3η ΔΙΑΛΕΞΗ (26.02.2020)

ΜΗΤΡΕΣ

Βασικοί ορισμοί και συμβολισμοί

Ισότητα μητρών

Μορφές μητρών

Τετραγωνικές μήτρες

ΜΗΤΡΕΣ

1. Βασικοί ορισμοί και συμβολισμοί

Έστω F ένα μη κενό σύνολο.

(Υπενθύμιση $[n] = \mathbb{N}_n^* = \{1, 2, \ldots, n\}$).

> **Μήτρα** (ή **πίνακας**) **τύπου** $m \times n$, ή $m \times n$ **μήτρα, με στοιχεία από το** F, ονομάζεται κάθε απεικόνιση
> $$A : [m] \times [n] \to F.$$

Η εικόνα του $(i, j) \in [m] \times [n]$ μέσω της απεικόνισης A συμβολίζεται με $\mathbf{a_{ij}}$ αντί για $A(i, j)$ και ονομάζεται **στοιχείο** της μήτρας A.

Παράδειγμα: Η απεικόνιση $A : [2] \times [3] \to \mathbb{R}$ με

$$a_{11} = A(1, 1) = 2$$
$$a_{12} = A(1, 2) = 5$$
$$a_{13} = A(1, 3) = 1$$
$$a_{21} = A(2, 1) = 3$$
$$a_{22} = A(2, 2) = 3$$
$$a_{23} = A(2, 3) = 5$$

είναι μια 2×3 μήτρα με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς.

Μια $m \times n$ μήτρα A με στοιχεία $a_{ij} \in F$, (όπου $i \in [m]$, $j \in [n]$), **παριστάνεται** διατάσσοντας τα στοιχεία a_{ij} σε m **γραμμές** και n **στήλες** ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

Η μήτρα $A : [2] \times [3] \to \mathbb{R}$ με

$$a_{11} = 2 \quad a_{12} = 5 \quad a_{13} = 1$$
$$a_{21} = 3 \quad a_{22} = 3 \quad a_{23} = 5$$

παριστάνεται ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Στα επόμενα θα ταυτίζουμε μια μήτρα με την αναπαράστασή της.

Το σύνολο όλων των $m \times n$ μητρών με στοιχεία από το F θα το συμβολίζεται με $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$. Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Η διατεταγμένη n-άδα

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{in})$$

ονομάζεται i-**γραμμή της μήτρας** A και συμβολίζεται με R_i. Το i θα λέγεται **δείκτης** της γραμμής.

Η διατεταγμένη n-άδα

$$(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{mj})$$

ονομάζεται j-**στήλη της μήτρας** A και συμβολίζεται με C_j. Το j θα λέγεται **δείκτης** της στήλης.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Στο στοιχείο a_{ij} της μήτρας A, ο πρώτος δείκτης i είναι ο δείκτης της γραμμής R_i στην οποία ανήκει το στοιχείο, ενώ ο δεύτερος δείκτης j είναι δείκτης της στήλης C_j στην οποία ανήκει το στοιχείο.

Αν $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$ θα λέμε ότι ο **τύπος** της μήτρας A είναι $m \times n$. Στα επόμενα, θα θεωρούμε $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και θα γράφουμε απλά $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

Επίσης, για λόγους συντομίας θα χρησιμοποιούμε και τους συμβολισμούς

$$A = [a_{ij}]_{i\in[m], j\in[n]}, \text{ ή } A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$$

ή απλά

$$A = [a_{ij}]$$

όταν ο τύπος της μήτρας είναι γνωστός.

Μια γραμμή ή στήλη μιας μήτρας λέγεται **μηδενική** αν όλα τα στοιχεία της είναι ίσα με 0.

Παράδειγμα: Η παρακάτω μήτρα έχει δύο μηδενικές γραμμές (την R_2 και την R_5) και μια μηδενική στήλη (την C_2).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Ισότητα μητρών

Δύο μήτρες $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ είναι **ίσες** αν έχουν τον ίδιο τύπο $m \times n$ και ισχύει

$a_{ij} = b_{ij}$ για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$.

3. Μορφές μητρών

Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

(1) Η A λέγεται **μήτρα γραμμή** αν $m = 1$.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

(2) Η A λέγεται **μήτρα στήλη** αν $n = 1$. **Παράδειγμα:**

$$A = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(3) Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **μηδενική μήτρα** και συμβολίζεται με $\mathbb{O}_{m\times n}$ αν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{O}_{2\times 3}.$$

Αν $m = n$ γράφουμε $\mathbb{O}_n$.

(4) Η μήτρα $B = [b_{ij}]$ λέγεται **ανάστροφη μήτρα** της $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και συμβολίζεται με A^t ή A^T, αν $B \in \mathcal{M}_{n\times m}$ και

$$b_{ij} = a_{ji}$$

για κάθε $i \in [n]$ και $j \in [m]$.

Παράδειγμα:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 4},$$

τότε

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 2}.$$

Παρατήρηση: Ισχύει ότι

$$(A^t)^t = A,$$

δηλαδή η ανάστροφη της ανάστροφης μήτρας της A ισούται με τη μήτρα A.

(5) Η μήτρα $B = [b_{ij}]$ λέγεται **αντίθετη μήτρα** της $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και συμβολίζεται με $-A$, αν $B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και

$$b_{ij} = -a_{ij}$$

για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$.

Παράδειγμα:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix},$$

τότε

$$-A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

(6) Η μήτρα $B = [b_{ij}]$ λέγεται **συζυγής μήτρα** της $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ και συμβολίζεται με $\overline{A}$ αν $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ και

$$b_{ij} = \overline{a}_{ij}$$

για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$.

Παράδειγμα:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2-i & 3+3i \\ 6 & -i & 5-4i \end{bmatrix}$$

τότε

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2+i & 3-3i \\ 6 & i & 5+4i \end{bmatrix}.$$

Σημείωση: Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, αποτελείται από τους αριθμούς της μορφής $a+bi$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και i είναι η φανταστική μονάδα, για την οποία ισχύει ότι $i^2 = -1$.

Συζυγής του μιγαδικού αριθμού $z = a + bi$ ονομάζεται ο μιγαδικός αριθμός $\overline{z} = a - bi$.

4. Τετραγωνικές μήτρες

Η μήτρα $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ ονομάζεται **τετραγωνική μήτρα** αν $m = n$.

Στην περίπτωση αυτή, αντί για $\mathcal{M}_{n\times n}$ γράφουμε $\mathcal{M}_n$.

Για τις τετραγωνικές μήτρες μόνο έχουμε και τους παρακάτω ορισμούς:

i) Η **κύρια διαγώνιος** της A αποτελείται από τα στοιχεία a_{ii}, $i \in [n]$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \mathbf{a_{nn}} \end{bmatrix}.$$

Η **δευτερεύουσα διαγώνιος** της A αποτελείται από τα στοιχεία $a_{i,n-i+1}$, $i \in [n]$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \mathbf{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1\ 1} & \mathbf{a_{n-1\ 2}} & \cdots & a_{n-1\ n} \\ \mathbf{a_{n1}} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

ii) **Ίχνος της** $A = [a_{ij}]$ ονομάζεται το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου της και συμβολίζεται με $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$, δηλαδή

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Παράδειγμα: Αν

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 7 \\ \sqrt{3} & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

τότε

$$\mathrm{tr}(A) = 1 + (-8) + 1 = -6.$$

iii) Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **διαγώνια μήτρα** αν

$$a_{ij} = 0, \text{ για κάθε } i \neq j.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε και

$$A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}).$$

Έτσι στο συγκεκριμένο παράδειγμα

$$A = \mathrm{diag}(-3, 4, 0).$$

Όμοια,

$$\mathrm{diag}(1, 2, 0, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Παρατήρηση Το σύνολο των διαγώνιων μητρών τύπου $n \times n$ συνήθως συμβολίζεται με $\mathcal{D}_n$.

iv) Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **μοναδιαία** (ή **ταυτοτική**) **μήτρα** αν είναι διαγώνια μήτρα με $a_{ii} = 1$ για κάθε $i \in [n]$ και συμβολίζεται με I_n.

Παραδείγματα:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ν) Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **τριγωνική κάτω** αν

$$a_{ij} = 0 \text{ για κάθε } i < j.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **τριγωνική πάνω** αν

$$a_{ij} = 0 \text{ για κάθε } i > j.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

vi) Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **συμμετρική μήτρα** αν

$$a_{ij} = a_{ji} \text{ για κάθε } i, j \in [n]$$

ή, ισοδύναμα, αν

$$A^t = A.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & 5 & -1 & 10 \\ 2 & -4 & 10 & 1 \end{bmatrix} = A^t.$$

vii) Η A λέγεται **στρεβλά συμμετρική** αν

$$a_{ij} = -a_{ji} \text{ για κάθε } i, j \in [n]$$

ή, ισοδύναμα, αν

$$A = -A^t.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix} = -A^t.$$

viii) Η $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ λέγεται **ερμιτιανή** αν

$$a_{ij} = \overline{a_{ji}} \text{ για κάθε } i, j \in [n]$$

ή, ισοδύναμα, αν

$$A = \overline{A^t}.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{bmatrix} = \overline{A^t}.$$