ΕΡΓΑΣΙΑ 5 : ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

5.1 Συνάρτηση μιας μεταβλητής

1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x - \ln(x+2)$

   i) να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα σε όλο το πεδίο ορισμού της. Στη συνέχεια να γίνει η γραφική της παράσταση με το MATLAB

   ii) με τον τύπο του Maclaurin, να υπολογιστεί του πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού, που την προσεγγίζει.

i) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι:

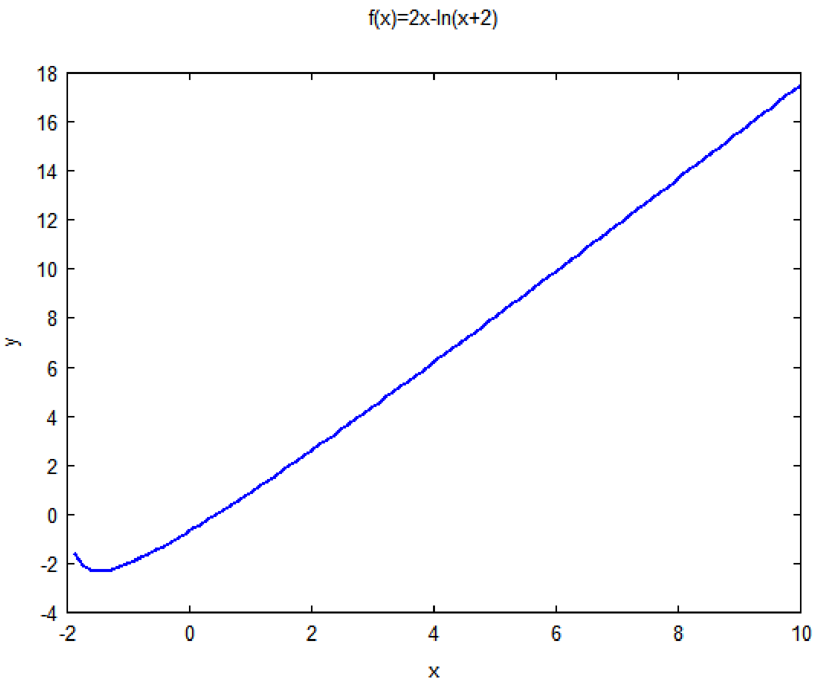
$x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$. Άρα : $D=(-2,+\infty)$.

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{x+2}(x+2)' = 2 - \frac{1}{x+2} = \frac{2x+4-1}{x+2} = \frac{2x+3}{x+2}$$

x	-∞	-2		-3/2		+∞
f'(x)			-	0	+	
f(x)			↘		↗	
				T.E.		

Δηλ. η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$. Στο $x_o = -\frac{3}{2}$ εμφανίζει τοπικό ελάχιστο ίσο με

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right) - \ln\left(-\frac{3}{2}+2\right) = -3 - \ln\frac{1}{2} = -3 - \ln 2^{-1} = -3 + \ln 2$$



ii)

$f(x)=2x-\ln(x+2)$	$f(0)=-\ln 2$
$f'(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$	$f'(0)=\dfrac{3}{2}$
$f^{(2)}(x)=\dfrac{(2x+3)'(x+2)-(2x+3)(x+2)'}{(x+2)^2}=\dfrac{2(x+2)-2x-3}{(x+2)^2}=\dfrac{1}{(x+2)^2}$	$f^{(2)}(0)=\dfrac{1}{4}$
$f^{(3)}(x)=\left[(x+2)^{-2}\right]'=-2(x+2)^{-3}(x+2)'=\dfrac{-2}{(x+2)^3}$	$f^{(3)}(0)=\dfrac{-2}{8}=-\dfrac{1}{4}$

Άρα : $f(x)=f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3$

$$\Leftrightarrow f(x)=-\ln 2+\frac{3}{2}x+\frac{\frac{1}{4}}{2}x^2+\frac{-\frac{1}{4}}{6}x^3$$

$$\Leftrightarrow f(x)=-\ln 2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{24}x^3$$

2. Εφαρμόζοντας τον τύπο του Leibniz να υπολογιστεί η $4^{ης}$ τάξης παράγωγος της συνάρτησης $g(x)=x^2e^{-4x}$

Έστω $f(x)=x^2,\quad h(x)=e^{-4x}$. Τότε :

$f'(x)=2x,\quad h'(x)=-4e^{-4x}$

$f^{(2)}(x)=2,\quad h^{(2)}(x)=16e^{-4x}$

$f^{(3)}(x)=0,\quad h^{(3)}(x)=-64e^{-4x}$

$f^{(4)}(x)=0,\quad h^{(4)}(x)=256e^{-4x}$

Οπότε σύμφωνα με τον τύπο του Leibniz είναι :

$$g^{(4)}(x)=\binom{4}{0}\left(f(x)\right)^{(4)}\cdot h(x)+\binom{4}{1}\left(f(x)\right)^{(3)}\cdot\left(h(x)\right)'+\binom{4}{2}\left(f(x)\right)^{(2)}\cdot\left(h(x)\right)^{(2)}+$$
$$\binom{4}{3}f'(x)\left(h(x)\right)^{(3)}+\binom{4}{4}f(x)\cdot\left(h(x)\right)^{(4)}$$

$$\Leftrightarrow g^{(4)}(x)=\binom{4}{0}\left(x^2\right)^{(4)}e^{-4x}\binom{4}{1}\left(x^2\right)^{(3)}\cdot\left(e^{-4x}\right)'+\binom{4}{2}\left(x^2\right)^{(2)}\cdot\left(e^{-4x}\right)^{(2)}+$$
$$\binom{4}{3}\left(x^2\right)'\left(e^{-4x}\right)^{(3)}+\binom{4}{4}x^2\cdot\left(e^{-4x}\right)^{(4)}$$

$$\Leftrightarrow g^{(4)}(x)=0+0+\frac{4!}{2!2!}\cdot 2\cdot 164e^{-4x}+\frac{4!}{3!1!}2x\left(-64e^{-4x}\right)+1x^2\cdot 256e^{-4x}$$

$$\Leftrightarrow g^{(4)}(x)=\frac{1\cdot\cancel{2}\cdot3\cdot4}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot164e^{-4x}+\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot3}2x\left(-64e^{-4x}\right)+1x^2\cdot256e^{-4x}$$

$$\Leftrightarrow g^{(4)}(x)=12\cdot164e^{-4x}+4\cdot2x\left(-64e^{-4x}\right)+1x^2\cdot256e^{-4x}$$

$$\Leftrightarrow g^{(4)}(x)=192e^{-4x}-512e^{-4x}+256x^2\cdot e^{-4x}$$

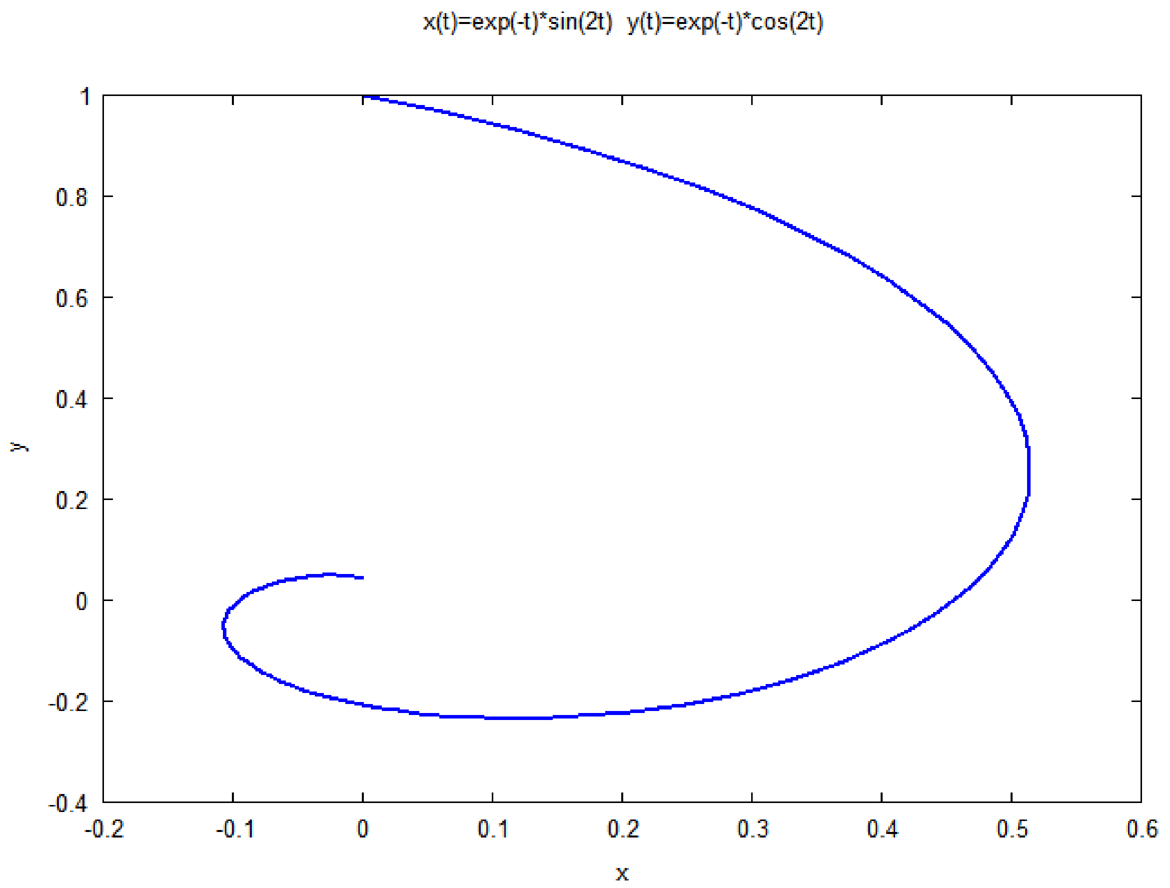
3. Να υπολογιστεί η παράγωγος $dy(x)/dx$ της συνάρτησης με παραμετρική μορφή :

$x(t)=e^{-t}\sin 2t$ $\quad\quad$ $y(t)=e^{-t}\cos 2t$

Στη συνέχεια να γίνει η γραφική της παράσταση με το MATLAB, όταν $t\in[0,\pi]$

$$\frac{dy(x)}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\left(e^{-t}\cos 2t\right)'}{\left(e^{-t}\sin 2t\right)'}=\frac{-e^{-t}\cos 2t-2\sin 2t\cdot e^{-t}}{-e^{-t}\sin 2t+e^{-t}2\cos 2t}=$$

$$=\frac{\cancel{-e^{-t}}\left(\cos 2t+2\sin 2t\right)}{\cancel{-e^{-t}}\left(\sin 2t-2\cos 2t\right)}=\frac{\cos 2t+2\sin 2t}{\sin 2t-2\cos 2t}$$



5.2 Διανυσματική Συνάρτηση

ΑΣΚΗΣΗ

Αν $F(t)=t^2\mathrm{i}-\cos 2t\mathrm{j}+\sin 2t\mathrm{k}$ $\quad G(t)=t\mathrm{i}+\sin 2t\,\mathrm{j}-\cos 2t\,\mathrm{k}$ να υπολογιστούν οι παράγωγοι $\left(F\bullet G\right)'$ και $\left(F\times G\right)'$

Αν $F(t)=t^2\mathrm{i}-\cos 2t\mathrm{j}+\sin 2t\mathrm{k}$ $\quad G(t)=t\mathrm{i}+\sin 2t\,\mathrm{j}-\cos 2t\,\mathrm{k}$ τότε:

$F'(t)=2t\mathrm{i}+2\sin 2t\mathrm{j}+2\cos 2t\mathrm{k}$ $\quad G'(t)=\mathrm{i}+2\cos 2t\,\mathrm{j}+2\sin 2t\,\mathrm{k}$ και

$$
\begin{aligned}
\left(F\bullet G\right)' &= F'\cdot G+F\cdot G' = \\
&=\left(2t\mathrm{i}+2\sin 2t\mathrm{j}+2\cos 2t\mathrm{k}\right)\cdot\left(t\mathrm{i}+\sin 2t\,\mathrm{j}-\cos 2t\,\mathrm{k}\right)+\left(t^2\mathrm{i}-\cos 2t\mathrm{j}+\sin 2t\mathrm{k}\right)\cdot\left(\mathrm{i}+2\cos 2t\,\mathrm{j}+2\sin 2t\,\mathrm{k}\right)\\
&=2t^2+2\sin^2 2t-2\cos^2 2t+t^2-2\cos^2 2t+2\sin^2 2t\\
&=3t^2+4\sin^2 2t-4\cos^2 2t\\
&=3t^2+4(1-\cos^2 2t)-4\cos^2 2t\\
&=3t^2+4-8\cos^2 2t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(F\times G\right)' &= F'\times G+F\times G'\\
&=\left(2t\mathrm{i}+2\sin 2t\mathrm{j}+2\cos 2t\mathrm{k}\right)\times\left(t\mathrm{i}+\sin 2t\,\mathrm{j}-\cos 2t\,\mathrm{k}\right)+\left(t^2\mathrm{i}-\cos 2t\mathrm{j}+\sin 2t\mathrm{k}\right)\times\left(\mathrm{i}+2\cos 2t\,\mathrm{j}+2\sin 2t\,\mathrm{k}\right)\\
&=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2t & 2\sin 2t & 2\cos 2t\\ t & \sin 2t & -\cos 2t\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} i & j & k\\ t^2 & -\cos 2t & \sin 2t\\ 1 & 2\cos 2t & 2\sin 2t\end{vmatrix}=\\
&=i\begin{vmatrix}2\sin 2t & 2\cos 2t\\ \sin 2t & -\cos 2t\end{vmatrix}-j\begin{vmatrix}2t & 2\cos 2t\\ t & -\cos 2t\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix}2t & 2\sin 2t\\ t & \sin 2t\end{vmatrix}+\\
&\quad i\begin{vmatrix}-\cos 2t & \sin 2t\\ 2\cos 2t & 2\sin 2t\end{vmatrix}-j\begin{vmatrix}t^2 & \sin 2t\\ 1 & 2\sin 2t\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix}t^2 & -\cos 2t\\ 1 & 2\cos 2t\end{vmatrix}\\
&=i\left(-2\sin 2t\cos 2t-2\sin 2t\cos 2t\right)-j\left(-2t\cos 2t-2t\cos 2t\right)+k\left(2t\sin 2t-2t\sin 2t\right)+\\
&\quad i\left(-2\cos 2t\sin 2t-2\cos 2t\sin 2t\right)-j\left(2t^2\sin 2t-\sin 2t\right)+k\left(2t^2\cos 2t+\cos 2t\right)\\
&=i\left(-4\sin 2t\cos 2t\right)-j\left(-4t\cos 2t\right)+k\cdot 0+i\left(-4\cos 2t\sin 2t\right)-j\left(2t^2\sin 2t-\sin 2t\right)+k\left(2t^2\cos 2t+\cos 2t\right)\\
&=i\left(-8\sin 2t\cos 2t\right)-j\left(-4t\cos 2t+2t^2\sin 2t-\sin 2t\right)+k\left(2t^2\cos 2t+\cos 2t\right)
\end{aligned}
$$