Μάθημα 3

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ

3.1 Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι στα διάφορα προβλήματα των εφαρμογών τις περισσότερες φορές παρουσιάζονται συναρτήσεις που περιγράφονται από πολύπλοκους τύπους, δηλαδή τύπους στους οποίους υπεισέρχονται τριγωνομετρικές, εκθετικές, αντίστροφες τριγωνομετρικές, λογαριθμικές, κ.λπ. συναρτήσεις. Τότε η λύση του προβλήματος είναι δύσκολη και τις περισσότερες φορές αδύνατη. Επομένως δημιουργείται άμεσα η ανάγκη της αντικατάστασης αυτών των συναρτήσεων με άλλες απλούστερες, έτσι ώστε να γίνει δυνατή η λύση των παραπάνω προβλημάτων. Στην κατηγορία αυτή προστίθενται και οι περιπτώσεις οι οποίες κατά το πλείστον εμφανίζονται στις εφαρμογές, όπου ο τύπος της συνάρτησης, έστω $f(x)$, είναι άγνωστος και οι μόνες πληροφορίες που υπάρχουν για την f είναι ένα σύνολο τιμών της στα σημεία $(x_i, f(x_i))\,;\, i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$.

Στο μάθημα αυτό, οι συναρτήσεις που θα χρησιμοποιηθούν για τις προσεγγίσεις αυτές, θα είναι οι **πολυωνυμικές**. Τα πλεονεκτήματα της προσέγγισης μιας συνάρτησης με ένα πολυώνυμο είναι πολλά και ενδεικτικά αναφέρεται ότι η παράγωγος, το ολοκλήρωμα κ.λπ., υπολογίζονται ευκολότερα με τη χρήση του πολυωνύμου αντί της συνάρτησης, ενώ τα αποτελέσματά τους είναι επίσης πολυώνυμα. Επομένως γίνεται άμεσα αντιληπτή η ανάγκη αναζήτησης αυτού του είδους της προσέγγισης που πρόκειται να εξεταστεί στη συνέχεια.

3.1.1 Σχετικοί ορισμοί και θεωρήματα

Είναι γνωστό στα Μαθηματικά ότι η προσέγγιση μιας συνεχούς συνάρτησης με ένα πολυώνυμο, έστω P, βαθμού n της μορφής:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0, \quad \text{όταν } a_i \in \mathbb{R}\,;\, i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$$

είναι πάντοτε δυνατή και με όση ακρίβεια απαιτείται κάθε φορά.

Συγκεκριμένα ισχύει:

Θεώρημα 3.1.1 - 1 (Weierstrass). *Αν f είναι μία συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο $[a,b]$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα πολυώνυμο P, έτσι ώστε*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad \textit{για κάθε} \quad x \in [a,b]. \tag{3.1.1 - 1}$$

Το Θεώρημα 3.1.1 - 1 αναφέρεται στην ύπαρξη του πολυωνύμου P, δεν δίνει όμως τον τύπο του και επομένως έχει μαθηματικό μόνον ενδιαφέρον.

[1]Μια πρώτη απάντηση στον προσδιορισμό του τύπου του πολυωνύμου P δίνεται από το πολυώνυμο του Taylor, αντίστοιχα του Maclaurin, που όπως είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη, δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} f(x) \;&\approx\; P_n(x) = f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 \\ &\quad + \ldots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n\,!}(x-\xi)^n\,, \end{aligned} \tag{3.1.1 - 2}$$

όταν το σημείο ξ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f και ορίζει το κέντρο του παραπάνω αναπτύγματος, αντίστοιχα

$$\begin{aligned} f(x) \;&\approx\; P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \\ &\quad + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n, \end{aligned} \tag{3.1.1 - 3}$$

[1]Βλέπε Μαθήματα *Ανώτερων Μαθηματικών - Παράγωγος συνάρτησης*.

όταν το κέντρο στην περίπτωση αυτή είναι το 0. Με τα παραπάνω πολυώνυμα υπολογίζεται τότε μία πολυωνυμική προσέγγιση της συνάρτησης f σε ένα συγκεκριμένο σημείο ξ, αντίστοιχα το 0.

Παρατηρήσεις 3.1.1 - 1

Έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι το πολυώνυμο του Taylor, αντίστοιχα του Maclaurin:

- δεν παρουσιάζει ακρίβεια που να αυξάνεται πάντοτε ανάλογα με τον βαθμό n του πολυωνύμου,
- απαιτεί τη γνώση του κέντρου ξ,
- η προσέγγιση είναι ακριβής μόνον για τιμές του x πλησίον του ξ, αντίστοιχα το 0.

Παράδειγμα 3.1.1 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \sin x.$$

Το πολυώνυμο του Maclaurin $P_3(x)$ βαθμού 3, αντίστοιχα $P_5(x)$ βαθμού 5 είναι

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3\,!}, \quad \text{αντίστοιχα} \quad P_5(x) = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!}.$$

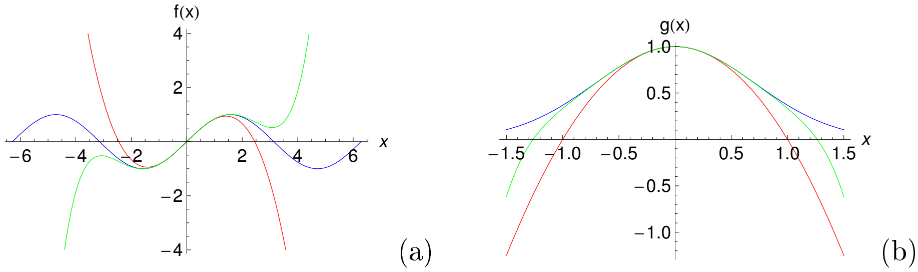
Από το Σχ. 3.1.1 - 1a είναι προφανές ότι, αν $x \to 0$, τα διαγράμματα των f, P_3 και P_5 συμπίπτουν, ενώ αποκλίνουν, όταν το x απομακρύνεται από το 0.

Ανάλογη παρατήρηση ισχύει για τη συνάρτηση (Σχ. 3.1.1 - 1b)

$$g(x) = e^{-x^2},$$

όταν προσεγγίζεται από τα παρακάτω πολυώνυμα του Maclaurin

$$P_2(x) = 1 - x^2, \quad \text{αντίστοιχα} \quad P_6(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}.$$



Σχήμα 3.1.1 - 1: (a) Συνάρτηση $f(x)$ μπλε, P_3 κόκκινη και P_5 πράσινη καμπύλη. (b) Όμοια $g(x)$ μπλε, P_2 κόκκινη και P_6 πράσινη καμπύλη

Παράδειγμα 3.1.1 - 2

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x-1).$$

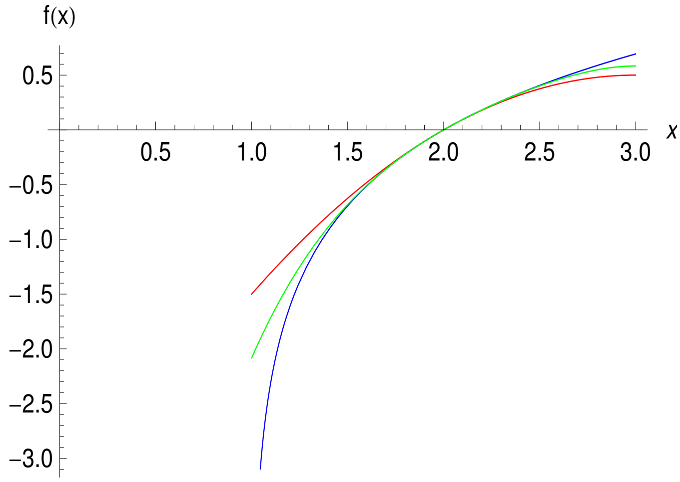
Το πολυώνυμο του Taylor με κέντρο $\xi = 2$ βαθμού 2, αντίστοιχα 4 είναι

$$\begin{aligned} P_2(x) &= x - 2 - \frac{(x-2)^2}{2}, \quad \text{αντίστοιχα} \\ P_4(x) &= x - 2 - \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{3} - \frac{(x-2)^4}{4}. \end{aligned}$$

Από το Σχ. 3.1.1 - 2 προκύπτει ότι, αν $x \to 2$, τα διαγράμματα των f, P_2 και P_4 συμπίπτουν, ενώ αποκλίνουν, όταν το x απομακρύνεται από το 2.

- Απαιτείται ο υπολογισμός των παραγώγων της f, που όμως τις περισσότερες φορές είναι δύσκολος ή και αδύνατος, και

- ο τύπος $(3.1.1-2)$, αντίστοιχα $(3.1.1-3)$ δεν εφαρμόζεται, όταν η f είναι γνωστή μόνο σε έναν αριθμό σημείων του πεδίου ορισμού της, δηλαδή, όπως συμβαίνει στις περισσότερες εφαρμογές, όταν δεν είναι γνωστός ο αναλυτικός της τύπος.



Σχήμα 3.1.1 - 2: Συνάρτηση $f(x)$ μπλε, P_2 κόκκινη και P_4 πράσινη καμπύλη

3.2 Πολυωνυμική παρεμβολή

3.2.1 Θεώρημα του Lagrange

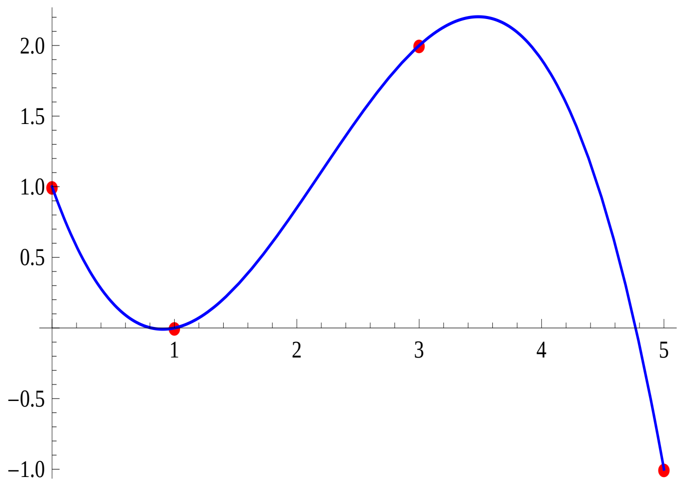
Μια γενικότερη αντιμετώπιση του παραπάνω προβλήματος προσέγγισης μιας συνάρτησης, που ξεπερνά τις δυσκολίες της προηγούμενης παραγράφου, δίνεται στη συνέχεια.

[2]Αρχικά ορίζεται η έννοια της παρεμβολής ως εξής:

Ορισμός 3.2.1 - 1 (πολυωνυμικής παρεμβολής). *Έστω ότι $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ είναι $n+1$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία ενός διαστήματος $[a,b]$ και $f(x)$ μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού επίσης το $[a,b]$ της οποίας είναι γνωστές οι τιμές $f(x_i)$ για κάθε $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n$. Τότε η πολυωνυμική παρεμβολή (polynomial interpolation) ορίζεται από ένα πολυώνυμο, έστω P_n βαθμού $\leq n$, που διέρχεται από τα σημεία $(x_i, f(x_i))$, δηλαδή $P_n(x_i) = f(x_i)$ για κάθε $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n$ (Σχ. 3.2.1 - 1).*

Ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται για κάθε σύνολο σημείων $(x_i, y_i);\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$, όταν τα x_i είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

[2]Βλέπε βιβλιογραφία και: *https://en.wikipedia.org/wiki/Polynomial_interpolation*



Σχήμα 3.2.1 - 1: Σημεία $(0,1)$, $(1,0)$, $(3,2)$, $(5,-1)$ με πολυώνυμο παρεμβολής $P_3(x) = 1 - 2.441667x + 1.7x^2 - 0.2583333x^3$

Σχετικά με την ύπαρξη και το μονοσήμαντο του πολυωνύμου παρεμβολής $P_n(x)$ ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.2.1 - 1 (παρεμβολής του Lagrange). *Έστω ότι x_0, x_1, …, x_n είναι $n+1$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία ενός διαστήματος $[a,b]$ και $f(x)$ μία πραγματική συνάρτηση της οποίας είναι γνωστές οι τιμές $f(x_i)$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n$. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο $P_n(x)$ βαθμού $\leq n$, που δίνεται από τον τύπο*

$$\begin{aligned} P_n(x) &= l_0(x) f(x_0) + l_1(x) f(x_1) + \ldots + l_n(x) f(x_n) \\ &= \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i), \end{aligned} \tag{3.2.1 - 1}$$

όπου

$$\begin{aligned} l_i(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \\ &= \prod_{0\leq j\leq n,\ j\neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}. \end{aligned} \tag{3.2.1 - 2}$$

και το οποίο παρεμβάλλεται ή συμπίπτει (ταυτίζεται) με την $f(x)$ *στα σημεία* x_i *για κάθε* $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$.

Ο τύπος $(3.2.1-1)$ είναι γνωστός σαν **τύπος παρεμβολής του Lagrange**, ενώ τα πολυώνυμα $l_i(x)$; $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$, που ορίζονται με τον τύπο $(3.2.1-2)$, λέγονται **πολυώνυμα παρεμβολής** του Lagrange για τα σημεία ή κόμβους (nodes) $x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n$.

Παρατηρήσεις 3.2.1 - 1

Από τον τύπο $(3.2.1-2)$ προκύπτουν τα εξής:

i) στον αριθμητή καθένα από τα πολυώνυμα $l_i(x)$ έχει όλους τους παράγοντες εκτός από τον παράγοντα $x - x_i$ (διαφορετικά, αν είχε όλους, θα προέκυπτε πολυώνυμο $n+1$ βαθμού),

ii) ο παρονομαστής προκύπτει από τον αριθμητή αντικαθιστώντας το x με το x_i. Άρα ο παρονομαστής είναι σταθερά.

Πόρισμα 3.2.1 - 1. *Τα πολυώνυμα* $l_i(x)$; $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$ *είναι βαθμού* n *και επιπλέον*

$$l_i\left(x_j\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \quad i = j \\ 0 & \alpha\nu \quad i \neq j. \end{cases} \tag{3.2.1 - 3}$$

Απόδειξη. Έχοντας υπόψη την Παρατήρηση 3.2.1 - 1(i) καθένα από τα πολυώνυμα $l_i(x)$ στον αριθμητή έχει όλους τους παράγοντες εκτός από τον $x - x_i$. Άρα, επειδή η αρίθμηση των παραγόντων στον αριθμητή αρχίζει από το 0 και υπάρχουν n διαφορετικοί παράγοντες, ο καθένας από τους οποίους είναι 1ου βαθμού, προκύπτει τελικά ότι ο βαθμός του αριθμητή ισούται με n (ο παρονομαστής είναι σταθερά).

Επίσης, όταν

- $i = j$, τότε

$$l_i\left(x_i\right) = \frac{\left(x_i - x_0\right)\left(x_i - x_1\right)\cdots\left(x_i - x_{i-1}\right)\left(x_i - x_{i+1}\right)\cdots\left(x_i - x_n\right)}{\left(x_i - x_0\right)\left(x_i - x_1\right)\cdots\left(x_i - x_{i-1}\right)\left(x_i - x_{i+1}\right)\cdots\left(x_i - x_n\right)} = 1,$$

ενώ, όταν

- $j=0$ και $i=1$, τότε

$$\begin{aligned} l_1\left(x_0\right) &= \left.\frac{\left(x-x_0\right)\left(x-x_2\right)\cdots\left(x-x_n\right)}{\left(x_1-x_0\right)\left(x_1-x_2\right)\cdots\left(x_1-x_n\right)}\right|_{x=x_0} \\ &= \frac{\overbrace{\left(x_0-x_0\right)}^{0}\left(x_0-x_2\right)\cdots\left(x_0-x_n\right)}{\left(x_1-x_0\right)\left(x_1-x_2\right)\cdots\left(x_1-x_n\right)}=0. \end{aligned}$$

Όμοια για τους γενικούς δείκτες i, j με $i \neq j$.

■

Παράδειγμα 3.2.1 - 1 (γραμμική παρεμβολή)

Να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής της συνάρτησης $f(x)$ στα σημεία $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ και $\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$.

Λύση. Επειδή ο αριθμός των σημείων παρεμβολής είναι 2, πρέπει το ζητούμενο πολυώνυμο να είναι 1ου βαθμού, δηλαδή σύμφωνα με τον τύπο $(3.2.1-2)$ της μορφής

$$P(x)=P_1(x)=l_0(x)\left(x_0\right)+l_1(x)\left(x_1\right).$$

Τότε τα πολυώνυμα παρεμβολής $l_0(x)$, $l_1(x)$ σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 3.2.1 - 1 υπολογίζονται από τον τύπο $(3.2.1-1)$ ως εξής:

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1} \quad \text{και} \quad l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}.$$

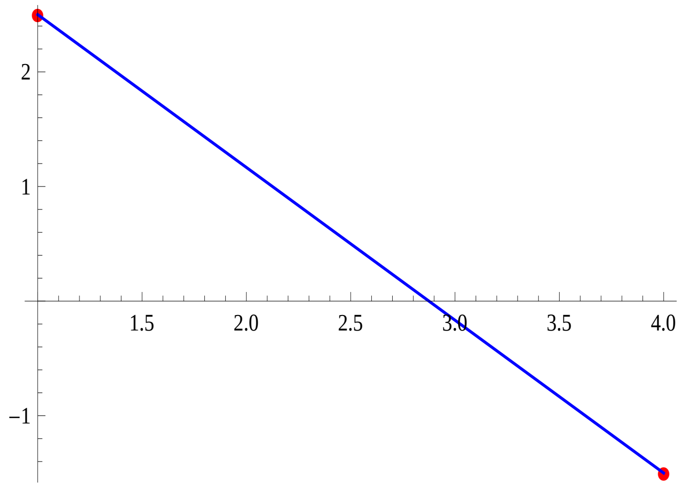
Άρα

$$P_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1} f\left(x_0\right)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0} f\left(x_1\right),$$

δηλαδή

$$P_1(x)=\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_0\right)}{x_1-x_0}\left(x-x_0\right)+f\left(x_0\right) \qquad (3.2.1 - 4)$$

που είναι γνωστός και σαν ο τύπος της **γραμμικής παρεμβολής** (Σχ. 3.2.1 - 2). ■



Σχήμα 3.2.1 - 2: Σημεία $(1, 2.5)$, $(4, -1.5)$ με πολυώνυμο παρεμβολής $P_1(x) = 3.83 - 1.33x$

Παράδειγμα 3.2.1 - 2

Όμοια να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής για τα σημεία

$$(x_0, f(x_0)) = (-0.5, 1.5),\ \ (x_1, f(x_1)) = (0.8, 2.0)\ \text{ και}$$

$$(x_2, f(x_2)) = (1.2, -1.5).$$

Λύση. Επειδή στην περίπτωση αυτή ο αριθμός των σημείων παρεμβολής είναι 3, πρέπει το ζητούμενο πολυώνυμο να είναι 2ου βαθμού, δηλαδή της μορφής

$$P(x) = P_2(x) = l_0(x)\,(x_0) + l_1(x) f(x_1) + l_2(x) f(x_2)\,.$$

Σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 3.2.1 - 1 όμοια τα πολυώνυμα παρεμβολής $l_0(x)$,

$l_1(x)$ και $l_2(x)$ υπολογίζονται από τον τύπο $(3.2.1-1)$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\frac{x-x_2}{x_0-x_2} = \frac{x-0.8}{-0.5-0.8}\,\frac{x-1.2}{-0.5-1.2} \\
&= 0.434\,389 - 0.904\,977\,x + 0.452\,489\,x^2, \\
l_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x-(-0.5)}{0.8-(-0.5)}\,\frac{x-1.2}{0.8-1.2} \\
&= 1.153\,846 + 1.346\,154\,x - 1.923\,077\,x^2, \quad \text{και} \\
l_2(x) &= \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x-(-0.5)}{1.2-(-0.5)}\,\frac{x-0.8}{1.2-0.8} \\
&= -0.588\,235 - 0.441\,177\,x + 1.470,588\,x^2.
\end{aligned}$$

Άρα αντικαθιστώντας τελικά (Σχ. 3.2.1 - 3)

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= l_0(x)\,1.5 + l_1(x)\,2.0 + l_2(x)(-1.5) \\
&= 3.841\,629 + 1.996\,606x - 5.373\,303x^2.
\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 3.2.1 - 3

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx, \qquad (3.2.1 - 5)$$

όταν τα σημεία παρεμβολής είναι:[3]

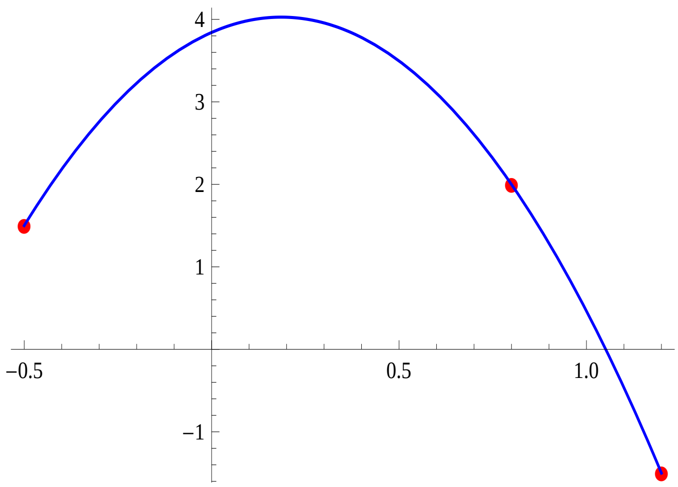
i) $x_0 = 0, \quad x_1 = 0.5, \quad x_2 = 1.0$, και

ii) $x_0 = 0, \quad x_1 = 0.3, \quad x_2 = 0.6, \quad x_3 = 1.0$.

Στη συνέχεια να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική τιμή $I = 0.746\,824$.

Λύση. Ανάλογα με το Παράδειγμα 3.2.1 - 2 έχουμε:

[3]Είναι προφανές ότι στις περιπτώσεις αυτές **όλα** τα σημεία παρεμβολής πρέπει να ανήκουν στο διάστημα ολοκλήρωσης.



Σχήμα 3.2.1 - 3: Σημεία $(-0.5, 1.5)$, $(0.8, 2.0)$, $(1.2, -1.5)$ με πολυώνυμο παρεμβολής $P_2(x) = 3.842 + 1.997x - 5.373x^2$

Σημεία παρεμβολής $x_0 = 0, \quad x_1 = 0.5, \quad x_2 = 1.0$

Επειδή τα σημεία είναι 3, το πολυώνυμο παρεμβολής θα είναι της μορφής:

$$P_2(x) = l_0(x)\,(x_0) + l_1(x) f\,(x_1) + l_2(x) f\,(x_2)\,, \tag{3.2.1 - 6}$$

όταν

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\,\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x - 0.5}{0 - 0.5}\,\frac{x - 1.0}{0 - 1.0} \\
&= 1 - 3\,x + 2\,x^2, \\
l_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\,\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - 0}{0.5 - 0}\,\frac{x - 1.0}{0.5 - 1.0} \\
&= 4\,x - 4\,x^2, \\
l_2(x) &= \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\,\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - 0}{1.0 - 0}\,\frac{x - 0.5}{1.0 - 0.5} \\
&= -x + 2\,x^2.
\end{aligned}$$

Άρα αντικαθιστώντας στην $(3.2.1-6)$ τελικά προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} P_2(x) &= l_0(x)\, e^{0} + l_1(x)\, e^{-0.5^2} + l_2(x)\, e^{-1^2} \\ &= 1 - 0.252\,676\, x - 0.379\,444\, x^2. \qquad (3.2.1\text{ - }7) \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 P_2(x)\, dx \approx 0.747\,180 \quad \text{με σφάλμα} \\ e_1 &= |0.747\,180 - 0.746\,824| = 0.000\,356. \end{aligned}$$

Σημεία παρεμβολής $\quad x_0 = 0, \quad x_1 = 0.3, \quad x_2 = 0.6, \quad x_3 = 1.0$

Στην περίπτωση αυτή τα σημεία είναι 4, οπότε το πολυώνυμο παρεμβολής είναι της μορφής:

$$P_3(x) = l_0(x)\,(x_0) + l_1(x) f\,(x_1) + l_2(x) f\,(x_2) + l_3(x) f\,(x_3)\,, \qquad (3.2.1\text{ - }8)$$

όταν

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\,\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\,\frac{x-x_3}{x_0-x_3} \\ &= \frac{x-0.3}{0-0.3}\,\frac{x-0.6}{0-0.6}\,\frac{x-1.0}{0-1.0} \\ &= 1 - 6\,x + 10.555\,56\,x^2 - 5.555\,556\,x^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\,\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\,\frac{x-x_3}{x_1-x_3} \\ &= \frac{x-0}{0.3-0}\,\frac{x-0.6}{0.3-0.6}\,\frac{x-1.0}{0.3-1.0} \\ &= 9.523\,81\,x - 25.396\,83\,x^2 + 15.873\,02\,x^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_2(x) &= \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\,\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\,\frac{x-x_3}{x_2-x_3} \\ &= \frac{x-0}{0.6-0}\,\frac{x-0.3}{0.6-0.3}\,\frac{x-1.0}{0.6-1.0} \\ &= -4.166\,667\,x + 18.055\,56\,x^2 - 13.888\,89\,x^3, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} l_3(x) &= \frac{x-x_0}{x_3-x_0}\,\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\,\frac{x-x_2}{x_3-x_2} \\ &= \frac{x-0}{1.0-0}\,\frac{x-0.3}{1.0-0.3}\,\frac{x-0.6}{1.0-0.6} \\ &= 0.642\,857\,x - 3.214\,286\,x^2 + 3.571\,429\,x^3, \end{aligned}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην $(3.2.1-8)$ τελικά

$$\begin{aligned} P_3(x) &= l_0(x)\,e^0 + l_1(x)\,e^{-0.3^2} + l_2(x)\,e^{-0.6^2} + l_3(x)\,e^{-1^2} \\ &= 1 + 0.033\,616\,x - 1.24\,093\,x^2 + 0.575\,195\,x^3. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 P_3(x)\,dx \approx 0.746\,963 \quad \text{με σφάλμα} \\ e_2 &= |0.746\,963 - 0.746\,824| = 0.000\,139. \end{aligned}$$

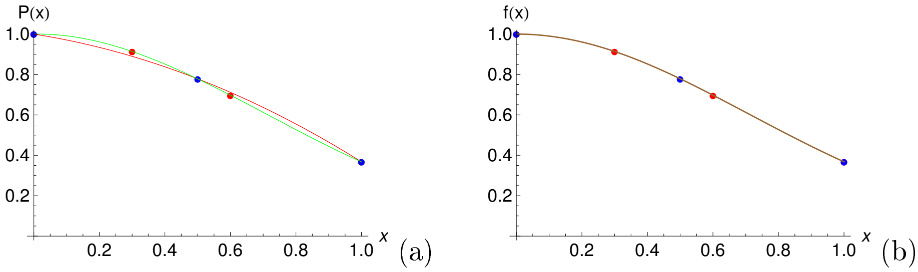
Τότε προφανώς $e_2 < e_1$, που επαληθεύει και το θεωρητικά αναμενόμενο αποτέλεσμα, δηλαδή ότι η αύξηση των σημείων παρεμβολής αυξάνει και την ακρίβεια της προσέγγισης. Στο Σχ. 3.2.1 - 4a δίνεται η γραφική παράσταση των πολυωνύμων P_2 και P_3 με τα αντίστοιχα σημεία παρεμβολής, ενώ στο Σχ. 3.2.1 - 4b η γραφική παράσταση της e^{-x^2} με όλα τα χρησιμοποιηθέντα σημεία. ■

3.3 Διαιρεμένες διαφορές. Τύπος του Newton

3.3.1 Εισαγωγικές έννοιες

Το πολυώνυμο παρεμβολής $P_n(x)$ του Lagrange, που ορίζεται από τον τύπο $(3.2.1-2)$, απαιτεί για τον υπολογισμό του έναν μεγάλο αριθμό πράξεων. Συγκεκριμένα, όταν ο υπολογισμός του γίνεται με ηλεκτρονικό υπολογιστή, αρχικά υπολογίζεται η παράσταση

$$(x-x_0)\,(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$



Σχήμα 3.2.1 - 4: $x \in [0, 1]$ (a) Πολυώνυμο P_2 κόκκινη (σημεία μπλε), P_3 πράσινη καμπύλη (σημεία κόκκινα) και (b) συνάρτηση e^{-x^2}

και στη συνέχεια τα πολυώνυμα $l_i(x)$; $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$ με κατάλληλες διαιρέσεις της παράστασης αυτής. Όπως έχει ήδη προκύψει και από το Παράδειγμα 3.2.1 - 3, για να αυξηθεί η ακρίβεια της προσέγγισης, πρέπει να χρησιμοποιηθεί κάθε φορά και μεγαλύτερος αριθμός σημείων παρεμβολής x_i. Αυτό όμως τότε έχει σαν αποτέλεσμα μία αντίστοιχη αύξηση του βαθμού των αντίστοιχων πολυωνύμων παρεμβολής $P_i(x)$, ενώ, όπως προκύπτει από τον τύπο $(3.2.1-2)$, στον υπολογισμό των πολυωνύμων $P_i(x)$ δεν λαμβάνεται υπόψη η μέχρι τότε γνώση των πολυωνύμων P_0, P_1, ..., P_{i-1}. Ως συνέπεια αυτών είναι να υπάρχει κάθε φορά ένας μεγάλος αριθμός επαναλαμβανόμενων πράξεων. Συνολικά, όλες αυτές οι παραπάνω πράξεις αφενός μεν καθιστούν τον υπολογισμό του πολυωνύμου $P_i(x)$ δυσχερή και αφετέρου δημιουργούν πολλά λάθη στρογγυλοποίησης. Επομένως, σε ένα πρόβλημα με μεγάλο αριθμό δεδομένων το πολυώνυμο που θα προκύψει, δεν θα διέρχεται από τα σημεία παρεμβολής, δηλαδή θα υπάρχει σφάλμα, με ότι αυτό συνεπάγεται στην περαιτέρω λύση του προβλήματος.

Για τον περιορισμό του παραπάνω αριθμού των πράξεων το πολυώνυμο παρεμβολής $P_n(x)$ στα σημεία x_i; $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$, το $P_n(x)$ γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= A_0 + A_1\,(x - x_0) + A_2\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\ &\quad + \ldots + A_n\,(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})\,, \qquad (3.3.1 - 1) \end{aligned}$$

όταν τα A_i; $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$ είναι στην περίπτωση αυτή οι προσδιοριστέοι συντελεστές του. Τότε, σε αντίθεση με τον γνωστό τύπο των δυνάμεων

(power form)

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

όταν a_i; $i = 0, 1, \ldots, n$ συντελεστές με $a_n \neq 0$ και $n = 0, 1, \ldots,$ ο τύπος 3.3.1 − 1) λαμβάνει υπόψη τα σημεία παρεμβολής x_0, x_1, …, x_{n-1} και όπως θα προκύψει στη συνέχεια ελαχιστοποιεί τις απαιτούμενες πράξεις υπολογισμού του.

3.3.2 Διαιρεμένες διαφορές

[4]Στην (3.3.1 − 1) ο υπολογισμός των συντελεστών A_i; $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$ γίνεται εύκολα με την εισαγωγή της έννοιας της **διαιρεμένης διαφοράς**, που ορίζεται στη συνέχεια ως εξής: αν x_0, x_1, …, x_n είναι $n+1$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία ενός διαστήματος $[a, b]$ και $f(x)$ μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού επίσης το $[a, b]$ και της οποίας είναι γνωστές οι τιμές $f(x_i)$ για κάθε $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, τότε:

Ορισμός 3.3.2 - 1. *Η διαιρεμένη διαφορά* **μηδενικής τάξης** *στο σημείο* x_i *συμβολίζεται με* $f[x_i]$ *και ισούται με*

$$f[x_i] = f(x_i), \tag{3.3.2 - 1}$$

για κάθε $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$.

Ορισμός 3.3.2 - 2. *Η διαιρεμένη διαφορά* **1ης τάξης** *στα σημεία* x_i, x_{i+1} *συμβολίζεται με* $f[x_i, x_{i+1}]$ *και ισούται με*

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \tag{3.3.2 - 2}$$

για κάθε $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$.

Ορισμός 3.3.2 - 3. *Η διαιρεμένη διαφορά* **2ης τάξης** *στα σημεία* x_i, x_{i+1}, x_{i+2} *συμβολίζεται με* $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ *και ισούται με*

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}, \tag{3.3.2 - 3}$$

για κάθε $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-2$.

[4]Βλέπε βιβλιογραφία και:
https://en.wikipedia.org/wiki/Divided_differences?searchDepth=1

Γενικά ορίζεται ότι:

Ορισμός 3.3.2 - 4. *Η διαιρεμένη διαφορά* **k-τάξης** *στα σημεία* x_i, x_{i+1}, …, x_{i+k} *συμβολίζεται με* $f\left[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}\right]$ *και ισούται με*

$$\begin{aligned} & f\left[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}\right] \\ &= \frac{f\left[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}\right] - f\left[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}\right]}{x_{i+k} - x_i}, \end{aligned} \qquad (3.3.2 - 4)$$

για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n-k$.

Αποδεικνύεται ότι ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.3.2 - 1 (υπολογισμού διαιρεμένων διαφορών). *Έστω ότι* $x_i;\ i = 0, 1, \ldots, n$ *είναι* $n+1$ *διαφορετικά σημεία ενός διαστήματος* $[a, b]$. *Τότε ισχύει:*

$$f\left[x_0, x_1, \ldots, x_n\right] = \frac{f\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right] - f\left[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\right]}{x_n - x_0}. \qquad (3.3.2 - 5)$$

Σημείωση 3.3.2 - 1

Οι παραπάνω ορισθείσες διαφορές στη βιβλιογραφία είναι γνωστές σαν οι προς τα εμπρός διαιρεμένες διαφορές. Στο μάθημα αυτό θα διατηρηθεί για ευκολία απλά ο όρος διαιρεμένη διαφορά (βλέπε επίσης Άσκηση 3).

Παράδειγμα 3.3.2 - 1

Να υπολογιστούν οι διαιρεμένες διαφορές στα σημεία

$$(0.3, 1.5) \quad \text{και} \quad (0.8, 2.5).$$

Λύση. Έστω

$$x_0 = 0.3, \quad f\left(x_0\right) = 1,5 \quad \text{και} \quad x_1 = 0.8, \quad f\left(x_1\right) = 2,5.$$

Τότε διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} f\left[x_0\right] &= f(0.3) = 1.5 \quad \text{και} \quad f\left[x_1\right] = f(0.8) = 2.5 \\ f\left[x_0, x_1\right] &= \frac{f\left(x_1\right) - f\left(x_0\right)}{x_1 - x_0} = \frac{2.5 - 1.5}{0.8 - 0.3} = 2. \end{aligned}$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα υπολογίζονται επίσης με τη διαδικασία του Πίνακα 3.3.2 - 1. ∎

Πίνακας 3.3.2 - 1: Παράδειγμα 3.3.2 - 1: υπολογισμός διαιρεμένης διαφοράς 1-τάξης

x_i	$f[x_i]$	$f[,]$
$x_0 = 0.3$	$f[x_0] = 1.5$	
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{2.5 - 1.5}{0.8 - 0.3} = 2$
$x_1 = 0.8$	$f[x_1] = 2.5$	

Παράδειγμα 3.3.2 - 2

Να υπολογιστούν οι διαιρεμένες διαφορές στα σημεία

$$(1.0, 2.0), \quad (1.5, 2.8) \quad \text{και} \quad (1.7, 3.5).$$

Λύση. Ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με εκείνη του Παραδείγματος 3.3.2 - 1 έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.3.2 - 2. ■

Στον Πίνακα 3.3.2 - 3, αντίστοιχα 3.3.2 - 4 δίνονται σχηματικά οι υπολογισμοί των διαιρεμένων διαφορών 3ης, αντίστοιχα 4ης-τάξης, ενώ στον Αλγόριθμο 3.3.2 - 1 ο τρόπος υπολογισμού των γενικά.

3.3.3 Τύπος παρεμβολής του Newton

[5]Αποδεικνύεται ότι με τη βοήθεια των διαιρεμένων διαφορών, το πολυώνυμο $(3.3.1 - 1)$ γράφεται

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f[x_0] + f[x_1, x_0](x - x_0) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ &\quad + f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{3.3.3 - 1}$$

[5]Βλέπε βιβλιογραφία και:
$https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Newton\_polynomial\&searchDepth=2$

Πίνακας 3.3.2 - 2: Παράδειγμα 3.3.2 - 2: υπολογισμός διαιρεμένης διαφοράς 2-τάξης

x_i	$f[x_i]$	$f[,]$	$f[,,]$
$x_0 = 1.0$	$f[x_0] = 2.0$		
		$f[x_0, x_1]$ $= \dfrac{2.8 - 2.0}{1.5 - 1.0} = 1.6$	
$x_1 = 1.5$	$f[x_1] = 2.8$		$f[x_0, x_1, x_2]$ $= \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1}$ $= \dfrac{3.5 - 1.6}{1.7 - 1.0}$ $= 2.714\,286$
		$f[x_1, x_2]$ $= \dfrac{3.5 - 2.8}{1.7 - 1.5} = 3.5$	
$x_2 = 1.7$	$f[x_2] = 3.5$		

Πίνακας 3.3.2 - 3: υπολογισμός διαιρεμένης διαφοράς 3ης-τάξης

x_i	$f[x_i]$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]$ $=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$ $=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1,x_2]$ $=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$ $=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$ $=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3]$ $=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$		
x_3	$f[x_3]$			

Πίνακας 3.3.2 - 4: υπολογισμός διαιρεμένης διαφοράς 4ης-τάξης

x_i	$f\left[x_i\right]$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$	$f[,,,,]$
x_0	$f\left[x_0\right]$				
		$f\left[x_0,x_1\right]$			
x_1	$f\left[x_1\right]$		$f\left[x_0,x_1,x_2\right]$		
		$f\left[x_1,x_2\right]$		$f\left[x_0,x_1,x_2,x_3\right]$	
x_2	$f\left[x_2\right]$		$f\left[x_1,x_2,x_3\right]$		$f\left[x_0,x_1,x_2\right.$ $\left.,x_3,x_4\right]$
		$\left[x_2,x_3\right]$		$f\left[x_1,x_2,x_3,x_4\right]$	
x_3	$f\left[x_3\right]$		$f\left[x_2,x_3,x_4\right]$		
		$f\left[x_3,x_4\right]$			
x_4	$f\left[x_4\right]$				

Αλγόριθμος 3.3.2 - 1 (υπολογισμού του πίνακα των διαιρεμένων διαφορών)

Διάβασε x_i; $i=0,\,1,\,\ldots,\,n$

Υπολόγισε $f\left(x_i\right)=f\left[x_i\right]$; $i=0,\,1,\,\ldots,\,n$

Για $k=1,\,2,\,\ldots,\,n$

  Για $i=0,\,1,\,\ldots,\,n-k$

$$f\left[x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+k}\right]=\frac{f\left[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}\right]-f\left[x_i,\ldots,x_{i+k-1}\right]}{x_{i+k}-x_i}$$

  τέλος i

τέλος k

Ο τύπος $(3.3.3-1)$ είναι γνωστός και σαν **τύπος παρεμβολής του Newton** (Newton interpolation formula).

Τότε από τον τύπο $(3.3.3-1)$ προκύπτουν

για $\mathbf{x = x_0}$

$$P_n(x_0) = f[x_0] + 0 = f(x_0),$$

για $\mathbf{x = x_1}$

$$\begin{aligned} P_n(x_1) &= f[x_0] + f[x_1, x_0]\,(x - x_0) + 0 \\ &= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\,(x - x_0) = f(x_1) \quad \text{κ.λπ.}, \end{aligned}$$

δηλαδή επαληθεύεται ότι το πολυώνυμο $P_n(x)$ στη μορφή αυτή διέρχεται από τα σημεία x_i; $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$.

Με διαδοχική εφαρμογή του τύπου $(3.3.3-1)$ έχουμε:

για $\mathbf{n = 1}$

$$P_1(x) = f[x_0] + f[x_1, x_0]\,(x - x_0) \qquad (3.3.3\text{ - }2)$$

που ισούται με τον τύπο (3.2.1−4) της γραμμικής παρεμβολής του Παραδείγματος 3.2.1 - 1,

για $\mathbf{n = 2}$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f[x_0] + f[x_1, x_0]\,(x - x_0) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1), \qquad (3.3.3\text{ - }3) \end{aligned}$$

για $\mathbf{n = 3}$

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f[x_0] + f[x_1, x_0]\,(x - x_0) \qquad (3.3.3\text{ - }4) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1), \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3]\,(x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2). \end{aligned}$$

Όμοια όταν $n > 3$.

Παράδειγμα 3.3.3 - 1

Ζητείται να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής 2ου βαθμού που προσεγγίζει την ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ του Παραδείγματος 3.2.1 - 3, όταν

Πίνακας 3.3.3 - 1: Παράδειγμα 3.3.3 - 1

x_i	$f\,[x_i]$	$f\,[,]$	$f\,[,,]$
$x_0 = 1.0$	1.0		
		$f\,[x_0, x_1]$ $= \frac{0.778\,801-1.0}{0.5-0}$ $= -0.442\,398$	
$x_1 = 1.5$	$0.778\,801$		$f\,[x_0, x_1, x_2]$ $= \frac{-0.821\,843-(-0.442\,398)}{1.0-0}$ $= -0.379\,444$
		$f\,[x_1, x_2]$ $= \frac{0.367\,879-0.778\,801}{1.0-0.5}$ $= -0.821\,843$	
$x_2 = 1.8$	$0.367\,879$		

τα σημεία είναι $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, και $x_2 = 1.0$.

Λύση. Επειδή τα σημεία είναι 3 το ζητούμενο πολυώνυμο είναι 2ου βαθμού και δίνεται από τον τύπο $(3.3.3-3)$. Για τον υπολογισμό του απαιτείται η δημιουργία του Πίνακα 3.3.3 - 1.

Άρα

$$\begin{aligned} P_(x) &= 1.0 - 0.442\,398\,x - 0.379\,444\,x(x-0.5) \\ &= 1 - 0.252\,676\,x - 0.379\,444\,x^2, \end{aligned}$$

δηλαδή το αποτέλεσμα $(3.2.1-7)$. ■

Παράδειγμα 3.3.3 - 2

Ζητείται να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής 3ου βαθμού της συνάρτησης $f(x)$, όταν τα σημεία x_i και οι τιμές $f\,(x_i)$ δίνονται στον Πίνακα 3.3.3 - 2.

Πίνακας 3.3.3 - 2: Παράδειγμα 3.3.3 - 2

x_i	$f[x_i]$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$
$x_0 = 1.0$	0.585			
		$f[x_0, x_1]$ $= \frac{0.540-0.585}{1.5-1.0}$ $= -0.270$		
$x_1 = 1.5$	0.450		$f[x_0, x_1, x_2]$ $= \frac{2.650-(-0.270)}{1.8-1.0}$ $= 3.650$	
		$f[x_1, x_2]$ $= \frac{1.245-0.450}{1.8-1.5}$ $= 2.650$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ $= \frac{-8.327-3.650}{2.5-1.0}$ $= -7.985$
$x_2 = 1.8$	1.245		$f[x_1, x_2, x_3]$ $= \frac{-3.179-2.650}{2.5-1.8}$ $= -8.327$	
		$f[x_1, x_2]$ $= \frac{-0.980-1.245}{2.5-1.8}$ $= -3.179$		
$x_3 = 2.5$	-0.980			

Λύση. Εφαρμόζοντας τον τύπο $(3.3.4-7)$ έχουμε

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 0.585-0.270(x-1.0)+3.650(x-1.0)(x-1.5) \\ &\quad -7.985(x-1.0)(x-1.5)(x-1.8) \\ &= 23.391-47.309\,x+30.829\,x^2-6.319\,x^3. \end{aligned}$$

■

Ο υπολογισμός του πολυωνύμου $P_3(x)$ με το MATHEMATICA γίνεται στο Πρόγραμμα 3.3.3 - 1.

Πρόγραμμα 3.3.3 - 1 (υπολογισμού του πολυωνύμου παρεμβολής)

```
data = {{1.0, 0.585}, {1.5, 0.450}, {1.8, 1.245},
      {2.5, -0.980}};
InterpolatingPolynomial[data,x]
```

3.3.4 Σχέση παρεμβολής και παραγώγου

Αν $i=0$, από τον τύπο $(3.3.2-2)$ προκύπτει

$$f\left[x_0,x_1\right]=\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_0\right)}{x_1-x_0}\,. \tag{3.3.4 - 5}$$

Τότε, εφόσον η υπάρχει η παράγωγος f', από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής έχουμε

$$f\left[x_0,x_1\right]=f'(\xi), \tag{3.3.4 - 6}$$

όταν $\xi\in(x_0,x_1)$.

Το παρακάτω θεώρημα, που είναι γνωστό σαν το Θεώρημα της Μέσης Τιμής για διαιρεμένες διαφορές, γενικεύει το αποτέλεσμα αυτό:

Θεώρημα 3.3.4 - 1. *Έστω $f(x)$ μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού $[a,b]$ και της οποίας υπάρχει η n-τάξης παράγωγος για κάθε $x\in(a,b)$. Τότε, αν x_0, x_1, …, x_n, είναι $n+1$ διαφορετικά σημεία του $[a,b]$, υπάρχει σημείο ξ με $\xi\in(a,b)$, έτσι ώστε*

$$f\left[x_0,x_1,\ldots,x_n\right]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n\,!}\,. \tag{3.3.4 - 7}$$

Ασκήσεις

1. Με τον τύπο παρεμβολής του Newton να υπολογιστεί το πολυώνυμο που προσεγγίζει την ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ του Παραδείγματος 3.2.1 - 3, όταν τα σημεία είναι $x_0 = 0$, $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.6$, και $x_3 = 1.0$.

2. Έστω ότι τα σημεία x_0, x_1, x_2 και x_3 ισαπέχουν, δηλαδή $h = x_{i+1} - x_i$ για κάθε $i = 0,\, 1,\, 2,\, 3$. Δείξτε ότι[6]

$$\begin{aligned} 2!\, f\left[x_0, x_1, x_2\right] &= \frac{f\left(x_0\right) - 2f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right)}{h^2}\,, && (3.3.4 - 8) \\ 3!\, f\left[x_0, x_1, x_2, x_3\right] &= \frac{1}{h^3}\left[-f\left(x_0\right) + 3f\left(x_1\right)\right. \\ &\quad \left. -3f\left(x_2\right) + f\left(x_3\right)\right]. && (3.3.4 - 9) \end{aligned}$$

3. Έστω ότι τα σημεία x_0, x_1, …, x_n ισαπέχουν, δηλαδή $h = x_{i+1} - x_i$ για κάθε $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1$. Τότε, αν $x = x_0 + sh$, η διαφορά $x - x_i$ γράφεται $x - x_i = (s-1)h$, οπότε από τον τύπο $(3.3.3 - 1)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n\left(x_0 + sh\right) = f\left[x_0\right] + shf\left[x_1, x_0\right] + s(s-1)h^2 f\left[x_0, x_1, x_2\right] \\ &\quad + \ldots + s(s-1)\cdots(s-n+1)h^n f\left[x_0, x_1, \ldots, x_n\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} s(s-1)\cdots(s-n+1)\, h^k\, f\left[x_0, x_1, \ldots, x_k\right]. \end{aligned}$$

Αν

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}\,,$$

δείξτε ότι το πολυώνυμο $P_n(x)$ τελικά γράφεται

$$P_n(x) = P_n\left(x_0 + sh\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} k!\, h^k f\left[x_0, x_1, \ldots, x_k\right]. \qquad (3.3.4 - 10)$$

Εισάγοντας τον συμβολισμό Δ για τις προς τα εμπρός διαιρεμένες διαφορές

[6] Οι τύποι αυτοί είναι μια προσέγγιση της αντίστοιχης παραγώγου στο Θεώρημα 3.3.4 - 1. Αναλυτική μελέτη θα γίνει στο Μάθημα *Προσέγγιση Παραγώγων*.

ως εξής:[7]

$$
\begin{aligned}
f\left[x_0, x_1\right] &= \frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_0\right)}{x_1-x_0}=\frac{1}{h} \Delta f\left(x_0\right) \\
f\left[x_0, x_1, x_2\right] &= \frac{1}{2 h}\left[\frac{\Delta f\left(x_1\right)-\Delta f\left(x_0\right)}{h}\right]=\frac{1}{2 h^2} \Delta^2 f\left(x_0\right) \\
&\vdots \\
f\left[x_0, x_1, \ldots, x_k\right] &= \frac{1}{k\,!\, h^k} \Delta^k f\left(x_0\right),
\end{aligned}
$$

δείξτε επίσης ότι ο τύπος $(3.3.4-10)$ γράφεται

$$
P_n(x)=\sum_{k=0}^n\binom{s}{k} \Delta^k f\left(x_0\right). \qquad (3.3.4 \text{ - } 11)
$$

[7]Βλέπε Σημείωση 3.3.2 - 1.

Βιβλιογραφία

[1] Ακρίβης, Γ. & Δουγαλής, Β. (1995). *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–022–6.

[2] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.* Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[3] Στεφανάκος, Χ. (2009). *Προγραμματισμός Η/Υ με MATLAB.* Γκιούρδας Εκδοτική. ISBN 978–960–387–856–8.

[4] Atkinson, K. E. (1989). *An Introduction to Numerical Analysis.* John Wiley & Sons (2nd ed.). ISBN 0–471–50023–2.

[5] Burden, R. L. & Faires, D. J. (2010). *Numerical Analysis.* Brooks/Cole (7th ed.). ISBN 978–0–534–38216–2.

[6] Conte, S. D. & de Boor, C. (1980). *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach.* McGraw–Hill Inc (3rd ed.). ISBN 978–0–07–012447–9.

[7] Don, E. (2006). *Schaum's Outlines – Mathematica.* Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN 978–960–209–961–2.

[8] Leader, L. J. (2004). *Numerical Analysis and Scientific Computation.* Addison–Wesley. ISBN 978–0–201–73499–7.

[9] Schatzman, M. (2002). *Numerical Analysis: A Mathematical Introduction.* Oxford: Clarendon Press. ISBN 978–0–19–850279–1.

[10] Stoer, J. & Bulirsch, R. (2002). *Introduction to Numerical Analysis.* Springer (3rd ed.). ISBN 978–0–387–95452–3.

[11] Sli, E. & Mayers, D. (2003). *An Introduction to Numerical Analysis.* Cambridge University Press. ISBN 978–0–521–00794–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/