

ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΛΟΓΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Απλοποίηση λογικής παράστασης

Τα σύγχρονα ψηφιακά ολοκληρωμένα κυκλώματα είναι επιθυμητό να λειτουργούν με μεγάλη ταχύτητα, να καταλαμβάνουν την μικρότερη δυνατή επιφάνεια στο ολοκληρωμένο κύκλωμα και να καταναλώνουν την μικρότερη ισχύ.

Μία πρώτη προσέγγιση στο να επιτευχθούν οι πιο πάνω στόχοι είναι να προσδιορισθεί η απλούστερη λογική παράσταση των λογικών συναρτήσεων που θέλουμε να υλοποιήσουμε.

Οι δύο βασικοί τρόποι απλοποίησης είναι με χρήση των **κανόνων της Άλγεβρας Boole** και με **χρήση χαρτών Karnaugh**.

Απλοποίηση με κανόνες της Άλγεβρας Boole

$$\begin{aligned}f &= xy\bar{z} + xyz = \\ &= xy(\bar{z} + z) \\ &= xy1 \\ &= xy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f &= xy\bar{z} + x\bar{y}z + xyz \\ &= xy(\bar{z} + z) + x\bar{y}z \\ &= xy + x\bar{y}z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f &= xy\bar{z} + x\bar{y}z + xyz \\ &= xy\bar{z} + x\bar{y}z + xyz + xyz \\ &= xy(\bar{z} + z) + xz(\bar{y} + y) \\ &= xy + xz\end{aligned}$$

Χάρτες Karnaugh

Οι **χάρτες Karnaugh** (*Karnaugh maps*) είναι διδιάστατοι πίνακες αληθείας που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση και την απλοποίηση λογικών συναρτήσεων με γραφικό τρόπο.

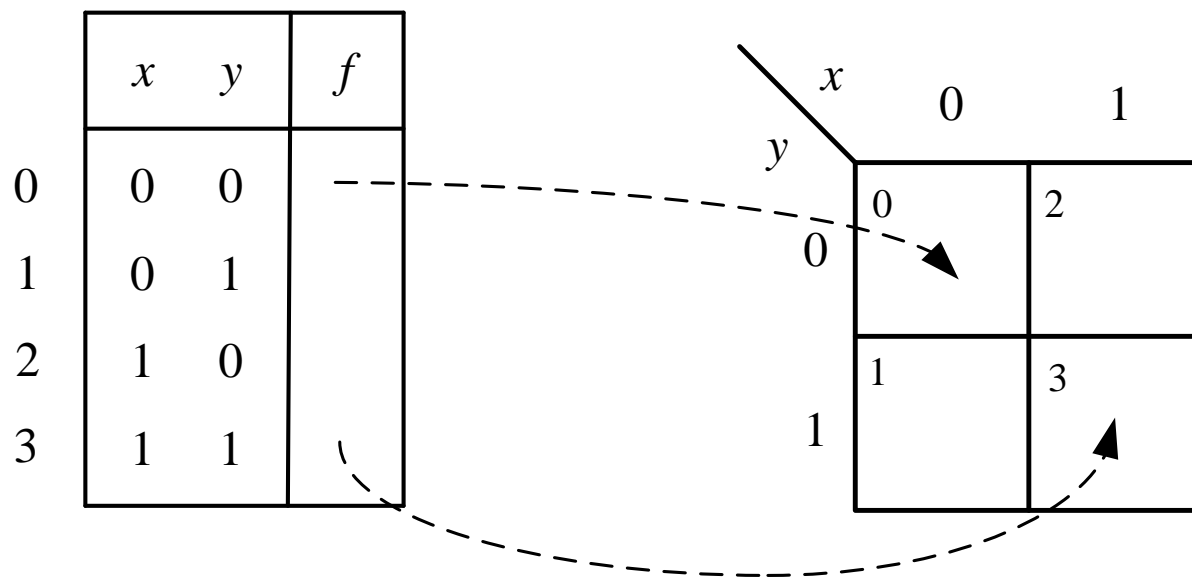
Χάρτες Karnaugh 2, 3, 4 μεταβλητών

x	0	1
y	0	1
0	0	2
1	1	3

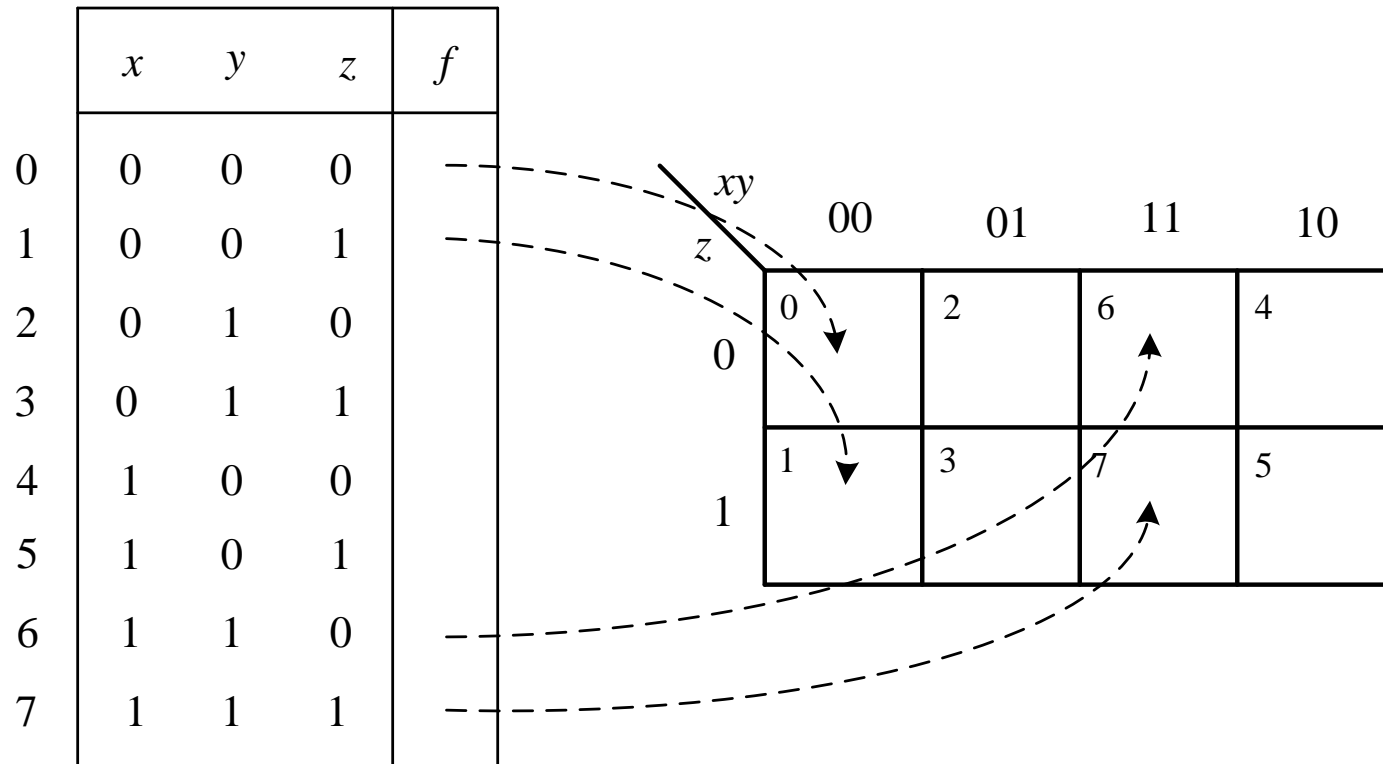
xy	00	01	11	10
z	0	1		
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

xy	00	01	11	10
zw	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

Απεικόνιση πίνακα αληθείας 2 μεταβλητών σε χάρτη Karnaugh



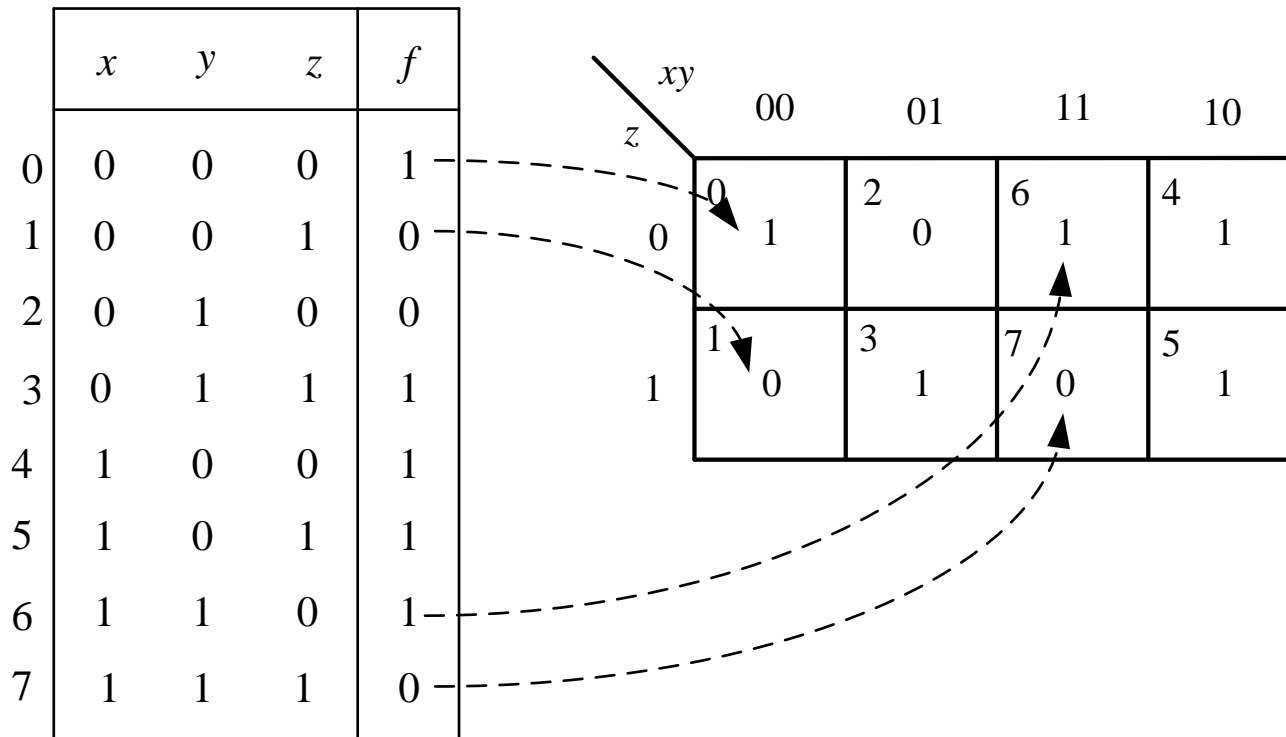
Απεικόνιση πίνακα αληθείας 3 μεταβλητών σε χάρτη Karnaugh



Παράδειγμα. Να απεικονισθεί σε χάρτη Karnaugh η λογική συνάρτηση της οποίας ο πίνακας αληθείας δίδεται στην συνέχεια.

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Υπόδειξη



Παράδειγμα. Να απεικονισθεί σε χάρτη Karnaugh η (κανονική) λογική παράσταση

$$f = \bar{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \bar{z}$$

Υπόδειξη

$$f = \underbrace{\bar{x} \cdot y \cdot z}_3 + \underbrace{x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}}_4 + \underbrace{x \cdot \bar{y} \cdot z}_5 + \underbrace{x \cdot y \cdot \bar{z}}_6 = \sum m(3, 4, 5, 6)$$

Τοποθετούμε 1 στα τετράγωνα 3, 4, 5, 6, και 0 στα υπόλοιπα

		<i>xy</i>			
		00	01	11	10
<i>z</i>	0	0 0	2 0	6 1	4 1
	1	1 0	3 1	7 0	5 1

Παράδειγμα 3.23. Να απεικονισθεί σε χάρτη Karnaugh η λογική παράσταση

$$f = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} + x \cdot \bar{y} \cdot z \cdot w + x \cdot y \cdot z \cdot \bar{w} + x \cdot y \cdot z \cdot w$$

Υπόδειξη

$$f = \underbrace{\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot \bar{w}}_0 + \underbrace{x \cdot \bar{y} \cdot z \cdot w}_{11} + \underbrace{x \cdot y \cdot z \cdot \bar{w}}_{14} + \underbrace{x \cdot y \cdot z \cdot w}_{15} = \sum m(0, 11, 14, 15)$$

Τοποθετούμε 1 στα τετράγωνα 0, 11, 14, 15 και 0 στα υπόλοιπα

		<i>xy</i>			
		00	01	11	10
<i>zw</i>	00	0 1	4 0	12 0	8 0
	01	1 0	5 0	13 0	9 0
	11	3 0	7 0	15 1	11 1
	10	2 0	6 0	14 1	10 0

Παράδειγμα. Να απεικονισθεί σε χάρτη Karnaugh η λογική παράσταση

$$f = xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y$$

Υπόδειξη

Μετατρέπουμε την λογική παράσταση σε κανονική

$$\begin{aligned} f &= xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y = \\ &= xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y1 = \\ &= xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y(z + \bar{z}) = \\ &= \underbrace{xyz}_7 + \underbrace{xy\bar{z}}_6 + \underbrace{\bar{x}yz}_3 + \underbrace{\bar{x}y\bar{z}}_2 \end{aligned}$$

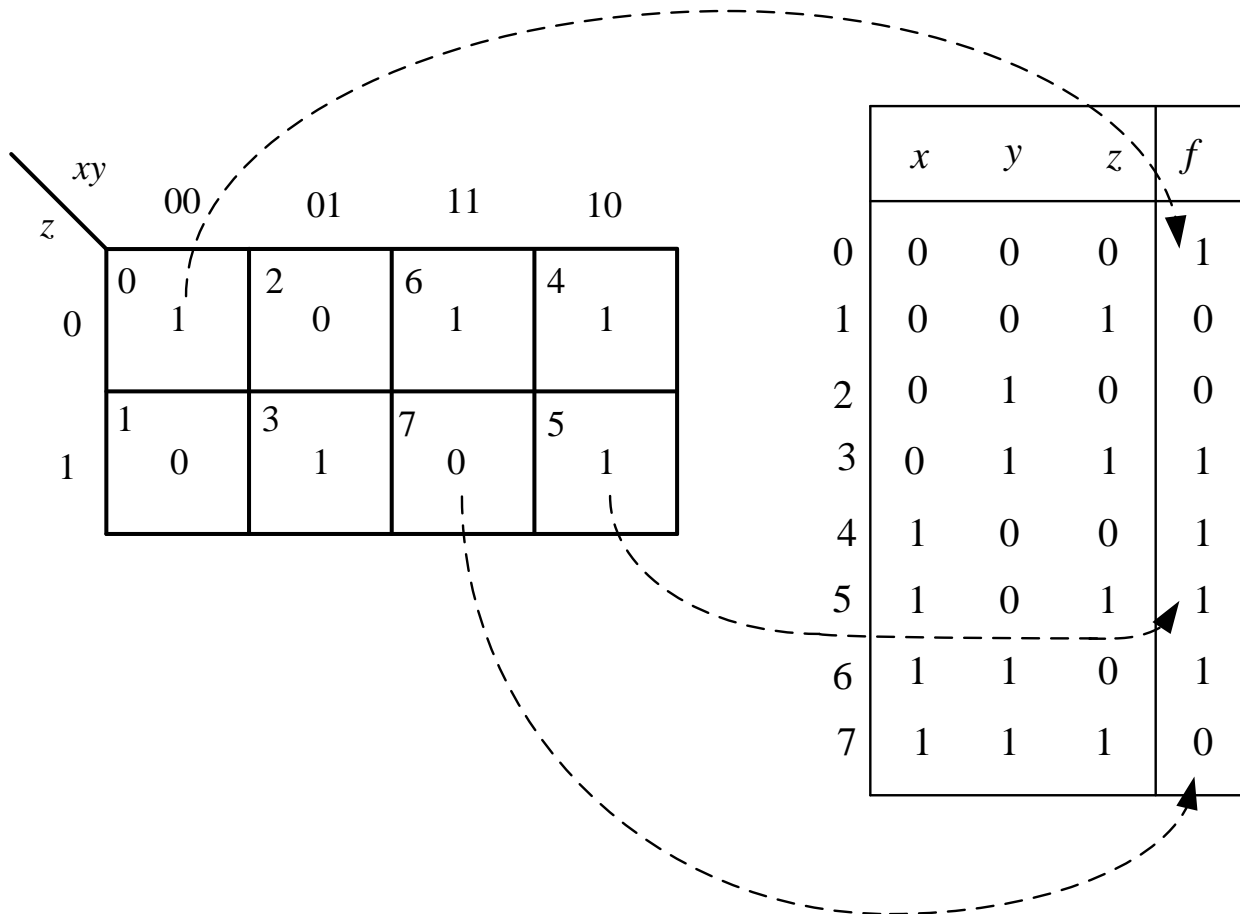
$\begin{array}{l} xy \\ z \end{array}$	00	01	11	10
0	0 0	2 1	6 1	4 0
1	1 0	3 1	7 1	5 0

Παράδειγμα. Να απεικονισθεί σε πίνακα αληθείας η λογική συνάρτηση της οποίας η απεικόνιση σε χάρτη Karnaugh δίδεται στην συνέχεια.

		xy			
		00	01	11	10
z	0	0 1	2 0	6 1	4 1
	1	1 0	3 1	7 0	5 1

Υπόδειξη

Τοποθετείται 1 στις γραμμές 0, 3, 4, 5, 6 του πίνακα αληθείας και 0 στις υπόλοιπες (1, 2, 7).

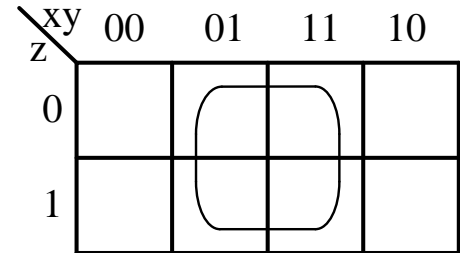
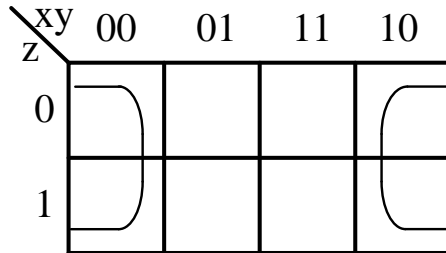
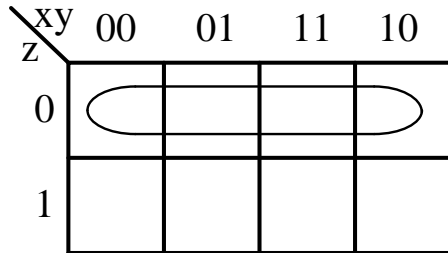
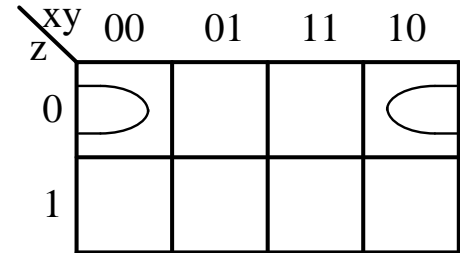
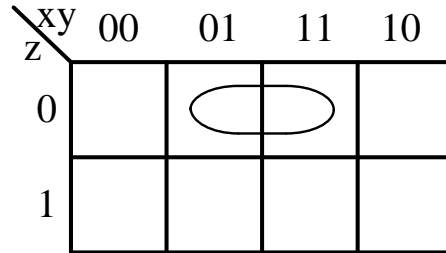
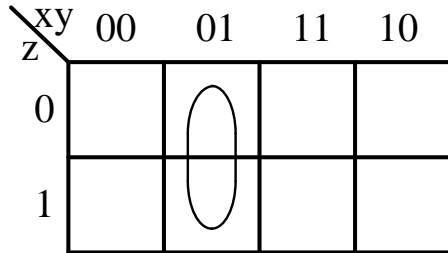


Απλοποίηση με χάρτες Karnaugh

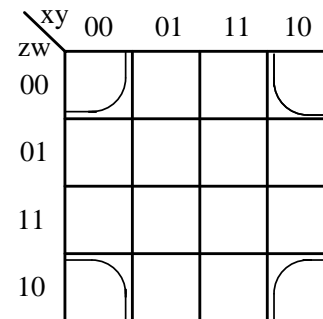
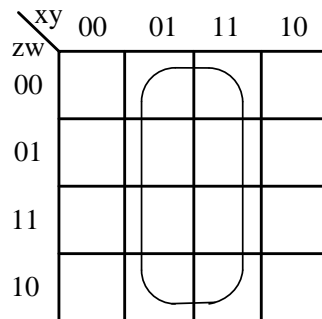
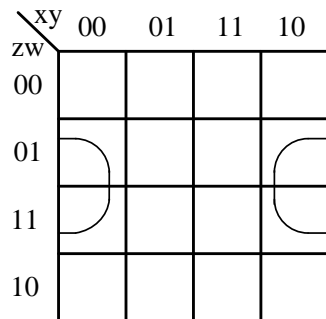
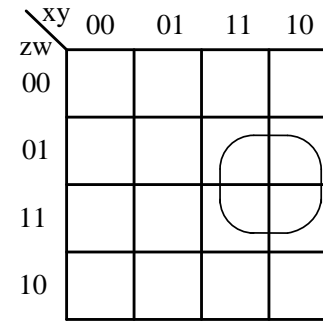
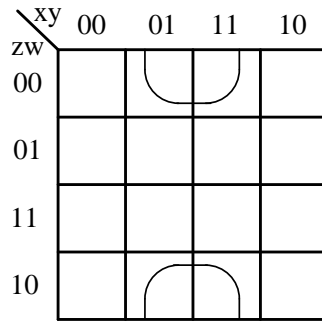
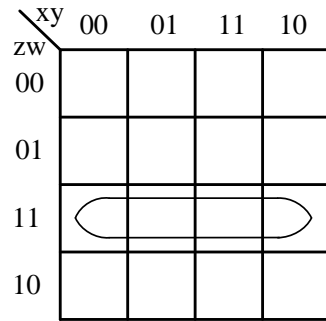
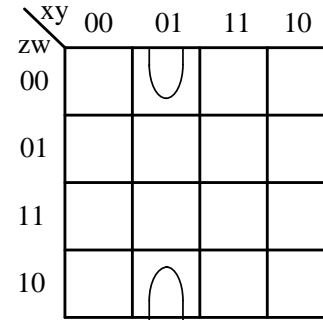
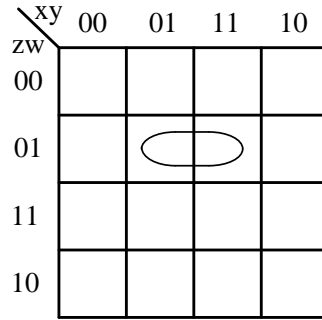
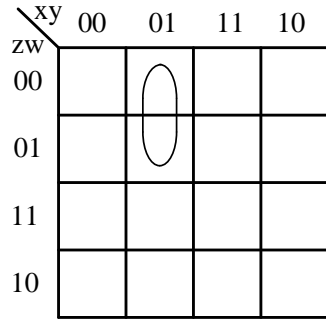
Η απλοποίηση με τους χάρτες Karnaugh προκύπτει με την εφαρμογή των κανόνων που δίδονται στην συνέχεια.

- 1) Παρατηρούμε τον χάρτη Karnaugh και προσπαθούμε να σχηματίσουμε ομάδες με όσο το δυνατόν περισσότερα γειτονικά 1.
- 2) Ο αριθμός των 1 σε κάθε σχηματιζόμενη ομάδα πρέπει να είναι δύναμη του 2 (1, 2, 4, ...).
- 3) Κάθε 1 πρέπει να ανήκει σε μία τουλάχιστον ομάδα.
- 4) Κάθε τετραγωνίδιο με "1" πρέπει να μετέχει στον ελάχιστο αριθμό ομάδων.
- 5) Ομάδα με 2 γειτονικά 1 σημαίνει απαλοιφή μίας μεταβλητής, αυτής που αλλάζει τιμή, ενώ ομάδα με 4 γειτονικά 1 σημαίνει απαλοιφή δύο μεταβλητών αυτών που αλλάζουν τιμή.

Κανόνες σχηματισμού ομάδων για τρεις μεταβλητές



Κανόνες σχηματισμού ομάδων για τέσσερις μεταβλητές



Παράδειγμα. Απλοποίηση της λογικής συνάρτησης

$$f = \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz$$

$$f = \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz$$

2 3

Σχηματίζεται μια ομάδα των δύο 1 στα τετραγωνίδια 2, 3. Στην ομάδα αυτή η μεταβλητή x έχει την τιμή 0, οπότε στο αντίστοιχο λογικό γινόμενο συμπεριλαμβάνεται το \bar{x} η μεταβλητή y έχει την τιμή 1 οπότε συμπεριλαμβάνεται το y , ενώ η μεταβλητή z αλλάζει τιμή, και δεν συμπεριλαμβάνεται στο γινόμενο.

Με χάρτες Karnaugh

		xy		$\bar{x} \cdot y$	
		00	01	11	10
z	0	0 0	2 1	6 0	4 0
	1	1 0	3 1	7 0	5 0

$$f = \bar{x}y$$

Ισοδύναμη απλοποίηση με κανόνες της Άλγεβρας Boole

$$\begin{aligned} f &= \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz = \\ &= \bar{x}y(\bar{z} + z) \\ &= \bar{x}y1 \\ &= \bar{x}y \end{aligned}$$

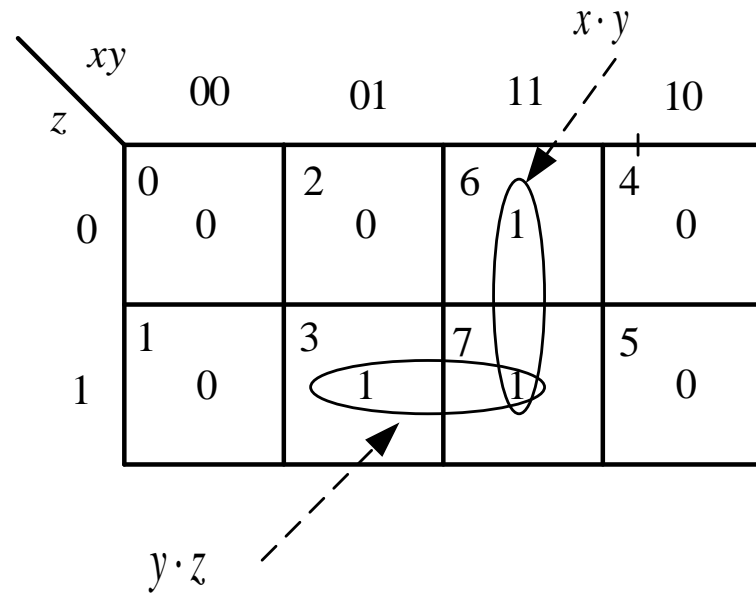
Παράδειγμα. Απλοποίηση της λογικής συνάρτησης

$$f = \bar{x}yz + xy\bar{z} + xyz$$

Με χάρτες Karnaugh

$$f = \bar{x}yz + xy\bar{z} + xyz$$

3 6 7



$$f = xy + yz$$

Με κανόνες της Άλγεβρας Boole

$$\begin{aligned} f &= \bar{x}yz + xy\bar{z} + xyz = \\ &= \bar{x}yz + xy\bar{z} + xyz + xyz = \\ &= (x + \bar{x})yz + xy(\bar{z} + z) \\ &= yz + xy \\ &= xy + yz \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.24. Να απλοποιηθεί με χάρτες Karnaugh η λογική συνάρτηση

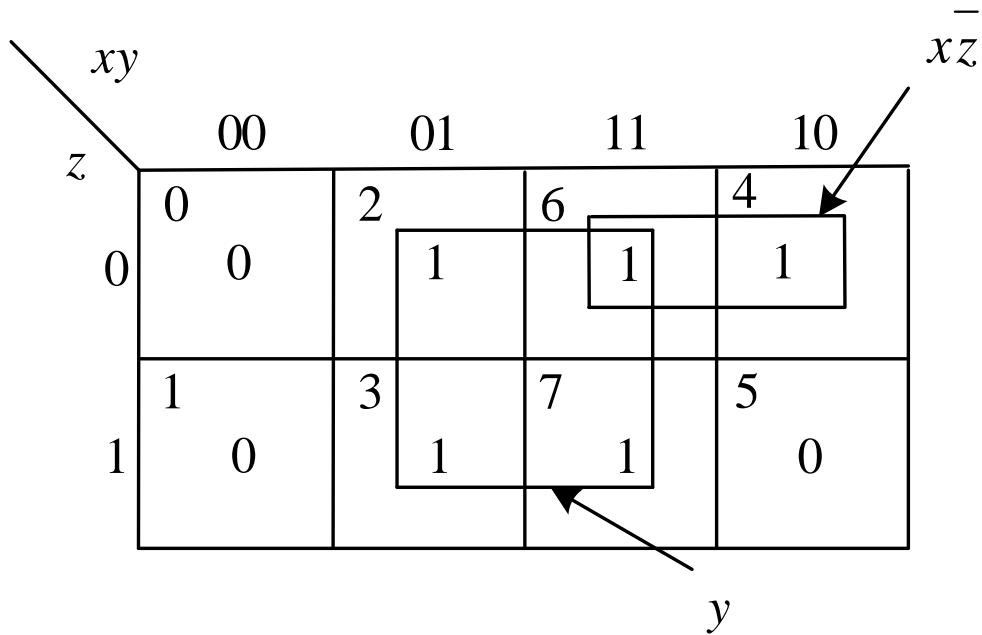
$$f(x, y, z) = \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + xyz$$

Υπόδειξη

$$f(x, y, z) = \underbrace{\bar{x}y\bar{z}}_2 + \underbrace{\bar{x}yz}_3 + \underbrace{x\bar{y}\bar{z}}_4 + \underbrace{xy\bar{z}}_6 + \underbrace{xyz}_7$$

		xy			
		00	01	11	10
z	0	0 0	2 1	6 1	4 1
	1	1	3 1	7 1	5

Υπόδειξη



$$f = x\bar{z} + y$$

Παράδειγμα. Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση της οποίας η απεικόνιση σε χάρτη Karnaugh δίδεται στην συνέχεια.

xy z	00	01	11	10
0	0 1	2 1	6 1	4 1
1	1 0	3 1	7 1	5 0

Υπόδειξη

$xy \backslash z$	00	01	11	10
0	0 1	2 1	6 1	4 1
1	1 0	3 1	7 1	5 0

The diagram shows a 2x4 Karnaugh map for a function of three variables x, y, z . The columns are labeled xy (00, 01, 11, 10) and the rows are labeled z (0, 1). The cells contain the values of the function f . A dashed line indicates the prime implicant $y + \bar{z}$, which covers the cells where $y=1$ and $z=0$ (cells 2, 6, 4) and the cells where $y=0$ and $z=1$ (cells 3, 7).

$$f = y + \bar{z}$$

Παράδειγμα. Απλοποίηση της λογικής παράστασης

$$f = \bar{x} \bar{y} z + x \bar{y} z$$

Υπόδειξη

$$f = \underbrace{\bar{x} \bar{y} z}_1 + \underbrace{x \bar{y} z}_5$$

Με χάρτες Karnaugh

		xy				$\bar{y}z$
		00	01	11	10	
z	0	0 0	2 0	6 0	4 0	
	1	1 1	3 0	7 0	5 1	

$$f = \bar{y}z$$

Με κανόνες της Άλγεβρας Boole

$$\begin{aligned} f &= \bar{x} \bar{y} z + x \bar{y} z \\ &= (\bar{x} + x) \bar{y} z \\ &= 1 \bar{y} z \\ &= \bar{y} z \end{aligned}$$

Παράδειγμα. Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση της οποίας η απεικόνιση σε χάρτη Karnaugh δίδεται στην συνέχεια.

xy z	00	01	11	10
0	0 1	2 0	6 1	4 0
1	1 0	3 0	7 1	5 0

Υπόδειξη

$\begin{matrix} xy \\ z \end{matrix}$	00	01	11	10
0	0 1	2 0	6 1	4 0
1	1 0	3 0	7 1	5 0

Diagram illustrating a Karnaugh map for a function $f(x, y, z)$. The map is a 2x4 grid with columns labeled 00, 01, 11, 10 and rows labeled 0, 1. The top-left cell (0, 00) contains a 1, circled. The top-right cell (0, 11) contains a 1, circled. The bottom-right cell (1, 11) contains a 1, circled. Dashed arrows point from the circled 1s to the terms $\overline{x}\overline{y}\overline{z}$ and xy respectively.

$$f = \overline{x}\overline{y}\overline{z} + xy$$

Παράδειγμα 3.25. Να απλοποιηθεί με χάρτες Karnaugh η λογική συνάρτηση

$$f(x, y, z, w) = \sum m(0,2,5,7,8,10,13,15)$$

Υπόδειξη

xy	00	01	11	10	
zw	00	01	11	10	$\overline{y} \overline{w}$
00	0 1	4 0	12 0	8 1	↙
01	1 0	5 1	13 1	9 0	↙
11	3 0	7 1	15 1	11 0	
10	2 1	6 0	14 0	10 1	

$$f = \overline{y} \overline{w} + y w$$

Παράδειγμα. Να απλοποιηθεί με χάρτες Karnaugh η λογική συνάρτηση

$$f = xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y$$

Υπόδειξη

Μετατρέπουμε πρώτα την συνάρτηση σε κανονική

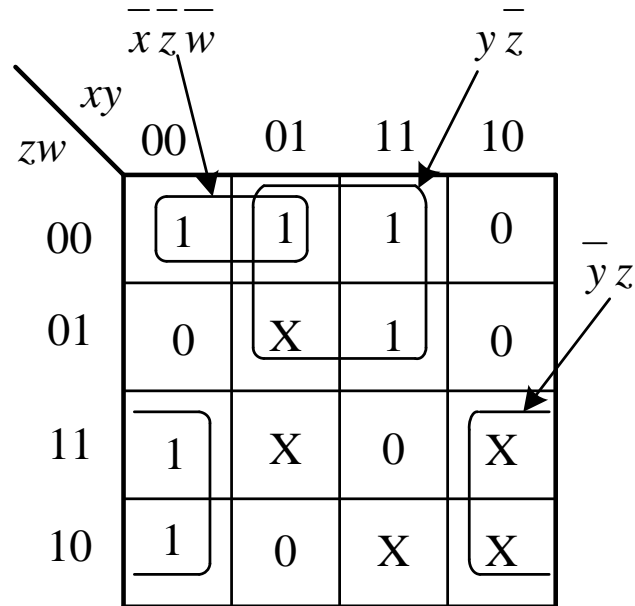
$$\begin{aligned} f &= xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y = \\ &= xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y1 = \\ &= xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y(z + \bar{z}) = \\ &= \underbrace{xyz}_7 + \underbrace{xy\bar{z}}_6 + \underbrace{\bar{x}yz}_3 + \underbrace{\bar{x}y\bar{z}}_2 \end{aligned}$$

	xy	00	01	11	10
z	0	0	2 1	6 1	4 0
1	1	0	3 1	7 1	5 0

$$f=y$$

Απλοποίηση με χάρτες Karnaugh μη πλήρως καθορισμένων λογικών συναρτήσεων*

x	y	z	w	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	X
0	1	1	0	0
0	1	1	1	X
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	X
1	1	1	1	0



$$f = \bar{x} \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} + y \cdot \bar{z} + \bar{y} \cdot z$$

Απλοποίηση σε γινόμενο αθροισμάτων

Παράδειγμα 3.27. Να απλοποιηθεί με χάρτες Karnaugh η λογική συνάρτηση

$$f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + xyz$$

Υπόδειξη

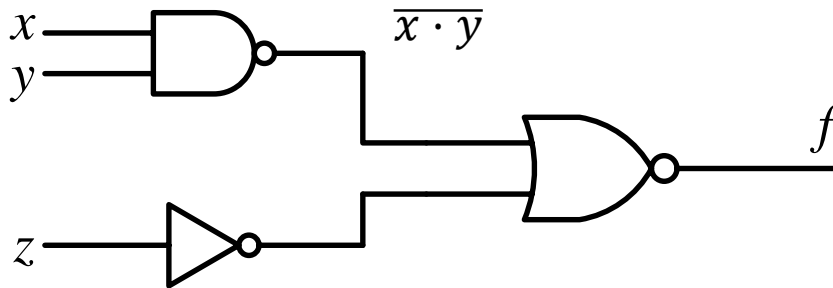
$$f(x, y, z) = \underbrace{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}_2 + \underbrace{\bar{x}yz}_3 + \underbrace{x\bar{y}\bar{z}}_4 + \underbrace{xy\bar{z}}_6 + \underbrace{xyz}_7$$

z	xy	00	01	11	10
0		0	1	1	1
1		1	1	1	0

$$f(x, y, z) = (x + y)(y + \bar{z})$$

Ασκήσεις

5.1 Να δοθεί σε απλοποιημένη μορφή η λογική παράσταση που υλοποιεί το κύκλωμα που δίνεται στη συνέχεια, καθώς και ο αντίστοιχος πίνακας αληθείας.



Υπόδειξη

$$f = \overline{\overline{x \cdot y + z}}$$
$$= \overline{\overline{x \cdot y} \cdot \overline{z}}$$

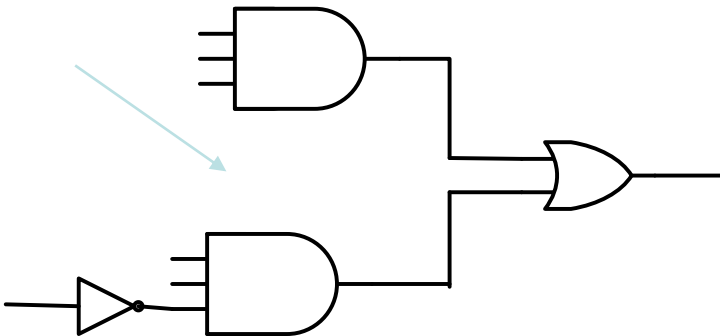
$$f = xyz$$

5.2 Να απλοποιηθεί με κανόνες της Άλγεβρας Boole η λογική παράσταση που δίδεται στην συνέχεια.

$$f = xyz + xy\bar{z}$$

Υλοποιήστε την δοσμένη, αλλά και την απλοποιημένη της μορφή με λογικές πύλες AND, OR, NOT. Συγκρίνατε.

$$f = xyz + xy\bar{z}$$

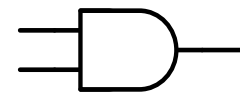


$$f = xyz + xy\bar{z}$$

$$= xy(z + \bar{z})$$

$$= xy1$$

$$= xy$$



5.3 Να απεικονισθεί σε χάρτη Karnaugh η λογική συνάρτηση που περιγράφεται στον επόμενο πίνακα αληθείας.

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Υπόδειξη

	x	y	z	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

z \ xy	00	01	11	10
0	0 0	2 1	6	4 1
1	1 1	3	7	5

5.4 Να απεικονισθούν σε χάρτη Karnaugh οι λογικές παραστάσεις που δίδεται στην συνέχεια.

$$f = xy + \bar{x}\bar{y}$$

$$g = x\bar{y} + \bar{x}y$$

Υπόδειξη

		x	
		0	1
y	0	0 1	2
	1	1	3 1

		x	
		0	1
y	0	0	2 1
	1	1 1	3

5.4 Να απεικονισθούν σε χάρτη Karnaugh οι λογικές παραστάσεις που δίδονται στην συνέχεια.

$$f = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z$$

$$g = xyz + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z$$

	<i>z</i>	<i>xy</i>	00	01	11	10
0			0	2	6 1	4
1			1	3	7 1	5 1

	<i>z</i>	<i>xy</i>	00	01	11	10
0			0	2	6	4
1			1 1	3	7 1	5 1

5.5 Να απεικονισθούν σε χάρτη Karnaugh η λογική παράσταση που δίδεται στην συνέχεια.

$$f = xy + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}$$

5.6 Από τον χάρτη Karnaugh που δίδεται στη συνέχεια να εξαχθεί η λογική συνάρτηση σε μορφή αθροίσματος ελαχίστων όρων.

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	0 0	2 1	6 1	4 0
1	1 1	3 0	7 0	5 1

5.7 Από τον χάρτη Karnaugh που δίδεται στη συνέχεια να εξαχθεί η λογική συνάρτηση σε μορφή αθροίσματος ελαχίστων όρων.

		xy			
		00	01	11	10
zw	00	0 0	4 0	12 1	8 0
	01	1 0	5 1	13 0	9 0
	11	3 0	7 0	15 1	11 1
	10	2 0	6 1	14 0	10 0

Υπόδειξη

$$f = \sum m(5, 6, 11, 12, 15)$$

$$f = \bar{x} \bar{y} \bar{z} w + \bar{x} y z \bar{w} + x \bar{y} z w + x y \bar{z} \bar{w} + x y z w$$

5.8 Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση της οποίας η απεικόνιση σε χάρτη Karnaugh δίδεται στην συνέχεια.

$xy \backslash z$	00	01	11	10
0	0 1	2 1	6 1	4 1
1	1 0	3 1	7 1	5 0

Υπόδειξη

$xy \backslash z$	00	01	11	10
0	0 1	2 1	6 1	4 1
1	1 0	3 1	7 1	5 0

5.9 Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση της οποίας η παράσταση σε χάρτη Karnaugh δίδεται στην συνέχεια.

$xy \backslash z$	00	01	11	10
0	0 0	2 1	6 1	4 0
1	1 1	3 0	7 0	5 1

Υπόδειξη

xy z	00	01	11	10
0	0 0	2 1	6 1	4 0
1	1 1	3 0	7 0	5 1

5.10 Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση της οποίας η απεικόνιση σε χάρτη Karnaugh δίδεται στη συνέχεια.

xy	00	01	11	10
zw				
00	0 0	4 1	12 0	8 0
01	1 1	5 1	13 1	9 1
11	3 0	7 1	15 0	11 0
10	2 0	6 1	14 0	10 0

5.11 Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση της οποίας η απεικόνιση σε χάρτη Karnaugh δίδεται στη συνέχεια.

xy		zw			
		00	01	11	10
zw	00	0 1	4 0	12 0	8 1
	01	1 0	5 1	13 1	9 0
	11	3 0	7 1	15 1	11 0
	10	2 1	6 0	14 0	10 1

Υπόδειξη

		xy			
		00	01	11	10
zw	00	0 1	4 0	12 0	8 1
	01	1 0	5 1	13 1	9 0
	11	3 0	7 1	15 1	11 0
	10	2 1	6 0	14 0	10 1

5.12 Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση της οποίας η παράσταση σε με χάρτη Karnaugh δίδεται στην συνέχεια

xy \ zw	00	01	11	10
00	0 1	4 1	12 0	8 0
01	1 1	5 1	13 1	9 0
11	3 0	7 1	15 1	11 0
10	2 0	6 0	14 0	10 0

Υπόδειξη

xy \ zw	00	01	11	10
00	0 1	4 1	12 0	8 0
01	1 1	5 1	13 1	9 0
11	3 0	7 1	15 1	11 0
10	2 0	6 0	14 0	10 0

5.13 Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση της οποίας η παράσταση σε με χάρτη Karnaugh δίδεται στην συνέχεια.

xy \ zw	00	01	11	10
00	0 0	4 1	12 1	8 0
01	1 1	5 0	13 0	9 1
11	3 1	7 0	15 0	11 1
10	2 0	6 1	14 1	10 0

Υπόδειξη

xy \ zw	00	01	11	10
00	0 1	4 1	12 0	8 0
01	1 1	5 1	13 1	9 0
11	3 0	7 1	15 1	11 0
10	2 0	6 0	14 0	10 0

Υπόδειξη

xy \ zw	00	01	11	10
00	0 0	4 1	12 1	8 0
01	1 1	5 0	13 0	9 1
11	3 1	7 0	15 0	11 1
10	2 0	6 1	14 1	10 0

5.14 Να υλοποιηθεί με πύλες AND, OR, NOT η κανονική λογική παράσταση που δίδεται στην συνέχεια.

$$f = xyz + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz$$

Στην συνέχεια να απλοποιηθεί με χάρτες Karnaugh. Να υλοποιηθεί η απλοποιημένη λογική παράσταση με πύλες AND, OR, NOT. Συγκρίνατε.

Υπόδειξη

$$f = xyz + xy\bar{z} + \bar{x}yz = \sum m(3, 6, 7)$$

$\begin{array}{l} xy \\ z \end{array}$	00	01	11	10
0	0 0	2 0	6 1	4 0
1	1 0	3 1	7 1	5 0

$$f = xy + yz$$