



ΤΕΙ Αθήνας

Μεθοδολογία της έρευνας και Ιατρική στατιστική

Ενότητα 4: Μη-παραμετρικές δοκιμασίες

Δρ.Ευσταθία Παπαγεωργίου, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Έλεγχος ανεξαρτησίας (συσχέτισης) 2 κατηγορικών μεταβλητών


- Παράδειγμα
 - «εξαρτάται το βρογχικό άσθμα από το κάπνισμα των γονέων; »
 - «επηρεάζει η έντονη φυσική δραστηριότητα την κατηγορία σωματικού βάρους;»
 - «οι υπερτασικοί ασθενείς διαφέρουν ανά φύλο;»

Έλεγχος ανεξαρτησίας 2 ποιοτικών χαρακτηριστικών

Το κριτήριο χ^2

Το στατιστικό κριτήριο που χρησιμοποιείται είναι το χ^2

- Είναι ένα μέτρο απόστασης δύο «καταστάσεων»


$$\chi^2 = \sum \frac{(\Pi - A)^2}{A}$$

Π =παρατηρηθείσες συχνότητες, A =αναμενόμενες συχνότητες

Η «φιλοσοφία» του κριτηρίου

Δειγματοληπτικά στοιχεία
(πραγματικά δεδομένα)

Το κριτήριο χ^2 «μετρά»
την απόσταση των δύο
πινάκων

Θεωρητικά στοιχεία που
θα είχαμε «αν δεν υπάρχει
εξάρτηση (H_0)»

| X / Y | A1 (π.χ. ασθενείς) | A2 (π.χ. υγιείς) | Σύνολο |
|--------------------------|--------------------------|------------------------|----------|
| B1 (παράγοντας παρών) | a | β | R1 |
| B2 (παράγοντας απών) | γ | δ | R2 |
| Σύνολο | C1 | C2 | n |



| X' / Y' | A1 (π.χ. ασθενείς) | A2 (π.χ. υγιείς) | Σύνολο |
|--------------------------|--------------------------|------------------------|----------|
| B1 (παράγοντας παρών) | A' | B' | R1 |
| B2 (παράγοντας απών) | Γ' | Δ' | R2 |
| Σύνολο | C1 | C2 | n |

Το κριτήριο χ^2

Με βάση τη θεωρία το κριτήριο χ^2 είναι το ακόλουθο:

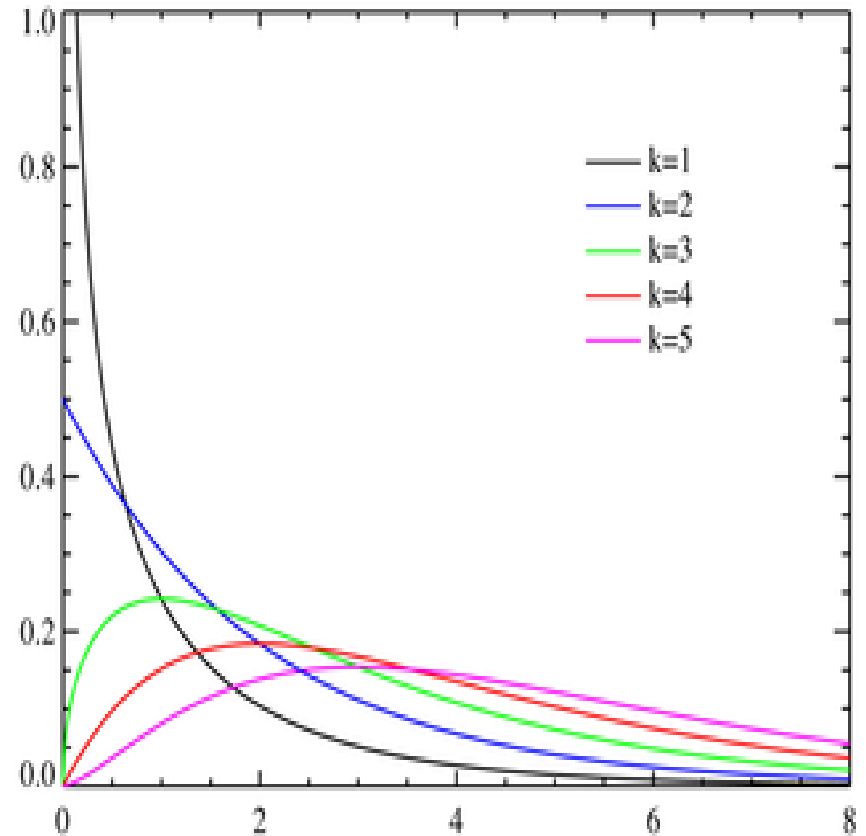
$$\chi^2 = \frac{(a - A')^2}{A'} + \frac{(\beta - B')^2}{B'} + \frac{(\gamma - \Gamma')^2}{\Gamma'} + \frac{(\delta - \Delta')^2}{\Delta'}$$

Έλεγχος ανεξαρτησίας 2 ποιοτικών χαρακτηριστικών

- Όσο πιο μεγάλες τιμές λαμβάνει το κριτήριο χ^2 (άρα $p \ll$) τόσο πιο κοντά είμαστε στο να απορρίψουμε την H_0 , **δηλαδή υπάρχει συσχέτιση.**
- Όσο πιο μικρές τιμές (≈ 0) λαμβάνει το κριτήριο χ^2 (άρα $p \gg$) τόσο πιο κοντά είμαστε στο να ΜΗΝ απορρίψουμε την H_0 , **δηλαδή δεν υπάρχει συσχέτιση.**

Η κατανομή χ^2

- Ασύμμετρη.
- Θετικά ορισμένη.
- Η μορφή της εξαρτάται από τους βαθμούς ελευθερίας
 $V.E = (k-1)(\lambda - 1)$ όπου k, λ ο αριθμός των γραμμών και των στηλών του πίνακα.
- Με βάση τους βαθμούς ελευθερίας και την χρήση ειδικών πινάκων υπολογίζουμε την κρίσιμη τιμή του ελέγχου ξ .



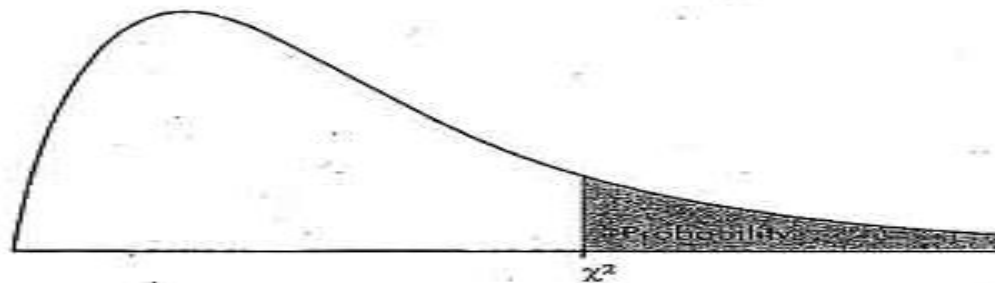


TABLE C: χ^2 CRITICAL VALUES

| df | Tail probability <i>p</i> | | | | | | | | | | |
|-----|---------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | .25 | .20 | .15 | .10 | .05 | .025 | .02 | .01 | .005 | .0025 | .001 |
| 1 | 1.32 | 1.64 | 2.07 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 5.41 | 6.63 | 7.88 | 9.14 | 10.83 |
| 2 | 2.77 | 3.22 | 3.79 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 7.82 | 9.21 | 10.60 | 11.98 | 13.82 |
| 3 | 4.11 | 4.64 | 5.32 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 9.84 | 11.34 | 12.84 | 14.32 | 16.27 |
| 4 | 5.39 | 5.99 | 6.74 | 7.78 | 9.49 | 11.14 | 11.67 | 13.28 | 14.86 | 16.42 | 18.47 |
| 5 | 6.63 | 7.29 | 8.12 | 9.24 | 11.07 | 12.83 | 13.39 | 15.09 | 16.75 | 18.39 | 20.51 |
| 6 | 7.84 | 8.56 | 9.45 | 10.64 | 12.59 | 14.45 | 15.03 | 16.81 | 18.55 | 20.25 | 22.46 |
| 7 | 9.04 | 9.80 | 10.75 | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 16.62 | 18.48 | 20.28 | 22.04 | 24.32 |
| 8 | 10.22 | 11.03 | 12.03 | 13.36 | 15.51 | 17.53 | 18.17 | 20.09 | 21.95 | 23.77 | 26.12 |
| 9 | 11.39 | 12.24 | 13.29 | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 19.68 | 21.67 | 23.59 | 25.46 | 27.88 |
| 10 | 12.55 | 13.44 | 14.53 | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 21.16 | 23.21 | 25.19 | 27.11 | 29.59 |
| 11 | 13.70 | 14.63 | 15.77 | 17.28 | 19.68 | 21.92 | 22.62 | 24.72 | 26.76 | 28.73 | 31.26 |
| 12 | 14.85 | 15.81 | 16.99 | 18.55 | 21.03 | 23.34 | 24.05 | 26.22 | 28.30 | 30.32 | 32.91 |
| 13 | 15.98 | 16.98 | 18.20 | 19.81 | 22.36 | 24.74 | 25.47 | 27.69 | 29.82 | 31.88 | 34.53 |
| 14 | 17.12 | 18.15 | 19.41 | 21.06 | 23.68 | 26.12 | 26.87 | 29.14 | 31.32 | 33.43 | 36.12 |
| 15 | 18.25 | 19.31 | 20.60 | 22.31 | 25.00 | 27.49 | 28.26 | 30.58 | 32.80 | 34.95 | 37.70 |
| 16 | 19.37 | 20.47 | 21.79 | 23.54 | 26.30 | 28.85 | 29.63 | 32.00 | 34.27 | 36.46 | 39.25 |
| 17 | 20.49 | 21.61 | 22.98 | 24.77 | 27.59 | 30.19 | 31.00 | 33.41 | 35.72 | 37.95 | 40.79 |
| 18 | 21.60 | 22.76 | 24.16 | 25.99 | 28.87 | 31.53 | 32.35 | 34.81 | 37.16 | 39.42 | 42.31 |
| 19 | 22.72 | 23.90 | 25.33 | 27.20 | 30.14 | 32.85 | 33.69 | 36.19 | 38.58 | 40.88 | 43.82 |
| 20 | 23.83 | 25.04 | 26.50 | 28.41 | 31.41 | 34.17 | 35.02 | 37.57 | 40.00 | 42.34 | 45.31 |
| 21 | 24.93 | 26.17 | 27.66 | 29.62 | 32.67 | 35.48 | 36.34 | 38.93 | 41.40 | 43.78 | 46.80 |
| 22 | 26.04 | 27.30 | 28.82 | 30.81 | 33.92 | 36.78 | 37.66 | 40.29 | 42.80 | 45.20 | 48.27 |
| 23 | 27.14 | 28.43 | 29.98 | 32.01 | 35.17 | 38.08 | 38.97 | 41.64 | 44.18 | 46.62 | 49.73 |
| 24 | 28.24 | 29.55 | 31.13 | 33.20 | 36.42 | 39.36 | 40.27 | 42.98 | 45.56 | 48.03 | 51.18 |
| 25 | 29.34 | 30.68 | 32.28 | 34.38 | 37.65 | 40.65 | 41.57 | 44.31 | 46.93 | 49.44 | 52.62 |
| 26 | 30.43 | 31.79 | 33.43 | 35.56 | 38.89 | 41.92 | 42.86 | 45.64 | 48.29 | 50.83 | 54.05 |
| 27 | 31.53 | 32.91 | 34.57 | 36.74 | 40.11 | 43.19 | 44.14 | 46.96 | 49.64 | 52.22 | 55.48 |
| 28 | 32.62 | 34.03 | 35.71 | 37.92 | 41.34 | 44.46 | 45.42 | 48.28 | 50.99 | 53.59 | 56.89 |
| 29 | 33.71 | 35.14 | 36.85 | 39.09 | 42.56 | 45.72 | 46.69 | 49.59 | 52.34 | 54.97 | 58.30 |
| 30 | 34.80 | 36.25 | 37.99 | 40.26 | 43.77 | 46.98 | 47.96 | 50.89 | 53.67 | 56.33 | 59.70 |
| 40 | 45.62 | 47.27 | 49.24 | 51.81 | 55.76 | 59.34 | 60.44 | 63.69 | 66.77 | 69.70 | 73.40 |
| 50 | 56.33 | 58.16 | 60.35 | 63.17 | 67.50 | 71.42 | 72.61 | 76.15 | 79.49 | 82.66 | 86.66 |
| 60 | 66.98 | 68.97 | 71.34 | 74.40 | 79.08 | 83.30 | 84.58 | 88.38 | 91.95 | 95.34 | 99.61 |
| 80 | 88.13 | 90.41 | 93.11 | 96.58 | 101.9 | 106.6 | 108.1 | 112.3 | 116.3 | 120.1 | 124.8 |
| 100 | 109.1 | 111.7 | 114.7 | 118.5 | 124.3 | 129.6 | 131.1 | 135.8 | 140.2 | 144.3 | 149.4 |

Προϋποθέσεις εφαρμογής του κριτηρίου χ^2

- Τυχαίο δείγμα και ανεξαρτησία των παρατηρήσεων
- Κανένα κελί με μηδενική τιμή
- Όλες οι αναμενόμενες τιμές των κελιών 2×2 πινάκων συνάφειας > 5
- Το 80% των κελιών πινάκων $r \times c$ να έχουν αναμενόμενες τιμές > 5

Παράδειγμα

Σε 500 μαθητές δημοτικού σχολείου μελετήθηκε η σχέση της υγείας του στόματος τους με τη χλωρίωση του νερού στην περιοχή διαμονής τους. Η κατανομή των 500 μαθητών ανάλογα με την υγεία του στόματος και τη χλωρίωση του νερού ήταν:

| Χλωρίωση νερού | Υγεία στόματος | | |
|-----------------------|-----------------------|--------|------|
| | Κακή | Μέτρια | Καλή |
| Ανεπαρκής | 80 | 120 | 75 |
| Επαρκής | 40 | 80 | 105 |
| Σύνολο | 120 | 200 | 180 |

Σχετίζεται η υγεία του στόματος των μαθητών με τη χλωρίωση του νερού;

Η μηδενική υπόθεση στην δοκιμασία χ^2 αφορά στην ανεξαρτησία των μεταβλητών.

Αρχικά θα υπολογίσουμε τα θεωρητικά μεγέθη δηλ. τα «Expected », τα οποία συμβολίζονται με E στον κάτωθι τύπο. Με O συμβολίζονται τα παρατηρούμενα δηλ. τα «Observed».

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

Εν συνεχεία με τον ανωτέρω τύπο υπολογίζουμε την τιμή του κριτηρίου χ^2 (χι-τετράγωνο) και την συγκρίνουμε με την τιμή της κατανομής χ^2 , προκειμένου να αποφανθούμε.

$$R = \{ \chi^2 > \chi^2_{(s-1)(k-1); \alpha} \}$$

Όπως φαίνεται στο παρακάτω παράθυρο «Frequency Table» τα θεωρητικά μεγέθη εμφανίζονται κάτω από τα παρατηρούμενα:

| Χλωρίωση * Υγεία Στόματος Crosstabulation | | | | | | |
|---|---|----------------|----------------|-------|-------|-------|
| | | | Υγεία Στόματος | | | Total |
| | | | 1 | 2 | 3 | |
| Χλωρίωση | 1 | Count | 80 | 120 | 75 | 275 |
| | | Expected Count | 66,0 | 110,0 | 99,0 | 275,0 |
| | 2 | Count | 40 | 80 | 105 | 225 |
| | | Expected Count | 54,0 | 90,0 | 81,0 | 225,0 |
| Total | | Count | 120 | 200 | 180 | 500 |
| | | Expected Count | 120,0 | 200,0 | 180,0 | 500,0 |

Παρατηρούμε ότι η τιμή του χ^2 κριτηρίου είναι 21.55, οι βαθμοί ελευθερίας 4 ενώ η τιμή του P-Value 0.0002 το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι με βεβαιότητα 99% απορρίπτουμε την H_0 αφού η τιμή του είναι μικρότερη από το επίπεδο σημαντικότητας α ($0,0002 < 0,01$). Συνεπώς, η υγεία του στόματος των μαθητών δεν είναι ανεξάρτητη της χλωρίωσης του νερού που πίνουν.

| Chi-Square Tests | | | |
|------------------------------|---------------------|----|-----------------------|
| | Value | df | Asymp. Sig. (2-sided) |
| Pearson Chi-Square | 21,549 ^a | 2 | ,000 |
| Likelihood Ratio | 21,661 | 2 | ,000 |
| Linear-by-Linear Association | 19,886 | 1 | ,000 |
| N of Valid Cases | 500 | | |

Σε αυτό το σημείο η άσκηση με την χρήση του στατιστικού λογισμικού λύθηκε. Αν θελήσουμε όμως παραπάνω πληροφορίες για τις ποσοστιαίες αναλογίες των παρατηρούμενων τιμών ή για τον υπολογισμό των θεωρητικών τιμών κάνουμε τα εξής επιπλέον βήματα:

Παρατηρούμε ότι η τιμή του κριτηρίου Χ-τετράγωνο είναι 21.549, οι βαθμοί ελευθερίας 2 και η τιμή του p-value ίση με μηδέν το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι δεν μπορούμε να δεχτούμε την μηδενική υπόθεση. Συνεπώς η υγεία του στόματος των μαθητών δεν είναι ανεξάρτητη της χλωρίωσης του νερού που πίνουν.

| Chi-Square Tests | | | |
|------------------------------|---------------------|----|-----------------------|
| | Value | df | Asymp. Sig. (2-sided) |
| Pearson Chi-Square | 21,549 ^a | 2 | ,000 |
| Likelihood Ratio | 21,661 | 2 | ,000 |
| Linear-by-Linear Association | 19,886 | 1 | ,000 |
| N of Valid Cases | 500 | | |

between rows and columns, which you can run by choosing Chi-Square Test on the list of Tabular Options.

Frequency Table

| | kaki | kalh | metria | Row Total |
|--------------|--------|--------|--------|-----------|
| row_1 | 80 | 75 | 120 | 275 |
| | 8,00% | 7,50% | 12,00% | 27,50% |
| row_2 | 40 | 105 | 80 | 225 |
| | 4,00% | 10,50% | 8,00% | 22,50% |
| row_3 | 120 | 180 | 200 | 500 |
| | 12,00% | 18,00% | 20,00% | 50,00% |
| column total | 240 | 360 | 400 | 1000 |
| | 24,00% | 36,00% | 40,00% | 100,00% |

Chi-Square Test

Συμπεράσματα

Έλεγχος ανεξαρτησίας 2 ποιοτικών χαρακτηριστικών

- Ο έλεγχος χ^2 **αναδεικνύει** πιθανή εξάρτηση μεταξύ 2 κατηγορικών μεταβλητών.
- Ο έλεγχος χ^2 **ΔΕΝ αναδεικνύει** γραμμική σχέση μεταξύ 2 κατηγορικών μεταβλητών.
- Ο έλεγχος χ^2 **ΔΕΝ αναδεικνύει** επιμέρους διαφορές στις κατηγορίες των κατηγορικών μεταβλητών.

Βιβλιογραφία 1/6

Ελληνική:

- Σταυρινός Βασίλης Γ., Παναγιωτάκος Δημοσθένης Β. Βιοστατιστική, Εκδόσεις Γ. Δαρδάνος - Κ. Δαρδάνος Ο.Ε.
- Τριχόπουλου Δ., Τζώνου Α., Κατσουγιάννη Κ., Βιοστατιστική, Εκδόσεις Παρισιάνου, 1993
- Τσίμπου Κ., Γεωργιακώδη Φ., Περιγραφική και Διερευνητική Στατιστική Ανάλυση Δεδομένων, Τόμος Α. Εκδόσεις Σταμούλη, 1999
- Τσίμπου Κ., Γεωργιακώδη Φ., Περιγραφική και Διερευνητική Στατιστική Ανάλυση Δεδομένων, Τόμος Β. Εκδόσεις Σταμούλη, 1999.
- Petrie Avina, Sabin Caroline, Ιατρική Στατιστική με μια ματιά, Εκδόσεις Παρισιάνου, 2008

Βιβλιογραφία 2/6

Ακολουθεί **Ξενόγλωσση** Βιβλιογραφία.

Με έντονα γράμματα (Bold) επισημαίνονται τα συγγράματα τα οποία συνάδουν με την παρούσα παρουσίαση και βοηθούν σε μια εισαγωγική μελέτη ενώ τα υπόλοιπα παρατίθενται είτε για όσους ενδιαφέρονται για περαιτέρω μελέτη ή εμφάνθυνση είτε ως εξειδικευμένα στατιστικά βιβλία.

Βιβλιογραφία 3/6

- **D.G. Altman (1992): Practical statistics for medical research. Chapman and Hall.**
- D. F. Andrews and A. M. Herzberg (1985): Data - A Collection of Problems from many Fields for the Student and Research Worker. Wiley, New York.
- Ralf Bender, Stefan Lange (2001): Adjusting for multiple testing— when and how? *Journal of Clinical Epidemiology* 54(4), 343–349.
- **M. Bland (1995): An Introduction to Medical Statistics. Second Edition. Oxford University Press.**
- J.M. Bland and D.G. Altman (1986): Statistical methods for assessing agreement between two methods of clinical measurement. *Lancet*, 1:307-310.
- M J. Campbell and D. Machin (1993): *Medical Statistics – A Commonsense Approach*. John Wiley & Sons, New York.

Βιβλιογραφία 4/6

- B. Dawson and R.G. Trapp (2004): Basic & Clinical Biostatistics. Fourth Edition. McGraw-Hill.
- A.R. Feinstein, D.M. Sosin and C.K. Wells (1985): The Will Rogers phenomenon. Stage migration and new diagnostic techniques as a source of misleading statistics for survival in cancer. The New England Journal of Medicine, 312(25), 1604-1608.
- L.D. Fisher and G. van Belle (1993): Biostatistics - Methodology for the Health Sciences. Wiley, New York.
- S. Holm (1979): A Simple Sequentially Rejective Multiple Test Procedure. Scandinavian Journal of Statistics, 6, 65-70.
- J.C. Hsu (1996): Multiple Comparisons. Theory and methods. Chapman and Hall.

Βιβλιογραφία 5/6

- **M.H. Katz (1999): Multivariable Analysis. A Practical Guide for Clinicians. Cambridge University Press.**
- D. Kendrick, K. Fielding, E. Bentley, R. Kerslake, P. Miller, and M. Pringle. Radiography of the lumbar spine in primary care patients with low back pain: randomised controlled trial. *British Medical Journal*, 322:400-405, 2001.
- S. Landau and B.S. Everitt (2004): *A Handbook of Statistical Analyses using SPSS*. Chapman & Hall/CRC.
- **H. Motulsky (1995): Intuitive Biostatistics. Oxford University Press.**
- J. Pallant (2005): *SPSS survival manual*. 2nd edition. Open University Press.
- M.F. Schilling, A.E. Watkins, and W. Watkins. Is human height bimodal? *The American Statistician*, 56:223-229, 2002.

Βιβλιογραφία 6/6

- **M. Schumacher und G. Schulgen (2002): Methodik klinischer Studien. Methodische Grundlagen der Planung, Durchführung und Auswertung. Springer-Verlag (German).**
- J.P. Shaffer (1986): Modified Sequentially Rejective Multiple Test Procedures. *Journal of the American Statistical Association*, 81(395), 826-831.
- G.W. Snedecor and W.G. Cochran (1989): *Statistical methods*. 8th edition. Iowa State University Press.
- Y.-K. Tu, Z.L. Nelson-Moon, and M.S. Gilthorpe. Misuses of correlation and regression analyses in orthodontic research: The problem of mathematical coupling. *American Journal of Orthodontics & Dentofacial Orthopedics*, 130:62-68, 2006.
- Y.-K. Tu and M.S. Gilthorpe. Revisiting the relation between change and initial value: A review and evaluation. *Statistics in Medicine*, 26:443-457, 2007.

Τέλος Ενότητας