

## Εργασία 3

# ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων  $f(x)$

i)  $\sqrt{3x^2 - 5x + 4}$

vii)  $\ln(x^2 - x - 2)$

ii)  $\tan(\sin 2x)$

viii)  $\cosh \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

iii)  $\frac{x}{|x+3|}$

ix)  $\frac{3x^2 + 4x - 5}{\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{2x^2 - 54}}$

iv)  $\sin^{-1} 3x$

x)  $\coth \frac{x-1}{x+1}$

v)  $\sqrt{\frac{1-x}{(x-2)(x+5)}}$

xi)  $(x+1)^{1/x}$

vi)  $\tan^{-1} 5x$

xii)  $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x$

2. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \ln(\sin 2x)$ . Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού, τιμών και να γίνει το διάγραμμά της.

3. Όμοια της συνάρτησης  $f(x) = \ln(\cos \frac{x}{2})$ .

4. Δείξτε ότι:

i)  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$

ii)  $\sinh(-x) = -\sinh x,$

$$\text{iii) } \sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

$$\text{iv) } \cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y.$$

5. Δείξτε ότι οι αντίστροφες συναρτήσεις των υπερβολικών συναρτήσεων δίνονται από τους τύπους:

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\cosh^{-1} x = \begin{cases} \cosh_+^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ \cosh_-^{-1} x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) \\ (\text{δίτιμη συνάρτηση - προαιρετική}) \end{cases}$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad (\text{προαιρετική}).$$

Σε κάθε περίπτωση να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού των και βάσει αυτού το πεδίο τιμών των υπερβολικών συναρτήσεων.

6. Να εξεταστεί αν είναι περιοδικές οι παρακάτω συναρτήσεις  $f(x)$ , να υπολογιστεί η θεμελιώδης περίοδος  $T$  και να γίνει το διάγραμμα για τις περιοδικές από αυτές στη θεμελιώδη περίοδο

$$\text{i) } \sin 3x \qquad \text{ii) } \sin |x| \qquad \text{iii) } |\sin \omega x|$$

$$\text{iv) } |\cos \omega x| \qquad \text{v) } \cos x^2 \qquad \text{vi) } |\tan 2x|.$$

7. Να γίνει η γραφική παράσταση των παρακάτω περιοδικών συναρτήσεων, όταν ο περιορισμός τους στη θεμελιώδη περίοδο είναι:

$$\text{i) } f(t) = e^{-t} \quad \text{αν } 0 \leq t < \pi,$$

$$\text{ii) } f(t) = 4\pi^2 - t^2 \quad \text{αν } 0 \leq t < 2\pi \quad (\text{προαιρετική}),$$

$$\text{iii) } f(t) = \begin{cases} t & \text{αν } \pi \leq t < 0 \\ 0 & \text{αν } 0 \leq t < \pi, \end{cases}$$

$$\text{iv) } f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{αν } -\pi/2 \leq t < 0 \\ 0 & \text{αν } 0 \leq t < \pi/2, \end{cases}$$

v)  $f(t) = |\sin t|$

vi)  $f(t) = \begin{cases} \pi + t & \text{αν } -\pi \leq t < 0 \\ \pi - t & \text{αν } 0 \leq t < \pi. \end{cases}$

8. Να δειχθεί ότι, αν μία συνάρτηση  $f(t)$  είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο  $T$ , τότε

i)  $f(t) = f(t + kT)$ , όταν  $k \in \mathbb{Z}$ ,

ii) η  $f(kt)$  με  $k \neq 0$  είναι όμοια περιοδική με θεμελιώδη περίοδο  $T/k$ .

9. Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι περιοδικές με περίοδο  $\tau$ , τότε και η συνάρτηση  $h = kf + \lambda g$  όπου  $k, \lambda \in \mathbb{R}$  είναι όμοια περιοδική.