ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ – Μέθοδος Επαυξημένου Πίνακα Gauss

Ορισμός. Στοιχειώδεις ή επιτρεπτές γραμμοπράξεις πινάκων.
Έστω $A=(a_{ij})=(\bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n) \in \mathbb{R}^{m\times n}$

(α) Μετασχηματισμός αντιμετάθεσης γραμμής.

$$A=(\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_i \cdots \bar{a}_j \cdots \bar{a}_n)^T \sim (\bar{a}_1\ \bar{a} \cdots \bar{a}_j\ \bar{a}_i \cdots a_n)^T$$

(b) Μετασχηματισμός πολλαπλάσιας γραμμής.

$$A=(\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \dots \bar{a}_j \dots \bar{a}_n)^T \sim (\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \dots \lambda\bar{a}_j \dots \bar{a}_n)^T,\quad \lambda\in\mathbb{R}^*.$$

(γ) Μετασχηματισμός προσθαφαίρεση γραμμής με πολλαπλάσιο άλλης γραμμής

$$A=(\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_i \cdots \bar{a}_j \cdots \bar{a}_n)^T \sim (\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_i+\lambda\bar{a}_j \cdots \bar{a}_j \cdots \bar{a}_n)^T$$

Οι πίνακες που μετασχηματίζονται στοιχειωδώς καλούνται γραμμο-ισοδύναμοι.

Ένα γραμμικό σύστημα είναι πάντα ισοδύναμο με το γραμμικό σύστημα $A\bar{x}=b$ το οποίο έχει πίνακα γραμμοισοδύναμο με τον επαυξημένο πίνακα $(A\,|\,\bar{b})$ αυτού (δηλ. όταν ισχύουν οι παραπάνω μετασχηματισμοί στον πίνακα $(A\,|\,\bar{b})$).

ΣΓΕ $\sum_{k=1}^{m} a_{ik}x_k = y_k$, $k=1,2,\dots,m$. $\Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}$, $A=(a_{ij})$ $\bar{b}=(b_1 \dots b_n)^T$

$\bar{x}=(x_1,x_2,\dots,x_k)^T$.

Ισχύει ότι κάθε πίνακας ανάγεται γραμμοισοδύναμα σε rref με πεπερασμένους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς. Σε τετραγωνικό πίνακα $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ενός $A\bar{x}=\bar{b}$ το ΣΓΕ λύνεται στον $I_n\bar{x}=\bar{b}$.

Παράδειγμα.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y + z = 1 \\ x - 3y + z = 2 \\ 3x - 2y + 2z = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow A x = \bar{b} := (1,2,3)^T, \ \bar{x} = (x,y,z)^T \text{ και}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3}.$$

Μέθοδος επαυξημένου πίνακα Gauss.

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 := r_2 \\ r_2 := r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2 := r_2 - 2r_1 \\ r_3 := r_3 - 3r_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 7 & -1 & -3 \end{array}\right) r_2 := r_2/5 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/5 & -3/5 \\ 0 & 7 & -1 & -3 \end{array}\right) r_3 := r_3 - 7r_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 2/5 & 6/5 \end{array}\right) r_3 := r_3 \cdot 5/2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 := r_1 - r_3 \\ r_2 := r_2 + 1/5\, r_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) r_1 := r_1 + 3r_2 \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$= \left| I_3 \mid \bar{x} \right|$$

Παρατήρηση. Μπορούμε πάντα για ευκολία να μεταβαίνουμε στο ΣΓΕ όταν σχηματίζουμε ένα άνω τριγωνικό πίνακα και εκτελώντας "Προς τα πίσω απαλοιφή" ("backward ellimination") να λύνουμε άμεσα το σύστημα.

Σύμφωνα με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - 3y + z = 2 \\ 3x - 2y + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + z = 2 & \\ 2x - y + z = 1 & (r_2 := r_2 - 2r_1) \\ 3x - 2y + 2z = 3 & (r_3 := r_3 - 3r_1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 3y + z = 2 & \\ 5y - z = -3 & (r_2 := r_2/5) \\ 7y - z = -3 & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + z = 2 & \\ y - z/5 = -3/5 & \\ 7y - z = -3 & (r_3 := r_3 - 7r_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 3y + z = 2 & \\ y - \frac{1}{5}z = -3/5 & \\ \frac{2}{5}z = 6/5 & (r_3 := r_3 \cdot 5/2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + z = 2 & (r_1 := r_1 - r_3) \quad (*) \\ y - \frac{1}{5}z = -3/5 & (r_2 := r_2 + \frac{1}{5}r_3) \Rightarrow \\ z = 3 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y = -1 & (r_1 := r_1 + 3r_2) \\ y = 0 & \\ z = 3 & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 3. \end{cases}$$

(*) Εναλλακτικά: προς τα πίσω απαλοιφή (ή προς τα πίσω αντικατάσταση)

$$\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ y - \frac{1}{5}z = -3/5 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow y - \frac{3}{5} = -3/5 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = -1 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 3. \end{cases}$$

Παράδειγμα.

$$\left\{\begin{array}{l} x+3y-2z=5 \\ 4x-y+3z=7 \\ 2x-7y+7z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}, \quad \bar{x}=(x,y,z)^T, \quad \bar{b}=(5,7,4)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & -7 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Έχουμε $(A\,|\,\bar{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & -7 & 7 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ r_2:=r_2+4r_1 \\ r_3:=r_3+2r_1 \end{array}$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -13 & 11 & 13 \\ 0 & -13 & 11 & -6 \end{array}\right)_{r_3=r_3-r_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 13 & -2 & 5 \\ 0 & -13 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)^{(*)}$$

Αλλά η r_3 αντιστοιχεί στην γραμμική εξίσωση $0x+0y+0z=7$ (άτοπο), οπότε το ΣΓΕ είναι αδύνατο.

Εάν αντιστοιχούσε στο $0x+0y+0z=0$, το ΣΓΕ είναι αόριστο, οπότε γράφοντας το ΣΓΕ λύνουμε ως προς τους κύριους αγνώστους (που αντιστοιχούν στους αγνώστους των κύριων στοιχείων των συντ/στών.

Έχουμε τότε $\left\{\begin{array}{l} x+13y-2z=-2 \\ 0-13y+11z=-13 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2-13y+2z \\ -13y=-13-11z \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2-13-11z+2z \\ y=1+\frac{11}{13}z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=x(z) \\ y=y(z), \ z\in\mathbb{R}. \end{array}\right.$$

(Γενικά μεταβαίνουμε στο ΣΓΕ μετά την τριγωνοποίηση του A, βλ. (*)).

Παράδειγμα.

$$\left\{\begin{array}{l} x-4y+z+w=1 \\ x-3y+z+7w=2 \\ 3x-14y+3z-9w=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}:=(1,2,1)^T,\quad \bar{x}=(x,y,z,w)$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 7 \\ 3 & -14 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$A|\bar{b}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & -14 & 3 & -9 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ r_2:=r_2-r_1 \\ r_3:=r_3-3r_1 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -12 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ r_3:=r_3+2r_2 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad (\text{αόριστο ΣΓΕ})$$

Έχουμε το ΣΓΕ (αόριστο)

$$\left\{\begin{array}{l} x-4y+z+w=1 \\ y+6w=1 \Rightarrow y=1-6w \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1-w-z+4(1-6w)$$

$$\Rightarrow x=x(z,w)=5-z-25w,\quad z,w\in\mathbb{R}$$

Άρα $\bar{x}=(x,y,z,w)=(5-z-25w,\ 1-6w,\ z,\ w)^T,\quad z,w\in\mathbb{R}$

Παράδειγμα.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+2y+3z-w &=& -1 \\ \quad -y+z &=& -1 \\ -2x-7y-3z+2w &=& 2 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}:=(-1,-1,2)^T$$

$$\bar{x}=(x,y,z,w)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -7 & -3 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

$$(A\,|\,\bar{b})=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -7 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad r_3:=r_3+2r_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad r_3:=r_3+3r_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \text{(αδύνατο ΣΓΕ)}$$

Παράδειγμα.

$$\left\{\begin{array}{l} x+4y+3z=1 \\ 2x+5y+4z=4 \\ x-3y-2z=5 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}:=(1,4,5)^T, \quad \bar{x}=(x,y,z)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$(A\,|\,\bar{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2:=r_2-2r_1 \\ r_3:=r_3-r_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array}\right) r_2:=-1/3\, r_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array}\right) r_3:=r_3+7r_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & -2/3 \end{array}\right)$$

Άρα έχουμε το ΣΓΕ

$$\left\{\begin{array}{l} x+4y+3z=1 \\ y+2/3\,z=-2/3 \\ -\frac{1}{3}z=-2/3 \Rightarrow z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow y=-2 \Bigg\} \; x=3.$$

Οπότε $\bar{x}=(x,y,z)^T=(3,-2,2)^T$ (μοναδική λύση).

Παράδειγμα.

$$\left.\begin{cases} x+2y-z+3w+t=2 \\ 2x+4y-2z+6w+3t=6 \\ -x-2y+z-w+3t=4 \end{cases}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b},\ \bar{x}=(x,y,z,w,t)^T,\ \bar{b}=(2,6,4)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 5}$$

$$(A|\bar{b})=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2 := r_2 - 2r_1 \\ r_3 := r_3 + r_1 \end{array} \sim \dots \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=3 \\ w=-1 \\ t=2 \end{cases} \Rightarrow x=x(y,z)=3-2y+z,\quad y,z\in\mathbb{R}$$

Άρα $\bar{x}=(x,y,z,w,t)^T=(3-2y+z,y,z,-1,2)^T,\ y,z\in\mathbb{R}.$

$$=\begin{pmatrix} 3-2y+z \\ y \\ z \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad y,z\in\mathbb{R}.$$

Παράδειγμα.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-3z=4 \\ x+3y+z=11 \\ 2x+5y-4z=13. \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}, \quad \bar{x}=(x,y,z)^T, \quad \bar{b}=(4,11,13)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & -4 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2:=r_2-r_1 \\ r_3:=r_3-2r_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1:=r_1-2r_2 \\ r_3:=r_3-r_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -11 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \quad r_3:=-r_3/2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -11 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (*) \\ r_1:=r_1+11r_3 \\ r_2=r_2-4r_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ο τελικός κλιμακωτός πίνακας αντιστοιχεί στο ΣΓΕ με μοναδική λύση $\bar{x}=(x,y,z)^T=(1,3,1)^T$.

Επίσης από το τριγωνικό κλιμακωτό πίνακα (*) αντιστοιχεί το ΣΓΕ

$$\left\{\begin{array}{l} x-11z=-10 \\ y+4z=7 \\ z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=3 \\ z=1 \end{array}\right. \quad \text{(με προς τα πίσω απαλοιφή).}$$

Παράδειγμα.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-2z=0 \\ 10x-10y+2z=0 \\ x+8y-7z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b},\ \bar{x}=(x,y,z)^T,\ \bar{b}=\bar{0}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 10 & -10 & 2 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$(A\,|\,\bar{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 10 & -10 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1:=r_3 \\ r_2=r_2/2 \\ r_3:=r_1 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 0 \\ 5 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2:=r_2-5r_1 \\ r_3:=r_3-2r_1 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 0 \\ 0 & -45 & 36 & 0 \\ 0 & -15 & 12 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2:=-r_2/45 \\ r_3:=r_3/3 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1:=r_1-8r_2 \\ \\ r_3:=r_3+5r_2 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3/5 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Άρα $A\bar{x}=\bar{b}$ αόριστο με ΣΓΕ $\left\{\begin{array}{l} x-(3/5)z=0 \\ y-(4/5)z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=(3/5)x \\ y=(4/5)z \end{array}\right.$

Άρα $\bar{x}=(x,y,z)^T=\left(\frac{3}{5}z, \frac{4}{5}z, z\right)^T$.

Παράδειγμα.

$$\left.\begin{aligned} x+y+2z&=9\\ 2x+4y-3z&=1\\ 3x+6y-5z&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b},\ \bar{x}=(x,y,z)^T,\ \bar{b}=(9,1,0)^T.$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$(A|\bar{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9\\ 3 & 4 & -3 & 0\\ 2 & 6 & -5 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2:=r_2-3r_1\\ r_3:=r_3-2r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9\\ 0 & 2 & -7 & -17\\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right) r_2:=r_2/2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9\\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2\\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right) r_3:=r_3-3r_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9\\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2\\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{array}\right)^{(*)} r_3:=-r_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11/2 & 35/2\\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2\\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) r_1:=r_1-r_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11/2 & 35/2\\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2\\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1:=r_1-11/2\, r_3\\ r_2:=r_2+7/2\, r_3 \end{array} \sim (I_3 \,|\, \bar{x})$$

όπου $\bar{x}=(1,2,3)^T$.

Εναλλακτικά από (*) έχουμε $(A'|b')$, $A'\in \mathbb{R}^{3\times 3}_{U}$ με προς τα πίσω απαλοιφή (backward elimination) το αντίστοιχο ΣΓΕ δίνει

$$\left\{\begin{aligned} x+\tfrac{11}{2}z&=35/2\\ y-7/2\,z&=-17/2\\ z&=3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x&=1\\ y&=2\\ z&=3. \end{aligned}\right.$$

Παράδειγμα.

$$\left\{\begin{array}{l} x-y+z+w=1 \\ 2x+2z-w=2 \\ 5x-y+5z-w=5 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b}, \quad \bar{x}=(x,y,z,w)^T, \quad \bar{b}=(1,2,5)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Έστω
$$(A\,|\,\bar{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 5 & -1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2 := r_2 - 2r_1 \\ r_3 := r_3 - 5r_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{(*)}{=} (A'\,|\,\bar{b}'), \quad A' \in \mathbb{R}^{3\times 5}$$

Ο παραπάνω κλιμακωμένος πίνακας αντιστοιχεί στο ΣΓΕ 2×4

$$\left\{\begin{array}{l} x-y+z-w=1 \\ 2x-3w=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1-z+\frac{1}{2}w \\ y = -3/2\,w \end{array}\right. , \quad z,w \in \mathbb{R}.$$ (παραμετρική λύση)

Άρα το αρχικό ΣΓΕ είναι αόριστο, οπότε

$$\bar{x}=(x,y,z,w)^T = \begin{pmatrix} 1-z+\frac{1}{2}w \\ -\frac{3}{2}w \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -z & 1/2\,w \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2}w \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}$$

στήλη σταθ. όρων

στήλη z

στήλη w

Άρα $\bar{x}=(x,y,z,w)^T = (1\,0\,0\,0)^T + z(-1,0,1,0)^T + w(1/2,-3/2,0,1)^T$.

Εναλλακτικά, εάν συνεχίσουμε τις γραμμο-πράξεις από το (*) παίρνουμε

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{r_2 := r_2/2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) r_1 := r_1 + r_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A'' \,|\, \bar{b}''), \; A'' \in \mathbb{R}^{3\times 5}_{rref}.$$

Ο παραπάνω επαυξημένος ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας αντιστοιχεί στο ΣΓΕ 2×4

$$\begin{cases} x + z - 1/2\, w = 1 \\ y - 3/2\, w = 0 \end{cases}$$

και με προς τα πίσω απαλοιφή (backward ellimination) παίρνουμε την παραμετρική λύση του αόριστου ΣΓΕ

$$\begin{cases} x = 1 - z + \frac{1}{2} w, & z \in \mathbb{R} \\ y = -\frac{3}{2} w & w \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Παράδειγμα.

$$\left\{\begin{array}{l} -x+y+z=0 \\ x+y=1 \\ y-2z=-1 \\ x+y+2z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b},\ \bar{x}=(x,y,z)^T,\ \bar{b}=(0,1,-1,2)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

$$(A\mid\bar{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ r_2:=r_2+r_1 \\ \\ r_4:=r_4+r_1 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ r_3:=r_3-2r_2 \\ r_4:=r_4-r_2 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ r_4:=r_4-r_3 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A'\mid\bar{b}'),\ A'\in\mathbb{R}^{4\times 4}_{\upsilon}$$

Ο παραπάνω επαυξημένος κλιμακωτός πίνακας (άνω τριγωνικός) δίνει ΣΓΕ

$$\left\{\begin{array}{l} -x+y+z=0 \\ y-2z=-1,\quad 5z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=4/5 \\ y=1/5,\ z=3/5 \end{array}\right.$$ (μοναδική λύση).

Παράδειγμα

$$\left\{\begin{array}{l} x+3y+4z=8 \\ 2x+4y+2z=10 \\ 4x+12y+16z=32 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b},\quad \bar{x}=(x,y,z)^T,\ \bar{b}=(8,10,32)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 12 & 16 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$(A|\bar{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 2 & 10 \\ 4 & 12 & 16 & 32 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2:=r_2-2r_1 \\ r_3:=r_3-4r_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A'|\bar{b}'),\quad A'\in\mathbb{R}^{3\times 4}$$

Ο παραπάνω επαυξημένος πίνακας είναι κλιμακωτός με μία μηδενική γραμμή, και άρα το αντίστοιχο αρχικό ΣΓΕ είναι αόριστο. Επίσης είναι άνω τριγωνικός. Η παραμετρική λύση λαμβάνεται από το αντίστοιχο ΣΓΕ του επαυξημένου πίνακα με προς τα πίσω απαλοιφή. Έχουμε λοιπόν,

$$\left\{\begin{array}{l} x+3y+4z=8 \\ -2y-6z=-6 \\ 0=0 \end{array}\right\} \quad y+3z=3 \Rightarrow y=3-3z \Big\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+3(3-3z)=8-4z \Rightarrow x=-1+5z$$

και άρα $\bar{x}=(x,y,z)^T=(5z-1,\ 3-3z,\ z)^T$, $z\in\mathbb{R}$, οπότε

$$\bar{x}=\begin{pmatrix} -1+5z \\ 3-3z \\ 0+z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},\quad z\in\mathbb{R}\ \text{(παραμετρική λύση)}.$$

Παράδειγμα.

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 5z = 1 \\ (a-4)y + \quad = 1 \\ 6z + 8z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x} = \bar{b},\ x = (x,y,z)^T,\ \bar{b} = (1,1,1)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & a-4 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 3},\ a \in \mathbb{R}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & a-4 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 8 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2 := r_3 \\ r_3 := r_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & a-4 & 1 & 1 \end{array}\right) r_2 := r_2/6$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1/6 \\ 0 & a-4 & 1 & 1 \end{array}\right) r_3 := r_3 - (a-4)r_2 \quad (a \neq 4)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{4}{3}(a-4) & 1 - \frac{1}{6}(a-4) \end{array}\right) = (A' | \bar{b}'),\ A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

Ο παραπάνω επαυξημένος τριγωνικός και κλιμακωτός πίνακας δεν έχει μηδενική γραμμή, και άρα το αρχικό ΓΣΕ είναι επιλύσιμο και η μοναδική λύση (για $a \neq 4$) βρίσκεται από το αντίστοιχο ΓΣΕ του τριγωνικού πίνακα $(A'|\bar{b}')$ με προς τα πίσω απαλοιφή και άρα

$$z = 1/8,\quad y = \frac{1}{6} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{8}\right) = 0,\quad \text{οπότε } (x,y,z)^T = (3/8, 0, 1/8)^T$$

(μοναδική λύση για $a \neq 4$)

(B) Έστω $\alpha = 4$. Τότε

$$(A|\bar{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 8 & 1 \end{array}\right) \underset{\Gamma_3 := \Gamma_2}{\overset{\Gamma_2 := \Gamma_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

κ.αι ο παρακάτω τριγωνικός γραμμικό σύστημα συνάμα είναι ΣΓΕ

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 5z = 1 \\ 6y + 8z = 1 \\ z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -7/6 \Bigg\} \Rightarrow x = 8/3 ,$$

δηλ. $\bar{x} = (x, y, z)^T = \left(\frac{8}{3}, -7/6, 1\right)^T$ (μοναδική λύση).

Παράδειγμα.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+az=3 \\ x+ay+3z=2 \end{cases} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b},\ \bar{x}=(x,y,z)^T,\ \bar{b}=(1,3,2)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3},\ a\in\mathbb{R}$$

$$(A|\bar{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} r_2:=r_2-2r_1 \\ r_3:=r_3-r_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 1 \end{array}\right) r_3:=r_3-(a-1)r_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & -a^2-a+6 & 2-a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & -(a+3)(a-2) & 2-a \end{array}\right)$$

Ο παραπάνω άνω-τριγωνικός επαυξημένος πίνακας είναι επιλύσιμος, δηλ. έχει μια μοναδική λύση αν και μόνο αν $a\neq 2$ καθώς αντιστοιχεί στο ΣΓΕ

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+2)z=1 \\ -(a+3)(a-2)=2-a \Rightarrow z=1/(3-a) \end{cases} \Big\}\ y=1-3a \Big\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1+z-y=3a+1/(3-a) \quad (\text{μοναδική λύση})$$

(B) Έστω $a=2$. Τότε ΣΓΕ αόριστο καθώς $(A|\bar{b})\sim(A'|\bar{b}')$ με μηδενική γραμμή

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+4z=1 \Rightarrow y=1-4z,\ z\in\mathbb{R} \\ 0=0 \end{cases} \Bigg\} \Rightarrow x=5z$$

και άρα $\bar{x}=(x,y,z)^T=(5z,\ 1-4z,\ z)^T,\ z\in\mathbb{R}$.

(Γ) Έστω $\alpha = -3$, τότε το ΣΓΕ είναι

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + z = 1 \\ 0 = 9 - (-3) \neq 0 \end{cases}$$

(άτοπο), οπότε ΣΓΕ αδύνατο με $\bar{x} \in \emptyset$.

Παράδειγμα.

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=0 \\ x+y+az=0 \\ x+y+2z=0 \end{array}\right\} \quad A\bar{x}=\bar{b}, \ \bar{x}=(x,y,z)^T, \ \bar{b}=\bar{0}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3}, \quad a\in\mathbb{R}.$$

$$(A|\bar{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2:=r_2-r_1 \\ r_3:=r_3-r_1 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)_{r_3:=r_3-2r_2} \sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a & 0 \end{array}\right)$$

Το αντίστοιχο ΣΓΕ δίνει

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=0 \\ -y+(a-1)z=0 \\ (2-a)z=0 \end{array}\right.$$

(Α) Έστω $a\neq 2$, τότε $x=y=z=0$, δηλ. $\bar{x}=\bar{0}$ μοναδική λύση.

(Β) Έστω $a:=2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y+z=0 \\ -y+z=0 \\ 0z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2z+z=0 \\ y=z \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x}=(x,y,z)^T=(-3z,z,z)^T, \ z\in\mathbb{R}.$ (παραμετρική λύση)

οπότε το ΣΓΕ είναι αόριστο.

Παράδειγμα.

$$\left\{\begin{array}{l} -2z + 7w = 12 \\ 2x + 4y - 10z + 6w + 12t = 28 \\ 2x + 4y - 5z + 6w - 5t = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x} = \bar{b}\,, \quad \bar{x} = (x,y,z,w,t)^T$$

$$\bar{b} = (12, 28, -1)^T.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(A\,|\,\bar{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} r_1 := r_2 \\ r_2 := r_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right) \quad r_1 := r_1/2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right) \quad r_3 := r_3 - 2r_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array}\right) (*) \quad r_2 := -r_2/2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} r_1 := r_1 + 5r_2 \\ r_3 := r_3 - 5r_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \; r_3 := 2r_3 \; \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

με τον επαυξημένο πίνακα να αντιστοιχεί στο ΣΓΕ

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+3w=7 \\ z-\frac{7}{2}t=-6 \\ t=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=x(y,w)=7-2y-3w \\ z=1 \\ t=2 \end{array}\right.$$

οπότε $\bar{x}=(x,y,z,w,t)^T=(7-2y-3w,y,1,w,2)^T$.

Εναλλακτικά (*) είναι $(A'|\bar{b}')$ με $A'\in\mathbb{R}^{3\times 3}_{u}$, οπότε το αντίστοιχο ΣΓΕ είναι

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y-5z+3w+6t=14 \\ -2z \quad 7t=-6 \\ 5z \quad -17t=-29 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z=1 \\ t=2. \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \bar{x}=(x,y,z,w,z,t)=(7-2y-3w,y,1,w,2)^T.$

Παράδειγμα.

$$\left\{\begin{array}{l} -2x+2y+3z-3w+t=-4 \\ 3x-3y-z+4w+t=5 \\ x-y+2z-2w+3t=2 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{b},\ \bar{x}=(x,y,z,w,t)^T$$

$$\bar{b}=(-4,5,2)^T.$$

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 5}$$

$$(A|\bar{b})=\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 2 & 3 & -3 & 1 & -4 \\ 3 & -3 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1:=r_3 \\ \\ r_3:=r_1 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 3 & -3 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2=r_2-3r_1 \\ \\ r_3=r_3+2r_1 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & 7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2:=r_3 \\ r_3:=r_2 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & -8 & -1 \end{array}\right) r_3:=r_3+r_2$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2:=r_2/7 \\ r_3:=-r_3 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) r_1:=r_1-2r_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

με τον παραπάνω επαυξημένο πίνακα να αντιστοιχεί στο ΣΓΕ

$$\left\{\begin{array}{l} x - y \qquad\quad + t = 2 \\ \qquad z - w + t = 0 \\ \qquad\qquad -t = -1 \Rightarrow t = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y = 1 \\ z - w = -1 \\ z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x = y + 1 & , y \in \mathbb{R}, \\ z = w - 1 & w \in \mathbb{R}, \\ t = 1. & \end{array}\right.$$

Άρα $\bar{x} = (x, y, z, w, t)^T = (y+1, y, w-1, w, 1)^T, \ y, w \in \mathbb{R}$

$= (a+1, a, b-1, b, 1)^T, \ a, b \in \mathbb{R}.$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & +a & \\ & +a & \\ -1 & & +b \\ & & +b \\ 1 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R}$$

στήλη σταθ. όρων

στήλη του a

στήλη του b