vartheta_1+\vartheta_2}=Q_{\vartheta_1}\cdot Q_{\vartheta_2}$

$$Q_{\vartheta_1}\cdot Q_{\vartheta_2}=\begin{bmatrix}\cos\vartheta_1 & -\sin\vartheta_1\\ \sin\vartheta_1 & \cos\vartheta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\vartheta_2 & -\sin\vartheta_2\\ \sin\vartheta_2 & \cos\vartheta_2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2-\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2 & -\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2-\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2\\ \sin\vartheta_1\cos\vartheta_2+\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 & -\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2+\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) & -\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)\\ \sin(\vartheta_1+\vartheta_2) & \cos(\vartheta_1+\vartheta_2)\end{bmatrix}=Q_{\vartheta_1+\vartheta_2}$$

Υπενθυμίζεται ότι ισχύουν οι τύποι:

$\sin(\omega\pm\phi)=\sin(\omega)\cos(\phi)\pm\cos(\omega)\sin(\phi)$ και $\cos(\omega\pm\phi)=\cos(\omega)\cos(\phi)\mp\sin(\omega)\sin(\phi)$.

Εάν στρέψουμε ένα σημείο κατά γωνία ϑ ,και στη συνέχεια κατά γωνία $-\vartheta$ έχουμε

$$Q_{\vartheta}\cdot Q_{-\vartheta}=Q_{\vartheta-\vartheta}=Q_0=\begin{bmatrix}\cos 0 & -\sin 0\\ \sin 0 & \cos 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=1$$

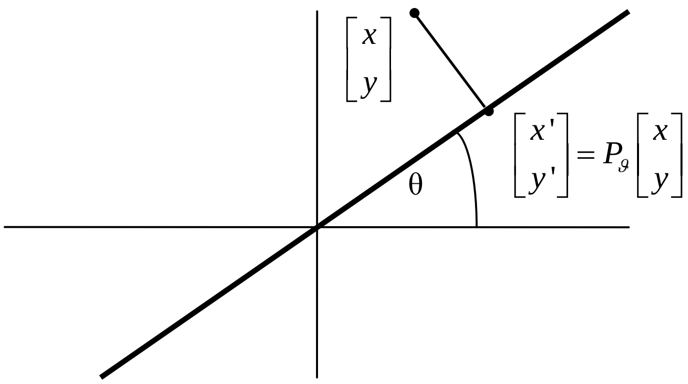
οπότε συμπεραίνουμε ότι

$$\left(Q_\vartheta\right)^{-1} = Q_{-\vartheta} = \begin{bmatrix} \cos(-\vartheta) & -\sin(-\vartheta) \\ \sin(-\vartheta) & \cos(-\vartheta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{bmatrix}.$$

Εάν πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα

$$P_\vartheta = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix}$$

με το διάνυσμα των συντεταγμένων $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ενός σημείου του καρτεσιανού επιπέδου τότε παίρνουμε τις συντεταγμένες του σημείου που προκύπτει από την προβολή πάνω σε μία ευθεία η οποία έχει κλίση γωνία ϑ και περνά από τον άξονα (0,0).



Παραδείγματα:

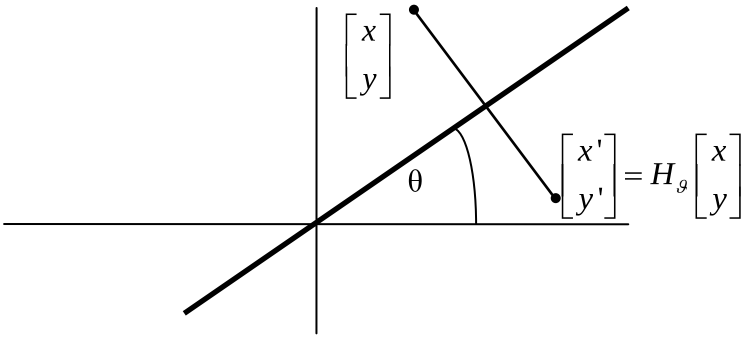
Εάν προβάλουμε το σημείο $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ τότε οι συντεταγμένες της προβολής θα είναι $\begin{bmatrix} c^2 \\ cs \end{bmatrix}$ ενώ εάν προβάλουμε το σημείο $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ και οι συντεταγμένες της προβολής του σημείου θα είναι $\begin{bmatrix} cs \\ s^2 \end{bmatrix}$.

Στην περίπτωση που η γωνία κλίσης της ευθείας είναι $\frac{\pi}{3}$ τότε $c = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $s = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ οπότε $P_{\frac{\pi}{3}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ και η προβολή του σημείου $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ στη συγκεκριμένη ευθεία έχει συντεταγμένες $P_{\frac{\pi}{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+2\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}+6}{4} \end{bmatrix}$.

Εάν πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα

$$H_{\vartheta} = \begin{bmatrix} 2c^2 - 1 & 2cs \\ 2cs & 2s^2 - 1 \end{bmatrix}$$

με το διάνυσμα των συντεταγμένων $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ενός σημείου του καρτεσιανού επιπέδου τότε παίρνουμε τις συντεταγμένες του σημείου που προκύπτει από την ανάκλαση ως προς την ευθεία η οποία έχει κλίση γωνία ϑ .



Παραδείγματα:

Εάν το συμμετρικό του σημείου $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ως προς την ευθεία θα έχει συντεταγμένες $\begin{bmatrix} 2c^2 - 1 \\ 2cs \end{bmatrix}$ ενώ το συμμετρικό του σημείου $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ θα είναι το σημείο $\begin{bmatrix} 2cs \\ 2s^2 - 1 \end{bmatrix}$.

Στην περίπτωση που η γωνία κλίσης της ευθείας είναι $\frac{\pi}{6}$ τότε $c = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $s = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ οπότε $H_{\frac{\pi}{6}} = \begin{bmatrix} 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 & 2\frac{\sqrt{3}}{4} \\ 2\frac{\sqrt{3}}{4} & 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ και το συμμετρικό του σημείου $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ως προς τη συγκεκριμένη ευθεία έχει συντεταγμένες

$$H_{\frac{\pi}{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2\sqrt{3}-1}{2} \end{bmatrix}.$$

Η εφαρμογή δύο συνεχόμενες φορές της ανάκλασης ως προς την ίδια ευθεία έχει πίνακα μετασχηματισμού

$$H_\theta^{\ 2}=\begin{bmatrix}2c^2-1 & 2cs\\ 2cs & 2s^2-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2c^2-1 & 2cs\\ 2cs & 2s^2-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(2c^2-1)^2+4\left(cs\right)^2 & \left(2c^2-1\right)2cs+2cs\left(2s^2-1\right)\\ \left(2c^2-1\right)2cs+2cs\left(2s^2-1\right) & (2s^2-1)^2+4\left(cs\right)^2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Αφού $1-c^2=s^2, 1-s^2=c^2$ οπότε

$$(2c^2-1)^2+4\left(cs\right)^2=(4c^4-4c^2+1)+4\left(cs\right)^2=4c^4-4c^2(1-s^2)+1=4c^4-4c^4+1=1$$

επίσης

$$(2s^2-1)^2+4\left(cs\right)^2=(4s^4-4s^2+1)+4\left(cs\right)^2=4s^4-4s^2(1-c^2)+1=4s^4-4s^4+1=1$$

και $\left(2c^2-1\right)2cs+2cs\left(2s^2-1\right)=4cs\left(c^2+s^2-1\right)=0$.

Δηλαδή μας γυρνά στο αρχικό σημείο.

Από τη σχέση $H_\theta^{\ 2}=I \Leftrightarrow H_\theta^{\ -1}=H_\theta$.

Όπως είδαμε διαδοχικά γινόμενα εφαρμόζουν διαδοχικούς μετασχηματισμούς. Δηλαδή μία περιστροφή κατά γωνία ϑ_1, προβολή σε ευθεία με γωνία ϑ_2 και ανάκλαση ως προς ευθεία με γωνία ϑ_3 θα έχει πίνακα μετασχηματισμού $H_{\vartheta_3}P_{\vartheta_2}Q_{\vartheta_1}$.

Παράδειγμα:

Ο τελικός πίνακας μετασχηματισμού περιστροφής ενός σημείου κατά $\dfrac{\pi}{4}$, προβολής σε ευθεία με γωνία κλίσης $\dfrac{\pi}{3}$ και τελικά συμμετρίας του ως προς ευθεία με γωνία κλίσης $\dfrac{\pi}{6}$ είναι

$$H_{\frac{\pi}{6}}P_{\frac{\pi}{3}}Q_{\frac{\pi}{4}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}\\ \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{8} & \frac{-\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{8}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

2.8 Λυμένες ασκήσεις πάνω στους πίνακες.

1. *Έστω* $A=\begin{bmatrix}2 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 3\end{bmatrix}$, *όπου* $x\in\mathbb{R}$.

Από τις παρακάτω παραστάσεις να υπολογισθούν όσες έχουν νόημα AB, BA, (A+B)C, BC, B^2, 5B.

Λύση

Ο πίνακας Α είναι $2x2$ και ο Β είναι $2x3$ επομένως ο ΑΒ ορίζεται και είναι ο επόμενος $2x3$ πίνακας

$$AB=\begin{bmatrix} 2\cdot 1+x\cdot 0 & 2\cdot 0+x\cdot 1 & 2\cdot(-2)+x\cdot 3 \\ 0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot 1 & 0\cdot(-2)+1\cdot 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & x & -4+3x \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας ΒΑ δεν ορίζεται, αφού το πλήθος των στηλών του Β είναι άλλο από το πλήθος των γραμμών του Α.

Ο πίνακας Α+Β επίσης δεν ορίζεται, αφού οι πίνακες δεν είναι του ίδιου τύπου, συνεπώς δεν ορίζεται και (Α+Β)C.

Ο πίνακας ΒC είναι πίνακας $2x1$, και βρίσκουμε

$$BC=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\cdot 1+0\cdot 1-2\cdot 3 \\ 0\cdot 1+1\cdot 1+3\cdot 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας Β^2 επίσης δεν ορίζεται, αφού ο πίνακας Β δεν είναι τετραγωνικός.

Τέλος ο $2x3$ πίνακας

$$5B=5\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 0 & 5\cdot(-2) \\ 5\cdot 0 & 5\cdot 1 & 5\cdot 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 0 & 5 & 15 \end{bmatrix}.$$

2. Δίνονται οι πίνακες: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ και $D=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Να εξεταστεί αν ορίζονται και να υπολογιστούν (στην περίπτωση που ορίζονται) οι πίνακες: **(i)** AB^2 **(ii)** B^2A **(iii)** CD και **(iv)** DC.

Λύση: (i) Ο πίνακας B^2, όπως και ο *B*, είναι 2×2. Ο πίνακας *A* είναι 2×3. Άρα δεν ορίζεται το γινόμενο AB^2 και επομένως και το άθροισμα AB^2+B.

(ii) Ο πίνακας B^2 είναι 2×2 και ο πίνακας *A* είναι 2×3. Επομένως ο πίνακας B^2A είναι 2×3. Έχουμε $B^2=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 11 \end{bmatrix}$ και άρα

$$B^2A=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -9 & -2 & 5 \\ 25 & 6 & -13 \end{bmatrix}$$

(iii) Ο πίνακας *C* είναι 1×3 και ο πίνακας *D* είναι 3×1. Άρα ο πίνακας CD είναι 1×1, δηλαδή αριθμός. Έχουμε $CD=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}=[1]$.

(iv) Ο πίνακας *D* είναι 3×1 και ο πίνακας είναι *C* 1×3. Άρα ο πίνακας DC είναι 3×3. Έχουμε $DC=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{bmatrix}17 & -6\\35 & -12\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}-7 & 3\\5 & -2\end{bmatrix}$

Σε ποια ειδική κατηγορία πινάκων ανήκει ο πίνακας C; Τι μπορείτε να πείτε για το C^n , C^{-1}; Αποδείξτε ότι $A=BCD$. Αφού υπολογίσετε το DB και με τη χρήση του $A=BCD$ υπολογίστε το A^4.

Λύση:

Ο πίνακας C είναι διαγώνιος. Ισχύει $C^n=\begin{bmatrix}2^n & 0\\0 & 3^n\end{bmatrix}, C^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\0 & 1/3\end{bmatrix}$.

$$DB=\begin{bmatrix}-7 & 3\\5 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\times2+3\times5 & -7\times3+3\times7\\2\times5+(-2)\times5 & 3\times5+(-2)\times7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=I$$

$$BCD=\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & 3\\5 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 9\\10 & 21\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & 3\\5 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & -6\\35 & -12\end{bmatrix}=A,$$

$$A^4=BCDBCDBCDBCD=BCICICICD=BC^4D=\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}^4\begin{bmatrix}-7 & 3\\5 & -2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^4 & 0\\0 & 3^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & 3\\5 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 0\\0 & 81\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & 3\\5 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}32 & 243\\80 & 567\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & 3\\5 & -2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}991 & -390\\2275 & -894\end{bmatrix}$$

4. Σας δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & -3\\0 & 3 & 1\\0 & 2 & -1\end{bmatrix}$. Υπολογίστε τον πίνακα $\mathrm{B}=-\frac{1}{5}\left(A^2-3A-3I\right)$ και στη συνέχεια υπολογίστε τον πίνακα $\left(AB\right)^5$.

Λύση:

.

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 4 & -3\\0 & 3 & 1\\0 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4 & -3\\0 & 3 & 1\\0 & 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 10 & 4\\0 & 11 & 2\\0 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{5}\left(A^2-3A-3I\right)=-\frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix}1 & 10 & 4\\0 & 11 & 2\\0 & 4 & 3\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & 4 & -3\\0 & 3 & 1\\0 & 2 & -1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)=$$

$$=-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-5 & -2 & 13\\0 & -1 & -1\\0 & -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2/5 & -13/5\\0 & 1/5 & 1/5\\0 & 2/5 & -3/5\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 4 & -3\\0 & 3 & 1\\0 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2/5 & -13/5\\0 & 1/5 & 1/5\\0 & 2/5 & -3/5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Οπότε $B = A^{-1} = -\frac{1}{5}\left(A^2 - 3A - 3I\right)$ και $\left(AB\right)^5 = \left(AA^{-1}\right)^5 = I^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. *Έστω* $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,*χρησιμοποιώντας επαγωγή, αποδείξτε ότι* $A^n = \begin{bmatrix} 2^n & (2^n - 1)x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, για $n = 1, 2, 3, ...$

Λύση:

Επαγωγικά προφανώς για $\mathrm{n} = 1$ έχουμε $A^1 = \begin{bmatrix} 2^1 & (2^1 - 1)x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A$. Έστω ότι ισχύει για κάθε $\mathrm{n} = \mathrm{k}$, δηλ. $A^k = \begin{bmatrix} 2^k & (2^k - 1)x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για κάθε $\mathrm{n} = \mathrm{k} + 1$. Πράγματι,

$A^{k+1} = A^k A = \begin{bmatrix} 2^k & (2^k - 1)x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^k \cdot 2 & 2^k \cdot x + (2^k - 1)x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{k+1} & (2^{k+1} - 1)x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ το οποίο δείχνει ότι ισχύει η έκφραση του A^{n} για κάθε $\mathrm{n} = 1, 2, 3, \dots$

ΕΠΑΓΩΓΗ

Πολλές μαθηματικές προτάσεις είναι μερικές φορές δύσκολο να τις αποδείξουμε απ' ευθείας. Για να αποδείξουμε τέτοιες προτάσεις που αναφέρονται σε ακεραίους ν χρησιμοποιούμε μια μέθοδο που είναι γνωστή ως **τέλεια ή μαθηματική επαγωγή**.

Τί κάνουμε: Αντί να αποδείξουμε απ' ευθείας την πρόταση αποδεικνύουμε το εξής:

Βήμα 1: **Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει για ν=1**

Βήμα 2::**Δεχόμαστε ότι η συγκεκριμένη πρόταση ισχύει για κάποιον κ**

Βήμα 2: **Και με βάση το Βήμα 2 αποδεικνύουμε ότι ισχύει και για τον επόμενό του κ+1**

Παράδειγμα:

Για να αποδείξουμε τον τύπο $1 + 2 + 3 + \cdots + \nu = \frac{\nu(\nu + 1)}{2}$ κοιτάμε τι γίνεται για ν=1. Τότε ο τύπος γίνεται $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ που ισχύει. Αν τώρα $1 + 2 + 3 + \cdots + \nu = \frac{\nu(\nu + 1)}{2}$, τότε $1 + 2 + 3 + \cdots + \nu + (\nu + 1) = \frac{\nu(\nu + 1)}{2} + (\nu + 1) = \frac{(\nu + 1)(\nu + 2)}{2}$ και η πρόταση ισχύει και για ν+1.

Ο τύπος $1^2+2^2+3^2+\cdots+\nu^2=\dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$ αποδεικνύεται παρόμοια.

6. **(i)** Δίνεται ο πίνακας: $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 10 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Δείξτε ότι $A^{n+2}-A^n=A^2-I$, για κάθε $n=0,1,2,\ldots$ χρησιμοποιώντας την μέθοδο της Επαγωγής: Δείξτε πρώτα ότι ο τύπος ισχύει για n = 0, 1. Κατόπιν δεχθείτε ότι ισχύει για n = k και δείξτε ότι ισχύει για n = k+1.

(ii) Υπολογίστε τον πίνακα A^{2004}.

(Υπόδειξη: $A^{2004}=(A^{2004}-A^{2002})+(A^{2002}-A^{2000})+\cdots+(A^2-I)+I$).

Λύση: **(i)** $A^2=\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 10 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 10 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 10 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Επομένως, $A^2-I=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ακόμη, $A^3-A=A(A^2-I)=\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 10 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=A^2-I$.

Υποθέτουμε ότι $A^{n+2}-A^n=A^2-I$.

Τότε $A^{n+3}-A^{n+1}=A(A^{n+2}-A^n)=A(A^2-I)=A^2-I$. Επομένως, $A^{n+2}-A^n=A^2-I$, για κάθε $n=1,2,\ldots$

(ii) $A^{2004}=\overbrace{(\underbrace{A^{2004}-A^{2002}}_{A^2-I})+(\underbrace{A^{2002}-A^{2000}}_{A^2-I})+\cdots+(A^2-I)}^{1002\ \text{προσθεταίοι}}+I=1002\cdot(A^2-I)+I=$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1002 & 0 & -1002 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1002 & 1 & -1002 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Εφαρμόζοντας τον Αλγόριθμο Υπολογισμού Αντίστροφου Πίνακα (δηλαδή με τη χρήση επαυξημένου πίνακα) βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Με τη χρήση της μεθόδου του αντίστροφου πίνακα λύστε το σύστημα:

$$x+4y-3z=2$$
$$3y+z=4$$
$$2y-z=1$$

Λύση

$$[A|I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&-3&1&0&0\\0&3&1&0&1&0\\0&2&-1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-2/3\Gamma_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&-3&1&0&0\\0&3&1&0&1&0\\0&0&-5/3&0&-2/3&1\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3/(-5/3)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&-3&1&0&0\\0&3&1&0&1&0\\0&0&1&0&2/5&-3/5\end{array}\right]\xrightarrow[\Gamma1\to\Gamma1+3\Gamma3]{\Gamma2\to\Gamma2-\Gamma3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&0&1&6/5&-9/5\\0&3&0&0&3/5&3/5\\0&0&1&0&2/5&-3/5\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2/3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&0&1&6/5&-9/5\\0&1&0&0&1/5&1/5\\0&0&1&0&2/5&-3/5\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-4\Gamma_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&2/5&-13/5\\0&1&0&0&1/5&1/5\\0&0&1&0&2/5&-3/5\end{array}\right]$$

Άρα

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&2/5&-13/5\\0&1/5&1/5\\0&2/5&-3/5\end{bmatrix}$$

Ένα γραμμικό σύστημα $n\times n$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $\mathbf{Ax}=b$. Εφόσον υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα A, η **λύση** του συστήματος δίνεται από τον τύπο $x=A^{-1}b$

$$A=\begin{bmatrix}1&4&-3\\0&3&1\\0&2&-1\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}2\\4\\1\end{bmatrix} \text{ οπότε } x=A^{-1}b=\begin{bmatrix}1&2/5&-13/5\\0&1/5&1/5\\0&2/5&-3/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

8. *Έστω* $A=\begin{bmatrix}1&0&3\\2&-1&7\\4&-1&a\end{bmatrix}$, όπου $a\in\mathbb{R}$. Εφαρμόζοντας τον Αλγόριθμο Υπολογισμού Αντίστροφου Πίνακα να βρεθούν οι τιμές του $a\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ο *A* είναι αντιστρέψιμος και για τις τιμές αυτές να υπολογιστεί ο A^{-1}.

Λύση

Σχηματίζουμε τον 3×6 πίνακα $\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\2&-1&7&0&1&0\\4&-1&a&0&0&1\end{array}\right]$. Με στοιχειώδεις γραμμοπράξεις έχουμε:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\2&-1&7&0&1&0\\4&-1&a&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3-4\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\0&-1&1&-2&1&0\\0&-1&a-12&-4&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\0&-1&1&-2&1&0\\0&0&a-13&-2&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_2\to-1\times\Gamma_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\0&1&-1&2&-1&0\\0&0&a-13&-2&-1&1\end{array}\right]$$

Για να μπορέσουμε να συνεχίσουμε διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

<u>*Περίπτωση 1.*</u> Έστω $a=13$. Τότε το αριστερό μισό του πίνακα αυτού είναι ο $K=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$ που είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Επειδή ο *K* είναι διάφορος του μοναδιαίου συμπεραίνουμε από τον αλγόριθμο υπολογισμού αντίστροφου πίνακα ότι ο *A* δεν είναι αντιστρέψιμος.

<u>*Περίπτωση 2.*</u> Έστω $a\neq 13$. Τότε συνεχίζουμε με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών για να φέρουμε το αριστερό μισό του B σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\0&1&-1&2&-1&0\\0&0&a-13&-2&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_3\to\frac{1}{a-13}\Gamma_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\0&1&-1&2&-1&0\\0&0&1&-\frac{2}{a-13}&-\frac{1}{a-13}&\frac{1}{a-13}\end{array}\right]\xrightarrow[\Gamma_1\to\Gamma_1-3\Gamma_3]{\Gamma_2\to\Gamma_2+\Gamma_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1+\frac{6}{a-13}&\frac{3}{a-13}&-\frac{3}{a-13}\\0&1&0&2-\frac{2}{a-13}&-1-\frac{1}{a-13}&\frac{1}{a-13}\\0&0&1&-\frac{2}{a-13}&-\frac{1}{a-13}&\frac{1}{a-13}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{a-7}{a-13}&\frac{3}{a-13}&\frac{-3}{a-13}\\0&1&0&2\frac{a-14}{a-13}&-\frac{a-12}{a-13}&\frac{1}{a-13}\\0&0&1&\frac{-2}{a-13}&\frac{-1}{a-13}&\frac{1}{a-13}\end{array}\right]$$

Επειδή το αριστερό μισό του πίνακα αυτού είναι ο μοναδιαίος, συμπεραίνουμε ότι το δεξιό μισό είναι ο αντίστροφος του *A*, δηλαδή

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{a-7}{a-13}&\frac{3}{a-13}&\frac{-3}{a-13}\\2\frac{a-14}{a-13}&-\frac{a-12}{a-13}&\frac{1}{a-13}\\\frac{-2}{a-13}&\frac{-1}{a-13}&\frac{1}{a-13}\end{bmatrix}.$$

9. Έστω *A* ένας πραγματικός πίνακας τέτοιος ώστε

$$A^3+A^2+I=0.$$

Αποδείξτε ότι οι A και $A+I$ είναι αντιστρέψιμοι και ότι $A^{-1}-\left(A+I\right)^{-1}=-A.$

Λύση

Από τη σχέση $A^3+A^2+I=0$ έπονται οι σχέσεις $\left(-A^2\right)(A+I)=I,\,(A+I)\left(-A^2\right)=I$ και κατά συνέπεια ο $A+I$ είναι αντιστρέψιμος με $\left(A+I\right)^{-1}=-A^2$. Όμοια αποδεικνύεται ότι ο *A* είναι αντιστρέψιμος.

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$A^{-1}-\left(A+I\right)^{-1}=-A\Leftrightarrow A^{-1}-\left(-A^2\right)=-A\Leftrightarrow A^{-1}+A^2=-A.$$

Επειδή ο *A* είναι αντιστρέψιμος έχουμε

$$A^{-1}+A^2=-A\Leftrightarrow A\left(A^{-1}+A^2\right)=A\left(-A\right)\Leftrightarrow$$

$$I+A^3=-A^2\Leftrightarrow A^3+A^2+I=0$$

10. Δίνεται ο πίνακας $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$. Υπολογίστε τον A^k για κ=1,2,3,.... Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να δώσετε έναν τύπο που να ισχύει για κάθε κ; Αποδείξτε στη συνέχεια την ισχύ του τύπου αυτού με τη μέθοδο της επαγωγής.

Λύση:

Παρατηρώ ότι $\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}=\mathbf{A}$ οπότε και

$\mathbf{A}^3=\mathbf{A}\mathbf{A}^2=\mathbf{A}\mathbf{A}=\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$ και γενικά $\mathbf{A}^k=\mathbf{A}$.

Επαγωγική απόδειξη:

Ισχύει φανερά για ν=1.

Δέχομαι για ν=κ και θα δείξω ότι ισχύει για ν=κ+1.

$\mathbf{A}^{k+1}=\mathbf{A}\mathbf{A}^k=\mathbf{A}\mathbf{A}=\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$ Ισχύει, οπότε η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

11. Δίνονται οι πίνακες $M=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Υπολογίστε τους πίνακες M^kA για κ=1,2,3 και εκφράστε τους σε συνάρτηση με τον πίνακα A. Μπορείτε να δώσετε έναν τύπο που να εκφράζει το γινόμενο M^nA σε συνάρτηση με τον πίνακα A και να ισχύει για κάθε κ; Αποδείξτε στη συνέχεια την ισχύ του τύπου αυτού με τη μέθοδο της επαγωγής.

Λύση:

$$MA=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}=5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=5A$$

$$M^2A=MMA=M(5A)=5MA=5^2A,\quad M^3A=MM^2A=M\left(5^2A\right)=5^2MA=5^3A$$

Οπότε συνάγουμε ότι $M^nA=5^nA$

Επαγωγική απόδειξη:

Ισχύει φανερά για ν=1. Δέχομαι για ν=κ και θα δείξω ότι ισχύει για ν=κ+1.

$$M^{k+1}A=MM^kA=M\left(5^kA\right)=5^kMA=5^k5A=5^{k+1}A$$

Ισχύει, οπότε η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

12. Δίνονται οι πίνακες

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αφού υπολογίσετε τον $D=ABC$ υπολογίστε τον D^n.

Λύση:

$$D=ABC=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 10 & 6 & 2 \\ 5 & 0 & -45 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Οπότε $D^n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{bmatrix}$

13. Έστω $A=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ όπου $\alpha\delta=\beta\gamma$ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R})$, βρείτε την ορίζουσα του πίνακα και τον αντίστροφό του, εάν αυτός υπάρχει. Στη συνέχεια δείξτε ότι $A^2=(\alpha+\delta)A$ και μετά με τη βοήθεια της επαγωγής αποδείξτε ότι ισχύει $A^\nu=(\alpha+\delta)^{\nu-1}A$, $\forall\nu\geq 1$. Με τη χρήση της προηγούμενης σχέσης και της ταυτότητας $(C+D)^3=C^3+3C^2D+3CD^2+D^3$ η οποία ισχύει για γενικούς πίνακες C,D, αποδείξτε ότι για τον πίνακα $B=A+I$ (όπου I ο μοναδιαίος) ισχύει $B^3=3A+I$ εφόσον $\alpha+\delta=0$.

Λύση

Εάν $A=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ τότε $\det(A)=\alpha\cdot\delta-\beta\cdot\gamma=0$ (εφόσον $\alpha\delta=\beta\gamma$) οπότε συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας δεν αντιστρέφεται.

$A^2=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha^2+\beta\gamma & \alpha\beta+\beta\delta \\ \alpha\gamma+\gamma\delta & \beta\gamma+\delta^2 \end{bmatrix}\overset{\alpha\delta=\beta\gamma}{\cong}\begin{bmatrix} \alpha^2+\alpha\delta & \alpha\beta+\beta\delta \\ \alpha\gamma+\gamma\delta & \alpha\delta+\delta^2 \end{bmatrix}=(\alpha+\delta)\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

Επαγωγικά

για $\nu=1$ ισχύει $A^1=(\alpha+\delta)^{1-1}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

Δέχομαι ότι ισχύει για ν δηλαδή ότι ισχύει $A^\nu=(\alpha+\delta)^{\nu-1}A=(\alpha+\delta)^{\nu-1}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

Αποδεικνύω ότι ισχύει για ν+1, δηλαδή $A^{\nu+1}=(\alpha+\delta)^{\nu}A=(\alpha+\delta)^{\nu}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

Πράγματι

$A^{\nu+1}=A^\nu A=(\alpha+\delta)^{\nu-1}AA=(\alpha+\delta)^{\nu-1}A^2=(\alpha+\delta)^{\nu-1}(\alpha+\delta)A=(\alpha+\delta)^{\nu}A.$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα και χρησιμοποιώντας τη σχέση που αποδείξαμε επαγωγικά και ότι $\alpha+\delta=0$ έχουμε

$$B^3=(A+I)^3=A^3+3A^2I+3AI^2+I^3=(\alpha+\delta)^3A+3(\alpha+\delta)^2A+3A+I=$$
$$=0\cdot A+3\cdot 0\cdot A+3A+I=3A+I$$

14. Έστω τετραγωνικοί πίνακες A και P όπου ο P αντιστρέψιμος. Αποδείξτε με χρήση της επαγωγής ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν ισχύει $(P^{-1}AP)^\nu=P^{-1}A^\nu P$. Αν $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ και $P=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ δείξτε ότι ο $P^{-1}AP$ είναι διαγώνιος πίνακας. Στη συνέχεια με τη χρήση της σχέσης $(P^{-1}AP)^\nu=P^{-1}A^\nu P$ δείξτε ότι:

$$A^\nu=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2+2^{2\nu} & -2+2^{2\nu+1} \\ -1+2^{2\nu} & 1+2^{2\nu+1} \end{bmatrix}.$$

Λύση

Επαγωγική απόδειξη: Ισχύει φανερά, για $\nu=1$

$$(P^{-1}AP)^1=P^{-1}A^1P=P^{-1}AP$$

Δέχομαι ότι ισχύει για ν δηλαδή ότι ισχύει $(P^{-1}AP)^\nu=P^{-1}A^\nu P$

Αποδεικνύω ότι ισχύει για ν+1, δηλαδή $(P^{-1}AP)^{\nu+1}=P^{-1}A^{\nu+1}P$

Πράγματι

$(P^{-1}AP)^{\nu+1} = (P^{-1}AP)^{\nu}P^{-1}AP = P^{-1}A^{\nu}PP^{-1}AP = P^{-1}A^{\nu}IAP = P^{-1}A^{\nu}AP = P^{-1}A^{\nu+1}P$

Για να βρω τον αντίστροφο του P υπολογίζω αρχικά την ορίζουσά του $\det(P) = 1+2=3$

Και από τον τύπο υπολογισμού του αντιστρόφου πίνακα 2x2 έχω

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$P^{-1}AP=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = D$

Από τη σχέση που έχουμε αποδείξει $(P^{-1}AP)^{\nu} = P^{-1}A^{\nu}P$ συμπεραίνουμε ότι

$D^{\nu} = P^{-1}A^{\nu}P \Leftrightarrow PD^{\nu}P^{-1} = PP^{-1}A^{\nu}PP^{-1} \Leftrightarrow A^{\nu} = PD^{\nu}P^{-1} =$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{\nu}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow A^{\nu} =$

$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4^{\nu} & 0 \\ 0 & 1^{\nu} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2^{2\nu} & -2 \\ 2^{2\nu} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2+2^{2\nu} & -2+2^{2\nu+1} \\ -1+2^{2\nu} & 1+2^{2\nu+1} \end{bmatrix}.$

15. Δίνονται οι πίνακες

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 14 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} 10 & -2 & 5 \\ -1 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Να υπολογισθούν, εφ' όσον έχουν νόημα, οι παρακάτω πίνακες

$$A+B, A+D, C\times A, D^T\times C^T, A\times C^{-1}+D$$

Λύση

A + *B* δεν έχει νόημα.

A + $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & -2 & 5 \\ -1 & 9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & 3 \end{bmatrix}.$

$C\times A= \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 27 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$

$D^T\times C^T = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ -2 & 9 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 79 & -32 \\ -7 & 24 \\ 40 & -15 \end{bmatrix}.$

$A\times C^{-1}+D$ δεν έχει νόημα επειδή αν και ο *C* είναι αντιστρέψιμος ο Α είναι 2×3 ενώ ο C^{-1} 2×2.

16. Σας δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Υπολογίστε τον πίνακα $\mathrm{B}=A^2-6A+5I$.

Στη συνέχεια υπολογίστε τον πίνακα $(AB)^n$.

Λύση:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 18 \\ 6 & 19 \end{bmatrix}$$

$$B = A^2 - 6A + 5I = \begin{bmatrix} 7 & 18 \\ 6 & 19 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οπότε $(AB)^n = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

17. Αποδείξτε ότι $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Λύση:

Ας θεωρήσουμε ως $C = AB$ θα πρέπει να δείξουμε ότι $C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Για να ισχύει η ζητούμενη σχέση, σύμφωνα με τον ορισμό του αντιστρόφου, θα πρέπει να ισχύει $C^{-1}C = CC^{-1} = I$.
Πράγματι, $CC^{-1} = ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$
Παρόμοια, $C^{-1}C = B^{-1}A^{-1}AB = BIB^{-1} = BB^{-1} = I$
Οπότε η ιδιότητα αποδείχθηκε.
Στην ουσία μόνο μία από τις παραπάνω σχέσεις ($C^{-1}C = I, CC^{-1} = I$) θα πρέπει να αποδειχθούν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στο σύγγραμμα που διανέμεται και στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος. Το περιεχόμενο του αρχείου απλά αποτελεί περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Αποτελεί υλικό της διδασκαλίας του μαθήματος από το διδάσκοντα για δική του χρήση και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί και να μην αναπαραχθεί και διανεμηθεί για άλλο σκοπό.