ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΩΔΙΚΕΣ

2.1 Αριθμητικά συστήματα θέσεως

Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, βασισμένο στα δέκα δάκτυλα των χεριών του ανθρώπου είναι αυτό που χρησιμοποιείται στις καθημερινές συναλλαγές, ώστε να θεωρείται από πολλούς ότι είναι το μοναδικό αριθμητικό σύστημα που υπάρχει. Στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές, χρησιμοποιούνται εκτός από το δεκαδικό και άλλα αριθμητικά συστήματα, όπως το δυαδικό, το δεκαεξαδικό και το οκταδικό. Αυτά τα αριθμητικά συστήματα ανήκουν όπως το δεκαδικό, στα *αριθμητικά συστήματα θέσεως* (*positional number systems*) στα οποία κάθε αριθμός παρίσταται με μία παράθεση ψηφιών, όπου κάθε θέση ψηφίου έχει καθορισμένο βάρος. Η παράσταση ενός αριθμού N σε ένα αριθμητικό σύστημα θέσεως είναι όπως αυτή που δίδεται στην συνέχεια

$$N = \left(a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_1 a_0 . a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-n}\right)_b \tag{2.1}$$

όπου

a_k : τα ψηφία του αριθμού, $0 \le a_k \le b-1$

b : η βάση (radix) του αριθμητικού συστήματος, $b > 1$

k : η τάξη του ψηφίου a_k

m : το πλήθος των ακέραιων ψηφίων του αριθμού

n : το πλήθος των κλασματικών ψηφίων του αριθμού

. : η υποδιαστολή (radix point)

Στις παραστάσεις αριθμών που δεν υπάρχει υποδιαστολή θεωρούμε ότι αυτή βρίσκεται στο δεξιό άκρο τους. Το *βάρος (weight)* του ψηφίου a_j είναι b^j. Η τιμή του αριθμού N με την παράσταση 2.1 προκύπτει από την σχέση:

$$N = a_{m-1}b^{m-1} + a_{m-2}b^{m-2} + \ldots + a_1 b^1 + a_0 b^0 + a_{-1}b^{-1}a_{-2}b^{-2} + \ldots + a_{-n}b^{-n}$$

ή

$$N = \sum_{k=-n}^{m-1} a_k b^k \tag{2.2}$$

Στο *δεκαδικό σύστημα αρίθμησης* (*decimal number system*) η βάση είναι το 10 (b=10), ενώ τα ψηφία που χρησιμοποιούνται είναι από 0 έως 9, δηλαδή τα 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Κάθε αριθμητικό σύστημα θέσεως παίρνει το όνομά του από τη βάση b που χρησιμοποιείται εκφρασμένη στο δεκαδικό σύστημα. Για βάση b = 10 έχουμε το δεκαδικό σύστημα ενώ για b = 2, 8, 16 έχουμε αντίστοιχα το δυαδικό, το οκταδικό και το δεκαεξαδικό σύστημα τα οποία εξετάζονται στη συνέχεια. Στον Πίνακα 2.1 δίδονται τα ψηφία αυτών των αριθμητικών συστημάτων, ενώ στον Πίνακα 2.2 δίδεται παράδειγμα αρίθμησης στα συστήματα αυτά.

Πίνακας 2.1

Ψηφία των βασικών αριθμητικών συστημάτων

Δεκαδικό	Δυαδικό	Οκταδικό	Δεκαεξαδικό
0	0	0	0
1	1	1	1
2		2	2
3		3	3
4		4	4
5		5	5
6		6	6
7		7	7
8			8
9			9
			A
			B
			C
			D
			E
			F

Πίνακας 2.2
Αρίθμηση στα βασικά αριθμητικά συστήματα

Δεκαδικό	Δυαδικό	Οκταδικό	Δεκαεξαδικό
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14
21	10101	25	15
22	10110	26	16
23	10111	27	17
24	11000	30	18
25	11001	31	19
26	11010	32	1A
27	11011	33	1B
28	11100	34	1C
29	11101	35	1D
•	•	•	•
•	•	•	•

2.1.1 Δυαδικό σύστημα

Στο *δυαδικό σύστημα* αρίθμησης (*binary number system*) η βάση είναι το 2, ενώ τα ψηφία του είναι τα 0 και 1. Τα ψηφία αυτά (0 και 1) έχει επικρατήσει να ονομάζονται *bit*. Η ονομασία bit προέρχεται από τη σύντμηση των λέξεων της αγγλικής γλώσσης binary digit (δυαδικό ψηφίο). Η ονομασία *bit* αποδίδεται στα ελληνικά με την ονομασία *ψηφίδα*. Η χρήση δύο ψηφίων για την παράσταση των αριθμών στο δυαδικό σύστημα το κάνει κατάλληλο για χρήση στα ψηφιακά συστήματα.

Με *n* δυαδικά ψηφία μπορούμε να παραστήσουμε μη προσημασμένους δυαδικούς αριθμούς από $\underbrace{00\ldots000}_{n}$ έως $\underbrace{11\ldots111}_{n}$, δηλαδή από 0 έως 2^n-1. Το ψηφίο που βρίσκεται στο δεξί άκρο ενός ακεραίου δυαδικού αριθμού ονομάζεται *λιγότερο σημαντικό* (*δυαδικό*) *ψηφίο* (*Least Significant Bit* ή LSB), ενώ το ψηφίο που βρίσκεται στο αριστερό άκρο του αριθμού ονομάζεται *περισσότερο σημαντικό ψηφίο* (*Most Significant Bit* ή MSB). Οι τιμές των δυαδικών αριθμών στο δεκαδικό σύστημα προκύπτουν από την σχέση 2.2. Στον Πίνακα 2.3 δίδονται οι τιμές ορισμένων δυνάμεων του 2.

Πίνακας 2.3

Τιμές δυνάμεων του 2

n	2^n	n	2^n	n	2^n
0	1	8	256	-1	0.5
1	2	9	512	-2	0.25
2	4	10	1024	-3	0.125
3	8	11	2048	-4	0.0625
4	16	12	4096	-5	0.03125
5	32	13	8192		
6	64	14	16384		
7	128	15	32768		

Παράδειγμα 2.1. Η τιμή του δυαδικού αριθμού 11001100_2 σύμφωνα με την σχέση 2.2 είναι:

$$\begin{aligned}11001100_2 &= 1\cdot 2^7+1\cdot 2^6+0\cdot 2^5+0\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+0\cdot 2^0 = \\ &= 1\cdot 128+1\cdot 64+0\cdot 32+0\cdot 16+1\cdot 8+1\cdot 4+0\cdot 2+0\cdot 1 = \\ &= 128+64+8+4 = \mathbf{204}_{10}\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.2. Η τιμή του δυαδικού αριθμού 0.1001_2 σύμφωνα με την σχέση 2.2 είναι:

$$0.1001_2 = 1\cdot2^{-1}+0\cdot2^{-2}+0\cdot2^{-3}+1\cdot2^{-4} =$$
$$= 1\cdot0.5+0\cdot0.25+0\cdot0.125+1\cdot0.0625 =$$
$$= \mathbf{0.5625_{10}}$$

Λόγω του μεγάλου μήκους, το οποίο μπορεί να έχουν οι δυαδικοί αριθμοί, κατά την απεικόνισή τους κωδικοποιούνται στο οκταδικό και κυρίως στο δεκαεξαδικό σύστημα τα οποία εξετάζονται στη συνέχεια. Η κωδικοποίηση αριθμών του δυαδικού συστήματος στο οκταδικό και στο δεκαεξαδικό σύστημα γίνεται εύκολα λόγω του ότι οι βάσεις των συστημάτων αυτών είναι δυνάμεις του 2 ($8 = 2^3$, $16=2^4$).

2.1.2 Οκταδικό σύστημα

Η βάση του *οκταδικού αριθμητικού συστήματος* (*octal number system*) είναι το 8 (b=8) και τα ψηφία του είναι από 0 έως 7, δηλαδή τα 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Οι τιμές των οκταδικών αριθμών στο δεκαδικό σύστημα προκύπτουν σύμφωνα με την σχέση 2.2.

Παράδειγμα 2.3. Η τιμή του οκταδικού αριθμού 365_8 είναι:

$$365_8 = 3\cdot8^2+6\cdot8^1+5\cdot8^0 = 3\cdot64+6\cdot8+5 = 245_{10}$$

Παράδειγμα 2.4. Η τιμή του οκταδικού αριθμού 0.452_8 είναι

$$0.452_8 = 4\cdot8^1+5\cdot8^{-2}+2\cdot8^{-3} = 4/8+5/8^2+2/8^3=0.58203125_{10}$$

Το οκταδικό σύστημα, λόγω της ευκολίας με την οποία μετατρέπεται σε αυτό το δυαδικό σύστημα, χρησιμοποιείτο παλαιότερα για την κωδικοποίηση των δυαδικών αριθμών. Σήμερα χρησιμοποιείται για την κωδικοποίηση του δυαδικού συστήματος κυρίως το δεκαεξαδικό σύστημα που παρουσιάζει συγκεκριμένα πλεονεκτήματα που αναφέρονται στην συνέχεια.

2.1.3 Δεκαεξαδικό σύστημα

Η βάση του δεκαεξαδικού συστήματος (hexadecimal number system) είναι ο αριθμός 16 (b=16) του δεκαδικού συστήματος και τα ψηφία του είναι τα εξής : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *A, B, C, D, E, F*. Είναι προφανές ότι $A=10_{10}$, $B=11_{10}$, $C=12_{10}$, $D=13_{10}$, $E=14_{10}$, $F=15_{10}$. Οι τιμές των δεκαεξαδικών αριθμών στο δεκαδικό σύστημα προκύπτουν σύμφωνα με τη σχέση 2.2.

Παράδειγμα 2.5. Η τιμή του δεκαεξαδικού αριθμού $72FE.2C_{16}$ είναι σύμφωνα με τη σχέση 2.2:

$$72FE.2C_{16} = 7\cdot16^3+2\cdot16^2+15\cdot16^1+14\cdot16^0+2\cdot16^{-1}+12\cdot16^{-2} =$$
$$= 7\cdot4096+2\cdot256+15\cdot16+14+2/16+12/256=$$

$= 28672+512+240+14+(2 \cdot 16+12)/256 =$
$= 29438.171875_{10}$

Το δεκαεξαδικό σύστημα, λόγω της ευκολίας με την οποία μετατρέπεται σε αυτό το δυαδικό σύστημα χρησιμοποιείται για την κωδικοποίηση των δυαδικών αριθμών. Το δεκαεξαδικό σύστημα έχει επικρατήσει του οκταδικού διότι δίδει συμπαγέστερη κωδικοποίηση των δυαδικών αριθμών, ενώ η απεικόνιση των γραμμάτων που χρησιμοποιούνται για το συμβολισμό κάποιων ψηφίων του δεν αποτελεί πλέον πρόβλημα.

2.2 Μετατροπή παραστάσεων μεταξύ αριθμητικών συστημάτων

Στα ψηφιακά συστήματα χρησιμοποιείται κύρια το δυαδικό σύστημα αρίθμησης, ενώ οι άνθρωποι χρησιμοποιούν το δεκαδικό σύστημα. Λόγω του μεγάλου μήκους το οποίο μπορεί να έχουν οι δυαδικοί αριθμοί χρησιμοποιούνται, όπως προαναφέραμε, για την κωδικοποίησή τους το οκταδικό και κυρίως το δεκαεξαδικό σύστημα. Στη συνέχεια θα εξετασθεί η μετατροπή παραστάσεων αριθμών μεταξύ αυτών των συστημάτων.

2.2.1 Μετατροπή αριθμού από το δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα

Είναι γνωστό ότι οι πραγματικοί αριθμοί έχουν και ακέραιο (integer) και κλασματικό (fractional) μέρος για τα οποία υπάρχουν διαφορετικοί αλγόριθμοι μετατροπής. Στην παράστασή τους στα αριθμητικά συστήματα θέσεως τα δύο αυτά μέρη χωρίζονται με υποδιαστολή.

α) Μετατροπή του ακεραίου μέρους

Η μετατροπή του ακεραίου μέρους ενός αριθμού του δεκαδικού συστήματος στο δυαδικό σύστημα βασίζεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.1. Έστω ο μη προσημασμένος ακέραιος αριθμός N του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης. Ο αντίστοιχος δυαδικός προκύπτει από τα υπόλοιπα των διαδοχικών διαιρέσεων του αριθμού N με το 2.

Απόδειξη. Έστω $d_{n-1}d_{n-2}\ldots d_1 d_0$ η παράσταση του αριθμού N στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης. Είναι γνωστό ότι ισχύει η σχέση $N = d_{n-1}2^{n-1} + d_{n-2}2^{n-2} + \ldots + d_1 2 + d_0$. Ο αλγόριθμος της μετατροπής του αριθμού προκύπτει εύκολα γράφοντας την πιο πάνω σχέση όπως στη συνέχεια. $N = (\ldots(d_{n-1}2 + d_{n-2})2 + \ldots + d_1)2 + d_0$. Με διαίρεση και των δύο μελών της πιο πάνω σχέσης με το δύο προκύπτει ότι το πηλίκο θα είναι $Q_1 = (\ldots(d_{n-1}2 + d_{n-2})2 + \ldots + d_2)2 + d_1$ και υπόλοιπο το $R_1=d_0$. Παρατηρούμε ότι το πηλίκο Q_1 έχει την ίδια μορφή με την αρχική σχέση. Κατά συνέπεια διαδοχικές διαιρέσεις του N με το 2 θα δώσουν διαδοχικά ως υπόλοιπα τα ψηφία του N με πρώτο το λιγότερο σημαντικό ψηφίο.

Σύμφωνα με το θεώρημα 2.1, για να μετατραπεί το ακέραιο μέρος ενός αριθμού του δεκαδικού συστήματος (τα ψηφία αριστερά της υποδιαστολής) στο δυαδικό σύστημα, το διαιρούμε (με αλγόριθμο διαίρεσης ακεραίων) αρχικά με το 2. Η διαίρεση συνεχίζεται με διαιρετέους τα πηλίκα που προκύπτουν μέχρι να λάβουμε πηλίκο 0. Τελικά, το ακέραιο μέρος του δυαδικού αριθμού σχηματίζεται από τα υπόλοιπα των διαιρέσεων, με λιγότερο σημαντικό ψηφίο (LSB) το υπόλοιπο της πρώτης διαίρεσης.

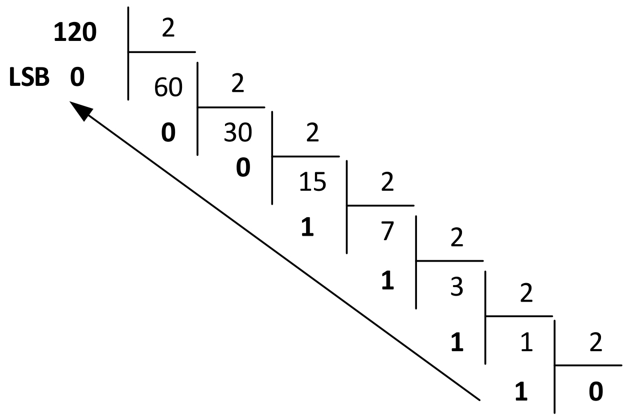
Για την παράσταση ενός μη προσημασμένου ακεραίου αριθμού N ο οποίος δεν είναι δύναμη του 2 στο δυαδικό σύστημα, χρειάζονται $\lceil \log_2 N \rceil$ δυαδικά ψηφία. Με $log_2 n$ συμβολίζεται ο λογάριθμός του αριθμού n ως προς βάση 2. Με $\lceil x \rceil$ συμβολίζεται ο ακέραιος αριθμός που είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον αριθμό x..

Παράδειγμα 2.6. Να μετατραπεί ο αριθμός 120_{10} του δεκαδικού συστήματος στο δυαδικό σύστημα.

Σύμφωνα με το θεώρημα 2.1 η μετατροπή γίνεται όπως στη συνέχεια

$120 = 2\times60+0 \rightarrow 0$ (LSB)
$60 = 2\times30+0 \rightarrow 0$
$30 = 2\times15+0 \rightarrow 0$
$15 = 2\times7+1 \rightarrow 1$
$\mathbf{7} = 2\times3+1 \rightarrow 1$
$3 = 2\times1+1 \rightarrow 1$
$1 = 2\times0+1 \rightarrow 1$ (MSB)

Εναλλακτικά



Τελικά $120_{10} = 1111000_2$

Παράδειγμα 2.7. Να βρεθεί πόσα ψηφία του δυαδικού συστήματος χρειάζονται για να παρασταθεί ο μη προσημασμένος αριθμός 10000 του δεκαδικού συστήματος.

Για την παράσταση του αριθμού 10000 θα χρειαστούν $\lceil \log_2 10000 \rceil$ δυαδικά ψηφία. Έστω $x = \log_2 10000$. Τότε $2^x = 10000$, συνεπώς $\log(2^x) = \log 10000$, ή $x \log 2 = 4$, ή $x = 4/\log 2$. Δηλαδή $\lceil \log_2 10000 \rceil = \lceil 4/\log 2 \rceil = \lceil 4/0.3 \rceil = \lceil 13.3 \rceil =$ = 14. Άρα θα χρειαστούν 14 δυαδικά ψηφία για την αναπαράσταση του αριθμού.

β) Μετατροπή του κλασματικού μέρους

Η μετατροπή του κλασματικού μέρους ενός αριθμού του δεκαδικού συστήματος στο δυαδικό σύστημα, βασίζεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.2. Έστω ο μη προσημασμένος κλασματικός αριθμός N του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης. Ο αντίστοιχος δυαδικός αριθμός προκύπτει από τα ακέραια μέρη των διαδοχικών πολλαπλασιασμών του αριθμού N με το 2.

Απόδειξη. Έστω $0.d_{-1}d_{-2}d_{-3}d_{-4}\ldots$ η δυαδικά αναπαράσταση του αριθμού N. Τότε $N = d_{-1}2^{-1} + d_{-2}2^{-2} + d_{-3}2^{-3} + d_{-4}2^{-4} + \ldots$ και $2N = d_{-1} + d_{-2}2^{-1} + d_{-3}2^{-2} + d_{-4}2^{-3} + \ldots$ Επομένως το d_{-1} είναι το ακέραιο μέρος του πολλαπλασιασμού του αριθμού N με το 2. Έστω $N_1 = d_{-2}2^{-1} + d_{-3}2^{-2} + d_{-4}2^{-3} + \ldots$, η δυαδική του αναπαράσταση θα είναι $0.d_{-2}d_{-3}d_{-4}\ldots$. Με το ίδιο τρόπο προκύπτει ότι το d_{-2} είναι το ακέραιο μέρος του αριθμού που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του N_1 με το 2, …..

Με βάση το θεώρημα 2.2 για να μετατραπεί το κλασματικό μέρος του αριθμού (ψηφία δεξιά της υποδιαστολής) στο δυαδικό σύστημα, το πολλαπλασιάζουμε αρχικά με 2. Το ακέραιο μέρος του αποτελέσματος (0 ή 1) αποτελεί το περισσότερο σημαντικό ψηφίο (MSB) του κλασματικού μέρους του δυαδικού αριθμού. Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε το κλασματικό μέρος πάλι με 2. Το ακέραιο μέρος του αποτελέσματος αποτελεί το επόμενο ψηφίο του δυαδικού αριθμού. Ο διπλασιασμός συνεχίζεται μέχρι το κλασματικό μέρος του αποτελέσματος να γίνει ίσο με μηδέν ή έως το αποτέλεσμα να έχει την επιθυμητή ακρίβεια.

Παράδειγμα 2.8. Μετατροπή του αριθμού 0.8125_{10} του δεκαδικού συστήματος στο δυαδικό.

Σύμφωνα με το θεώρημα 2.2 η μετατροπή γίνεται ως εξής:

$0.8125 \times 2 = 1.625 \rightarrow 1$
$0.625 \times 2 = 1.25 \rightarrow 1$
$0.25 \times 2 = 0.5 \rightarrow 0$
$0.5 \times 2 = 1.0 \rightarrow 1$

Άρα, $0.8125_{10} = 0.1101_2$

Παράδειγμα 2.9. Μετατροπή του αριθμού 125.4375_{10} του δεκαδικού συστήματος στο δυαδικό.

Σύμφωνα με το θεώρημα 2.1 η μετατροπή του ακέραιου μέρους γίνεται ως εξής:

$125 = 2\times62+1 \rightarrow 1$
$62 = 2\times31+0 \rightarrow 0$
$31 = 2\times15+1 \rightarrow 1$
$15 = 2\times7+1 \rightarrow 1$
$7 = 2\times3+1 \rightarrow 1$
$3 = 2\times1+1 \rightarrow 1$
$1 = 2\times0+1 \rightarrow 1$

Άρα,$125_{10} = 1111101_2$

Σύμφωνα με το θεώρημα 2.2 η μετατροπή του κλασματικού μέρους γίνεται ως εξής

$0.4375 \times 2 = 0.8750 \rightarrow 0$
$0.8750 \times 2 = 1.7500 \rightarrow 1$
$0.7500 \times 2 = 1.5000 \rightarrow 1$
$0.5000 \times 2 = 1.0000 \rightarrow 1$
0.0000

Άρα, $0.4375_{10} = 0.0111_2$

Τελικά, $125.4375_{10} = 1111101.0111_2$

2.2.2 Μετατροπή από το δυαδικό στο οκταδικό σύστημα και αντίστροφα

Η μετατροπή ενός αριθμού από το δυαδικό σύστημα στο οκταδικό γίνεται ως εξής. Με αρχή το σημείο της υποδιαστολής χωρίζονται τα ψηφία του ακέραιου και του κλασματικού μέρους του δυαδικού αριθμού σε *ομάδες των τριών ψηφίων*. Κάθε ομάδα αντικαθίσταται από το αντίστοιχο ψηφίο του οκταδικού συστήματος σύμφωνα με τον Πίνακα 2.4. Στην περίπτωση που η τελευταία (δεξιά) ομάδα του κλασματικού μέρους του αριθμού δεν συμπληρώνεται προσθέτουμε στο δεξιό άκρο μηδενικά που, όπως είναι προφανές, δεν αλλάζουν την τιμή του αριθμού.

Ακολουθώντας την αντίστροφη πορεία μπορούμε να μετατρέψουμε έναν αριθμό που είναι εκφρασμένος στο οκταδικό σύστημα στο δυαδικό σύστημα.

Πίνακας 2.4

Αντιστοίχιση των ψηφίων του οκταδικού συστήματος στο δυαδικό σύστημα

Δυαδικό	Οκταδικό
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

Παράδειγμα 2.10. Μετατροπή του δυαδικού αριθμού N = 11001100.1011_2 του δυαδικού συστήματος στο οκταδικό σύστημα.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα χωρίζουμε τα δυαδικά ψηφία σε τριάδες και συμπληρώνουνε την τελευταία τριάδα με μηδενικά $N = \underbrace{011}_{3}\ \underbrace{001}_{1}\ \underbrace{100}_{4}.\underbrace{101}_{5}\ \underbrace{100}_{4}$.

Άρα $N = 314.54_8$ στο οκταδικό σύστημα.

Παράδειγμα 2.11. Να μετατραπεί ο αριθμός $N = 537.5_8$ του οκταδικού συστήματος αρίθμησης στο δυαδικό σύστημα.

Με βάση τα προηγούμενα αντικαθιστούμε κάθε ψηφίο του αριθμού στο οκταδικό σύστημα με τη δυαδική του αναπαράσταση, δηλαδή

$$537.5_8 = \overbrace{101}^{5}\,\overbrace{011}^{3}\,\overbrace{111}^{7}.\overbrace{101}^{5} = 101011111.101_2$$

2.2.3 Μετατροπή από το δυαδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα και αντίστροφα

Η μετατροπή ενός αριθμού από το δυαδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης γίνεται ως εξής. Με αρχή από το σημείο της υποδιαστολής χωρίζουμε τα ψηφία του ακέραιου και του κλασματικού μέρους του δυαδικού αριθμού σε ομάδες των *τεσσάρων ψηφίων* και κάθε ομάδα των τεσσάρων ψηφίων την αντικαθιστούμε με τα αντίστοιχα ψηφία του δεκαεξαδικού συστήματος σύμφωνα με τον Πίνακα 2.5.

Στην περίπτωση που η τελευταία (δεξιά) ομάδα του κλασματικού μέρους δεν συμπληρώνεται, προσθέτουμε στο δεξιό άκρο μηδενικά που, όπως είναι προφανέα, δεν αλλάζουν την τιμή του αριθμού. Ακολουθώντας την αντίστροφη πορεία μπορούμε να μετατρέψουμε έναν αριθμό που είναι εκφρασμένος στο δεκαεξαδικό σύστημα στο δυαδικό σύστημα.

Πίνακας 2.5

Αντιστοίχιση των ψηφίων του δεκαεξαδικού συστήματος στο δυαδικό σύστημα

Δυαδικό	Δεκαεξαδικό
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

Παράδειγμα 2.12. Να μετατραπεί ο αριθμός $N = 11000100.00111_2$ του δυαδικού συστήματος αρίθμησης στο δεκαεξαδικό σύστημα.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα $N = \underbrace{1100}_{C}\,\underbrace{0100}_{4}.\underbrace{0011}_{3}\,\underbrace{1000}_{8}$

Άρα $N = \mathrm{C4.38}_{16}$

Παράδειγμα 2.13. Να μετατραπεί ο αριθμός $N=3AF.4_{16}$ του δεκαεξαδικού συστήματος στο δυαδικό σύστημα.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα αντικαθιστούμε κάθε ψηφίο του δεκαεξαδικού συστήματος με τη δυαδική του αναπαράσταση, δηλαδή

$$N=3AF.4_{16}=\overbrace{0011}^{3}\overbrace{1010}^{A}\overbrace{1111}^{F}.\overbrace{0100}^{4} = 001110101111.0100_2$$

2.2.4 Μετατροπή από το δεκαδικό στο οκταδικό σύστημα

Ένας τρόπος με βάση τον οποίο μπορεί να γίνει η μετατροπή της παράστασης ενός αριθμού από το δεκαδικό στο δεκαεξαδικό, είναι ο αριθμός να μετατραπεί πρώτα στο δυαδικό σύστημα και κατόπιν σύμφωνα με τον αλγόριθμο που περιγράψαμε προηγουμένως στο οκταδικό σύστημα.

Επίσης, μπορεί να γίνει μετατροπή αριθμού από το δεκαδικό στο οκταδικό σύστημα με τρόπο ανάλογο της μετατροπής από το δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα (δηλαδή διαδοχικές διαιρέσεις με το 8 για το ακέραιο μέρος και διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς με το 8 για το κλασματικό μέρος).

Παράδειγμα 2.14. Να μετατραπεί ο αριθμός 125.4375_{10} του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης στο οκταδικό σύστημα.

Α. Με μετατροπή του αριθμού στο δυαδικό και στη συνέχεια στο οκταδικό σύστημα.
Σύμφωνα με το παράδειγμα 2.9 ο αριθμός $125.4375_{10} = 1111101.0111_2$.
Τελικά, $125.4375_{10} = \underbrace{001}_{1}\underbrace{111}_{7}\underbrace{101}_{5}.\underbrace{011}_{3}\underbrace{100}_{4}=175.34_8$

Β. Απ' ευθείας στο οκταδικό σύστημα

Μετατροπή του ακεραίου μέρους

$125 = 8\times15+5 \rightarrow 5$
$15 = 8\times1+7 \rightarrow 7$
$1 = 8\times0+1 \rightarrow 1$

Μετατροπή του κλασματικού μέρους

$0.4375 \times 8 = 3.5 \rightarrow 3$
$0.5 \times 8 = 4.0 \rightarrow 4$
0.0

Τελικά, $125.4375_{10} = 175.34_8$

2.2.5 Μετατροπή από το δεκαδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα

Ανάλογα με τα όσα αναφέρθηκαν για το οκταδικό σύστημα, ένας αριθμός μπορεί να μετατραπεί στο δεκαεξαδικό σύστημα, αφού πρώτα μετατραπεί στο δυαδικό και κατόπιν κατά τα γνωστά στο δεκαεξαδικό.

Επίσης μπορεί να γίνει μετατροπή αριθμού από το δεκαδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα, ανάλογα με την μετατροπή στο δυαδικό, με διαδοχικές διαιρέσεις με 16, για το ακέραιο μέρος και με διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς με το 16 για το κλασματικό μέρος.

Παράδειγμα 2.15. Να μετατραπεί ο αριθμός 125.4375_{10} στο δεκαεξαδικό σύστημα.

Α. Με μετατροπή στο δυαδικό και μετά στο δεκαεξαδικό

Σύμφωνα με το παράδειγμα 2.9 ο αριθμός $125.4375_{10} = 1111101.0111_2$.

Τελικά, $125.4375_{10} = \underbrace{111}_{7}\underbrace{1101}_{D}.\underbrace{0111}_{7} = 7D.7_{16}$

Β. Απ' ευθείας

Μετατροπή του ακεραίου μέρους
$125 = 16\times7+13 \rightarrow 13 \rightarrow D$
$7 = 16\times0+7 \rightarrow 7$

Μετατροπή του κλασματικού μέρους
$0.4375\times16 = 7 \rightarrow 7$
0.0

Τελικά, $125.4375_{10} = 7D.7_{16}$

2.2.6 Μετατροπή από οποιοδήποτε σύστημα στο δεκαδικό

Η μετατροπή αυτή γίνεται με αντικατάσταση των συντελεστών a_k στη σχέση 2.2 με τα αντίστοιχα ψηφία του αριθμού που μετατρέπεται. Επίσης και το b αντικαθίσταται με τη βάση του αντίστοιχου αριθμητικού συστήματος.

Παράδειγμα 2.16. Να μετατραπεί ο αριθμός $N = 10011.01_2$ του δυαδικού συστήματος αρίθμησης στο δεκαδικό σύστημα.

Σύμφωνα με την σχέση 2.2 για b=2 ισχύει

$$\begin{aligned} N &= 1{\cdot}2^4+0{\cdot}2^3+0{\cdot}2^2+1{\cdot}2^1+1{\cdot}2^0+0{\cdot}2^{-1}+1{\cdot}2^{-2} \\ &= 1{\cdot}16+0{\cdot}4+1{\cdot}2+1{\cdot}1+0{\cdot}0.5+0{\cdot}0.25 \\ &= 19.25_{10} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.17. Να μετατραπεί ο αριθμός N=76E$_{16}$ του δεκαεξαδικού συστήματος αρίθμησης στο δεκαδικό σύστημα.

Σύμφωνα με τη σχέση 2.2 για b=16 ισχύει

$$\begin{aligned} N &= 7{\cdot}16^2+F{\cdot}16^1+E{\cdot}16^0 \\ &= 7{\cdot}256+15{\cdot}16+14{\cdot}1 \\ &= 1792+240+14=2046_{10} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.18. Να μετατραπεί ο αριθμός N=765$_8$ του οκταδικού συστήματος αρίθμησης στο δεκαδικό σύστημα.

Σύμφωνα με τη σχέση 2.2 για b=8 ισχύει

$$\begin{aligned} N &= 7{\cdot}8^2+6{\cdot}8^1+5{\cdot}8^0 \\ &= 7{\cdot}64+15{\cdot}8+5{\cdot}1 \\ &= 448+120+5=573_{10} \end{aligned}$$

2.3 Πράξεις στο δυαδικό σύστημα

2.3.1 Πρόσθεση μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών

Η πρόσθεση μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών γίνεται με τρόπο παρόμοιο με αυτόν του δεκαδικού συστήματος. Έστω δύο μη προσημασμένοι δυαδικοί αριθμοί $X = x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_1x_0$ και $Y = y_{n-1}y_{n-2}\cdots y_1y_0$. Για να υπολογίσουμε το άθροισμά τους $S = s_{n-1}s_{n-2}\ldots s_1s_0$ προσθέτουμε τα λιγότερο σημαντικά ψηφία x_0, y_0 τα οποία παράγουν το ψηφίο αθροίσματος s_0 και ένα ψηφίο κρατουμένου εξόδου c_0.

Στην συνέχεια προσθέτουμε τα ψηφία x_1, y_1 και το κρατούμενο c_0 από την προηγούμενη πρόσθεση και παράγεται το ψηφίο αθροίσματος s_1 και το κρατούμενο c_1. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται από αριστερά προς τα δεξιά για τα υπόλοιπα ψηφία. Το c_{n-1} είναι το κρατούμενο εξόδου (c_{out}) της πρόσθεσης των X και Y. Στη συνέχεια συνοψίζεται η πρόσθεση των αριθμών X και Y.

$$
\begin{array}{r}
c_{n-2}\, c_{n-3} \ldots c_1\, c_0 \\
x_{n-1}\, x_{n-2} \ldots x_2\, x_1\, x_0 \\
+\; y_{n-1}\, y_{n-2} \ldots y_2\, y_1\, y_0 \\
\hline
c_{n-1}\, s_{n-1}\, s_{n-2} \ldots s_2\, s_1\, s_0
\end{array}
$$

c_{out}

Για την πρόσθεση των δυαδικών αριθμών *X*, *Y* ισχύει η σχέση

$$X+Y=2^n c_{out}+S.$$

Όπως είναι προφανές η πρόσθεση δύο αριθμών των *n* bit βασίζεται στην πρόσθεση δύο και τριών αριθμών των ενός bit. Η πρόσθεση δύο αριθμών του ενός bit x_i, y_i δίδεται στο σχήμα 2.1. Για την παράσταση του αποτελέσματος απαιτούνται δύο bit s_i, c_i. Το s_i είναι το ψηφίο του αθροίσματος (sum), ενώ c_i είναι το ψηφίο του κρατουμένου (carry). Για τη πρόσθεση των αριθμών του ενός bit ισχύει η σχέση $2c_i+s_i=x_i+y_i$.

x_i	0	0	1	1
$+\ y_i$	+ 0	+ 1	+ 0	+ 1
$c_i\ s_i$	0 0	0 1	0 1	1 0

Σχήμα 2.1. *Πρόσθεση 2 bit*

Για την πρόσθεση πολυψήφιων δυαδικών αριθμών χρησιμοποιείται επίσης η πρόσθεση τριών αριθμών του ενός bit που δίδεται στο σχήμα 2.2, όπου με c_{i-1} συμβολίζεται το κρατούμενο εισόδου από την προηγούμενη πρόσθεση. Η πράξη που εκτελείται περιγράφεται από την σχέση $2c_i+s_i=x_i+y_i+c_{i-1}$.

c_{i-1}	0	0	0	0	1	1	1	1
x_i	0	0	1	1	0	0	1	1
$+\ y_i$	+ 0	+ 1	+ 0	+ 1	+ 0	+ 1	+ 0	+ 1
$c_i\ s_i$	0 0	0 1	0 1	1 0	0 1	1 0	1 0	1 1

Σχήμα 2.2. *Πρόσθεση 3 bit*

Στην συνέχεια δίνεται ένα παράδειγμα πρόσθεσης δύο μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών των 8 bit.

Παράδειγμα 2.19. Να γίνει ή πρόσθεση των μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών 00111011_2 ($=59_{10}$), 00101010_2 ($=42_{10}$).

$$
\begin{array}{lrr}
\text{Κρατούμενα} \rightarrow & 00111010 & \\
& 00111011 & 59 \\
& 00101010\ + & +\ 42 \\
\hline
& \mathbf{0}01100101 & 101
\end{array}
$$

Μαζί με την πρόσθεση των δυαδικών αριθμών δίδεται και η πρόσθεση των αντίστοιχων δεκαδικών αριθμών.

2.3.2 Αφαίρεση μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών

Η αφαίρεση μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών γίνεται με τρόπο παρόμοιο με αυτόν του δεκαδικού συστήματος. Έστω δύο n-ψήφιοι μη προσημασμένοι δυαδικοί αριθμοί $X = x_{n-1}x_{n-2}\dots x_1x_0$ και $Y = y_{n-1}y_{n-2}\dots y_1y_0$. Για να υπολογίσουμε τη διαφορά D=X-Y, όπου $D = d_{n-1}d_{n-2}\dots d_1d_0$ αφαιρείται από το ψηφίο x_0 το y_0 και παράγεται το ψηφίο διαφοράς d_0 και ένα δανεικό ψηφίο (borrow) b_0. Στη συνέχεια αφαιρείται σύμφωνα με το σχήμα 2.4 από το x_1 το y_1 και το δανεικό b_0. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται από αριστερά προς τα δεξιά. Το b_{n-1} είναι το δανεικό εξόδου (b_{out}) της αφαίρεσης X-Y.

$$
\begin{array}{r}
b_{n-2}\, b_{n-3} \dots b_1\, b_0 \\
x_{n-1}\, x_{n-2} \dots x_2\, x_1\, x_0 \\
+\ y_{n-1}\, y_{n-2} \dots y_2\, y_1\, y_0 \\
\hline
b_{n-1} d_{n-1}\, d_{n-2} \dots d_2\, d_1\, d_0
\end{array}
$$

b_{out}

Η αφαίρεση αριθμών του ενός bit δίδεται στο σχήμα 2.3. Για την παράσταση του αποτελέσματος απαιτούνται δύο bit. Το d_i είναι το ψηφίο της διαφοράς (difference), ενώ b_i είναι το *δανεικό ψηφίο* (borrow). Η πράξη που εκτελείται είναι η $-2b_i+s_i=x_i-y_i$.

$$
\begin{array}{rcccc}
x_i & 0 & 0 & 1 & 1 \\
-\ y_i & -\ 0 & -\ 1 & -\ 0 & -\ 1 \\
\hline
b_i\ d_i & 0\ 0 & 1\ 1 & 0\ 1 & 0\ 0
\end{array}
$$

Σχήμα 2.3. *Αφαίρεση 2 bit*

Για την αφαίρεση πολυψήφιων δυαδικών αριθμών χρησιμοποιείται η αφαίρεση αριθμών των τριών bit που δίδεται στο σχήμα 2.4, όπου b_{i-1} είναι το δανεικό ψηφίο εισόδου και b_i το δανεικό ψηφίο εξόδου. Η πράξη που εκτελείται είναι η $-2b_i+s_i=x_i-y_i-b_{i-1}$

$b_{i\text{-}1}$	0	0	0	0	1	1	1	1
x_i	0	0	1	1	0	0	1	1
- y_i	+ 0	+ 1	+ 0	+ 1	+ 0	+ 1	+ 0	+ 1
$b_i d_i$	0 0	1 1	0 1	0 0	1 1	1 0	0 0	1 1

Σχήμα 2.4. *Αφαίρεση 3 bit*

Στη συνέχεια δίνεται ένα παράδειγμα αφαίρεσης μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών των 8 bit.

Παράδειγμα 2.20. Να γίνει η αφαίρεση 85_{10}-57_{10} στο δυαδικό σύστημα. 85=01010101_2 57_{10}=00111001_2.

Δανεικά →	00111000	
	01010101	85
	00111001 -	-57
	000011100	28

Μαζί με τους δυαδικούς αριθμούς δίδεται και η αφαίρεση των αντίστοιχων δεκαδικών αριθμών.

2.3.3 Πολλαπλασιασμός μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών

Ο πολλαπλασιασμός μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών μπορεί να γίνει με τρόπο ανάλογο με αυτόν για τους δεκαδικούς αριθμούς, δηλαδή με την πρόσθεση μας λίστας ολισθημένων πολλαπλασιαστέων ανάλογα με την τιμή των ψηφίων του πολλαπλασιαστή. Ένα τέτοιο παράδειγμα δίδεται στη συνέχεια.

Παράδειγμα 2.21 Στη συνέχεια γίνεται ο πολλαπλασιασμός τω μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών 1110_2 (=14_{10}), 1001_2 (= 9_{10}).

14	1 1 1 0	Πολλαπλασιαστέος
× 9	× 1 0 0 1	Πολλαπλασιαστής
126	1 1 1 0	
	0 0 0 0	Ολισθημένοι Πολλαπλασιαστέοι
	0 0 0 0	
	1 1 1 0	
	1 1 1 1 1 1 0	Γινόμενο

Αντί για την πρόσθεση του συνόλου των ολισθημένων πολλαπλασιαστέων ο δυαδικός πολλαπλασιασμός μπορεί να πραγματοποιηθεί με διαδοχικές προσθέσεις των ολισθημένων πολλαπλασιαστέων και το σχηματισμό *μερικών γινομένων* (*partial products*). Ένα τέτοιο παράδειγμα δίδεται στη συνέχεια.

Παράδειγμα 2.22. Να γίνει ο πολλαπλασιασμός των μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών 1110_2 (=14_{10}), 1001_2 (= 9_{10}) με τη μέθοδο των μερικών γινομένων.

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 9 \\ \hline 126 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 1\,1\,1\,0 & \text{Πολλαπλασιαστέος} \\ \times\ 1\,0\,0\,1 & \text{Πολλαπλασιαστής} \\ \hline 0\,0\,0\,0 & \\ +\,1\,1\,1\,0 & \\ \hline 1\,1\,1\,0 & \\ +\ 0\,0\,0\,0\,- & \text{Μερικά γινόμενα} \\ \hline 0\,1\,1\,1\,0 & \\ +\,0\,0\,0\,0\,-\,- & \\ \hline 0\,0\,1\,1\,1\,0 & \\ +\,1\,1\,1\,0\,-\,-\,- & \\ \hline 1\,1\,1\,1\,1\,1\,0 & \text{Γινόμενο} \end{array}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι στον πολλαπλασιασμό με τη μέθοδο των μερικών γινομένων, τα κρατούμενα που προκύπτουν από τα επιμέρους αθροίσματα λαμβάνονται υπ' όψη στις επόμενες προσθέσεις.

Γενικά, όταν πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό των n bit με έναν αριθμό των m bit χρειάζονται $m+n$ bit για να εκφραστεί το γινόμενο.
Ο πολλαπλασιασμός ενός δυαδικού αριθμού X με άλλον Y που είναι δύναμη του 2 (Y=2^{α}) με αριθμό γίνεται τοποθετώντας μετά το λιγότερο σημαντικό ψηφίο του X τόσα μηδενικά όσα περιλαμβάνονται στον Y.

Παράδειγμα 2.23. Να γίνει ο πολλαπλασιασμός των μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών 1110_2 (=14_{10}), 1000_2 (=2^3=8_{10}).

Ισχύει 1110×1000=1110**000**

2.3.4 Διαίρεση μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών

Ο απλούστερος αλγόριθμος διαίρεσης μη προσημασμένων αριθμών βασίζεται σε διαδοχικές ολισθήσεις και αφαιρέσεις όπως στο δεκαδικό σύστημα.

Παράδειγμα 2.24. Να γίνει η διαίρεση του αριθμού $11011010_2(=219_{10})$ με τον αριθμό $1011_2(=11_{10})$ στο δυαδικό σύστημα.

Η διαίρεση αυτή περιγράφεται στη συνέχεια.

```
Διαιρετέος            Διαιρέτης

 11011010 | 1011
- 1011    |------
  0101    | 10011 ← Πηλίκο
 - 0000
   1010
 - 0000
   10101
  - 1011
    10100
   - 1011
     1001 ← Υπόλοιπο
```

```
 218 | 11
-11  |----
 108 | 19
 -99
   9
```

Είναι γνωστό ότι για την εκτέλεση της διαίρεσης συγκρίνουμε τον μειωμένο διαιρετέο με πολλαπλάσια του διαιρέτη για να προσδιορίσουμε ποιο πολλαπλάσιο του διαιρέτη θα αφαιρέσουμε. Στο δυαδικό σύστημα υπάρχουν δύο πολλαπλάσια του διαιρέτη, το μηδέν και ο εαυτός του.

Οι μέθοδοι διαίρεσης των δυαδικών αριθμών είναι κατά κάποιο τρόπο συμπληρωματικές των μεθόδων πολλαπλασιασμού. Ένας τυπικός αλγόριθμος διαίρεσης παίρνει έναν διαιρετέο των $m+n$ bit και έναν διαιρέτη των n bit και παράγει ένα πηλίκο των m bit και ένα υπόλοιπο των n bit. Σε μία διαίρεση λέμε ότι έχουμε υπερχείλιση (overflow) όταν ο διαιρέτης είναι 0, ή όταν χρειάζονται περισσότερα από m bit για να εκφραστεί το πηλίκο.

Η διαίρεση ενός δυαδικού αριθμού X με τον Y που είναι δύναμη του 2 (Y=2^{α}) γίνεται ως εξής. Τα α λιγότερο σημαντικά ψηφία του αριθμού X είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενώ τα υπόλοιπα ψηφία αυτού είναι το πηλίκο.

Παράδειγμα 2.25. Να γίνει η διαίρεση του μη προσημασμένου δυαδικού αριθμού X=10101110_2 (=14_{10}) με τον δυαδικό αριθμό Y=1000_2 (=2^3=8_{10}).

Το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι τα τρία λιγότερο σημαντικά ψηφία δηλαδή το 110 και το πηλίκο τα υπόλοιπα δηλαδή το 10101.

2.4 Παράσταση προσημασμένων αριθμών στο δυαδικό σύστημα

Στις προηγούμενες παραγράφους ασχοληθήκαμε με την παράσταση στο δυαδικό σύστημα μη προσημασμένων αριθμών. Στην καθημερινή πρακτική χρησιμοποιούνται επίσης προσημασμένοι (θετικοί ή αρνητικοί) αριθμοί, οι οποίοι αναπαρίστανται με το σύστημα προσήμου-μέτρου ή προσημασμένου μέτρου, για παράδειγμα -3, +5, -6, -99. Στο σύστημα αυτό υπάρχουν δύο δυνατές αναπαραστάσεις του μηδενός, οι +0 και -0, αλλά και οι δύο έχουν την ίδια τιμή.

Ας υποθέτουμε ότι για την παράσταση των προσημασμένων δυαδικών αριθμών χρησιμοποιούνται *n* bit. Στην πράξη το περισσότερο σημαντικό ψηφίο, το MSB, χρησιμοποιείται για την παράσταση του προσήμου του αριθμού. Έχει επικρατήσει αυτό να έχει την τιμή 0 για να συμβολίζει το συν (**+**) και την τιμή 1 για να συμβολίζει το πλην, (**-**). Στο σύστημα προσημασμένου μέτρου τα υπόλοιπα *n*-1 δυαδικά ψηφία χρησιμοποιούνται για την παράσταση του μέτρου των αριθμών. Για την αποδοτική σχεδίαση των αριθμητικών κυκλωμάτων χρησιμοποιούνται για την παράσταση των προσημασμένων αριθμών, εκτός από το σύστημα προσημασμένου μέτρου, αριθμητικά συστήματα συμπληρωμάτων.

2.4.1 Σύστημα προσημασμένου μέτρου

Στη συνέχεια εξετάζεται το δυαδικό σύστημα προσημασμένου μέτρου. Έστω ο μη προσημασμένος αριθμός *A*, $0 \le A \le 2^{n-1} - 1$, που αναπαρίσταται με *n*-1 bit σαν $a_{n-2}a_{n-3}\ldots a_1 a_0$. Ο θετικός ακέραιος +*A* θα αναπαρίσταται με *n* bit στο *σύστημα προσημασμένου μέτρου* (*sign magnitude system*) σαν

$$+A = 0a_{n-2}a_{n-3}\ldots a_1 a_0$$

Αντίστοιχα ο αρνητικός ακέραιος -*A*, θα αναπαρίσταται σαν

$$-A = 1a_{n-2}a_{n-3}\ldots a_1 a_0$$

Ο μέγιστος αριθμός που μπορεί να παρασταθεί με *n* bit στο σύστημα προσημασμένου μέτρου είναι ο $+(2^{n-1} - 1) =$ και ο ελάχιστος ο $-(2^{n-1} - 1)$. Ο αντίθετος ενός αριθμού προκύπτει με αντιστροφή του ψηφίου προσήμου του. Ο αριθμός 0 μπορεί να παρασταθεί με δύο τρόπους, σαν $\underbrace{000\ldots000}_{n}$ που αναπαριστά το +0 και σαν $\underbrace{100\ldots000}_{n}$ που αναπαριστά το -0.

Παράδειγμα 2.26. Να παρασταθούν οι αριθμοί +14, -14 σε σύστημα προσημασμένου μέτρου με 8 bit.

Ο μη προσημασμένος αριθμός 14 παρίσταται σαν 1110 στο δυαδικό σύστημα. Για *n*=8, ο αριθμός +14 παρίσταται στο σύστημα προσημασμένου μέτρου σαν **0**0001110 και ο αριθμός –14 σαν **1**0001110.

Παράδειγμα 2.27. Να βρεθεί ποιους αριθμούς παριστάνουν οι δυαδικοί αριθμοί 00011110, και 10011110 όταν θεωρήσουμε ότι είναι σε σύστημα προσημασμένου μέτρου.

Ο αριθμός **0**0011110 =+0011110=+30, ενώ ο αριθμός **1**0011110=-0011110=-30.

Παράδειγμα 2.28. Έστω ότι δυαδικοί αριθμοί 00000111, 11110001 είναι σε σύστημα προσημασμένου μέτρου Να παρασταθούν με 16 bit στο ίδιο σύστημα.

00000111→**0**000000000000111, **1**1110001→**1**000000001110001

2.4.2 Αριθμητικά συστήματα συμπληρώματος

Η πρόσθεση είναι βασική λειτουργία στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Η υλοποίηση της πρόσθεσης προσημασμένων αριθμών οι οποίοι είναι κωδικοποιημένοι στο σύστημα προσημασμένου μέτρου οδηγεί σε πολύπλοκα λογικά κυκλώματα. Όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, η πρόσθεση αριθμών που έχουν παρασταθεί σε συστήματα συμπληρωμάτων είναι σχετικά απλή και συνεπώς τα αντίστοιχα λογικά κυκλώματα. Στη συνέχεια εξετάζονται τα δυαδικά συστήματα συμπληρωμάτων.

Σύστημα συμπληρώματος του 1

Έστω ο μη προσημασμένος αριθμός *A*, όπου $0 \le A \le 2^{n-1} - 1$. Ο αριθμός αυτός θα αναπαρίσταται με *n*-1 bit σαν $a_{n-2}a_{n-3}\ldots a_1 a_0$. Ο θετικός ακέραιος +*A* αναπαρίσταται στο *σύστημα συμπληρώματος του* 1 (1'*s complement system*) σαν

$$+A = 0a_{n-2}a_{n-3}\ldots a_1 a_0$$

Αντίστοιχα ο αρνητικός ακέραιος -*A*, αναπαρίσταται σαν

$$-A = 1\overline{a}_{n-2}\ \overline{a}_{n-3}\ldots \overline{a}_1\ \overline{a}_0$$

όπου $\overline{0} = 1$ και $\overline{1}$ =0.

Ο μέγιστος θετικός αριθμός που μπορεί να παρασταθεί στο σύστημα συμπληρώματος του 1 με n bit είναι ο $+(2^{n-1} - 1)$ δηλαδή, ο $\underbrace{0111\ldots111}_{n}$ και ο ελάχιστος ο $-(2^{n-1} - 1)$ δηλαδή, ο $\underbrace{100\ldots000}_{n}$.

Ο αριθμός 0 παριστάνεται στο σύστημα συμπληρώματος του 1 με δύο τρόπους σαν $\underbrace{000\ldots000}_{n}$ (+0) και σαν $\underbrace{111\ldots111}_{n}$ (-0).

Έστω $B_{1's} = b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_1 b_0$ η αναπαράσταση ενός προσημασμένου αριθμού *B* σε σύστημα συμπληρώματος του 1. Η αναπαράσταση του αντιθέτου του θα είναι η $(-B)_{1's} = \overline{b}_{n-1}\ \overline{b}_{n-2}\ldots \overline{b}_1\ \overline{b}_0 = \overline{B}_{1's}$ που προκύπτει με αντιστροφή των ψηφίων του *B*.

Η μετατροπή ενός αριθμού των *n* bit σε σύστημα συμπληρώματος του 1 σε ίσο αριθμό που παρίσταται με *m* bit, όπου $m > n$, γίνεται τοποθετώντας στα $m - n$ περισσότερο σημαντικά ψηφία του αριθμού το ψηφίο του προσήμου του αριθμού. Η διαδικασία αυτή λέγεται *επέκταση προσήμου* (*sign extension*).
Η μετατροπή ενός αριθμού από το σύστημα συμπληρώματος του 1 στο δεκαδικό σύστημα γίνεται ερμηνεύοντας το πρώτο ψηφίο σαν πρόσημο. Το μέτρο του αριθμού υπολογίζεται από τα υπόλοιπα ψηφία τα οποία αντιστρέφονται εάν το ψηφίο προσήμου είναι 1.

Παράδειγμα 2.29. Να γίνει παράσταση των αριθμών +14, -14 σε σύστημα συμπληρώματος του 1 για 8 bit (*n*=8).

Ο μη προσημασμένος αριθμός 14 παρίσταται σαν 1110. Ο αριθμός +14 παριστάνεται για *n*=8 σαν **0**0001110. Το συμπλήρωμα ως προς 1 του αριθμού 0001110 είναι το 1110001 και ο αριθμός –14 παρίσταται σαν **1**1110001.

Παράδειγμα 2.30. Να βρεθεί ποιους αριθμούς του δεκαδικού συστήματος παριστάνουν οι αριθμοί 00010011, 11101111 όταν θεωρούμε ότι είναι σε σύστημα συμπληρώματος του 1.

Ισχύει 00010011 = +(0010011) = +19 και 11101111 = $-(\overline{1101111})$ =-(0010000) = -16.

Παράδειγμα 2.31. Να παρασταθούν οι αριθμοί 00000111, 11110001 με 16 bit σε σύστημα συμπληρώματος του 1.

Τοποθετείται στα 8 πιο σημαντικά ψηφία η τιμή του ψηφίου του προσήμου. Οι αριθμοί είναι

00000111→**00000000**00000111, 11110001→**11111111**11110001

Για τους αριθμούς του συστήματος συμπληρώματος του 1 ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.3. Για ένα αριθμό σε σύστημα συμπληρώματος του 1 με *n* bit η τιμή του στο δεκαδικό σύστημα προκύπτει απ' ευθείας από την παράσταση του αριθμού αν θεωρήσουμε ότι το ψηφίο προσήμου έχει βάρος $-(2^{n-1}-1)$ και τα υπόλοιπα ψηφία του βάρος που αντιστοιχεί στην θέση τους.

Απόδειξη. Οι θετικοί αριθμοί +*A*, $0 \le +A \le 2^{n-1}-1$ του συστήματος συμπληρώματος του 1 αναπαρίστανται με *n* bit σαν $0a_{n-2}a_{n-3}\ldots a_1a_0$. Για την περίπτωση αυτή η αλήθεια της πρότασης είναι προφανής.
Οι αρνητικοί αριθμοί –*A*, $-(2^{n-1}-1) \le -A \le 0$ του συστήματος συμπληρώματος του 1 αναπαρίστανται με *n* bit σαν $1\overline{a}_{n-2}\ \overline{a}_{n-2}\ldots\overline{a}_1\ \overline{a}_0$ ($\overline{a}$ είναι το συμπλήρωμα του *a*).

Για τον $-A$ ισχύει

$$
\begin{aligned}
-A &= -2^n + 2^n - A \\
&= -2^n + (2^n - 1 - A) + 1 \\
&= -2^n + (2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^1 + 1) - (a_{n-2}2^{n-2} + a_{n-3}2^{n-3} + \ldots + a_1 2 + a_0) + 1 = \\
&= -2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2}(1 - a_{n-2}) + 2^{n-3}(1 - a_{n-3}) + \ldots + (1 - a_1)2^1 + (a_0 - 1) + 1 \\
&= -2^n + 2^{n-1} + \overline{a}_{n-2}2^{n-2} + \overline{a}_{n-3}2^{n-3} + \ldots + \overline{a}_1 2 + \overline{a}_0 + 1 \\
&= -2^{n-1} + \overline{a}_{n-2}2^{n-2} + \overline{a}_{n-3}2^{n-3} + \ldots + \overline{a}_1 2 + \overline{a}_0 + 1
\end{aligned}
$$

Δηλαδή,

$$- A = -(2^{n-1} - 1) + \overline{a}_{n-2}2^{n-2} + \overline{a}_{n-3}2^{n-3} + \ldots + \overline{a}_1 2 + \overline{a}_0$$

Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει η αλήθεια της πρότασης.

Παράδειγμα 2.32. Να βρεθεί η τιμή του αριθμού 10100111 όταν θεωρούμε ότι είναι σε σύστημα συμπληρώματος του 1 με χρήση του θεωρήματος 2.3.

$$10100111_{1's} = -(2^7-1)+2^5+2^2+2^1+2^0 = -127+32+4+2+1= -88_{10}$$

Ο πολλαπλασιασμός της παράστασης ενός προσημασμένου δυαδικού αριθμού σε σύστημα συμπληρώματος του 1 με θετικό αριθμό που είναι δύναμη του 2 προκύπτει τοποθετώντας μετά το λιγότερο σημαντικό ψηφίο του αριθμού τόσα ψηφία προσήμου όσα είναι ο εκθέτης της δύναμης του 2.

Παράδειγμα 2.33. Να πολλαπλασιαστούν οι αριθμοί 0110, 1001 με τον 0100 όταν θεωρούμε ότι οι αριθμοί είναι σε σύστημα συμπληρώματος του 1

0100=+4=+2^2. Επομένως 0110×0100=011**00** και 1001×0100=1001**11**

Η παράσταση $X_{1's}$ στο σύστημα συμπληρώματος του 1 ενός προσημασμένου αριθμού *X*, $-(2^{n-1}-1) \le X \le +(2^{n-1}-1)$, μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι η δυαδική αναπαράσταση με *n* bit ενός αντίστοιχου αριθμού X_{R1} που ορίζεται, όπως στη συνέχεια:

$$X_{R1} = \begin{cases} X \text{ εάν } X > 0 \\ 2^n - 1 - |X| \text{ εάν } X < 0 \\ 0 \text{ εάν } X = +0 \text{ και } 2^n - 1 \text{ εάν } X = -0 \end{cases}$$

όπου $|X|$ είναι η απόλυτη τιμή του αριθμού *X*.

Επομένως

$$X_{R1} = |X|_{2^n - 1}$$

με $\left|2^n - 1\right|_{2^n - 1} = 2^n - 1$.

Σύστημα συμπληρώματος του 2

Έστω ο μη προσημασμένος αριθμός A, $0 \le A \le 2^{n-1} - 1$, που αναπαρίσταται με $n-1$ bit σαν $a_{n-2}a_{n-3}\ldots a_1 a_0$. Ο θετικός ακέραιος $+A$ αναπαρίσταται στο *σύστημα συμπληρώματος του* 2 (2*'s complement system*) σαν

$$+A = 0a_{n-2}a_{n-3}\ldots a_1 a_0$$

Ο αρνητικός ακέραιος $-A$ παρίσταται σαν

$$-A = (1\bar{a}_{n-2}\ \bar{a}_{n-2}\ldots\bar{a}_1\ \bar{a}_0) + 1$$

Στο σύστημα συμπληρώματος του 2 υπάρχει η δυνατότητα αναπαράστασης του αρνητικού αριθμού -2^{n-1} σαν $\underbrace{100\ldots00}_{n}$.

Κατά συνέπεια ο μέγιστος αριθμός που μπορεί να παρασταθεί στο σύστημα αυτό, με n bit είναι ο $+(2^{n-1}-1)$ και ο ελάχιστος ο -2^{n-1}. Η μετατροπή ενός αριθμού των n bit σε σύστημα συμπληρώματος του 2 σε ίσο αριθμό με m bit όπου $m > n$, γίνεται τοποθετώντας στα $m-n$ περισσότερο σημαντικά ψηφία του αριθμού το ψηφίο προσήμου. Η διαδικασία αυτή λέγεται *επέκταση προσήμου* (*sign extension*). Έστω $B_{2's} = b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_1 b_0$ η παράσταση ενός αριθμού B στο σύστημα συμπληρώματος του 2. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι για $B_{2's} \neq \underbrace{100\ldots00}_{n}$, δηλαδή για $B \neq -2^{n-1}$ η παράσταση του $(-B)_{2's}$ θα $(\bar{b}_{n-1}\ \bar{b}_{n-2}\ldots\bar{b}_1\ \bar{b}_0) + 1 = \bar{B}_{1's} + 1$. Στο σύστημα συμπληρώματος του 2 υπάρχει μία και μόνο αναπαράσταση του μηδενός η $\underbrace{000\ldots00}_{n}$.

Η μετατροπή ενός αριθμού από το σύστημα συμπληρώματος του 2 στο δεκαδικό σύστημα γίνεται ερμηνεύοντας το πρώτο ψηφίο σαν πρόσημο. Το μέτρο του αριθμού υπολογίζεται αντιστρέφοντας τα υπόλοιπα ψηφία και προστίθεται 1 εάν το ψηφίο προσήμου είναι 1. Ο αριθμός $\underbrace{100\ldots00}_{n}$ ερμηνεύεται σαν -2^{n-1}.

Παράδειγμα 2.34. Να γίνει παράσταση των αριθμών +14, -14 του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης στο σύστημα συμπληρώματος του 2 για n = 8 bit.

Ο αριθμός +14=1110 αναπαρίσταται για n=8 σαν **0**0001110, ενώ ο –14 σαν -(1110001+1) =**1**1111010.

Παράδειγμα 2.35. Να βρεθεί ποιους αριθμούς του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης παριστάνουν οι αριθμοί 00010011, 11101111, 10000000 όταν θεωρούμε ότι είναι σε σύστημα συμπληρώματος του 2.

$00010011_{2's}$ = +(0010011) = +19, $11101111_{2's}$ = -(0010000+1) = -17,
10000000 = -2^7 = -128.

Παράδειγμα 2.36. Να παρασταθούν οι προσημασμένοι αριθμοί 00000111, 11110001 του δυαδικού συστήματος με 16 bit. Θεωρήστε ότι και στις δύο παραστάσεις οι αριθμοί είναι σε σύστημα συμπληρώματος του 2.

Τοποθετείται στα 8 πιο σημαντικά ψηφία η τιμή του ψηφίου του προσήμου.

00000111→**00000000**00000111, 11110001→**11111111**11110001

Για αριθμούς σε σύστημα συμπληρώματος του 2 ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.4. Για έναν αριθμό που παρίσταται σε σύστημα συμπληρώματος του 2 με n bit, η τιμή του αριθμού στο δεκαδικό σύστημα προκύπτει απ’ ευθείας από την παράσταση του αριθμού, αν θεωρήσουμε ότι το ψηφίο προσήμου έχει βάρος -2^{n-1} και τα υπόλοιπα ψηφία το βάρος που αντιστοιχεί στη θέση τους.

Απόδειξη. Οι θετικοί αριθμοί $+A$, $0 \le +A \le 2^{n-1}-1$, σε σύστημα συμπληρώματος του 2 αναπαρίστανται με n bit σαν $0a_{n-2}a_{n-3}\ldots a_1a_0$. Για την περίπτωση αυτή η αλήθεια της πρότασης είναι προφανής.

Οι αρνητικοί αριθμοί $-A$ με $-(2^{n-1}-1) \le -A < 0$ σε σύστημα συμπληρώματος του 2 αναπαρίστανται με n bit σαν

$1a^*_{n-2}a^*_{n-3}\ldots a^*_1a^*_0 = 1\bar{a}_{n-2}\,\bar{a}_{n-2}\ldots\bar{a}_1\,\bar{a}_0 + 1$ ($\bar{a}$ είναι το συμπλήρωμα του a).

Για τον αριθμό $-A$ ισχύει

$$\begin{aligned}
-A &= -2^n + 2^n - A \\
&= -2^n + (2^n - 1 - A) + 1 \\
&= -2^n + 2^{n-1} + \bar{a}_{n-2}2^{n-2} + \bar{a}_{n-3}2^{n-3} + \ldots + \bar{a}_1 2 + \bar{a}_0 + 1. \\
&= -2^n + (1\bar{a}_{n-2}\,\bar{a}_{n-3}\ldots\bar{a}_1\,\bar{a}_0) + 1 \\
&= -2^n - 2^{n-1} + 1a^*_{n-2}a^*_{n-3}\ldots a^*_1a^*_0 \\
&= -2^n + 2^{n-1} + a^*_{n-2}2^{n-2} + a^*_{n-3}2^{n-3}\ldots a^*_1 2 + a^*_0.
\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$-A = -2^{n-1} + a^*_{n-2}2^{n-2} + a^*_{n-3}2^{n-3}\ldots a^*_1 2 + a^*_0$$

Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει η αλήθεια της πρότασης για την αναπαράσταση των αρνητικών αριθμών για $-(2^{n-1}-1) \le -A < 0$.

Για $-A = -2^{n-1}$ που στο σύστημα συμπληρώματος του 2 αναπαρίσταται σαν $\underbrace{100\ldots0}_{n}$ η αλήθεια της πρότασης είναι προφανής.

Παράδειγμα 2.37. Να βρεθεί η τιμή του δυαδικού αριθμού 10100111 όταν θεωρούμε ότι είναι σε σύστημα συμπληρώματος του 2 με χρήση του θεωρήματος 2.4.

$$10100111_{2's} = -2^7+2^5+2^2+2^1+2^0 = -128+32+4+2+1 = -89_{10}$$

Ο πολλαπλασιασμός της παράστασης ενός προσημασμένου δυαδικού αριθμού σε σύστημα συμπληρώματος του 2 με θετικό αριθμό που είναι δύναμη του 2 προκύπτει τοποθετώντας μετά το λιγότερο σημαντικό ψηφίο του αριθμού τόσα μηδενικά όσα είναι ο εκθέτης της δύναμης του 2

Παράδειγμα 2.38. Να πολλαπλασιαστούν οι αριθμοί 0110, 1001 με τον 0100 όταν θεωρούμε ότι οι αριθμοί είναι σε σύστημα συμπληρώματος του 2.

0100=+4=+2^2. Επομένως 0110×0100=011**00** και 1001×0100=1001**00**

Η παράσταση $X_{2's}$ με n bit στο σύστημα συμπληρώματος του 2 ενός αριθμού X, $-2^{n-1} \le X \le +(2^{n-1}-1)$, είναι η δυαδική αναπαράσταση ενός αντίστοιχου αριθμού X_{R2} που ορίζεται, όπως στη συνέχεια

$$X_{R2} = \begin{cases} X, \text{εάν } X \ge 0 \\ 2^n - |X|, \text{εάν } X < 0 \end{cases}$$

Επομένως,

$$X_{R2} = |X|_{2^n}$$

όπου με $|A|_m$, ή A mod m συμβολίζεται το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού A με τον αριθμό m.

Στον Πίνακα 2.6 δίδεται η παράσταση προσημασμένων αριθμών με τέσσερα δυαδικά ψηφία σε σύστημα προσημασμένου μέτρου, σε σύστημα συμπληρώματος του 1 και σε σύστημα συμπληρώματος του 2.

Πίνακας 2.6

Κωδικοποιήσεις προσημασμένων αριθμών με 4 bit

Δεκαδικός	Προσημασμένο Μέτρο	Συμπλήρωμα του 1	Συμπλήρωμα του 2
+7	0111	0111	0111
+6	0110	0110	0110
+5	0101	0101	0101
+4	0100	0100	0100
+3	0011	0011	0011
+2	0010	0010	0010
+1	0001	0001	0001
0	0000 ή 1000	0000 ή 1111	0000
-1	1001	1110	1111
-2	1010	1101	1110
-3	1011	1100	1101
-4	1100	1011	1100
-5	1101	1010	1011
-6	1110	1001	1010
-7	1111	1000	1001
-8	-	-	1000

2.5 Πρόσθεση και αφαίρεση αριθμών στα συστήματα συμπληρώματος

Η απόδειξη των θεωρημάτων που ακολουθούν βασίζεται στο επόμενο λήμμα από την αριθμητική υπολοίπων.

Λήμμα 2.1. Έστω $|x|_m$ το υπόλοιπο της διαίρεσης του ακέραιου αριθμού x με το m. Ισχύει η επόμενη πρόταση

$$|a+b|_m = \left||a|_m + |b|_m\right|_m$$

Η πρόσθεση δύο αριθμών που παρίστανται σε σύστημα συμπληρώματος του 1 βασίζεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.5. Το αλγεβρικό άθροισμα δύο αριθμών που παρίστανται με *n* bit στο σύστημα συμπληρώματος του 1, βρίσκεται εάν προστεθούν κανονικά οι παραστάσεις των αριθμών. Εάν υπάρξει κρατούμενο εξόδου από την πρόσθεση, αυτό προστίθεται στο αποτέλεσμα. Το αποτέλεσμα της δεύτερης πρόσθεσης είναι η παράσταση του αθροίσματος των αριθμών στο σύστημα συμπληρώματος του 1.

Απόδειξη. Έστω X, Y δύο προσημασμένοι αριθμοί και $X_{1's}$, $Y_{1's}$ οι αναπαραστάσεις τους με n bit σε σύστημα συμπληρώματος του 1. Για την αναπαράστασή του αθροίσματός $S=X+Y$ σε σύστημα συμπληρώματος του 1, ισχύει $S_{1's} = |X+Y|_{2^n-1}$ $= \left||X|_{2^n-1} + |Y|_{2^n-1}\right|_{2^n-1} = |X_{1's} + Y_{1's}|_{2^n-1}$. Έστω S^* το n-bit άθροισμα των $X_{1's}$, $Y_{1's}$ και c_{out} το κρατούμενο εξόδου. Ισχύει $X_{1's}+Y_{1's}=2^n c_{out}+S^*$. Επομένως $S_{1's} = |c_{out}2^n + S^*|_{2^n-1} = |c_{out}(2^n-1) + c_{out} + S^*|_{2^n-1} =$ $\left||c_{out}(2^n-1)|_{2^n-1} + |c_{out} + S^*|_{2^n-1}\right|_{2^n-1} = |c_{out} + S^*|_{2^n-1} = |c_{out} + S^*|_{2^n}$. Επομένως ισχύει $S_{1's} = S^* + c_{out}$, δηλαδή το κρατούμενο εξόδου της πρόσθεσης προστίθεται στο άθροισμα των $X_{1's}$, $Y_{1's}$.

Παράδειγμα 2.39. Να γίνει η πράξη 11110011+00010001, όταν θεωρήσουμε ότι οι αριθμοί είναι σε σύστημα συμπληρώματος του 1.

	Σύστημα Συμπληρώματος του 1	Δεκαδικό Σύστημα
	11110011	-12
	+ 00010001	+17
Κρατούμενο	1 00000100	+5
	+1	
	00000101	

Θεώρημα 2.6. Το αλγεβρικό άθροισμα δύο προσημασμένων αριθμών που παρίστανται με *n*-bit σε σύστημα συμπληρώματος του 2, βρίσκεται εάν προστεθούν κανονικά οι παραστάσεις των αριθμών. Εάν υπάρξει κρατούμενο εξόδου αυτό αγνοείται. Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης είναι η παράσταση του αθροίσματος στο σύστημα συμπληρώματος του 2.

Απόδειξη. Έστω X, Y δύο προσημασμένοι αριθμοί και $X_{2's}$, $Y_{2's}$ οι αναπαραστάσεις τους με n bit σε σύστημα συμπληρώματος του 2. Για την αναπαράστασή του αθροίσματός σε σύστημα συμπληρώματος του 2, ισχύει $S_{2's} = |X+Y|_{2^n} = \left\| X|_{2^n} + |Y|_{2^n} \right|_{2^n} = |X_{2's} + Y_{2's}|_{2^n}$. Έστω S^* το n bit άθροισμα των $X_{2's}$, $Y_{2's}$ και c_{out} το κρατούμενο εξόδου. Ισχύει $X_{2's}+Y_{2's}=2^n c_{out}+S^*$. Επομένως $S_{2's} = |c_{out}2^n + S^*|_{2^n} = \left\| c_{out}2^n|_{2^n} + |S^*|_{2^n} \right|_{2^n} = \left| c_{out}|2^n|_{2^n} + |S^*|_{2^n} \right|_{2^n}$. Εφ' όσον $|2^n|_{2^n} = 0$ και $|S^*|_{2^n} = S^*$ ισχύει $S_{2's} = S^*$ και το κρατούμενο αγνοείται.

Παράδειγμα 2.40. Να γίνει η πράξη 11110100+00010001, όταν θεωρήσουμε ότι οι αριθμοί είναι σε σύστημα συμπληρώματος του 2.

Σύστημα Συμπληρώματος του 2	Δεκαδικό Σύστημα
11110100	-12
+ 00010001	+17
← 1) 00000101	+5

Το κρατούμενο αγνοείται

Παρατηρούμε ότι η πρόσθεση στο σύστημα συμπληρώματος του 2 είναι απλούστερη αυτής στο σύστημα συμπληρώματος του 1 διότι το κρατούμενο εξόδου αγνοείται και δεν προστίθεται στο αποτέλεσμα.

Υπερχείλιση

Στα συστήματα συμπληρωμάτων υπάρχει *υπερχείλιση* (*overflow*) όταν το αποτέλεσμα της πρόσθεσης δεν μπορεί να παρασταθεί με το επιλεγμένο μήκος λέξης. (αριθμό bit). Είναι προφανές ότι υπερχείλιση δεν μπορεί να υπάρξει στην πρόσθεση ετεροσήμων αριθμών. Υπερχείλιση σε μία πρόσθεση υπάρχει όταν οι προσθετέοι είναι ομόσημοι και το πρόσημο του αθροίσματος είναι διαφορετικό από αυτό των προσθετέων. Στη συνέχεια δίδονται παραδείγματα πρόσθεσης αριθμών που είναι σε σύστημα συμπληρώματος του 2 και κατά την πρόσθεσή τους γίνεται υπερχείλιση.

-3	1101	+5	0101
+ -6	+1010	+6	+0110
-9	1) 0111 = +7	+11	1011 = -5

Η υπερχείλιση μπορεί να διαπιστωθεί επίσης από τη σύγκριση κρατουμένων της πρόσθεσης. Εάν κατά την πρόσθεση των δυαδικών ψηφίων που αναπαριστούν το πρόσημο, δηλαδή των πιο σημαντικών ψηφίων, το κρατούμενο εισόδου είναι διαφορετικό από το κρατούμενο εξόδου, τότε έχουμε υπερχείλιση.

Αφαίρεση αριθμών στα συστήματα συμπληρωμάτων

Έστω A και B δύο αριθμοί που έχουν παρασταθεί με n bit σε κάποιο σύστημα συμπληρώματος. Η διαφορά αυτών βρίσκεται σύμφωνα με τη σχέση A-B= A+(-B) με εύρεση του αντιθέτου του αφαιρετέου και κάνοντας πρόσθεση.

Στο σύστημα συμπληρώματος του 1, όπως προαναφέραμε, $-B = \overline{B}$, που προκύπτει με αντιστροφή του B ψηφίο με ψηφίο. Παραδείγματα αφαιρέσεων στο σύστημα αυτό δίδονται στη συνέχεια.

+4	0100	0100	+3	0011	0011
- +3	- 0011	+ 1100	- -4	- 1011	+ 0100
+1		1 0000	+7		0 0111
		↳ + 1			↳ + 0
		0001			0111

Στο σύστημα συμπληρώματος του 2 για $B \neq -2^{n-1}$ ο $-B = \overline{B}+1$ προκύπτει με αντιστροφή του B ψηφίο με ψηφίο και πρόσθεση του 1. Η πρόσθεση του 1 δεν γίνεται ξεχωριστά, αλλά χρησιμοποιείται σαν κρατούμενο εισόδου c_{in} στην πρόσθεση του A με τον $\overline{B}$. Παραδείγματα αφαιρέσεων στο σύστημα αυτό για 4 bit δίδονται στη συνέχεια.

		1 ← c_{in}			1 ← c_{in}
+4	0100	0100	+3	0011	0011
- +3	- 0011	+ 1100	- -4	- 1100	+ 0011
+1		0001	+7		0111

Είναι προφανές ότι σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως δεν υπάρχει αντίθετος του αριθμού $B=-2^{4-1}=-8$. Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι η αντιστροφή του και η πρόσθεση του 1 δίδει τον ίδιο τον αριθμό.

$$
\begin{array}{rr}
-(-8) = -1000 = & 0111 \\
& +0001 \\
\hline
& 1000 = -8
\end{array}
$$

Παρά ταύτα ο αριθμός αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί στις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις εφόσον δεν υπάρχει υπερχείλιση στο αποτέλεσμα. Παραδείγματα πράξεων με τον αριθμό αυτό δίδονται στη συνέχεια.

$$
\begin{array}{rr}
+4 & 0100 \\
+\ -8 & +\ 1000 \\
\hline
-4 & 1100
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr}
 & & 1 \leftarrow c_{in} \\
-3 & 1101 & 1101 \\
-\ -8 & -\ 1000 & +\ 0111 \\
\hline
+5 & & 1)0101
\end{array}
$$

2.6 Συμπληρώματα βάσης

Τα συστήματα συμπληρώματος του 1 και συμπληρώματος του 2 είναι αντίστοιχα ειδικές περιπτώσεις των συστημάτων μειωμένου συμπληρώματος βάσης και συμπληρώματος βάσης.

Στο *σύστημα μειωμένου συμπληρώματος βάσης* ένας αριθμός *D* αναπαρίσταται σαν $D_{(r-1)'s}$, όπου *r* είναι η βάση του αριθμητικού συστήματος που χρησιμοποιείται

$$D_{(r-1)'s} = \begin{cases} D, \text{ εάν } D > 0 \\ r^n - 1 - |D|, \text{ εάν } D < 0 \\ 0 \text{ εάν } D = +0,\ r^n - 1 \text{ εάν } D = -0 \end{cases}$$

Στο *σύστημα συμπληρώματος βάσης* ένας αριθμός *D* αναπαρίσταται σαν $D_{r's}$, όπου

$$D_{r's} = \begin{cases} D, \text{ εάν } D \geq 0 \\ r^n - |D|, \text{ εάν } D < 0 \end{cases}$$

ή

$$D_{r's} = |D|_{r^n}$$

2.7 Δυαδική κωδικοποίηση των δεκαδικών αριθμών

Αν και οι δυαδικοί αριθμοί είναι οι πλέον κατάλληλοι για εσωτερικές πράξεις στα ψηφιακά συστήματα, οι περισσότεροι άνθρωποι είναι εξοικειωμένοι με τους δεκαδικούς αριθμούς. Σαν αποτέλεσμα το σύστημα διασύνδεσης των ψηφιακών συστημάτων μπορεί να εμφανίζει ή να δέχεται πληροφορίες υπό μορφή δεκαδικών αριθμών. Υπάρχουν επίσης και ορισμένα ψηφιακά συστήματα που επεξεργάζονται άμεσα αριθμούς του δεκαδικού συστήματος. Οι δεκαδικοί αριθμοί αναπαρίστανται σε αυτά τα ψηφιακά συστήματα με την κωδικοποίηση των ψηφίων τους με σειρές από bit.

Κώδικας (*code*) είναι ένα σύνολο από σειρές των *n* bit που ονομάζονται *κωδικές λέξεις* (*code words*) που αναπαριστούν αριθμούς ή άλλες οντότητες.
Στη συνέχεια δίδονται διάφορες κωδικοποιήσεις των αριθμών του δεκαδικού συστήματος. Για την κωδικοποίηση των ψηφίων του δεκαδικού συστήματος χρειάζονται τουλάχιστον 4 δυαδικά ψηφία.

2.7.1 Κώδικας BCD (Binary Coded Decimal) ή 8421

Ο *κώδικας BCD ή* 8421 χρησιμοποιείται για την κωδικοποίηση των αριθμών του δεκαδικού συστήματος. Είναι προφανές ότι απαιτούνται 4 δυαδικά ψηφία για την κωδικοποίηση των ψηφίων 0 έως 9. Η κωδικοποίηση γίνεται με την αντικατάσταση των ψηφίων του αριθμού του δεκαδικού συστήματος σύμφωνα με τον Πίνακα 2.7.

Πίνακας 2.7

Κώδικας BCD

Δεκαδικό ψηφίο	BCD
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Παράδειγμα 2.41. Να κωδικοποιηθεί ο αριθμός 9706 του δεκαδικού συστήματος στον κώδικα BCD.

Σύμφωνα με τον Πίνακα 2.7 προκύπτει η κωδικοποίηση που δίδεται στη συνέχεια

$$9706_{10} = 1001\ 0111\ 0000\ 0110_{BCD}$$

Η πρόσθεση δεκαδικών ψηφίων κωδικοποιημένων στον BCD γίνεται παρόμοια με την πρόσθεση τετραψήφιων δυαδικών αριθμών, με τη διαφορά ότι πρέπει να γίνει διόρθωση όταν το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο του 1001 (=9). Η διόρθωση γίνεται με την πρόσθεση του αριθμού 0110 (=6). Παραδείγματα προσθέσεων δίδονται στη συνέχεια

$$\begin{array}{r} 5 \\ +\ 4 \\ \hline 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0101 \\ +\ 0100 \\ \hline 1001 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 5 \\ +\ 9 \\ \hline 14 \\ \\ \\ \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 0101 & \\ +\ 1001 & \\ \hline 1110 & \\ +\ 0110 & \leftarrow \text{διόρθωση} \\ \cline{1-1} \mathbf{1}\ \ 0100 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ +\ 8 \\ \hline 16 \\ \\ \\ \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 1000 & \\ +\ 1000 & \\ \hline 1\ 0000 & \\ +\ 0110 & \leftarrow \text{διόρθωση} \\ \cline{1-1} \mathbf{1}\ \ 0110 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 9 \\ +\ 9 \\ \hline 18 \\ \\ \\ \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 1001 & \\ +\ 1001 & \\ \hline 1\ 0010 & \\ +\ 0110 & \leftarrow \text{διόρθωση} \\ \cline{1-1} \mathbf{1}\ \ 1100 & \end{array}$$

Όπως με τους δυαδικούς αριθμούς, υπάρχουν αντίστοιχες αναπαραστάσεις των προσημασμένων αριθμών στον κώδικα BCD. Για την παράσταση του προσήμου χρησιμοποιείται ένα επί πλέον ψηφίο που είναι 0000 για το "+" και 1001 για το "-"

Ο κώδικας BCD είναι κώδικας με βάρη επειδή η τιμή των δεκαδικών ψηφίων μπορεί να προκύψει αντιστοιχώντας ένα βάρος σε κάθε δυαδικό ψηφίο. Τα βάρη για τα ψηφία του κώδικα BCD είναι 8, 4, 2, 1 και γι' αυτό ονομάζεται και *κώδικας* 8421.

2.7.2 Κώδικας 2421

Ο *κώδικας* 2421 είναι ένας άλλος κώδικας με βάρη που χρησιμοποιείται επίσης για την κωδικοποίηση των ψηφίων του δεκαδικού συστήματος. Στον Πίνακα 2.8 δίδεται η κωδικοποίηση των ψηφίων του δεκαδικού συστήματος στον κώδικα αυτόν. Ο κώδικας 2421 είναι αυτοσυμπληρούμενος, το οποίο σημαίνει ότι το συμπλήρωμα ως προς 9 ενός αριθμού του οποίου τα ψηφία είναι κωδικοποιημένα στον κώδικα 2421, προκύπτει με αντιστροφή των δυαδικών ψηφίων του.

Πίνακας 2.8

Κώδικας 2421

Δεκαδικό ψηφίο	2421
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	1011
6	1100
7	1101
8	1110
9	1111

Παράδειγμα 2.42. Να κωδικοποιηθεί ο αριθμός 9706 του δεκαδικού συστήματος στον δυαδικό κώδικα 2421.

Αντικαθιστώντας τα ψηφία του αριθμού σύμφωνα με τον Πίνακα 2.8 προκύπτει η κωδικοποίηση που δίδεται στη συνέχεια

$$9706_{10}=1111\ 1101\ 0000\ 1100_{2421}$$

2.7.3 Κώδικας XS3

Ο *κώδικας XS*3 χρησιμοποιείται επίσης για την κωδικοποίηση των ψηφίων των αριθμών του δεκαδικού συστήματος. Προκύπτει από τον κώδικα BCD με πρόσθεση σε κάθε ψηφίο του αριθμού 3. Η κωδικοποίηση των ψηφίων του δεκαδικού συστήματος στον κώδικα αυτόν δίδεται στον Πίνακα 2.9. Ο κώδικας XS3 είναι επίσης αυτοσυμπληρούμενος.

Πίνακας 2.9

Κώδικας XS3

Δεκαδικό ψηφίο	XS3
0	0011
1	0100
2	0101
3	0110
4	0111
5	1000
6	1001
7	1010
8	1011
9	1100

Παράδειγμα 2.43. Να κωδικοποιηθεί ο αριθμός 9706 του δεκαδικού συστήματος στον κώδικα XS3.

Αντικαθιστώντας τα ψηφία του αριθμού σύμφωνα με τον Πίνακα 2.9 έχουμε

$$9706_{10} = 1100\ 1010\ 0011\ 1001_{XS3}$$

2.7.4 Biquinary Code

Για την κωδικοποίηση των ψηφίων του δεκαδικού συστήματος μπορεί να χρησιμοποιηθούν περισσότερα από 4 ψηφία. Μία τέτοια κωδικοποίηση είναι η κωδικοποίηση στον biquinary κώδικα που δίδεται στον Πίνακα 2.10. Η κωδικοποίηση αυτή έχει την ιδιότητα ότι, όταν συμβεί ένα λάθος δηλαδή μία αλλαγή τιμής σε ένα από τα ψηφία μιας λέξης του κώδικα, προκύπτει μία λέξη που δεν ανήκει στον κώδικα και έτσι μπορεί να ανιχνευθεί το λάθος. Μια εισαγωγή στην ανίχνευση και την ανίχνευση και την διόρθωση λαθών δίδεται στο Παράρτημα Α

Πίνακας 2.10

Κώδικας Biquinary

Δεκαδικό ψηφίο	Biquinary Code
0	0110000
1	0101000
2	0100100
3	0100010
4	0100001
5	1010000
6	1001000
7	1000100
8	1000010
9	1000001

Παράδειγμα 2.44. Να κωδικοποιηθεί ο αριθμός 9706_{10} του δεκαδικού συστήματος στον biquinary κώδικα.

Σύμφωνα με τον Πίνακα 2.10 ισχύει

$$9706_{10} = 1000001\ 1000100\ 0110000\ 1001000_{biquinary}$$

2.7.5 Κώδικας 1-out-of-10

Μία άλλη κωδικοποίηση των δεκαδικών ψηφίων που έχει ιδιότητα ανίχνευσης λαθών σε ένα ψηφίο είναι ο κώδικας 1-out-of-10. Η κωδικοποίηση των ψηφίων του δεκαδικού συστήματος στον κώδικα 1-out-of-10 γίνεται με την αντικατάσταση των ψηφίων τους σύμφωνα με τον Πίνακα 2.10. Κάθε ψηφίο του δεκαδικού συστήματος παρίσταται με 10 δυαδικά ψηφία εκ των οποίων ένα μόνο έχει την τιμή 1. Η κωδικοποίηση αυτή χρησιμοποιεί μόνο 10 από τις 1024 κωδικοποιήσεις που είναι δυνατές με 10 bit.

Πίνακας 2.11

Κώδικας 1-out-of-10

Δεκαδικό ψηφίο	1-out-of-10
0	1000000000
1	0100000000
2	0010000000
3	0001000000
4	0000100000
5	0000010000
6	0000001000
7	0000000100
8	0000000010
9	0000000001

Παράδειγμα 2.45. Να κωδικοποιηθεί ο αριθμός 9706_{10} του δεκαδικού συστήματος στον κώδικα 1-out-of-10.

Σύμφωνα με τον Πίνακα 2.11 ισχύει

$$9706_{10} = 0000000001\ 0000000100\ 1000000000\ 0000001000_{1\text{-out-of-10}}$$

2.8 Κώδικες Gray

Σε πολλές εφαρμογές των ψηφιακών συστημάτων είναι επιθυμητό να χρησιμοποιηθούν δυαδικοί κώδικες των οποίων οι διαδοχικές λέξεις να διαφέρουν στην τιμή ενός μόνο bit. Μία τέτοια κατηγορία κωδίκων είναι οι κώδικες Gray. Οι *κώδικες Gray* είναι ανακλαστικοί κώδικες και οι λέξεις με *n* bit δομούνται σύμφωνα με τους κανόνες που δίδονται στη συνέχεια.

1) Ο κώδικας Gray του ενός bit έχει δύο κωδικές λέξεις τις 0, 1.
2) Οι 2^n πρώτες λέξεις του κώδικα Gray με n+1 bit είναι οι λέξεις του κώδικα Gray με n bit γραμμένες με τη σειρά και με ένα 0 στην αρχή.

3) Οι 2^n επόμενες λέξεις του κώδικα Gray με n+1 bit είναι οι λέξεις του κώδικα Gray με n bit γραμμένες με ανάστροφη σειρά και με ένα 1 στην αρχή.

Στο σχήμα 2.5 δίδεται ο τρόπος που παράγεται με διαδοχικές "ανακλάσεις" ο κώδικας Gray για 2, 3 και 4 bit ξεκινώντας από τον κώδικα Gray του ενός bit.

Κώδικες Gray			
1 bit	2 bit	3 bit	4 bit
0	00	000	0000
1	01	001	0001
	11	011	0011
	10	010	0010
		110	0110
		111	0111
		101	0101
		100	0100
			1100
			1101
			1111
			1110
			1010
			1011
			1001
			1000

Σχήμα 2.5. *Κώδικες Gray για 1, 2, 3 και 4 bit*

2.9 Κώδικες Χαρακτήρων

Οι *κώδικες χαρακτήρων* είναι πίνακες αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης ενός συνόλου χαρακτήρων με σειρές από bit. Υπάρχουν σήμερα σε χρήση πολλοί κώδικες χαρακτήρων όπως ο ASCII, ο UNICODE, κλπ.

2.9.1 Κώδικας ASCII

Σε πολλά ψηφιακά συστήματα απαιτείται η αναπαράσταση εκτός των αριθμών και άλλων χαρακτήρων, όπως γραμμάτων, σημείων στίξης, συμβόλων, κλπ. Για το σκοπό αυτό δημιουργήθηκαν οι αλφαριθμητικοί κώδικες, ο πιο διαδεδομένος από τους οποίους είναι ο κώδικας ASCII (American Standard Code for Information Interchange) που περιγράφεται στη συνέχεια. Ο *κώδικας ASCII* χρησιμοποιεί 7 bit για την κωδικοποίηση 128 ($=2^7$) χαρακτήρων όπως φαίνεται στον Πίνακα 2.12α. Ο κώδικας ASCII ξεκίνησε από τις ΗΠΑ και σύντομα τυποποιήθηκε διεθνώς σαν IA5 (International Alphabet 5). Από τους 128 χαρακτήρες που περιλαμβάνει, οι 95 είναι χαρακτήρες γραφής και οι 33 χαρακτήρες ελέγχου. Οι *χαρακτήρες ελέγχου* χρησιμοποιούνται για να ενεργοποιήσουν ή να τροποποιήσουν λειτουργίες κατά την εγγραφή, την επεξεργασία και τη μετάδοση δεδομένων. Η επεξήγησή τους δίδεται στον Πίνακα 2.12β.

Ένα σημαντικό μειονέκτημα του κώδικα ASCII είναι ότι, επειδή χρησιμοποιεί μόνο 7 bit, έχει 128 θέσεις και περιλαμβάνει μόνο λατινικούς χαρακτήρες. Στη χώρα μας υπάρχει ανάγκη ταυτόχρονης χρήσης τόσο των Λατινικών όσο και των Ελληνικών χαρακτήρων. Παρόμοιες ανάγκες υπάρχουν και σε άλλες χώρες με αλφάβητα διαφορετικά από το λατινικό. Για το λόγο αυτό δημιουργήθηκαν αρχικά επεκτάσεις του κώδικα ASCII που είχαν 256 λέξεις. Οι πρώτοι 128 λέξεις των κωδικών αυτών είναι ίδιες με αυτές του κώδικα ASCII, ενώ οι επόμενες 128 αντιστοιχούσαν σε πρόσθετους χαρακτήρες και σύμβολα ανάλογα με το αλφάβητο (Ελληνικό, Εβραϊκό, ….) που χρησιμοποιείται. Τη λύση στην πολυγλωσσία των κωδικών χαρακτήρων έδωσε ο κώδικας *Unicode*.

Το διεθνές πρότυπο *Unicode* στοχεύει στην κωδικοποίηση όλων των συστημάτων γραφής που χρησιμοποιούνται διεθνώς, ώστε να γίνει δυνατή η αποθήκευση στη μνήμη ενός υπολογιστή των χαρακτήρων κειμένου μιας οποιασδήποτε γλώσσας, συμπεριλαμβανομένων και των διαφόρων συμβόλων που χρησιμοποιούνται σε θετικές επιστήμες. Η καθιέρωση του Unicode είναι ένα φιλόδοξο σχέδιο, αφού σκοπεύει να αντικαταστήσει όλες τις υπάρχουσες κωδικοποιήσεις συνόλων χαρακτήρων, οι οποίες έχουν περιορισμούς που τις καθιστούν προβληματικές για χρήση σε πολυγλωσσικά υπολογιστικά συστήματα. Η πιο διαδεδομένη κωδικοποίηση του Unicode είναι η UTF-8 (UCS Transformation Format-8).

Πίνακας 2.12α

Κώδικας ASCII (American Standard Code for Information Interchange)

$b_6b_5b_4$

$b_3b_2b_1b_0$	000	001	010	011	100	101	110	111
0000	NULL	DLE	SP	0	@	P	`	p
0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0010	STX	DC2	“	2	B	R	b	r
0011	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0100	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	BEL	ETB	‘	7	G	W	g	w
1000	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1001	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1010	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1011	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1100	FF	FS	,	<	L	\	l	|
1101	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1110	SO	RS	.	>	N	^	n	~
1111	SI	US	/	?	O	_	o	DEL

Πίνακας 2.12β

Σύντομή επεξήγηση των χαρακτήρων ελέγχου του κώδικα ASCII

NULL	NULL	**DLE**	Data link escape
SOH	Start of heading	**DC1**	Device control 1
STX	Start of text	**DC2**	Device control 2
ETX	End of text	**DC3**	Device control 3
EOT	End of transmission	**DC4**	Device control 4
ENQ	Enquiry	**NAK**	Negative acknowledge
ACK	Acknowledge	**SYN**	Synchronous Idle
BEL	Bell	**ETB**	End of transmission block
BS	Backspace	**CAN**	Cancel
HT	Horizontal tab	**EM**	End of medium
LF	Line feed	**SUB**	Substitute
VT	Vertical tab	**ESC**	Escape
FF	Form feed	**FS**	File separator
CR	Carriage return	**GS**	Group separator
SO	Shift out	**RS**	Record separator
SI	Shift in	**US**	Unit separator
SP	Space	**DEL**	Delete

Παράδειγμα 2.46. Να κωδικοποιηθούν στο κώδικα ASCII ο χαρακτήρας του λατινικού αλφαβήτου Α και ο αριθμός 5.

Σύμφωνα με τον Πίνακα 2.12α έχουμε τις επόμενες κωδικοποιήσεις

$$A \rightarrow 100\ 0001_{ASCII}, \quad 5 \rightarrow 011\ 0101_{ASCII}$$

Ασκήσεις

2.1 Να μετατραπεί ο αριθμός 250 του δεκαδικού συστήματος στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.

2.2 Να μετατραπεί ο αριθμός 0.625 του δεκαδικού συστήματος στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.

2.3 Να μετατραπεί ο αριθμός 38.025 του δεκαδικού συστήματος στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.

2.4 Υπολογίστε τις δυνάμεις του 2 που δίδονται στη συνέχεια

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}$$

2.5 Υπολογίστε τις δυνάμεις του 2 που δίδονται στη συνέχεια

$$2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}$$

2.6 Να μετατραπεί ο αριθμός 111001 του δυαδικού συστήματος στο δεκαδικό σύστημα.

2.7 Να μετατραπεί ο αριθμός 0.1101 του δυαδικού συστήματος στο δεκαδικό σύστημα.

2.8 Να μετατραπεί ο αριθμός 1010.1101 του δυαδικού συστήματος στο δεκαδικό σύστημα.

2.9 Να μετατραπεί ο αριθμός 100000 του δυαδικού συστήματος στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Γενικεύσατε για τον αριθμό $1\underbrace{000\ldots00}_{n}$.

2.10 Να μετατραπεί χωρίς πράξεις ο αριθμός 11111 του δυαδικού συστήματος στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Γενικεύσατε για τον αριθμό $\underbrace{111\ldots11}_{n}$.

2.11 Να μετατραπεί ο αριθμός 1001100.1010001 του δυαδικού συστήματος αρίθμησης στο δεκαεξαδικό σύστημα.

2.12 Να μετατραπεί ο αριθμός 1001100.1010001 του δυαδικού συστήματος αρίθμησης στο οκταδικό σύστημα.

2.13 Να μετατραπεί ο αριθμός 3EF.114 του δεκαεξαδικού συστήματος αρίθμησης στο δυαδικό σύστημα.

2.14 Να μετατραπεί ο αριθμός 367.134 του οκταδικού συστήματος αρίθμησης στο δυαδικό σύστημα.

2.15 Να γίνουν οι προσθέσεις που δίδονται στην συνέχεια. Θεωρήστε ότι οι αριθμοί είναι μη προσημασμένοι δυαδικοί αριθμοί.

$$\begin{array}{r} 01100110 \\ +\ 01101100 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11100110 \\ +\ 11101100 \\ \hline \end{array}$$

2.16 Να εκτελεσθούν οι αφαιρέσεις που δίδονται στην συνέχεια. Υποθέσατε ότι οι αριθμοί είναι μη προσημασμένοι δυαδικοί αριθμοί.

$$\begin{array}{r} 11001100 \\ -\ 11001000 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10000001 \\ -\ 00001001 \\ \hline \end{array}$$

2.17 Να γίνει χωρίς πράξεις ο πολλαπλασιασμός που δίδεται στη συνέχεια στο δυαδικό σύστημα. Θεωρήστε ότι οι αριθμοί είναι μη προσημασμένοι δυαδικοί αριθμοί.

$$\begin{array}{r} 1101 \\ \times\ 1000 \\ \hline \end{array}$$

2.18 Να γίνει ο πολλαπλασιασμός που δίδεται στη συνέχεια στο δυαδικό σύστημα με την μέθοδο των μερικών γινομένων. Θεωρήστε ότι οι αριθμοί είναι μη προσημασμένοι δυαδικοί αριθμοί.

$$\begin{array}{r} 1101 \\ \times\ 1011 \\ \hline \end{array}$$

2.19 Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του δυαδικού αριθμού 11100010 με τον δυαδικό αριθμό 100.

2.20 Να γίνει η διαίρεση του αριθμού 250_{10} με τον αριθμό 12_{10} στο δυαδικό σύστημα.

2.21 Να αποδειχθεί η αλήθεια των επόμενων προτάσεων, $a_i \in \{0,1\}$.

α) $1 - a_i = \bar{a}_i$.

β) Για έναν τετραψήφιο δυαδικό αριθμό Α = $a_3a_2a_1a_0$, να αποδειχθεί ότι

$$2^4 - 1 - A = \bar{a}_3\,\bar{a}_2\,\bar{a}_1\,\bar{a}_0$$

($\bar{a}_i$ είναι το συμπλήρωμα του a_i)

2.22 Να μετατραπούν (αναλυτικά) οι αριθμοί +88, -88 του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης στους αντίστοιχους αριθμούς του δυαδικού συστήματος αρίθμησης.

1) σε σύστημα προσημασμένου μέτρου,
2) σε σύστημα συμπληρώματος του 1,
3) σε σύστημα συμπληρώματος του 2.

Η παράσταση να γίνει για 8 bit.

2.23 Να βρεθεί αναλυτικά ποιους προσημασμένους αριθμούς του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης παριστάνουν οι αριθμοί του δυαδικού συστήματος 10101011, 01100110 όταν θεωρούμε ότι είναι,

1) σε σύστημα προσημασμένου μέτρου,
2) σε σύστημα συμπληρώματος του 1,
3) σε σύστημα συμπληρώματος του 2.

2.24 Να παρασταθεί ότι ο προσημασμένος δυαδικός αριθμός **0**0001010 με 16 bit. Θεωρήστε ότι ο αριθμός είναι

1) σε σύστημα προσημασμένου μέτρου
2) σε σύστημα συμπληρώματος του 1
3) σε σύστημα συμπληρώματος του 2

2.25 Να παρασταθεί ότι ο προσημασμένος δυαδικός αριθμός **1**0001010 με 16 bit. Θεωρήστε ότι ο αριθμός είναι

1) σε σύστημα προσημασμένου μέτρου
2) σε σύστημα συμπληρώματος του 1
3) σε σύστημα συμπληρώματος του 2

2.26 Να γίνει η πράξη 11110100+00010001 όταν θεωρήσουμε ότι οι αριθμοί είναι σε σύστημα συμπληρώματος του 2.

2.27 Να γίνει η πράξη 11110100+00010001 όταν θεωρήσουμε ότι οι αριθμοί είναι σε σύστημα συμπληρώματος του 1.

2.28 Να παρασταθούν οι αριθμοί -55, -48 του δεκαδικού συστήματος στο δυαδικό σύστημα σε σύστημα συμπληρώματος του 1. Στη συνέχεια αφού γίνει η πρόσθεση (-55) + (-48) στο δυαδικό σύστημα, να μετατραπεί αναλυτικά το αποτέλεσμα στο δεκαδικό σύστημα. Η παράσταση των αριθμών να γίνει στα 8 bit. Αναφέρατε το χειρισμό του κρατουμένου.

2.29 Να παρασταθούν οι αριθμοί -55, -48 του δεκαδικού συστήματος στο δυαδικό σύστημα σε σύστημα συμπληρώματος του 2. Στη συνέχεια αφού γίνει η πρόσθεση (-55) + (-48) στο δυαδικό σύστημα να μετατραπεί αναλυτικά το αποτέλεσμα στο δεκαδικό σύστημα. Η παράσταση των αριθμών να γίνει στα 8 bit. Αναφέρατε το χειρισμό του κρατουμένου.

2.30 Να δοθούν οι παραστάσεις του μηδενός σε σύστημα προσημασμένου μέτρου, σε σύστημα συμπληρώματος του 1 και σε σύστημα συμπληρώματος του 2. Οι παραστάσεις να γίνουν για 8 bit.

2.31 Να δοθούν στο δυαδικό σύστημα και στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης ο μέγιστος και ο ελάχιστος προσημασμένος αριθμός που μπορούμε να παραστήσουμε σε σύστημα προσημασμένου μέτρου, σε σύστημα συμπληρώματος του 1 και σε σύστημα συμπληρώματος του 2 με 8 bit.

2.32 Υποθέστε ότι οι επόμενοι αριθμοί είναι σε σύστημα συμπληρώματος του 2.

A = 0111, B = 0111, C = 1100, D = 1110, E = 1001

Σε ποιες από τις επόμενες πράξεις γίνεται υπερχείλιση.

A+B, A+C, C+D, D+E

2.33 Να κωδικοποιηθεί στον κώδικα BCD (8421) ο αριθμός 338 του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.

2.34 Να βρεθεί σε ποιον αριθμό του δεκαδικού συστήματος αντιστοιχεί ο δυαδικός 10011000011, όταν θεωρήσουμε ότι είναι κωδικοποιημένος στον κώδικα BCD (8421).

2.35 Να κωδικοποιηθεί στον κώδικα 2421 ο αριθμός 338 του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης

2.36 Να κωδικοποιηθεί στον κώδικα XS3 ο αριθμός 338 του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.

2.37 Να βρεθεί σε ποιον αριθμό του δεκαδικού συστήματος αντιστοιχεί ο δυαδικός 10011000011, όταν θεωρήσουμε ότι είναι κωδικοποιημένος στον κώδικα BCD (8421).

2.38 Να βρεθεί σε ποιον αριθμό του δεκαδικού συστήματος αντιστοιχεί ο δυαδικός 10011000011, όταν θεωρήσουμε ότι είναι κωδικοποιημένος στον κώδικα 2421.

2.39 Να βρεθεί σε ποιον αριθμό του δεκαδικού συστήματος αντιστοιχεί ο δυαδικός 10011000011, όταν θεωρήσουμε ότι είναι κωδικοποιημένος στον κώδικα XS3.

2.40 Δώστε τη διάταξη των bit που απεικονίζει το δεκαδικό αριθμό 235 α) στο δυαδικό σύστημα β) στον κώδικα BCD (Binary Coded Decimal) γ) στον κώδικα ASCII (7 bit).

2.41 Να κωδικοποιηθούν στον κώδικα ASCII οι χαρακτήρες

#, A, B, C, a, b, c, +

2.42 Να βρεθεί ποιοι χαρακτήρες του κώδικα ASCII αντιπροσωπεύουν οι επόμενοι δυαδικοί αριθμοί

1101110, 0111001, 0111000

2.43 Να δοθεί ο κώδικας Gray για 1, 2, 3 και 4 bit.

2.44 Για τον κώδικα ASCII ποιο bit πρέπει να αλλάξουμε για να κάνουμε τα μικρά γράμματα του Αγγλικού αλφαβήτου κεφαλαία.

2.45 Δώστε την διάταξη των bits που απεικονίζει τον δεκαδικό αριθμό 235 α) στο δυαδικό σύστημα β) στον κώδικα BCD (Binary Coded Decimal) γ) στον κώδικα ASCII (με 7 bit).