

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Αριθμητικά Συστήματα-Κώδικες)

1. Έστω ο δυαδικός αριθμός των 8 bit 00010000 για τον οποίο θεωρούμε ότι είναι παράσταση αριθμού σε σύστημα προσημασμένου μέτρου. Να παρασταθεί ο ίδιος αριθμός με 16 bit σε σύστημα προσημασμένου μέτρου.

### Υπόδειξη

Ο αριθμός είναι θετικός. Επομένως το MSB της αναπαράστασης του αριθμού στα 16 bit είναι 0. Η αναπαράσταση του μέτρου στα 15 bit γίνεται τοποθετώντας οκτώ μηδενικά στην αρχή του δοσμένου αριθμού.

$$0001\ 0000 \rightarrow 00000000\ 00010000$$

2. Έστω ο δυαδικός αριθμός 10011000 για τον οποίο θεωρούμε ότι είναι παράσταση αριθμού σε σύστημα προσημασμένου μέτρου. Να παρασταθεί ο ίδιος αριθμός με 16 bit σε σύστημα προσημασμένου μέτρου.

### Υπόδειξη

Ο αριθμός είναι αρνητικός. Επομένως το MSB της αναπαράστασης του αριθμού στα 16 bit είναι 0. Η αναπαράσταση του μέτρου στα 15 bit γίνεται τοποθετώντας οκτώ μηδενικά στην αρχή του δοσμένου αριθμού.

$$1001\ 0000 \rightarrow 10000000\ 00010000$$

3. Έστω ο δυαδικός αριθμός 10010000 για τον οποίο θεωρούμε ότι είναι παράσταση αριθμού σε σύστημα συμπληρώματος του 2. Να παρασταθεί ο ίδιος αριθμός με 16 bit σε σύστημα συμπληρώματος του 2.

### Υπόδειξη

Τα οκτώ πιο σημαντικά ψηφία της αναπαράστασης του αριθμού στα 16 bit είναι ότι και το bit προσήμου του αριθμού στα 8 bit.

$$00011000 \rightarrow 00000000\ 00011000$$

4. Έστω ο δυαδικός αριθμός 10010000 για τον οποίο θεωρούμε ότι είναι παράσταση αριθμού σε σύστημα συμπληρώματος του 2. Να παρασταθεί ο ίδιος αριθμός με 16 bit σε σύστημα συμπληρώματος του 2.

### Υπόδειξη

Τα οκτώ πιο σημαντικά ψηφία της αναπαράστασης του αριθμού στα 16 bit είναι ότι και το bit προσήμου.

$$1001\ 0000 \rightarrow 11111111\ 10010000$$

5. Να μετατραπεί ο μη προσημασμένος αριθμός 1001100.1010001 του δυαδικού συστήματος αρίθμησης στο δεκαεξαδικό σύστημα.

### Υπόδειξη

Για την μετατροπή ενός αριθμού του δυαδικού συστήματος στο δεκαεξαδικό σύστημα χωρίζουμε τα δυαδικά ψηφία σε τετράδες προς τα αριστερά και προς τα δεξιά αρχίζοντας από την υποδιαστολή. Συμπληρώνουμε με μηδενικά εάν χρειάζεται αριστερά και δεξιά για να σχηματισθούν τετράδες. Την κάθε τετράδα την αναπαριστούμε με το αντίστοιχο δεκαεξαδικό ψηφίο. Στην συνέχεια δίδεται η μετατροπή του δοσμένου αριθμού στο δεκαεξαδικό σύστημα.

$$1001100.1010001 = \underbrace{0100}_4 \underbrace{1100}_C \underbrace{1010}_A \underbrace{0010}_2 = 4C.A2$$

6. Να μετατραπεί ο προσημασμένος αριθμός 1001100.1010001 του δυαδικού συστήματος αρίθμησης στο δεκαεξαδικό σύστημα. Ο αριθμός θεωρούμε ότι είναι σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος του 2.

### Υπόδειξη

Χωρίζουμε τα δυαδικά ψηφία σε τετράδες προς τα αριστερά και προς τα δεξιά αρχίζοντας από την υποδιαστολή. Συμπληρώνουμε εάν χρειάζεται με μηδενικά αριστερά και με το ψηφίο του προσήμου δεξιά. Την κάθε τετράδα την αναπαριστούμε με το αντίστοιχο δεκαεξαδικό ψηφίο. Στην συνέχεια δίδεται η μετατροπή του δοσμένου αριθμού στο δεκαεξαδικό σύστημα.

$$1001100.1010001 = \underbrace{1100}_4 \underbrace{1100}_C \underbrace{1010}_A \underbrace{0010}_2 = CC.A2$$

7. Να μετατραπούν (αναλυτικά) οι αριθμοί +125, -125 του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης στους αντίστοιχους αριθμούς του δυαδικού συστήματος αρίθμησης.
- 1) Σε παράσταση προσημασμένου μέτρου,
  - 2) Σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος του 1,
  - 3) Σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος του 2.

Η παράσταση να γίνει για 16 bits.

### Υπόδειξη

Με διαδοχικές διαιρέσεις βρίσκουμε ότι  $125 = 1111101$

Για τον αριθμό +125 η αναπαράστασή του σε 16 bit είναι

- 1) Σε παράσταση προσημασμένου μέτρου

$$+125 = 000000001111101$$

- 2) Σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος του 1

$$+125 = 000000001111101$$

- 3) Σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος του 2

$$+125 = 000000001111101$$

Για τον αριθμό -125 η αναπαράστασή του σε 16 bit είναι

- 1) Σε παράσταση προσημασμένου μέτρου ισχύει  
 $-125 = 1000000001111101$
- 2) Σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος του 1  
 $-125 = 1111111110000010$
- 3) Σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος του 2  
 $-125 = 1111111110000010$   
 $\phantom{-125 = 1111111110000010} +1$   
 $\phantom{-125 = 1111111110000010} \text{-----}$   
 $\phantom{-125 = 1111111110000010} = 1111111110000011$

8. Να βρεθεί αναλυτικά ποιους προσημασμένους αριθμούς του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης παριστάνουν οι αριθμοί του δυαδικού συστήματος 10101011, 01100110 όταν θεωρούμε ότι είναι,  
 1) σε παράσταση προσημασμένου μέτρου,  
 2) σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος του 1,  
 3) σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος του 2.

**Υπόδειξη**

Ο αριθμός 10101011

- α) Σε παράσταση προσημασμένου μέτρου είναι  
 $-0101011 = -(32+8+2+1) = -43$
- β) Σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος του 1 είναι  
 $-1010100 = -(64+32+4) = -100$
- γ) Σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος του 2 είναι  
 $-(1010100+1) = -(1010101) = -(64+32+4+1) = -101$

Ο αριθμός 01100110

- α) Σε παράσταση προσημασμένου μέτρου είναι  
 $+01100110 = +(64+32+4+2) = +102$
- β) Σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος του 1 είναι  
 $+01100110 = +(64+32+4+2) = +102$
- γ) Σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος του 2 είναι  
 $+01100110 = +(64+32+4+2) = +102$

9. Να αποδειχθεί

- α) Ότι  $1-a_i = \bar{a}_i$ ,  $a_i \in \{0,1\}$
- β) Ότι για έναν τετραψήφιο δυαδικό αριθμό  $A = a_3a_2a_1a_0$ ,  
 $2^4-1-A = \bar{a}_3 \bar{a}_2 \bar{a}_1 \bar{a}_0$

**Υπόδειξη**

- α)  $a_i=0$ ,  $1-0=1$   
 $a_i=1$ ,  $1-1=0$   
 Άρα  $1-a_i = \bar{a}_i$
- β) Είναι γνωστό ότι  $2^4-1 = 1111 = 2^3+2^2+2+1$ . Συνεπώς  
 $2^4-1-A = 2^3+2^2+2+1 - (a_32^3+a_22^2+a_12+a_0) = (1-a_3)2^3+(1-a_2)2^2+(1-a_1)2+(1-a_0) =$   
 $\bar{a}_3 2^3 + \bar{a}_2 2^2 + \bar{a}_1 2 + \bar{a}_0 = \bar{a}_3 \bar{a}_2 \bar{a}_1 \bar{a}_0$

10. Να γίνει η πρόσθεση  $(+5)+(-12)$  στο δυαδικό σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος του 2 σύστημα και να μετατραπεί αναλυτικά το αποτέλεσμα στο δεκαδικό σύστημα. Η παράσταση των αριθμών να γίνει στα 8 bit.

### Υπόδειξη

$$\begin{aligned} +5 &= 0000101 \\ 12 &= 0001100 \rightarrow -12 = 11110011+1 = \mathbf{11110100} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 00000101 \\ + 11110100 \\ \hline 11111001 \end{array}$$

$$11111001 \rightarrow -(0000110+1) = -0000111 = \mathbf{-7}.$$

- 11.** Να γίνει η πρόσθεση  $(-5)+(-12)$  στο δυαδικό σύστημα και σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος του 2 και να μετατραπεί αναλυτικά το αποτέλεσμα στο δεκαδικό σύστημα. Η παράσταση των αριθμών να γίνει στα 8 bit.

### Υπόδειξη

$$\begin{aligned} 5 &= 0000101 \rightarrow -5 = 11111010+1 = \mathbf{11111011} \\ 12 &= 0001100 \rightarrow -12 = 11110011+1 = \mathbf{11110100} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 11111011 \\ + 11110100 \\ \hline \mathbf{1} 11101111 \end{array}$$

(Το κρατούμενο αγνοείται)

Μετατροπή στο δεκαδικό

$$11101111 \rightarrow -(00010000+1) = -000010001 = \mathbf{-17}$$

- 12.** Να γίνει η πρόσθεση  $(-5)+(-12)$  στο δυαδικό σύστημα σε παρασταση προσημασμένου συμπληρώματος του 1 και να μετατραπεί αναλυτικά το αποτέλεσμα στο δεκαδικό σύστημα. Η παράσταση των αριθμών να γίνει στα 8 bit.

### Υπόδειξη

$$\begin{aligned} 5 &= 0000101 \rightarrow -5 = 11111010 \\ 12 &= 0001100 \rightarrow -12 = 11110011 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 11111011 \\ + 11110011 \\ \hline 1) 11101110 \\ \quad \downarrow \rightarrow \quad +1 \\ \hline 11101111 \end{array}$$

(Το κρατούμενο προστίθεται στο αποτέλεσμα)

Μετατροπή στο δεκαδικό

$$11101111 \rightarrow -(00010000) = = \mathbf{-16}$$

13. Να δοθούν οι παραστάσεις του μηδενός σε σύστημα προσημασμένου μέτρου, σε σύστημα προσημασμένου συμπληρώματος του 1 και σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος του 2. Η παράσταση να γίνει για 8 bit.

#### Υπόδειξη

Παράσταση του μηδενός σε σύστημα προσημασμένου μέτρου

0 → 00000000 (+0), 0 → 10000000 (-0)

Παράσταση του μηδενός σε σύστημα συμπληρώματος του 1

0 → 00000000 (+0), 0 → 11111111 (-0)

Παράσταση του μηδενός σε σύστημα συμπληρώματος του 2

0 → 00000000

12. Να δοθούν στο δυαδικό σύστημα και στο δεκαδικό σύστημα ο μέγιστος και ο ελάχιστος προσημασμένος αριθμός που μπορούμε να παραστήσουμε σε παράσταση προσημασμένου μέτρου, σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος του 1 και σε παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος του 2 με 8 bit.

#### Υπόδειξη

Παράσταση προσημασμένου μέτρου

max → 01111111=+127, min → 11111111=-127

Παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος του 1

max → 01111111=+127, min → 10000000=-127

Παράσταση προσημασμένου συμπληρώματος του 2

max → 01111111=+127, min → 10000000=-128

13. Υποθέστε ότι οι επόμενοι αριθμοί είναι σε σύστημα συμπληρώματος του 2.

$$A = 0111, B = 0111, C = 1100, D = 1110, E = 1001$$

Σε ποιες από τις επόμενες πράξεις γίνεται υπερχείλιση.

$$A+B, A+C, C+D, D+E$$

#### Υπόδειξη

**A+B**

0111

0111

-----

0)1110

Υπάρχει υπερχείλιση διότι προσθέσαμε δύο θετικών αριθμών και βρήκαμε αρνητικό αποτέλεσμα.

**A+C**

Δεν υπάρχει υπερχείλιση διότι οι αριθμοί είναι εταιρόσημοι

**C+D**

1100

1110

-----

1)1010 Το κρατούμενο αγνοείται

Προσθέσαμε δύο αρνητικούς αριθμούς και βρήκαμε αρνητικό. Δεν υπάρχει υπερχειλίση

**D+E**

1110

1001

-----

1)0111

Υπάρχει υπερχειλίση διότι προσθέσαμε δύο αρνητικούς αριθμούς και βρήκαμε θετικό αποτέλεσμα.

- 14.** Να γίνει χωρίς πράξεις ο πολλαπλασιασμός που δίδεται στη συνέχεια στο δυαδικό σύστημα. Θεωρήστε ότι οι αριθμοί είναι μη προσημασμένοι δυαδικοί αριθμοί.

1101

× 1000

-----

**Υπόδειξη**

Ο πολλαπλασιαστής είναι δύναμη του 2,  $1000=2^3$ . Το γινόμενο προκύπτει τοποθετώντας 3 μηδενικά στο τέλος του πολλαπλασιαστέου

1101

× 1000

-----

1101000

- 15.** Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του δυαδικού αριθμού 11100010 με τον δυαδικό αριθμό 100. Υποθέστε ότι οι αριθμοί είναι μη προσημασμένοι,

**Υπόδειξη**

Εφ' όσον ο διαιρέτης είναι δύναμη του 2,  $100=2^2$  τα δύο τελευταία ψηφία του διαιρετέου είναι το υπόλοιπο και τα υπόλοιπα ψηφία το πηλίκο. Δηλαδή

Πηλίκο: 111000, Υπόλοιπο: 10