Ορισμός. Έστω $A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ (τετραγωνικός πίνακας)

$\det(A)=|A|=|a_{ij}|$ A-ορίζουσα $\overset{\text{ορ.}}{\iff}$ $\det(A):=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\text{sign}(\sigma)}a_{1\mu_1}a_{2\mu_2}\cdots a_{n\mu_n}$

όπου $\sigma=(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n)\in S_n$ με S_n το σύνολο των των $n!$ μεταθέσεων του τετραγωνικού πίνακα και $\text{sgn}(\sigma)$ το πρόσημο της μετάθεσης (1: περιττή ή 2: άρτια).

Παρατήρηση. Έστω $A=\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$. Τότε,

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=(-1)^1\alpha\cdot\beta+(-1)^2\beta\alpha+(-1)^1\gamma\delta+(-1)^2\delta\gamma+$$
$$+(-1)^2\alpha\delta+(-1)^1\gamma\beta$$
$$=\alpha\delta-\beta\gamma\in\mathbb{R}.$$

Παράδειγμα. Έστω $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -5 & -4\end{pmatrix}_{2\times 2}$. Τότε $\det(A)=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -5 & -4\end{vmatrix}=2(-4)-[(-5)\cdot 3]=7$.

Παρατήρηση. Κανόνας του Sarrus. Έστω $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ (μόνο για 3×3 πίνακες). Τότε

$$\det(A)=\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}\\ - & - & - & & \end{array}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Παράδειγμα. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Τότε

$$\det(A) = \begin{array}{ccc} + & + & + \\ \end{array}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} = 1\cdot 3(-1) + 0 + 2(-1)\cdot 2 - 1\cdot 3\cdot 2 - 2\cdot 4\cdot 1 - 0$$

$$\begin{array}{ccc} - & - & - \end{array}$$

$$= -3 - 4 - 6 - 8.$$

Πόρισμα. Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- $\det(I_n) = 1$
- $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$
- $\det(O_n) = 0.$
- $|A^k| = |A|^k$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $|A^T| = |A|$
- $|A^{-1}| = |A|^{-1} = 1/|A|$
- $\det(\mathrm{diag}(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)) = \delta_1 \cdot \delta_2 \cdots \delta_n$
- Έστω $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}_L^{n\times n} \cup \mathbb{R}_U^{n\times n}$. Τότε $|A| = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Θεώρημα. Έστω $A = (\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n)^{(T)}_{n\times n}$, όπου $\bar{a}_i \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ (ορισμός τετραγων. πίνακα ως διάνυσμα στηλών, δηλ. πινάκων-στηλών).

(α) $|\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_i \cdots \bar{a}_j, \ldots, \bar{a}_n| = -|\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_j \cdots \bar{a}_i \cdots \bar{a}_n|$,

δηλ. η αντιμετάθεση δύο στηλών ή γραμμών αλλάζει το πρόσημο της ορίζουσας.
Προφανώς η αντιμετάθεση κ-γραμμών ή στηλών δίνει πρόσημο στην νέα ορίζουσα $(-1)^k |A|$.

(β) $|\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \lambda\bar{a}_i \cdots \bar{a}_n| = \lambda\, |\bar{a}_1\ \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n| = \lambda \cdot |A|$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$

δηλ. ο πολλαπλασιασμός μιας γραμμής ή μιας στήλης ενός πίνακα επί μιας σταθεράς $\lambda \in \mathbb{R}$, δίνει ορίζουσα την πολλαπλάσια ορίζουσα $\lambda |A|$ της ορίζουσας $|A|$.

(γ) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ (άμεσο αποτέλεσμα από το προηγούμενο).

(δ) $|\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \ \bar{a}_i \pm \lambda \bar{a}_j| = |\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n| = |A|$

δηλ. η προσθαφαίρεση των τιμών μιας γραμμής (ή στήλης) με το γινόμενο μιας άλλης γραμμής (ή άλλης στήλης) δεν μεταβάλλει την ορίζουσα του πίνακα.

(ε) $|\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_i \cdots \bar{a}_j = \bar{a}_i| = 0$,

δηλ. η ορίζουσα ενός τετραγ. πίνακα δύο ίδιων γραμμών (ή στηλών) είναι μηδενική.

(στ) $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{0}, \ldots \bar{a}_n) = 0$, (άμεσο αποτέλεσμα από το (β))

δηλ. η ορίζουσα ενός πίνακα μιας μηδενικής γραμμής (ή στήλης) είναι μηδενική.

(ζ) $\left|\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_i \pm \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \lambda_k a_k \right| = 0,$

δηλ. η ορίζουσα ενός πίνακα στον οποίο προσαρμόζεται σε γραμμή (ή στήλη) αυτού ο γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων γραμμών (ή στηλών) αυτού είναι μηδενική.

(η) $|\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_i + \bar{b} \cdots \bar{a}_n| = |\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_i \cdots \bar{a}_n| + |\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \bar{b} \cdots \bar{a}_n|$

(θ) $|A+B| \neq |A| + |B|$ (γενικά)

Παράδειγμα. Υπολογισμός Οριζουσών.

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 200 & 500 \\ 0 & -2 & 623 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Έχουμε $A \in \mathbb{R}_u^{3\times 3}$, οπότε $|A| = tr(A) = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} = 1\cdot(-2)\cdot 7 = -14$.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 67 & 32 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 56 & 10 \end{pmatrix}$

Παρατηρούμε ο A μπορεί να μετατραπεί σε άνω τριγωνικό, συγκεκριμένα.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 67 & 32 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 56 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_1 := r_3 \\ \\ r_3 := r_1 \end{matrix} \quad (\text{αντιμετάθεση } r_3 \leftrightarrow r_1)$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 56 & 10 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 67 & 32 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ r_2 := r_3 \\ r_3 := r_2 \end{matrix} \quad (\text{αντιμετάθεση } r_2 \leftrightarrow r_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 56 & 10 \\ 0 & 67 & 32 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} = 2\cdot 67\cdot 2 = 4\cdot 67 = 268.$$

Εναλλακτικά, υπολογισμό ορίζουσας με ανάπτυξή της ως προς τη $2^η$ γραμμή.
Τότε, $|A| = 2\cdot(-1)^{2+3}\cdot \begin{vmatrix} 0 & 67 \\ 2 & 56 \end{vmatrix} = -2\cdot(0\cdot 56 - 2\cdot 67) = +4\cdot 67 = 268.$

(iii) $$|A| = \begin{vmatrix} 500 & 20 & 40 \\ 7 & -12 & 5 \\ 50 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad r_1 : r_1 - 10 r_3$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & -12 & 5 \\ 50 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0 .$$

(iv) $$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -9 \end{vmatrix} \quad r_3 := r_3 - r_1$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 0 & -2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-6) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot [3 \cdot 4 - 2(-3)] - 6 \cdot (3 \cdot 8 - 2 \cdot 7)$$

$$= 2(12 + 6) - 6(24 - 14)$$

$$= 2 \cdot 18 - 6 \cdot 10 = 36 - 60 = -24 .$$

Ορισμός. Θεμελιώδεις μετασχηματισμοί πινάκων (ή επιτρεπτές γραμμοπράξεις ή επιτρεπτές πράξεις στηλών.

(1) $\theta_1 : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$, όπου

$$(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_i \dots \bar{a}_j \dots \bar{a}_n)^{(T)} \xmapsto{\theta_1} (\bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_j \dots \bar{a}_i \dots \bar{a}_n)^{(T)} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

(αντιμετάθεση γραμμών ή στηλών).

(2) $\theta_2 : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$, όπου

$$(\bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_i \dots \bar{a}_n)^{(T)} \xrightarrow{\theta_2} (\bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots \lambda \bar{a}_i \dots \bar{a}_n)^{(T)} \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \lambda \in \mathbb{R}^*$$

(πολλαπλασιασμός γραμμών ή στηλών με μη-μηδενικό αριθμό)

(3) $\theta_3 : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$, όπου

$$(\bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_i \dots \bar{a}_j \dots a_n)^{(T)} \xmapsto{\theta_3} (\bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_i + \lambda \bar{a}_j \dots \bar{a}_j \dots \bar{a}_n)^{(T)},\ \lambda \in \mathbb{R}^*$$

(άθροιση γραμμή ή στήλης με γινόμενο γραμμή ή στήλης με $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Παρατήρηση. Οι θεμελιώδεις πράξεις είναι αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις, οπότε ορίζονται και οι αντίστροφοι θεμελιώδεις μετασχ. πινάκων

Εάν $\theta(A) = B$, όπου θ θεμελιώδης πράξη, τότε $\theta^{-1}(B) = A$.

(1) $\theta_1^{-1} = \theta_1$

(2) $(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_i \dots \bar{a}_n)^{(T)} \xmapsto{\theta_2^{-1}} (\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \frac{1}{\lambda} \bar{a}_i \dots \bar{a}_n)^{(T)},\ \lambda \in \mathbb{R}^*$

(3) $(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_i \dots \bar{a}_j \dots \bar{a}_n)^{(T)} \xmapsto{\theta_3^{-1}} (\bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_i \dots a_i - \lambda \bar{a}_j \dots \bar{a}_n),\ \lambda \in \mathbb{R}^*$

Ορισμός. Κλιμακωτή μορφή πίνακα.

Κύριο στοιχείο γραμμής ενός (μη-μηδενικού) πίνακα καλείται το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της γραμμής αυτού.

Μηδενική γραμμή καλείται η γραμμή του πίνακα που αποτελείται από 0.

Ένας πίνακας καλείται κλιμακωτής μορφής (ή row echelon form, ref) όταν

(α) Οι μηδενικές γραμμές αυτού βρίσκονται στο τέλος των γραμμών αυτού

(β) Κάθε κύριο στοιχείο αυτού βρίσκεται δεξιά από το παραπάνω κύριο στοιχείο αυτού (δηλ. της προηγούμενης γραμμής).

Ένας πίνακας καλείται ανηγμένος κλιμακωτός (reduced row echelon form, rref) όταν

(α) Τα κύρια στοιχεία αυτού είναι μονάδες

(β) Όλα τα στοιχεία της στήλης του κυρίου στοιχείου είναι μηδέν.

Π.χ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(κλιμακωτός)   (μη-ανηγμένος κλιμακωτός)

Κάθε $m\times n$ πίνακας μετασχηματίζεται σε ένα γραμμο-ισοδύναμο κλιμακωτό πίνακα (με πεπερασμένες γραμμο-πράξεις). (ref ή rref)

Σημείωση. Εάν $B=\vartheta_i(A)$, $i=1,2,3$, τότε $A\sim B$ σχέση ισοδυναμίας. Στην περίπτωση των θεμελιωδών πράξεων γραμμών ο πίνακας $\vartheta_i(A)$ καλείται γραμμο-ισοδύναμος του A, και $A, \vartheta_i(A)$ γραμμο-ισοδύναμοι πίνακες.

Πόρισμα. Κάθε πίνακας $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ είναι γραμμο-ισοδύναμος με ένα κλιμακωτό πίνακα ή ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.

Δηλ. Εάν ϑ_i, $i=1,2,\dots,k$ θεμελιώδεις μετασχηματισμοί τότε

$$B=(\vartheta_k\circ\vartheta_{k-1}\circ\vartheta_{k-2}\cdots\circ\vartheta_2\circ\vartheta_1)(A)\in\mathbb{R}^{m\times n}_{ref}\cup\mathbb{R}^{m\times n}_{rref},\ A\in\mathbb{R}^{m\times n}$$

Παράδειγμα.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0\\ 2 & 6 & -5 & -2\\ 0 & 1 & 5 & 10\\ 2 & 6 & 0 & 8\end{pmatrix} \begin{matrix} r_2=r_2-2r_1\\ \\ \\ r_4=r_4-2r_1\end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 5 & 10\\ 0 & 0 & 4 & 8\end{pmatrix} \begin{matrix} r_2:=r_3\\ r_3:=r_2\end{matrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 10\\ 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 4 & 8\end{pmatrix} r_4:=r_4+4r_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 10\\ 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times 4}_{ref}.$$

Εύρεση ορίζουσας με τριγωνοποίηση. Εάν εφαρμόσουμε των πράξη-μετασχηματισμό (δ), δηλ. τον επιτρεπτό μετασχηματισμό (δ) η ορίζουσα του πίνακα θα παραμένει αμετάβλητη ενώ μπορούμε με τη κατάλληλη γραμμο πράξη (ή πράξη στηλών) να "εμφανίσουμε μηδενικά και έτσι να αναχθούμε σε τριγωνικούς πίνακες των οποίων τώρα η ορίζουσα είναι όπως ξέραμε το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου.

Παράδειγμα. Χρήση επιτρεπτών γραμμο-πράξεων. Έστω.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 := r_2 + r_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 := r_3 - r_1}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 := r_3 - r_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Άρα $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\cup}$, οπότε $|A| = 1\cdot 1\cdot 0 = 0$ (ιδιάζων πίνακας).

Παρατήρηση. Για τους παραπάνω γραμμο-ισοδύναμους πίνακες ισχύει και η ισότητα των οριζουσών τους.

Παράδειγμα. Δημιουργία γραμμο-ισοδύναμου κλιμακωτού πίνακα του

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -15 \\ -8 & 2 & -12 \\ 12 & 6 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 := r_1/3 \\ r_2 := r_2/2 \\ r_3 := r_3/2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -4 & 1 & -6 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2 := r_2 + 4r_1 \\ r_3 := r_3 - 6r_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -26 \\ 0 & -9 & 26 \end{pmatrix} r_3 := r_3 + 3r_2 \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -26 \\ 0 & 0 & -52 \end{pmatrix} r_3 := r_3 - 2r_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -26 \\ 0 & \boxed{\neq 0} & 0 \end{pmatrix} !$$

Παράδειγμα. Μετασχηματισμός γραμμο-ισοδύναμου ανηγμένου κλιμακωτού πίνακα.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2 := r_2 - 3r_1 \\ r_3 := r_3 - 2r_1 \\ r_4 := r_4 + 2r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} r_4 := r_4 - r_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 := r_1 - r_4 \\ r_2 := r_2 + r_4 \\ r_3 := r_3 + r_4 \\ r_4 := r_4/4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_3 := r_4 \\ r_4 := r_3 \end{matrix} \sim \mathbb{R}^{4\times 3}_{rref}.$$

Θεώρημα Κάθε rref τετραγωνικός πίνακας είτε είναι I_n είτε I_n με μια τουλάχιστον μηδενική γραμμή.

Παράδειγμα. Γραμμοϊσοδύναμος κλιμακωτός πίνακας.

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 2 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ r_2 := r_2 - 2r_1 \\ \\ r_4 := r_4 - 2r_1 \end{matrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2 := r_3 \\ r_3 := r_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ r_4 := r_4 + 4r_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}_{ref}.$$

Παράδειγμα. Γραμμοϊσοδύναμος ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας.

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -17 & -30 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 := r_1 - 3r_2 \\ \\ r_3 := -r_3 \\ \\ \end{matrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -17 & -30 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 := r_1 + 17r_3 \\ r_2 := r_2 - 5r_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα. Γραμμο-ισοδύναμος ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας.

Έστω
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_1 := r_2 \\ r_2 := r_1 \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -9 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ r_3 := r_3/(-3) \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

Άσκηση. Έστω μετασχηματισμός σε rref πίνακα.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ορισμός. Ελάσσωνας υπο-πίνακας. Έστω $A=(a_{ij})_{n\times n} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n)_{n\times n}$ όπου $\bar{a}_i \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

M_{ij} (i,j)-ελάσσωνας υποπίνακας $\overset{ορ.}{\Leftrightarrow}$

$$M_{ij} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_{j-1}, \bar{a}_{j+1} \cdots a_n), \text{ όπου}$$

$$\bar{a}_k := (a_{1k}\ a_{2k} \cdots a_{i-1k}\ a_{i+1k} \cdots a_{nk}), \quad k \neq j,\ k=1,2,\dots,n$$

Ορισμός. Ελάσσουσα υπο-ορίζουσα. Έστω $A=(a_{ij})_{n\times n}$.

D_{ij} (i,j)-υποορίζουσα του πίνακα A $\overset{ορ.}{\Leftrightarrow}$ $D_{ij} := |M_{ij}|$ όπου M_{ij} (i,j)-υπο-πίνακας. $i,j \in 1,2,\dots,n$.

Παράδειγμα. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 7 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Άρα για ελάσσωνα υποπίνακα έχουμε

$$M_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & -7 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ με } |M_{22}| = 3-0 = 3$$

και

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & -7 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ με } |M_{11}| = -3+35 = 33.$$

Ορισμός. Αλγεβρικό Συμπλήρωμα στοιχείου πίνακα. Έστω $A=(a_{ij})_{n\times n}$.

A_{ij} a_{ij} - αλγεβρικό συμπλήρωμα, $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$ $\overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|. \quad (\text{η συμπαράγοντας του στοιχείου } a_{ij})$$

Θεώρημα. Μέθοδος αναπτύγματος για υπολογισμό ορίζουσας.
Έστω $A=(a_{ij})_{n\times n}$. Ισχύει.

$$|a_{ij}| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} \quad (\text{ανάπτυγμα ως προς } 1^{\eta}\text{-γραμμή}$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \quad (\text{ανάπτυγμα ως προς } i\text{-γραμμή})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1} \quad (\text{ανάπτυγμα ως προς την πρώτη στήλη})$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \quad (\text{ανάπτυγμα ως προς } j\text{-στήλη}).$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}.$$

Παράδειγμα. Έστω $A=(a_{ij})_{3\times3}$. Ορίζουσα ως ανάπτυγμα υπο-οριζουσών $1^{ης}$-γραμμής

$$|a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= (-1)^{1+1}a_{11}|M_{11}| + (-1)^{1+2}a_{12}|M_{12}| + (-1)^{1+3}a_{13}|M_{13}|$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}).$$

(επαλήθευση του κανόνα Sharrus).

Παράδειγμα. Έστω

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 2A_{33} + 0$$ (ανάπτυγμα ορίζουσας ως προς $3^η$-γραμμή)

όπου $A_{33} = (-1)^{3+3}|M_{33}|$, δηλ.

$$A_{33} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{matrix} = (1\cdot3\cdot3 + 4\cdot2\cdot1 + 1\cdot2\cdot1 - 1\cdot3\cdot1 - 1\cdot2\cdot1 - 3\cdot2\cdot4)\cdot2$$

Εναλλακτικά,

$$|M_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_2 := r_2 - 2r_1 \\ r_3 := r_3 - r_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Παράδειγμα.

Έστω $|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 3-5k$

Εναλλακτικά. $|A| \; (\Sigma_3 := \Sigma_3 - \Sigma_2) = \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix}_{\Gamma_3 := \Gamma_3 - \Gamma_2} = \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

Άρα $A = 0 + 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} k & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 0 = 3-5k.$

Άρα A μη-ιδιάζον ανν $|A| \neq 0$, δηλ. $3-5k \neq 0 \Rightarrow k \neq 3/5.$

Παράδειγμα. $|A| = \begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ 1 & 1+b & c \\ 1 & b & 1+c \end{vmatrix} \; \Sigma_1 := \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$

$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1+a+b+c & b & c \\ 1+a+b+c & 1+b & c \\ 1+a+b+c & b & 1+c \end{vmatrix}$

$= (1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & 1+b & c \\ 1 & b & 1+c \end{vmatrix} \begin{matrix} \Gamma_2 := \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 := \Gamma_3 - \Gamma_1 \end{matrix} = (1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= (1+a+b+c)\cdot 1 = 1+a+b+c.$

Παράδειγμα. Χρήση επιτρεπτών πράξεων-στηλών για υπολογισμό ορίζουσας. Έστω

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \Sigma_2 := \Sigma_2 - \Sigma_1 \\ \Sigma_3 := \Sigma_3 - \Sigma_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}^{(*)}$$ (ανάπτυγμα ως προς 1η-γραμμή)

$$= (b-a)(c^2-a^2) - (c-a)(b^2-a^2)$$

$$= (b-a)(c-a)(c+a) - (c-a)(b-a)(b+a)$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)$$

Εναλλακτικά $(*)$ έχουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$$

(κοινός παράγοντας το $b-a$ από την 1η-στήλη και το $c-a$ από την 2η στήλη), δηλ.

$$|A| = (b-a)(c-a)(c+a-b-a) = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Παράδειγμα.

Έστω $|A| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 2\alpha+\alpha^2 & 2\beta+\beta^2 & 2\gamma+\gamma^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2+\alpha & 2+\beta & 2+\gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}$

$(\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1)$. Άρα $|A| = \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}$ $\Sigma_2 := \Sigma_2 - \Sigma_1$, $\Sigma_3 := \Sigma_3 - \Sigma_1$

Άρα $|A| = \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \alpha^2 & \beta^2-\alpha^2 & \gamma^2-\alpha^2 \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \alpha^2 & (\beta-\alpha)(\beta+\alpha) & (\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha) \end{vmatrix}$.

Άρα $|A| = \alpha\beta\gamma(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha^2 & \beta+\alpha & \gamma+\alpha \end{vmatrix}$

$= \alpha\beta\gamma(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha) \cdot \left[1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \beta+\alpha & \gamma+\alpha \end{vmatrix} \right]$

Παράδειγμα: $\alpha\beta\gamma(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$.

Έστω $|A| = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$ $\Gamma_1 := \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$

$= \begin{vmatrix} 3+x & 3+x & 3+x \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = (3+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$ $\Gamma_2 := \Gamma_2 - \Gamma_1$, $\Gamma_3 := \Gamma_3 - \Gamma_1$

$= (3+x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^2(3+x)$.

Παράδειγμα.

$$A = \begin{vmatrix} a+b & c-a & c \\ b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \end{vmatrix}$$

(Υπολογισμός ορίζουσας μέσω απλοποίησης)

Άρα $|A| \;(\Sigma_2 := \Sigma_2 + \Sigma_3) = \begin{vmatrix} a+b & -a & c \\ b+c & -b & a \\ c+a & -c & b \end{vmatrix} \;(\Sigma_1 := \Sigma_1 + \Sigma_2)$

$$= \left|\begin{matrix} b & -a & c \\ c & -b & a \\ a & -c & b \end{matrix}\right| \begin{matrix} b & -a \\ c & -b \\ a & -c \end{matrix}$$

$$= 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$

Παράδειγμα.

$$A = \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix} \Sigma_2 := \Sigma_2 - \Sigma_3$$

$$= \begin{vmatrix} a-b-c & 0 & 2a \\ 2b & -b-c-a & 2b \\ 2c & c+a+b & c-a-b \end{vmatrix} \Gamma_2 := \Gamma_2 + \Gamma_3$$

$$= \begin{vmatrix} a-b-c & 0 & 2a \\ 2b+2c & 0 & c-a+b \\ 2c & c+a+b & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+2} \cdot (c+a+b) \begin{vmatrix} a-b-c & 2a \\ 2b+2c & c-a+b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Άσκηση.

(α) $\begin{vmatrix} x & y+2 & 2 \\ x-1 & y+2+2 & x+1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(β) $\begin{vmatrix} x+\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha \end{vmatrix}$

Άσκηση. Υπολογισμός οριζουσών.

(α) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (β) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ (γ) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

Άσκηση. Υπολογισμός οριζουσών

(α) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ (β) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(γ) $\begin{vmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 1 & x & x & x \\ x & 1 & xy & y \\ x & x & xy & 1 \end{vmatrix}$ (δ) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & a+b & a+c \\ 1 & b+c & 0 & b+c \\ 1 & c+a & c+b & 0 \end{vmatrix}$

Μέθοδος Τριγωνοποίησης.

Παράδειγμα. Εύρεση Ορίζουσας.

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ r_2 := r_2 - 2r_1 \\ r_3 := r_3 - 3r_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ r_3 := r_3 - \frac{7}{5} r_2 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1+\frac{7}{5} \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot \frac{2}{5} = 2.$$

Παράδειγμα. Εύρεση ορίζουσας.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ r_2 := r_2 - 3r_1 \\ r_3 := r_3 - r_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-4)(-2) = 8.$$

Παράδειγμα.

Έστω $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_1 := r_2 \\ r_2 := r_1 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_3 = r_3 - r_1 \\ r_4 := r_4 - 2r_1 \end{matrix}$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_3 := r_3 - r_2 \\ r_4 := r_4 + 2r_2 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \; r_4 := r_4 + \tfrac{4}{3} r_3$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 (-3)(-3) = -9.$$

Υπολογισμός ορίζουσας. Μέθοδος τετραγωνισμού.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (μέσω επιτρεπτών γραμμο πράξεων)

$$\Rightarrow A \in \mathbb{R}^{n \times n}_{tr} \Rightarrow |A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Παράδειγμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 12 \\ 6 & 2 & 7 & 10 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Έχουμε $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 12 \\ 6 & 2 & 7 & 10 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 12 \\ 6 & 2 & 7 & 10 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ $r_2 := r_2 - r_1$, $r_4 := r_4 + \frac{1}{2} r_1$

$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 6 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 4 & 4+\frac{3}{2} & 7 \end{vmatrix}$ $r_3 := r_3 - 3r_1$

$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & -7 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4+\frac{3}{2} & 7 \end{vmatrix}$ $r_3 := r_3 + 7r_2$, $r_4 := r_4 + 4r_2$

$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 18 & 64 \\ 0 & -7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 8+\frac{3}{2} & 41 \end{vmatrix} = \dots \qquad 4 \cdot 41$

Παράδειγμα. Έστω

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} r_2 := r_2 - r_1 \\ r_3 := r_3 - r_1 \\ r_4 := r_4 - 3r_1 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & -5 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} r_2 : r_3 \\ r_3 := r_2 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -5 & -5 \end{vmatrix} \quad r_4 := r_4 - 2r_2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & 28 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 30 \end{vmatrix} \quad r_4 : r_4 - 4r_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 46 \end{vmatrix} = 1 \, (-2) \cdot 1 \cdot 46$$

Ασκήσεις. (α) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ (β) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

(γ) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 5 & 9 & 8 & 5 \end{vmatrix}$ (δ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & 8 & 8 & 0 \\ 9 & 6 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

Ορισμός. Αντίστροφος πίνακας. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

A^{-1} A-αντίστροφος $\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow}$ $A\cdot A^{-1} = I_n = A^{-1}\cdot A$, $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Θεώρημα. Κριτήριο αντιστρεψιμότητας (ή μη-ιδιάζοντος πίνακα).
Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

A αντιστρέψιμος πίνακας (μη-ιδιάζων) πίνακας $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$. (μοναδικός).

Ορισμός. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$Adj(A)$ A-συμπληρωματικός (ή προσαρτημένος) πίνακας $\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow}$

$Adj(A) = (A_{ij})^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. (προσαρτημένος είναι ο ανάστρ. των αλγ. συμπλημ.)

Θεώρημα. Ισχύει

$$A\cdot Adj(A) = Adj(A)\cdot A = \det(A)\cdot I_n, \quad A\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

Πόρισμα. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος (μη-ιδιάζων) πίνακας τότε $|A| \neq 0$, οπότε

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A).$$ (υπολογισμός αντιστρόφου μέσω του προσαρτημένου πίνακα).

Πόρισμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}_{2\times 2}$, τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta \neq \beta\gamma.$$

Εναλλακτικά $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = I_2$, δίνει $x = \frac{\delta}{|A|}$, $y = -\beta/|A|$, $z = -\gamma/|A|$, $w = \alpha/|A|$

Θεώρημα. Ισχύουν. Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$ • $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(A^{k})^{-1} = (A^{-1})^{k} := A^{-k}$, $k \in \mathbb{Z}$. • $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

Θεώρημα. Έστω A αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε με γραμμο-πράξεις ανάγεται σε μοναδιαίο. (ή πράξεις-στηλών). Δηλ. ο ανηγμ. κλιμ. του A είναι I_n

Παράδειγμα.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 := r_1 + r_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ r_2 := r_3 \\ r_3 := r_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ r_3 := r_3 - 2r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ r_3 := r_3/(-3) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 := r_1 - 2r_3 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim I_3.$$

Ισχύει για εύρεση ορίζουσας: Μέθοδος τριγωνοποίησης $\rightarrow$ ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας.

Παράδειγμα. Εύρεση αντιστρόφου του

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Υπολογισμός της ορίζουσας: Κανόνας του Sarrus ή τριγωνοποίηση πίνακα με επιτρεπτές γραμμο-πράξεις (ή πράξεις στηλών), ή με ανάπτυγμα υποορίζουσων κατά γραμμή ή στήλη.

Με γραμμο-πράξεις (ή πράξεις στηλών) δημιουργούμε μηδενικά στοιχεία σε γραμμές ή στήλες για ευκολία στον υπολογισμό του αναπτύγματος.
Π.χ.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{r_3 := r_3 - 2r_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1)^{3+1} |M_{31}| = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2+1 = -1 \neq 0.$$

Άρα A μη-ιδιάζον.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} |M_{12}| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$
$$A_{13} = (-1)^{1+3} |M_{13}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} |M_{21}| = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} |M_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$
$$A_{23} = (-1)^{2+3} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$A_{31} = (-1)^{1+3} |M_{31}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} |M_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$
$$A_{32} = (-1)^{3+2} |M_{32}| = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{Άρα } A^{-1} = 1/|A| \, Adj(A).$$

Παράδειγμα. Εύρεση αντιστρόφου με τη μέθοδο του προσαρτημένου πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{matrix} \quad \text{(κανόνας Sharrus)}$$

Δηλ. $|A| = 1\cdot 1\cdot 1 + 2(-2)(-2) + (-1)\cdot 1\cdot(-1)$
$- (-2)\cdot 1\,(-1) - (-1)(-2)\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 2 = 4 \neq 0 \quad (\exists A^{-1})$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-1)(-2) = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -[1-(-2)(-2)] = 3.$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}|M_{13}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}|M_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}|M_{32}| = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}|M_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Άρα $A^{-1} = 1/|A| \cdot Adj(A)$, όπου

$$Adj(A) = (A_{ij})^T_{3\times 3} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T, \text{ δηλ.}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & -3/4 \\ 3/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -3/4 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

Επαληθεύεται ότι $A \cdot A^{-1} = I_3$.