

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ 2010  
ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΙΑΤΡΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ

1°

i) Αν  $z = -1 - i$  με  $i = \sqrt{-1}$ , να υπολογιστεί η παράσταση  $z^{1/2}$  και τα αποτελέσματα να γραφούν στην εκθετική και την πολική μορφή. Στη συνέχεια δείξτε ότι  $\tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \left( \frac{1+iz}{1-iz} \right)$  για κάθε  $z \in \mathbb{C}$ .

ii) Να οριστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα του α' είδους. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$$

2°

i) Να γραφεί στη μορφή  $A\vec{x} = \vec{b}$  το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +x_2 & +x_3 = 6 \\ 2x_1 & -x_2 & +4x_3 = 12 \\ -3x_1 & +2x_2 & +2x_3 = -4 \end{array}$$

Δείξτε ότι το παραπάνω σύστημα έχει ακριβώς μια λύση. Στη συνέχεια υπολογίστε τον πίνακα  $AA^T$ .

ii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} x \sin(nx) dx \quad \text{όταν } n = 1, 2, \dots$$

3°

Το πολυώνυμο Legendre  $P_n$  βαθμού  $n$  ορίζεται από τον τύπο

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad \text{για κάθε } x \in [-1, 1] \text{ όταν } n = 1, 2, \dots \text{ και } P_0(x) = 1$$

i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα το πολυώνυμο  $P_3(x)$ . Ποια η μορφή του διαγράμματος;

ii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 P_1(x) P_3(x) dx$$

Αθήνα 30 Ιουνίου 2010