

4η ΔΙΑΛΕΞΗ (03.03.2020)

ΜΗΤΡΕΣ

Πράξεις μίτρων

Αντιστροφή μίτρας

Ειδικές μίτρες

5. Πράξεις μπτρών

(1) Πρόσθεση μπτρών

Στο σύνολο $\mathcal{M}_{m \times n}$ ορίζουμε την πράξη $+$ ως εξής: Για κάθε $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ ορίζουμε

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$.

Η μίτρα $A + B$ ονομάζεται **άθροισμα** των A και B .

Παράδειγμα:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

τότε

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 + 1 & 0 + 4 & 3 - 5 \\ 1 + 2 & 4 - 1 & 7 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 1. Αν $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}$ τότε

i) $A + B = B + A.$

ii) $(A + B) + C = A + (B + C).$

iii) $A + C = B + C \Leftrightarrow A = B.$

Απόδειξη. Έστω $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$.

Τότε

i)

$$\begin{aligned} A + B &= [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \\ &= [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] \\ &= B + A. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} (A + B) + C &= ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] \\ &= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] \\ &= [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] = [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) \\ &= A + (B + C) \end{aligned}$$

iii) Άσκηση.

□

(2) Αφαίρεση μπτρών

Στο σύνολο $\mathcal{M}_{m \times n}$ ορίζουμε την πράξη $-$ ως εξής: Για κάθε $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ ορίζουμε

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$$

για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$, ή ισοδύναμα

$$A - B = A + (-B).$$

Η μήτρα $A - B$ ονομάζεται **διαφορά** των A και B .

Παράδειγμα:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

τότε

$$A - B = \begin{bmatrix} -2 - 1 & 0 - 4 & 3 + 5 \\ 1 - 2 & 4 + 1 & 7 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 8 \\ -1 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

(3) Πολλαπλασιασμός μήτρας με πραγματικό αριθμό

Στο σύνολο $\mathcal{M}_{m \times n}$ ορίζουμε την (εξωτερική) πράξη \cdot (με σύνολο τελεστών το \mathbb{R}) ως εξής: Για κάθε $A = [a_{ij}]$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\lambda \cdot A = A \cdot \lambda = [\lambda a_{ij}]$$

για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$.

Παράδειγμα: Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lambda \cdot A = A \cdot \lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 4\lambda & -5\lambda \\ 2\lambda & -\lambda & 0 \end{bmatrix}.$$

Έτσι,

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & 12 & -15 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 2. Για κάθε $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}$ και $\lambda, \mu \in$

\mathbb{R} ισχύει ότι

i) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$

ii) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$

iii) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A).$

iv) $1A = A.$

Απόδειξη. Έστω $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$. Τότε

i)

$$\begin{aligned}\lambda(A + B) &= \lambda([a_{ij}] + [b_{ij}]) = \lambda[a_{ij} + b_{ij}] \\ &= [\lambda(a_{ij} + b_{ij})] = [\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}] \\ &= [\lambda a_{ij}] + [\lambda b_{ij}] = \lambda[a_{ij}] + \lambda[b_{ij}] \\ &= \lambda A + \lambda B.\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)A &= (\lambda + \mu)[a_{ij}] = [(\lambda + \mu)a_{ij}] \\ &= [\lambda a_{ij} + \mu a_{ij}] = [\lambda a_{ij}] + [\mu a_{ij}] \\ &= \lambda[a_{ij}] + \mu[a_{ij}] = \lambda A + \mu A.\end{aligned}$$

iii) Άσκηση.

iv) Άσκηση.

□

(4) Γινόμενο μπτρών

Έστω

$$A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m \times n}$$

και

$$B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times k}.$$

Ονομάζουμε **γινόμενο** της A επί B , και γράφουμε AB , τη μήτρα

$$C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{m \times k},$$

όπου

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{\sigma=1}^n a_{i\sigma}b_{\sigma j}.$$

Παρατηρήσεις:

Από τον ορισμό του γινομένου μπτρών είναι προφανές ότι το γινόμενο AB ορίζεται μόνο αν η μήτρα A έχει τόσες στήλες όσες είναι οι γραμμές της μήτρας B .

Το στοιχείο c_{ij} που δίνεται στην προηγούμενη ισότητα είναι το άθροισμα των n γινομένων $a_{i1}b_{1j}$, $a_{i2}b_{2j}$, ..., $a_{in}b_{nj}$ των στοιχείων της i γραμμής της A με τα αντίστοιχα στοιχεία της j στήλης της B .

Παραδείγματα:

i) Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1 \times 3}$ και $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}$,

τότε ορίζονται τα γινόμενα AB και BA και ισχύει ότι $AB \in \mathcal{M}_{1 \times 1}$ και $BA \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ με

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 & 4 \cdot 3 \\ (-5) \cdot 1 & (-5) \cdot 2 & (-5) \cdot 3 \\ 6 \cdot 1 & 6 \cdot 2 & 6 \cdot 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -5 & -10 & -15 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ii) Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ και $B = \begin{bmatrix} -5 & 6 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}$, τότε ορίζεται το γινόμενο AB , (αλλά όχι το γινόμενο BA), και ισχύει ότι $AB \in \mathcal{M}_{2 \times 3}$ με

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 6 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-7) + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot (-7) + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & 8 & -3 \\ -15 & 22 & -13 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(5) Δυνάμεις μήτρας

Αν $A \in \mathcal{M}_n$, ορίζουμε τη δύναμη A^m , $m \in \mathbb{N}^*$ ως εξής:

$$A^0 = I_n$$

και

$$A^m = A^{m-1}A$$

για κάθε $m \geq 1$.

Πρόταση 3. Για κάθε $A, B, C \in \mathcal{M}_n$, $n, m, k \in \mathbb{N}^*$, ισχύουν οι εξής ιδιότητες, (εφόσον φυσικά οι τύποι των μητρών είναι τέτοιοι ώστε να ορίζονται οι αντίστοιχες πράξεις):

$$i) AI_n = A = I_n A.$$

$$ii) (AB)C = A(BC).$$

$$iii) \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

$$iv) (\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)(AB).$$

$$v) A(B + C) = AB + AC.$$

$$vi) (A + B)C = AC + BC.$$

$$vii) A^m A^k = A^{m+k}.$$

$$viii) (A^m)^k = A^{mk}.$$

Επιπλέον, ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πρόταση 4. Για κάθε $A, B \in \mathcal{M}_n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

$$i) (A + B)^t = A^t + B^t.$$

$$ii) (\lambda A)^t = \lambda A^t.$$

$$iii) (AB)^t = B^t A^t.$$

Προσοχή! Στον πολλαπλασιασμό μητρών παρατηρούμε τα εξής:

(1) Δεν ισχύει πάντα $AB = BA$.

Παράδειγμα:

$$\text{Αν } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ τότε}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$$

ενώ

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

(2) Αν η AB είναι μηδενική δεν συνεπάγεται ότι η A ή/και η B είναι μηδενική.

Παράδειγμα: Ενώ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}_2$ και $B =$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}_2 \text{ έχουμε,}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3) Αν $A^k = \mathbb{O}$ δεν συνεπάγεται ότι $A = \mathbb{O}_n$.

Παραδείγματα:

Ενώ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}_2$, ισχύει ότι

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και ενώ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}_2$ ισχύει ότι

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(4) Αν $AB = AC$ δεν συνεπάγεται $B = C$.

Παράδειγμα: Για $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C =$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ έχουμε ότι

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 15 & 24 \end{bmatrix}$$

και

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 15 & 24 \end{bmatrix} = AB$$

ενώ $B \neq C$.

6. Αντιστροφή μήτρας

Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Η μήτρα $B \in \mathcal{M}_n$ λέγεται **αντίστροφη** της μήτρας A , αν και μόνο αν

$$AB = BA = I_n.$$

Παράδειγμα Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix},$$

τότε είναι

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

και

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Δηλαδή

$$AB = BA = I_2,$$

και επομένως, η μήτρα B είναι αντίστροφη της μήτρας A .

Φυσικά, και η μήτρα A είναι αντίστροφη της μήτρας B .

Αν μια μήτρα έχει αντίστροφη μήτρα, τότε λέμε ότι **αντιστρέφεται**, ή ότι είναι **αντιστρέψιμη**, ή **ομαλή**.

Παράδειγμα:

Να εξετασθεί αν η μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$$

αντιστρέφεται.

Απάντηση: Αν η μήτρα A αντιστρέφεται, τότε υπάρχει

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$$

τέτοια ώστε

$$AB = BA = I_2.$$

Έχουμε λοιπόν,

$$AB = I_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3b_{11} + 4b_{21} & 3b_{12} + 4b_{22} \\ 5b_{11} + 6b_{21} & 5b_{12} + 6b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b_{11} + 4b_{21} = 1 \\ 3b_{12} + 4b_{22} = 0 \\ 5b_{11} + 6b_{21} = 0 \\ 5b_{12} + 6b_{22} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b_{11} + 4b_{21} = 1 \\ b_{12} = -\frac{4}{3}b_{22} \\ b_{11} = -\frac{6}{5}b_{21} \\ 5b_{12} + 6b_{22} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(-\frac{6}{5}b_{21}) + 4b_{21} = 1 \\ b_{12} = -\frac{4}{3}b_{22} \\ b_{11} = -\frac{6}{5}b_{21} \\ 5(-\frac{4}{3}b_{22}) + 6b_{22} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{5}b_{21} = 1 \\ b_{12} = -\frac{4}{3}b_{22} \\ b_{11} = -\frac{6}{5}b_{21} \\ -\frac{2}{3}b_{22} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_{21} = \frac{5}{2} \\ b_{12} = -\frac{4}{3}b_{22} = (-\frac{4}{3})(-\frac{3}{2}) = 2 \\ b_{11} = -\frac{6}{5}b_{21} = (-\frac{6}{5})\frac{5}{2} = -3 \\ b_{22} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

(Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \cdot (-3) + 4 \cdot \frac{5}{2} & 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-\frac{3}{2}) \\ 5 \cdot (-3) + 6 \cdot \frac{5}{2} & 5 \cdot 2 + 6 \cdot (-\frac{3}{2}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-3) \cdot 3 + 2 \cdot 5 & (-3) \cdot 4 + 2 \cdot 6 \\ \frac{5}{2} \cdot 3 + (-\frac{3}{2}) \cdot 5 & \frac{5}{2} \cdot 4 + (-\frac{3}{2}) \cdot 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Άρα, η B είναι αντίστροφη μήτρα της A και επομένως, η A αντιστρέφεται.

Παρατήρηση: Υπάρχουν μήτρες που δεν αντιστρέφονται.

Παράδειγμα:

Έστω ότι η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ αντιστρέφεται. Τότε, υπάρχει

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$$

ώστε

$$AB = BA = I_2.$$

Αλλά

$$\begin{aligned} AB = I_2 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

το οποίο είναι αδύνατο.

Όμοια, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ δεν αντιστρέφεται.
(Άσκηση.)

Πρόταση 5. Η αντίστροφη μιας μήτρας, αν υπάρχει, είναι μοναδική.

Απόδειξη. Πράγματι, έστω ότι η μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ έχει δύο αντίστροφες τις $B, C \in \mathcal{M}_n$. Τότε,

$$AB = BA = I_n$$

και

$$AC = CA = I_n.$$

Άρα

$$C = I_n C = (BA)C = B(AC) = BI_n = B,$$

άτοπο, διότι $B \neq C$. □

Η αντίστροφη της μήτρας A , αν υπάρχει, συμβολίζεται με A^{-1} .

Πρόταση 6. Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$, με

$$AB = I_n.$$

Τότε και $BA = I_n$.

Άρα, αν $AB = I_n$, τότε $B = A^{-1}$.

Παρατήρηση:

Για ναδειχθεί λοιπόν (για τετραγωνική μήτρα) ότι $B = A^{-1}$ δεν χρειάζεται ναδειχθεί και $AB = I_n$ και $BA = I_n$. Αρκεί ένα από τα δύο.

Πρόταση 7. Αν n μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ αντιστρέφεται τότε για κάθε $B, C \in \mathcal{M}_{n \times k}$ ισχύει ότι

$$AB = AC \Rightarrow B = C.$$

Απόδειξη. Αφού η A αντιστρέφεται υπάρχει η αντίστροφή της A^{-1} , οπότε

$$\begin{aligned} AB = AC &\Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \\ &\Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \\ &\Rightarrow I_n B = I_n C \\ &\Rightarrow B = C. \end{aligned}$$

□

Παρατηρήσεις:

i) Αντίστοιχα, για την αντιστρέψιμη μήτρα $A \in \mathcal{M}_k$ ισχύει και η ιδιότητα

$$BA = CA \Rightarrow B = C.$$

ii) Προφανώς, $I_n^{-1} = I_n$.

Πρόταση 8. Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$.

i) Αν οι A, B είναι αντιστρέψιμες, τότε και η μήτρα AB είναι αντιστρέψιμη, και είναι

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Γενικότερα, αν οι μήτρες $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{M}_n$ είναι αντιστρέψιμες, τότε και η μήτρα $A_1A_2 \cdots A_k$ είναι αντιστρέψιμη, και είναι

$$(A_1A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

ii) Η A είναι αντιστρέψιμη, αν και μόνο αν η A^t είναι αντιστρέψιμη, και είναι

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}.$$

iii) Αν η A είναι αντιστρέψιμη και $\lambda \in \mathbb{R}^*$ τότε και η λA είναι αντιστρέψιμη, και είναι

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}.$$

iv) Αν η A είναι αντιστρέψιμη, τότε και η μήτρα A^m , όπου $m \in \mathbb{N}^*$, είναι αντιστρέψιμη, και είναι

$$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. i) Λόγω της προσεταιριστικότητας, ισχύει ότι

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

Άρα, πράγματι $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Για τη γενίκευση μπορεί να χρησιμοποιηθεί επαγωγή ως προς το πλήθος k των μπτρών (Άσκηση).

ii) Έστω ότι η A είναι αντιστρέψιμη. Επειδή $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ και $I_n^t = I_n$ θα είναι

$$(AA^{-1})^t = I_n^t \Leftrightarrow (A^{-1})^t A^t = I_n$$

και

$$(A^{-1}A)^t = I_n^t \Leftrightarrow A^t(A^{-1})^t = I_n.$$

Από τις προηγούμενες ισότητες προκύπτει ότι η μήτρα $(A^{-1})^t$ είναι η αντίστροφη της A^t . Άρα, η A^t είναι αντιστρέψιμη και $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Αντίστροφα, έστω ότι η A^t είναι αντιστρέψιμη. Τότε λόγω του προηγούμενου και η $(A^t)^t = A$ είναι επίσης αντιστρέψιμη.

iii) Άσκηση.

iv) Άσκηση.

□

Παρατήρηση: Αντί για $(A^m)^{-1}$ ή $(A^{-1})^m$ γράφουμε συνήθως A^{-m} .

Παρατήρηση: Το σύνολο των αντιστρέψιμων μητρών τύπου n συμβολίζεται με \mathcal{N}_n ή $GL(F, n)$.

7. Ειδικές μήτρες

(1) Η μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ λέγεται **ορθογώνια**, αν και μόνο αν $AA^t = A^tA = I_n$, δηλαδή αν έχει ως αντίστροφη την ανάστροφή της, (δηλαδή αν $A^{-1} = A^t$).

Παράδειγμα: Οι μήτρες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

είναι ορθογώνιες:

$$\begin{aligned} AA^t &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BB^t &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Το σύνολο των ορθογώνιων μητρών τύπου $n \times n$ συμβολίζεται με O_n .

(2) Η μήτρα $A \in M_n$ λέγεται **αδύναμη** ή **αυτοδύναμη** αν $A^2 = A$.

Παράδειγμα Η μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

είναι αδύναμη.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = A. \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Αν η μήτρα A είναι αδύναμη, τότε ισχύει ότι

$$A^n = A \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

(3) Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής, αν υπάρχει, ονομάζεται **κύριο στοιχείο της γραμμής**.

Παράδειγμα: Τα κύρια στοιχεία της παρακάτω μήτρας φαίνονται μέσα σε κύκλους.

$$\begin{bmatrix} 0 & \textcircled{2} & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 \\ \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έστω $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$.

Η A λέγεται **κλιμακωτή μήτρα** αν

- i) Ο δείκτης κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι **μικρότερος** από το δείκτη κάθε μηδενικής γραμμής.
- ii) Σε κάθε δύο μη μηδενικές γραμμές ο δείκτης στήλης του κύριου στοιχείου της κατώτερης γραμμής είναι **μεγαλύτερος** από το δείκτη στήλης του κύριου στοιχείου της ανώτερης γραμμής, (δηλαδή το κύριο στοιχείο της κατώτερης γραμμής βρίσκεται δεξιότερα από το κύριο στοιχείο της ανώτερης γραμμής).

Παραδείγματα:

Οι επόμενες μήτρες είναι κλιμακωτές

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ενώ οι μήτρες

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν είναι κλιμακωτές.

(4) Έστω $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$.

Η A λέγεται **υποβαθμισμένη** (ή **ανηγμένη**) **κλιμακωτή μήτρα** αν η A είναι κλιμακωτή και επιπλέον ισχύουν οι ιδιότητες.

- i) Αν μια γραμμή έχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό στοιχείο, τότε το κύριο στοιχείο της γραμμής ισούται με 1.
- ii) Κάθε στήλη που περιέχει κύριο στοιχείο μιας γραμμής έχει όλα τα άλλα στοιχεία μηδενικά.

Παραδείγματα: Οι επόμενες μήτρες είναι υποβαθμισμένες κλιμακωτές

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ενώ οι μήτρες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

δεν είναι υποβαθμισμένες κλιμακωτές.