2.6 Ορίζουσα γινομένου

Πρόταση 2.4. *Έστω* $A, B \in \mathcal{M}_n$. *Τότε* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Πρόταση 2.5 (Κριτήριο αντιστρεψιμότητας). *Έστω* $A \in \mathcal{M}_n$. *Η* A *είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν* $\det(A) \neq 0$.

2.7 Συμπληρωματική μήτρα

Έστω $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathcal{M}_n$ και A_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ij} της μήτρας A. Τότε, η μήτρα

$$\left[A_{ij}\right]^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ & & \ddots & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ & & \ddots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

λέγεται **συμπληρωματική** της μήτρας A και συμβολίζεται με adj$A$.
Παραδείγματα

(1) Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, τότε

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot 2 = 2, \\ A_{12} &= (-1)^{1+2}(-1) = (-1)(-1) = 1, \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot 4 = -4, \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot 3 = 3. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(2) Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, τότε $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$, $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10$, κ.ο.κ.

Άρα,

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -13 & 10 \\ 10 & 10 & -10 \\ -7 & -1 & 10 \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 2.6. *Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Τότε,*

(i) $A \cdot \mathrm{adjA} = \mathrm{adjA} \cdot \mathrm{A} = \det(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{I_n}$.

(ii) *Αν* $\det(A) \neq 0$, *τότε* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}A$.

Απόδειξη. Έστω $C = [c_{ij}] = \mathrm{adjA} \cdot \mathrm{A}$ όπου

$$\mathrm{adjA} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{j1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{j2} & \cdots & A_{n2} \\ & & \vdots & & \vdots & \\ A_{1i} & A_{2i} & \cdots & A_{ji} & \cdots & A_{ni} \\ & & \vdots & & \vdots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{jn} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \text{ και } \mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \text{ το γινόμενο της γραμμής } i \text{ του adj}A \text{ και της στήλης } j \text{ του } A. \\ &= A_{1i}a_{1j} + A_{2i}a_{2j} + \cdots + A_{ji}a_{ij} + \cdots + A_{ni}a_{nj} \end{aligned}$$

Από τις Προτάσεις 2.1 και 2.2 έπεται ότι αν $i = j$ τότε $c_{ij} = \det(A)$ και αν $i \neq j$ τότε $c_{ij} = 0$, δηλαδή

$$C = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)I_n.$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και $A \cdot \mathrm{adj}A = \det(A)I_n$.
Επιπλέον, αν $\det(A) \neq 0$ τότε η A αντιστρέφεται και ισχύει ότι

$$A \cdot \mathrm{adjA} = \det(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{I_n} \Leftrightarrow \mathrm{A} \cdot \left(\frac{1}{\det(\mathrm{A})}\mathrm{adjA}\right) = \mathrm{I_n}.$$

Άρα, η αντίστροφή της A^{-1} είναι η $\frac{1}{\det(A)}\mathrm{adjA}$. □

Παράδειγμα. *Έστω* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$. *Να βρεθεί, (αν υπάρχει), η μήτρα* A^{-1}.

Λύση. Είναι $\det(A) = 1 \cdot (-4) - 2 \cdot 3 = -10 \neq 0$. Επομένως υπάρχει η A^{-1} και ισχύει ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adjA}.$$

Είναι

$$\mathrm{adjA} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$A^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$ □

Παρατήρηση: Από την Πρόταση 2.6 (2) προκύπτει ότι μπορούμε να βρίσκουμε απ' ευθείας την αντίστροφη μιας 2×2 αντιστρέψιμης μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

(χωρίς να κάνουμε κάθε φορά τη διαδικασία του παραπάνω Παραδείγματος), αφού

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα. *Έστω* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. *Να βρεθεί, (αν υπάρχει), η μήτρα* A^{-1}.

Λύση. Είναι $\det(A) = -4 \neq 0$, επομένως υπάρχει η A^{-1} και ισχύει ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj} A$$

Είναι

$$\mathrm{adj} A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -8 \\ -3 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

2.8 Rank μήτρας

Έστω $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ και

$$W = < C_1, C_2, \ldots, C_n >$$

όπου $C_1, C_2, \ldots, C_n$ οι στήλες της μήτρας A.

Ορίζουμε $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \dim \widehat{W}$, όπου $\widehat{W}$ είναι ο διανυσματικός χώρος που έχει για φορέα το W.

Παράδειγμα: Για την μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι $\mathrm{rank}(A) = 3$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} W &= < C_1, C_2, C_3, C_4 > \\ &= < (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,0,0), (0,0,0,1) > \\ &= < (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1) > . \end{aligned}$$

Το σύνολο αυτό είναι και ελεύθερο, αφού

$$\lambda_1(1,0,0,0) + \lambda_2(0,1,0,0) + \lambda_3(0,0,0,1) = (0,0,0,0) \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, 0, \lambda_3) = (0,0,0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Άρα $\dim \widehat{W} = 3$, άρα $\mathrm{rank}(A) = 3$.

2.9 Συμπληρωματικές λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 2.1. *Έστω* $A, B \in \mathcal{M}_n$ *με* $\det(A) = 3$ *και* $\det(B) = 2$. *Να βρεθούν οι* $\det(AB^2)$, $det(A^3)$ *και* $det(A^{-1}BA)$

Λύση. Ισχύει ότι

$$\det(AB^2) = \det(A)\det(B^2) = \det(A)(\det(B))^2 = 3 \cdot 2^2 = 12.$$

$$\det(A^3) = (\det(A))^3 = 3^3 = 27.$$

$$\det(A^{-1}BA) = \det(A^{-1})\det(B)\det(A) = \det(A)^{-1}\det(B)\det(A) = \det(B) = 2.$$

□

Άσκηση 2.2. *Να δειχθεί ότι*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$$

Λύση.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2 = C_2 - C_1 \\ C_3 = C_3 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής καταλήγουμε στον υπολογισμό της ορίζουσας

$$\begin{aligned} 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} &= (b-a)(c-a)(c+a) - (c-a)(b-a)(b+a) \\ &= (b-a)(c-a)(c+a-b-a) \\ &= (b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a). \end{aligned}$$

□