

Εργασία 5

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Να αποδειχθούν οι ιδιότητες των Παραγράφων 5.2.3 και 5.2.6.

2. Δείξτε ότι¹

i) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$

ii) $\sin(-z) = -\sin z,$

iii) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2.$

3. Όμοια ότι²

$$\tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right).$$

4. Δείξτε ότι³

i) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1,$

ii) $\sinh(-z) = -\sinh z,$

iii) $\sinh(z_1 - z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 - \cosh z_1 \sinh z_2.$

¹ Αντικατάσταση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με τις αντίστοιχες εκφράσεις τους.

² Έστω $w = \tan z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} / \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, οπότε γράφοντας $e^{-iz} = 1/e^{iz}$ και λύνοντας ως προς z προκύπτει λογαριθμίζοντας την τελική σχέση η αποδεικτέα.

³ Αντικατάσταση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με τις αντίστοιχες εκφράσεις τους.

5. Όμοια ότι⁴

$$\sinh^{-1} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right)$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$$

με κατάλληλους περιορισμούς στο z .

6. Δείξτε ότι οι $\sin z$, $\tan z$ και $\cot z$ είναι περιττές συναρτήσεις, ενώ η $\cos z$ άρτια συνάρτηση.

7. Να υπολογιστούν τα $\sin^{-1} 2$, $\cos^{-1} i$ και $\sinh^{-1} i$.

8. Δείξτε ότι $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$, $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$ και $\overline{\tan z} = \tan \bar{z}$ για κάθε $z \in \mathcal{C}$ (προαιρετική).

⁴Έστω $w = \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ όπου γράφοντας $e^{-z} = 1/e^z$. Λύνοντας ως προς z και λογαριθμίζοντας προκύπτει τελικά η αποδεικτέα.