Ορισμός. Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

A, B όμοιοι πίνακες $\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow}$ $B = PAP^{-1}$, $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ μη-ιδιάζον πίνακας

(ή ισοδύναμα εάν $PB = A\cdot P$

Πρόταση. Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ όμοιοι πίνακες. Τότε

$$\varphi_A = \varphi_B, \text{ δηλ. } \sigma(A) = \sigma(B) \quad (\text{ίδιες ιδιοτιμές}).$$

όπου φ_A A-χαρακτηριστικό πολ., φ_B B-χαρακτ. πολυων.

Ορισμός. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

A διαγωνιοποιήσιμος πίνακας $\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow}$ A, D όμοιοι πίνακες $D \in \mathbb{R}^{n\times n}_{diag}$

Πρόταση. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ πίνακας n ιδιοδιανυσμάτων

A διαγωνιοποιήσιμος $\Leftrightarrow$ $\{\bar{u}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ σύνολο γραμμικά ανεξάρτ. δ.

όπου $P = (\bar{u}_1\ \bar{u}_2 \dots \bar{u}_n)$. Ισχύει $D = P^{-1}\cdot A \cdot P$, όπου $D = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$
με $\bar{u}_i$ A-ιδιοδιάνυσμα λ_i-ιδιοτιμής.

Πόρισμα. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Εάν $|\sigma(A)| = n$ (διακεκριμένες n ιδιοτιμές) τότε A διαγωνιοποιήσιμος.

Πόρισμα. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ διαγωνιοποιήσιμος με $D = P^{-1}A\cdot P$ (όπου P ο πίνακας των n ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν σε διακριτές ιδιοτιμές)
Τότε,

$$A^k = (PD\cdot P^{-1})(PDP^{-1})\cdots(P\cdot D\cdot P^{-1}) = P\cdot D^k\cdot P^{-1}.$$

Παράδειγμα. Έστω $\bar{u}_1 = (1,1,1)^T$, $\bar{u}_2 = (1,1,0)$, $\bar{u}_3 = (1,0,-1)^T$ Α-ιδιοδιανύσματα λ_i-ιδιοτιμής, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -2$.

Έχω P πίνακα ιδιοδιανυσμάτων $P = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

από όπου $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ισχύει $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = diag(3, 0, -2) = P^{-1} \cdot A \cdot P$, ή

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$. Έχουμε ότι $\lambda = 1$ Α-ιδιοτιμή με διπλή αλγεβρική πολλαπλότητα με αντίστοιχο ιδιοχώρο E_1 με $\dim(E_1) = 1$ (γεωμ. πολ.) (μονοπαραμετρικός ιδιοχώρος). Άρα $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ μη-διαγωνοποιήσιμος.

Παράδειγμα. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Έχουμε Α-ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ (τριπλή αλγεβρική πολλαπλότητα με E_1 ιδιοχώρο με $\dim(E_1) = 2$ (γεωμετρική πολλαπλότητα). Άρα A μη-διαγωνοποιήσιμος

Παράδειγμα Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Έχουμε $\lambda_1 = 1$ A-ιδιοτιμή με ιδιοχώρο $E_1 = L(\{(1,1,0)\})$, δηλ. $\dim E_1 = 1$ (γεωμετρική πολλαπλότητα). Επίσης $\lambda_2 = 5$ A-ιδιοτιμή με ιδιοχώρο $E_2 = L(\{(-1,1,0)^T, (0,0,1)^T\})$ με $\dim E_2 = 2$ (αλγ. πολλαπλότητα). Ωστόσο, $\{(1,1,0)^T, (-1,1,0)^T, (0,0,1)^T\} \subset \mathbb{R}^{3\times 1}$ σύνολο γραμμικά ανεξ. διαν. Άρα A διαγωνοποιήσιμος με πίνακα P ιδιοδιανυσμάτων

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad D = \mathrm{diag}(1,0,5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Εναλλακτικά, A διαγωνοποιήσιμος, καθώς

$$A \cdot P = P \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(ισχύς της διαγωνοποίησης δίχως υπολογισμό του P^{-1}).

Παράδειγμα. Έστω $A=\begin{pmatrix}0&-1\\2&3\end{pmatrix}_{2\times2}$

Έχουμε $\lambda_1=1$ A-ιδιοτιμή (απλή αλγεβρ. πολλαπλ.) με ιδιοχώρο $E_1=L(\{(-1,1)^T\})$ με $\dim E_1=1$ (γεωμ. πολλαπλότητα) και $\lambda_2=2$ A-ιδιοτιμή με ιδιοχώρο $E_2=L(\{(1,-2)^T\})$ και $\dim E_2=1$ (γεωμ. πολλαπλότητα)

Άρα A διαγωνιοποιήσιμος καθώς $\lambda_1\neq\lambda_2$ (διακεκριμένες ιδιοτιμές)

Έστω P ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων με $A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-2\end{pmatrix}$.

Ούτως A διαγωνιοποιήσιμος καθώς $P^{-1}\cdot A\cdot P = D = \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$

Για τον υπολογισμό του $A^4 = P\cdot D^4\cdot P^{-1} = P\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&2^4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&-1\\-1&-1\end{pmatrix}$, δηλ.

$$A^4 = \begin{pmatrix}2-2^4 & 1-2^4\\ -2+2^5 & -1+2^5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-16 & 1-16\\ -2+32 & -1+32\end{pmatrix}.$$

Θεώρημα. Cayley-Hamilton.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ισχύει ότι

$$p_A(A) = A^n + b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} + \dots + b_1 A + b_0 I_n = O_{n\times n}, \quad \text{όπου}$$

p_A A-χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$, $x \in \mathbb{R}$.

Δηλαδή, ο πίνακας A επαληθεύει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, οπότε και μπορούμε να γράψουμε $p_A(A) = O_{n\times n}$.

Σημείωση. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και p_A A-χαρακτηριστικό πολυώνυμο.
Έστω $0 \in \sigma(A)$, δηλ. ο 0 δεν είναι μια A-ιδιοτιμή, τότε $b_0 \neq 0$, οπότε και $|A| \neq 0$, δηλ. A μη-ιδιάζων με $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, και ισχύει

$$A^n + b_{n-1}A^{n-1} + \dots + b_1 A + b_0 I_n = O,$$

και άρα

$$b_0 I_n = -A^n - b_{n-1}A^{n-1} - \dots - b_1 A \iff$$

$$A^{-1} = \frac{1}{b_0}\left(-A^{n-1} - b_{n-1}A^{n-2} - \dots - b_2 A - b_1 I_n\right).$$

Παράδειγμα. Έστω

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Έστω p_A A-χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Έχουμε $p_A(x)=x^3-2x^2-x+2$, $x\in\mathbb{C}$. Εφόσον $p_A(0)=2\neq 0$, τότε $0\notin \sigma(A)$ (0 μη-ιδιοτιμή), οπότε $|A|\neq 0$, δηλ. A μη-ιδιάζον, δηλ. $A^{-1}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$. Από το Θεώρημα Cayley-Hamilton ισχύει ότι $\varphi_A(A)=O_{3\times 3}$, δηλ.

$$A^3-2A^2-A+2I_3=O_{3\times 3},$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας με A^{-1}, έχουμε

$$A^{-1}=\frac{1}{2}(-A^2+2A+I_3)$$

Παρόμοια, πολλαπλασιάζοντας με A^{-2}, λαμβάνουμε

$$A^{-2}=\frac{1}{2}(-A+2I_3+A^{-1})=\frac{1}{2}\left[-A+2I_3+\frac{1}{2}(-A^2+2A+I_3)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(-A+2I_3-\frac{1}{2}A^2+A+\frac{1}{2}I_3\right)=-\frac{1}{2}A^2+\frac{5}{4}I_3).$$

Παράδειγμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Έστω p_A A-χαρακτηριστικό πολυώνυμο, δηλ. $p_A(\lambda) = |A-\lambda I_2| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$, ή

$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Επειδή $p(0) = -2 \neq 0$, τότε $0 \notin \sigma(A)$ και έτσι $|A| \neq 0$ (A μη ιδιάζων ή $A^{-1} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$).

Σύμφωνα με το θεώρημα Cayley-Hamilton, $p(A) = O_{2\times 2}$, δηλ.

$$A^2 - 5A - 2I_2 = O_{2\times 2} \Leftrightarrow A(A-5I_2) = 2I_2 \text{ , οπότε}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A-5I_2) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4&2\\3&-1\end{pmatrix}$$

Παράδειγμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

Έστω φ_A A-χαρακτηριστικό πολυώνυμο, δηλ. $\varphi_A(\lambda) = (-1)^3 |A - \lambda I_3|$, $\lambda \in \mathbb{C}$, δηλ.

$$\varphi_A(\lambda) = - \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 3 \\ 4 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 12\lambda - 6, \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Επειδή $\varphi(0) = -6 \neq 0$, τότε $0 \notin \sigma(A)$ και $|A| \neq 0$, οπότε $A^{-1} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
Άρα από το Θεώρημα Cayley-Hamilton, έχουμε $\varphi(A) = O_{3\times 3}$, δηλ.

$$A^3 - 3A^2 - 12A - 6I_3 = O_{3\times 3}, \text{ δηλ } A(A^2 - 3A - 12I_3) = 6I_3, \text{ οπότε}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}(A^2 - 3A - 12I_3)$$

$$= \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 12\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 9 & 2 & 8 \\ 12 & 4 & 10 \\ 18 & 2 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 6 & -3 & 9 \\ 12 & 3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & -5/6 & 1/6 \\ 1 & -1/6 & -1/6 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

Έστω p_A A-χαρακτηριστικό πολυώνυμο, δηλ. $p_A(\lambda) = |A - \lambda I_2|$, $\lambda \in \mathbb{C}$, ή

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1, \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Επειδή $p(0) = 1 \neq 0$, έχουμε ότι $0 \notin \sigma(A)$ και $|A| \neq 0$, οπότε $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Άρα, με εφαρμογή του Θεωρήματος Cayley-Hamilton, έχουμε $p(A) = O_2$ ή

$$A^2 + I_2 = O_2, \ \text{δηλ.} \ A^{-2} = -I_2.$$

Για τον υπολογισμό των $A^6 - A^{-2}$ έχουμε

$$A^6 - A^{-2} = (A^2)^3 - A^{-2} = (-I_2)^3 - (-I_2)^{-1} = -I_2 + I_2 = O_2$$

Εναλλακτικά, εάν λ A-ιδιοτιμή, δηλ. $p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$
με τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα να δίνουν πίνακα ιδιοδιανυσμάτων

$$P = |\bar{u}_1 \ \bar{u}_2| = \begin{vmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

τότε επειδή A διαγωνοποιήσιμος, έχουμε $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Τότε

$$A^6 = PD^6 \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2i & 1/2 \\ -1/2i & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-2} = PD^{-2}P^{-1} = PD^{-2}P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \text{οπότε}$$

$$A^6 - A^{-2} = O_2.$$

Παράδειγμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

Έστω p_A A-χαρακτηριστικό πολυώνυμο, δηλ. $p_A(\lambda) = (-1)^3 |A - \lambda I_3|$, $\lambda \in \mathbb{C}$, δηλ.

$$p_A(\lambda) = - \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^1 (\lambda - 1)^2, \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Έστω λ A-ιδιοτιμή, δηλ. $p_A(\lambda) = 0$ και έχουμε $\lambda_1 = 0$ (διπλή ιδιοτιμή) και $\lambda_2 = 1$ (απλή ιδιοτιμή)

Έστω $\bar{u}_1$ A-ιδιοδιάνυσμα λ_1-ιδιοτιμής, τότε $(A - 0 I_3)\bar{u}_1 = \bar{0}$, $\bar{u}_1 = (x, y, z)^T$, ή

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0}, \text{ δηλ.}$$

$$\left.\begin{cases} x + 1/2\, y - \frac{1}{2} z = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow z = 0 \text{ και } y = y(x) = -2x,\ x \in \mathbb{R}, \text{ οπότε}$$

$\bar{u}_1 = (x, y, z)^T = (x, -2x, 0)^T = x(1, -2, 0)^T$, $x \in \mathbb{R}$ και άρα ο ιδιοχώρος $E_1 = L(\{(1, -2, 0)^T\})$ με $\dim E_1 = 1$ (γεωμ. πολλαπλότητα) $= 1$ (αλγεβρ. πολλαπλότητα).

Έστω $\bar{u}_2$ A-ιδιοδιάνυσμα λ_2-ιδιοτιμής, δηλ. $(A-1I_3)\bar{u}_2=\bar{0}$, $\bar{u}_2=(x,y,z)^T$, δηλ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\bar{0}$$, δηλ.

$$\left.\begin{cases} 1/2\,y-1/2\,z=0 \\ 2x=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow x=0,\ y=y(z)=z,\ z\in\mathbb{R}$$, δηλ.

$\bar{u}_2=(x,y,z)^T=(0,z,z)^T=z(0,1,1)^T$, $z\in\mathbb{R}^*$.

Άρα E_2 λ_2-ιδιοχώρος, δηλ. $E_2=L(\{(0,1,1)^T\})$ με $\dim(E_2)=1$ (γεωμ. πολ.) $=1\neq 2$ (αλγ. πολλαπλότητα)

Άρα A μη-διαγωνιοποιήσιμος.

Εναλλακτικά, επειδή $\lambda_1=0$, δηλ. $\lambda_1=0\in\sigma(A)$, τότε A μη-διαγωνιοποιήσιμος.

Παράδειγμα. $A=\begin{pmatrix}-1&0\\3&1\end{pmatrix}$

Έστω p_A A-χαρακτηριστικό πολυώνυμο, δηλ. $p_A(x)=|A-x\cdot I_2|, x\in\mathbb{C}$.

Έστω λ A-ιδιοτιμή, δηλ. $p_A(\lambda)=0$, ή $\begin{vmatrix}-1-\lambda&0\\3&1-\lambda\end{vmatrix}=0$, ή

$$p_A(\lambda)=(\lambda+1)^1(\lambda-1)^1=0, \text{ δηλ. } \lambda\in\{-1,1\}=\sigma(A)$$

Εξάλλου επειδή $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}_L$, έχουμε άμεσα ότι $\operatorname{diag}A=\sigma(A)=\{-1,1\}$.

Έστω $\bar{u}_1$ λ_1-ιδιοτιμή, $\lambda_1=1$, έχουμε $(A-1I_2)\bar{u}_1=\bar{0}$, $\bar{u}_1=(x,y)^T$, δηλ.

$$\begin{pmatrix}-2&0\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\bar{0}, \text{ οπότε } x=0 \text{ και } y\in\mathbb{R}.$$

Άρα $\bar{u}_1=(x,y)^T=(0,y)^T=y(0,1)^T, y\in\mathbb{R}^*$, οπότε ο ιδιοχώρος του $\lambda_1=1$

$E_1=L(\{(0,1)^T\})$ με $\dim E_1=1$ (γεωμ. πολλαπλότητα) $=1$ (αλγ. πολλαπλ.)

Έστω $\bar{u}_2$ A-ιδιοδιάνυσμα λ_2-ιδιοτιμής, με $\lambda_2=-1$, έχουμε $(A+I_2)\bar{u}_2=0$, $\bar{u}_2=(x,y)^T$, δηλ.

$$\begin{pmatrix}0&0\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\bar{0} \Rightarrow x=x(y)=-\frac{2}{3}y, \ y\in\mathbb{R}, \text{ οπότε}$$

$\bar{u}_2=(x,y)=(-2/3y, y)^T=y(-2/3,1)^T, y\in\mathbb{R}^*$, οπότε ο ιδιοχώρος του $\lambda_2=-1$

$E_2=L(\{(-2/3,1)^T\})$ με $\dim E_2=1$ (γεωμ. πολλαπλότητα $=1$ (αλγ. πολλαπλ.)

Άρα ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων είναι $P=\begin{pmatrix}-2/3&0\\1&1\end{pmatrix}$ και επειδή $|P|\neq 0$
έχουμε $\{(-2/3,1),(0,1)\}$ σύνολο γραμμικά ανεξ. διανυσμάτων και άρα
A διαγωνιοποιήσιμος.

Η διαγωνιοποίηση του A είναι είναι τότε

$$P\cdot D\cdot P^{-1} = A, \quad \text{με } P^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } D = diag(-1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Έχουμε $A^{\nu} = P\cdot D^{\nu}\cdot P^{-1}$, με $D^{\nu} = \begin{pmatrix} (-1)^{\nu} & 0 \\ 0 & 1^{\nu} \end{pmatrix}$, οπότε $A^{2k} = I_2$ και

$D^{2k+1} = D := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$.

Άρα $A^{2k} = P\cdot I_2\cdot P^{-1} = I_2$, $k\in\mathbb{N}$, και $A^{2k+1} = P\cdot D\cdot P^{-1} = A$, $k\in\mathbb{N}$.

Για τον υπολογισμό του $I_2 + A + A^2 + \dots + A^{1002} = 501\cdot A + 502\, I_2$, δηλ.

$$I_2 + A + A^2 + \dots + A^{1002} = 501\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 502\cdot I_2$$

$$= \begin{pmatrix} -501+502 & 0 \\ 3\cdot 501 & 501+502 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1503 & 1003 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα. Έστω $A=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}_{2\times 2}$.

Έστω p_A A-χαρακτηριστικό πολυώνυμο., δηλ. $p_A(x)=|A-x\cdot I_2|$, $x\in\mathbb{C}$.

Έστω λ A-ιδιοτιμή, δηλ. $p_A(\lambda)=0$, ή $\begin{vmatrix}1-\lambda&0\\3&1-\lambda\end{vmatrix}=0$, ή $(1-\lambda)^2=0$

δηλ. $\lambda\in\sigma(A)=\{-1,1\}$. Εξ άλλου, επειδή $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}_L$, έχουμε $\sigma(A)=\{-1,1\}$.

Έστω $\bar{u}_1$ A-ιδιοδιάνυσμα λ_1-ιδιοτιμής, $\lambda_1:=1$, έχουμε $(A-1I_2)\cdot\bar{u}_2=\bar{0}$, δηλ.

$$\begin{pmatrix}1-1&0\\3&1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\bar{0},\quad \bar{u}_1=(x,y)^T,\ \text{ή}\ \begin{pmatrix}0&0\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\bar{0}\ \text{ή}$$

$$\begin{cases}3x=0\\0=0\end{cases}\Rightarrow x=0,\ y\in\mathbb{R},\ \text{δηλ.}$$

$\bar{u}_1=(x,y)=(0,y)^T=y(0,1)^T$, $y\in\mathbb{R}^*$, οπότε ο ιδιοχώρος για $\lambda_1=1$ είναι $E_1=L(\{(0,1)^T\})$ με $\dim E_1=1$ (γεωμ. πολλαπλ.) $\neq 2$ (αλγεβρ. πολλαπλ.), και άρα A μη-διαγωνιοποιήσιμος.

Παράδειγμα.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Έστω φ_A A-χαρακτηριστικό πολυώνυμο, έχουμε $\varphi_A(x) = |A - xI_3|$, $x \in \mathbb{C}$.
Έστω λ A-ιδιοτιμή, δηλ. $\varphi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow |A - \lambda I_3| = 0$, τότε

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \Gamma_1 := \Gamma_1 + (5-\lambda)\Gamma_2 \\ \\ \Gamma_3 := \Gamma_3 + 3\Gamma_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda^2 - 9\lambda + 14 & 4 - 2\lambda \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 6 - 3\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} \lambda^2 - 9\lambda + 14 & 4 - 2\lambda \\ 6 - 3\lambda & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 14) - (4-2\lambda)(6-3\lambda)$$

$$= -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2, \ \lambda \in \mathbb{C}, \text{ οπότε } \sigma(A) = \{1, 2\}$$

με $\lambda_1 = 1$ (μονή) και $\lambda_2 = 2$ (διπλή) ιδιοτιμή.

Έστω $\bar{u}_1$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_1 = 1$ ιδιοτιμής, έχουμε $(A - 1\cdot I_3)\bar{u}_1 = \bar{o}$ και με χρήση της μεθόδου Gauss για τον πίνακα $A - I_3$ (του ΟΣΓΕ), έχουμε

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \\ -6 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Gamma_2 := \Gamma_2 + \frac{3}{2}\Gamma_1 \\ \\ \Gamma_3 := \Gamma_3 + 3/2\,\Gamma_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \Gamma_3 := \Gamma_3 - \frac{\Gamma_2}{3} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{ref} \cap \mathbb{R}^{3\times 3}_{U}, \text{ οπότε το ΟΣΓΕ δίνει}$$

$$\left\{ \begin{aligned} 4x - y &= -3z \\ y &= z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{u}_1 = (x, y, z)^T = (-\tfrac{1}{2}z, z, z)^T = z(-1/2, 1, 1)^T, \ z \in \mathbb{R}$$

Έστω $\bar{u}_2=(x,y,z)^T$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_2=2$ -ιδιοτιμής, έχουμε $(A-2I_3)\bar{u}_2=\bar{0}$
και με χρήση της μεθόδου Gauss για τον πίνακα $(A-2I_3)^T$ του ΟΣΓΕ), έχουμε

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -6 & 2 & -6 \\ -6 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2:=r_2-2r_1 \\ r_3:=r_3-2r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ οπότε το ΟΣΓΕ γίνεται

$$3x-y+3z=0, \text{ δηλ. } y=y(x,z)=3x+3z, \ x,z\in\mathbb{R}, \text{ οπότε}$$

$$\bar{u}_2=(x,y,z)^T=(x,3x+3z,z)^T=\begin{pmatrix} x \\ 3x+3z \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ 3x \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 3z \\ z \end{pmatrix}$$
$$=x(1,3,0)^T+z(0,3,1)^T, \quad y,z\in\mathbb{R}.$$

Εναλλακτικά, το ΟΣΓΕ $(A-2I_3)\bar{u}_2=\bar{0}$, είναι για $z:=1$

$$\begin{Bmatrix} 3x-y+3z=0 \\ -6x+2y-6z=0 \\ -6x+2y-6z=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 3x-y=-3 \\ -6x+2y=6 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 3x-y=-3 \\ -3x+y=3 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3x-y=-3, \text{ δηλ. } y=y(x)=-3-3x, \ x\in\mathbb{R}, \text{ οπότε}$$

$\bar{u}_2=(x,y,z)=(x,-3-3x,1)^T, \ x\in\mathbb{R}.$

Έστω E_2 A-ιδιοχώρος λ_2-ιδιοτιμής είναι $E_2=L(\{(1,3,0)^T,(0,3,1)^T\})$
με $\dim E_2=2$ γεωμετρική πολλαπλότητα ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα
καθώς $(1,3,0)^T$ και $(0,3,1)$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Επίσης,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} r_2:=r_2-3r_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{r_3:=r_3-\frac{1}{3}r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 2}_{\text{ref}}.$$

Επειδή οι γεωμετρικές πολλαπλότητες των 2 ιδιοτιμών είναι ίσες με τις αντίστοιχες αλγεβρικές πολλαπλότητες, ο A θα είναι διαγωνιοποιήσιμος με πίνακα ιδιοδιανυσμάτων

$$P = (\bar{u}_1, \bar{u}_2', \bar{u}_2'') = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

όπου $u_2' := (1,3,0)^T$ και $\bar{u}_2'' = (0,3,1)^T$.

Επίσης, ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος καθώς $|P| \neq 0$, οπότε $P^{-1} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Η διαγωνιοποίηση του A δίνεται από τη σχέση

$$PAP^{-1} = D, \quad D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

Έστω p_A A-χαρακτηριστικό πολυώνυμο, δηλ. $p_A = p_A(x) = |A - xI_3|,\ x\in\mathbb{C}$ ή

Έστω λ A-ιδιοτιμή, δηλ. $p_A(\lambda) = 0,\ \lambda\in\mathbb{C}$, με

$$p_A(\lambda) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)(4-\lambda)+2\right] = -(\lambda-2)^2(\lambda-3)^1,\ \lambda\in\mathbb{C}.$$

Άρα $\sigma(A) = \{2,3\}$ με $\lambda_1 = 2$ διπλή ιδιοτιμή και $\lambda_2 = 3$ απλή ιδιοτιμή

Έστω $\bar{u}_1$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_1 = 2$ ιδιοτιμής, ή $(A - 2I_3)\bar{u}_1 = \bar{0}$, έχουμε

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r_1 := r_1 - r_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

οπότε το αντίστοιχο ΟΣΓΕ είναι $\begin{cases} x = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2z,\ z\in\mathbb{R}$

και άρα $\bar{u}_1 = (x,y,z)^T = (0, 2z, z)^T = z(0,2,1),\ z\in\mathbb{R}$

Έστω E_1 A-ιδιοχώρος λ_2-ιδιοτιμής με $E_1 = L(\{(0,2,1)^T\})$.

Επειδή $\dim E_1 = 1$ (γεωμετρική πολλαπλότητα) $\neq 2$ (αλγεβρική πολλαπλ.) τότε A μη-διαγωνιοποιήσιμος.

Έστω $\bar{u}_2$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_2 = 3$ -ιδιοτιμής, δηλ. $(A-3I_3)\bar{u}_2 = \bar{o}$. Έχουμε

$$A-3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2 := r_3 \\ r_3 := r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}_{r_3 := r_3 + r_1}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}_{r_3 := r_3 - 2r_2} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

οπότε το αντίστοιχο ΟΣΓΕ δίνει: $-x = 0$, $-y+z = 0$, δηλ.

$$\bar{u}_2 = (x,y,z)^T = (0,z,z)^T = z(0,1,1)^T$$

Έστω E_2 A-ιδιοχώρος λ_2-ιδιοτιμής, δηλ. $E_2 = L(\{(0,1,1)^T\})$ με $\dim E_1 = 1$ (γεωμετρική πολλαπλ.) $= 1$ (αλγεβρ. πολλαπλότητα).

Παράδειγμα Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο. $\varphi_A = \varphi_A(\lambda) = |A - \lambda I_2|,\ \lambda \in \mathbb{R}$, δηλ.

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Έστω λ A-ιδιοτιμή, τότε $\varphi_A(\lambda) = 0$, δηλ. $\lambda = 1$ (διπλή πολλαπλ.)

Έστω $\bar{u}$ A-ιδιοδιάνυσμα λ-ιδιοτιμής, δηλ

$$(A - 1 I_2)\bar{u} = \bar{o} \iff \begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 3 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \bar{o}, \text{ ή}$$

$$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \Rightarrow y \in \mathbb{R} \\ 3x + 0y = 0 \Rightarrow x = 0. \end{cases}, \text{ οπότε}$$

$$\bar{u} = (x, y)^T = (0, y)^T = y(0,1)^T,\ y \in \mathbb{R}^*$$

Έχουμε $E = \{x(0,1)^T\}_{x \in \mathbb{R}^*} = L(\{(0,1)^T\})$, με $\dim E = 1$, και άρα ο A δεν διαγωνιοποιείται καθώς η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι 1 (καθώς $(0,1)^T \neq \bar{o}$) ενώ η αλγεβρική πολλαπλότητα είναι $r = 2$

Παράδειγμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi_A = \varphi_A(\lambda) = |A - \lambda I_2|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, δηλ.

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Έστω λ A-ιδιοτιμή, τότε $\varphi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^1(\lambda-1)^1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, δηλ $\lambda \in \{-1, 1\}$.

Έστω $\bar{u}_1$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_1 := -1$ ιδιοτιμής, οπότε

$$(A-(-1)I_2)\bar{u}_1 = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \bar{0}, \text{ δηλ.}$$

$$\left.\begin{aligned} 0x + 0y &= 0 \\ 3x + 2y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = -\tfrac{2}{3}y, \ y \in \mathbb{R}, \text{ οπότε}$$

$$\bar{u}_1 = (x, y)^T = (-\tfrac{2}{3}y, y)^T = y(-2/3, 1)^T, \ y \in \mathbb{R}^*.$$

Έστω $\bar{u}_2$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_2 := 1$ ιδιοτιμής, οπότε

$$(A - 1 I_2)\bar{u}_2 = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \bar{0}, \text{ δηλ.}$$

$$\left.\begin{aligned} -2x &= 0 \\ 3x + 0y &= 0 \end{aligned}\right\} x = 0, \ y \in \mathbb{R}, \text{ οπότε}$$

$$\bar{u}_2 = (x, y)^T = (0, y)^T = y(0, 1)^T, \ y \in \mathbb{R}^*.$$

Πίνακας ιδιοδιανυσμάτων $P=\begin{pmatrix}-2/3 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ με $|P|\neq 0$, οπότε

$\{\bar{u}_1,\bar{u}_2\}\subset \mathbb{R}^2$ σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων, και άρα A είναι διαγωνιοποιήσιμος με διαγωνιοποίηση

$$A=P\cdot D\cdot P^{-1}, \text{ με } D=\operatorname{diag}(-1,1) \text{ και } P^{-1}=-3/2\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -2/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3/2 & 0\\ 3/2 & 1\end{pmatrix}$$

Έχουμε τότε $A^{\nu}=PD^{\nu}P^{-1}$, με $D^{\nu}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{\nu}=\begin{pmatrix}(-1)^{\nu} & 0\\ 0 & 1^{\nu}\end{pmatrix}$, δηλ.

$$D^{\nu}=\begin{cases} I_2, & \nu=2k, \in \mathbb{N}\\ D, & \nu=2k+1 \end{cases}, \quad D=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \text{ οπότε}$$

$$A^{\nu}=\begin{cases} PI_2P^{-1}=I_2, & \nu=2k\\ PDP^{-1}=A, & \nu=2k+1,\ k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

Έχουμε $I+A+A^2+\dots+A^{2004}=1002\cdot A+1003\,I_2$

$$=1002\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}+1003\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1002+1003 & 0\\ 3\cdot 1002 & 1002+1003\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3006 & 2005\end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p_A = p_A(\lambda) = |A - \lambda I_3|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, δηλ.

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 3 \\ 4 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1-\lambda \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 12\lambda - 6, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Επειδή $p(0) = -6 \neq 0$, ο A είναι μη-ιδιάζων.

Από το Θεώρημα Cayley-Hamilton, $p(A) = 0$, δηλ.

$$A^3 - 3A^2 - 12A - 6I_3 = 0 \iff A(A^2 - 3A - 12I_3) = 6I_3, \text{ δηλ.}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 12 I_3\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 9 & 2 & 8 \\ 12 & 4 & 10 \\ 18 & 2 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 6 & -3 & 9 \\ 12 & 3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & -5/6 & 1/6 \\ 1 & -1/6 & -1/6 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα. Έστω $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}_{3\times3}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p_A = p_A(\lambda) = |A-\lambda I_3|$, $\lambda\in\mathbb{R}$, δηλ.

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 4-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 4-\lambda \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)[(4-\lambda)^2-16] - 2(8-2\lambda-8) - 2[8+2(4-\lambda)]$$

$$= \lambda^2(\lambda-9), \lambda\in\mathbb{R}.$$

Έστω λ A-ιδιοδιάνυσμα, τότε $p(\lambda)=0$, δηλ.

$$\lambda^2(\lambda-9)^1 = 0, \text{ δηλ. } \lambda\in\{0,9\}$$

Έστω $\bar{u}_1$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_1:=0$-ιδιοτιμής, τότε

$$(A-0\cdot I_3)\bar{u} = \bar{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0}, \text{ δηλ.}$$

$$\left.\begin{aligned} x+2y-2z&=0 \\ 2x+4y-4z&=0 \\ -2x-4y+4z&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = x(y,z) = -2y+2z,\ y,z\in\mathbb{R}^*$$

Άρα $\bar{u}_1 = (x,y,z)^T = (-2y+2z, y, z)^T = y(-2,1,0)^T + z(2,0,1)^T$, $y,z\in\mathbb{R}^*$.

Ιδιοχώρος $E_1 = \{\bar{u}_1 \in \mathbb{R}^{3\times 1} / A\bar{u}_1 = 0\bar{u}_1\} = \{y(-2,1,0)^T + z(2,0,1)^T\}_{y,z\in\mathbb{R}}$

$= L(\{(-2,1,0)^T, (2,0,1)^T\})$ με $\dim E_1 = 2$

καθώς $\{(2,1,0)^T, (2,0,1)^T\} \subset \mathbb{R}^3$ σύνολο γραμμ. ανεξ. διαν.

Η γεωμετρική πολλαπλότητα του $\lambda_1 := 0$ είναι 2 όπως και η αλγεβρική πολλαπλότητά του.

Έστω $\bar{u}_2$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_2 := 9$-ιδιοτιμής, τότε

$$(A - 9I_3)\bar{u}_2 = \bar{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0}, \text{ δηλ.}$$

$$\begin{cases} -8x + 2y - 2z = 0 \\ 2x - 5y - 4z = 0 \\ -2x - 4y - 5z = 0 \end{cases}$$

Έστω $z := 1$ και επίλυση υπο-συστήματος 2×2 με Cramer για την εύρεση της παραμετρικής λύσης του αόριστου ΟΣΓΕ. Έχουμε,

$$\begin{cases} -8x + 2y = 2 \\ 2x - 5y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A'\bar{x}' = \bar{b}' := (2,4)^T, \ \bar{x} = (x,y) \\ A' = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = 40 - 4 = 36 \neq 0. \end{array}$$

$$D'_x = |\bar{b}' \bar{a}'_2| = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = -10 - 8 = -18$$

$$D'_y = |\bar{a}'_1 \bar{b}'| = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = -36$$

Άρα $x = D'_x / D' = -1/2$, $\quad y = D'_y / D' = -1$, $\quad z = 1$.

Παράδειγμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p_A = p_A(\lambda) = |A - \lambda I_3|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, δηλ.

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda+1)(\lambda-1), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Έστω λ A-ιδιοτιμή $\Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^1(\lambda-1)^1(\lambda+1)^1 = 0$, δηλ. $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$..

Ο A διαγωνιοποιείται καθώς οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες.

Έστω $\bar{u}_1$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_1 := 0$ ιδιοτιμής, τότε

$$(A - 0I_3)\bar{u}_1 = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0}, \text{ δηλ.}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} -x + 1/2\,y - 1/2\,z & = 0 \\ 2x + y & = 0 \\ 2x + y & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -2x \\ x = 1/4\,z, \ z \in \mathbb{R}, \text{ οπότε} \end{array}\right.$$

$$\bar{u}_1 = (x, y, z)^T = (1/4\,z, -2z, z)^T = z(1/4, -2, 1)^T, \ z \in \mathbb{R}.$$

Έστω $\bar{u}_2$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_2 := 1$ ιδιοτιμής, τότε

$$(A - 1I_3)\bar{u}_2 = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0}, \text{ δηλ.}$$

$$\left\{\begin{array}{l} -2x + 1/2\, y - 1/2\, z = 0 \\ 2x = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0,\ y = -z, \text{ οπότε}$$

$$\bar{u}_2 = (x, y, z) = (0, z, z)^T = z(0, 1, 1)^T,\ z \in \mathbb{R}^*$$

Έστω $\bar{u}_3$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_3 := -1$ ιδιοτιμής, τότε

$$[A - (-1)I_3]\bar{u}_3 = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1/2\, y - 1/2\, z = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -z \\ y = z \end{array}\right., \ z \in \mathbb{R}, \text{ οπότε}$$

$$\bar{u}_3 = (x, y, z)^T = (-z, z, z)^T = z(-1, 1, 1)^T,\ z \in \mathbb{R}^*.$$

Ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων είναι

$$P = (\bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3) = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Επίσης $|P| \neq 0$ οπότε A διαγωνιοποιείται με

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

και ισχύει $P^{-1}A\cdot P = \mathrm{diag}(0,1,-1) = D.$

Για $A^{2k+1} = (P\cdot D\cdot P)^{2k+1} = P\ \mathrm{diag}(0,1,-1)^{2k+1}\ P^{-1}$

$$= P\cdot D\cdot P^{-1} = A.$$

Παράδειγμα.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Έστω p_A A-χαρακτηριστικό πολυώνυμο, δηλ. $p_A(x) = |A - xI_3|$, $x \in \mathbb{C}$.

Έστω λ A-ιδιοτιμή, δηλ. $p_A(\lambda) = 0$, ή $|A - \lambda I_3| = 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, ή

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff -\lambda^3 + 5\lambda^2 + \lambda - 5 = 0, \ \lambda \in \mathbb{C}, \text{ ή}$$

$$\lambda(-\lambda^2 + 1) + 5(\lambda^2 - 1) = 0, \text{ ή } (\lambda^2 - 1)(\lambda - 5) = 0, \ \lambda \in \mathbb{C},$$

δηλ. $\lambda \in \sigma(A) = \{(-1, 1, 5)\}$.

Έστω $\bar{u}_1 = (x, y, z)^T$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_1 = -1$ ιδιοτιμής, δηλ.

$$[A - (-1)I_3]\,\bar{u}_1 = \bar{0} \text{ ή } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \bar{u}_1 = \bar{0}, \text{ ή}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

Θέτουμε στο ΟΣΓΕ $x := 1$ και επιλύουμε το αντίστοιχο 2×2 υπο-σύστημα Cramer.

Έχουμε λοιπόν,

$$\left\{\begin{array}{l} y+2z=-2 \\ 4y+2z=-2 \\ y+2z=-2 \end{array}\right. \Rightarrow A'\bar{x}' = \bar{b}' := (-2,-2)^T, \quad \bar{x}' = (y,z)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2} = (\bar{a}'_1, \bar{a}'_2)_{2\times 2}$$

Έχουμε $D' = |A'| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2-8 = -6 \neq 0$, οπότε $\bar{x}' = (y,z)^T$ με $y = D'_y / D'$ και $z = D'_z / D'$, όπου

$$D'_y = |\bar{b}' \; \bar{a}_2| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4+4 = 0$$

$$D'_z = |\bar{a}'_1 \; \bar{b}'| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2+8 = 6.$$

Άρα $\bar{x} = (x,y,z) = (1,0,-1)^T$, οπότε $\bar{x} = \alpha(1,0,-1)^T$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Έστω E_1 A-ιδιοχώρος $\lambda_1 = -1$ ιδιοτιμής, τότε $E_1 = \{\alpha(1,0,-1)^T\}_{\alpha\in\mathbb{R}^*}$, δηλ. $E_1 = L(\{(1,0,-1)^T\})$ με $\dim E_1 = 1$ (γεωμετρική πολλαπλότητα).

Έστω $\bar{u}_2 = (x,y,z)$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_2 := 1$ ιδιοτιμής, δηλ.

$$(A - 1\cdot I_3)\bar{u}_2 = \bar{0}, \text{ ή } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{u}_2 = \bar{0}, \text{ δηλ.}$$

$$\left\{\begin{array}{l} y+2z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \\ 2x+y=0. \end{array}\right. \quad \text{Έστω } x := 1 \Rightarrow y=-2,\ z=1.$$

Άρα $\bar{u}_2=(x,y,z)^T=(1,-2,1)^T$, δηλαδή $\bar{u}_2=\alpha(1,-2,1)^T$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$

Έστω E_2 A-ιδιοχώρος $\lambda_2:=1$ ιδιοτιμής, δηλ. $E_2=\{\alpha(1,-2,1)^T\}_{\alpha\in\mathbb{R}^*}$, άρα $E_2=L(\{(1,-2,1)^T\})$ με $\dim E_2=1$ (γεωμ. πολλαπλότητα)

Έστω $\bar{u}_3=(x,y,z)^T$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_3:=5$ ιδιοτιμής

$$(A-5I_3)\bar{u}_3=\bar{0}, \text{ δηλ. } \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}\bar{u}_2=\bar{0}, \text{ δηλ.}$$

$$\begin{cases} -4x+y+2z=0 \\ 2x-2y+2z=0 \\ 2x+y-4z=0. \end{cases} \quad \text{Θέτουμε } x:=1, \text{ οπότε}$$

$$\begin{cases} y+z=4 \\ -2y+2z=-2 \\ y-4z=-2 \end{cases} \Rightarrow y=2,\ z=1.$$

Άρα $\bar{u}_3=(x,y,z)^T=(1,2,1)^T$, δηλ. $\bar{u}_3=\alpha(1,2,1)$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$.

Έστω E_3 A-ιδιοχώρος $\lambda_3=5$ ιδιοτιμής, δηλ. $E_3=\{\alpha(1,2,1)^T\}_{\alpha\in\mathbb{R}^*}$ ή $E_3=L(\{(1,2,1)^T\})$, με $\dim E_3=1$ (γεωμ. πολλαπλότητα).

Άρα, A διαγωνιοποιήσιμος καθώς οι γεωμετρικές πολλαπλότητες ταυτίζονται με τις αλγεβρικές ιδιοτιμές (απλές ιδιοτιμές) ίσον με 1. Εξάλλου ο A έχει 3 διακριτές ιδιοτιμές). Η διαγωνιοποίηση είναι

$$PAP^{-1}=D=\mathrm{diag}(-1,1,5) \text{ με } P=(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

με $|P|\neq 0$.