

Μάθημα 6

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Εισαγωγή

Η προσέγγιση της τιμής της παραγώγου μιας συνάρτησης χρησιμοποιείται κυρίως:

- i) όταν λόγω της πολύπλοκης μορφής του τύπου της είναι αδύνατος ο θεωρητικός υπολογισμός της,
- ii) όταν δεν είναι γνωστός ο τύπος της συνάρτησης, αλλά μόνον οι τιμές της σε ορισμένα σημεία, και
- iii) στην προσεγγιστική λύση των διαφορικών εξισώσεων. Η περίπτωση αυτή θα εξεταστεί στα μαθήματα που ακολουθούν.

6.1 Συναρτήσεις μιας μεταβλητής

Είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη ότι η 1ης τάξης παράγωγος μιας συνάρτησης, έστω $f \mid (a, b)$, στο σημείο $\xi \in (a, b)$ υπολογίζεται από την παρακάτω οριακή τιμή

$$f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi},$$

εφόσον αυτή υπάρχει ή ισοδύναμα ως

$$f'(\xi) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x},$$

όταν $\xi + \Delta x \in (a, b)$ με Δx να συμβολίζει μια μεταβολή της μεταβλητής x . Επομένως για τον υπολογισμό της 1ης παραγώγου απαιτούνται 2 σημεία στο πεδίο ορισμού και συγκεκριμένα στην 1η περίπτωση των ξ, x και στη 2η των $\xi, \xi + \Delta x$ και στη συνέχεια ο υπολογισμός των οριακών τιμών.

Είναι προφανές ότι στην **προσέγγιση** της 1ης παραγώγου που θα εξεταστεί στη συνέχεια του μαθήματος η οριακή τιμή δεν υφίσταται πλέον, ενώ ο υπολογισμός σύμφωνα με τα παραπάνω θα απαιτεί τουλάχιστον 2 σημεία.

6.1.1 Υπολογισμός με πολυώνυμο παρεμβολής

Έστω $f(x)$ μία συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[a, b]$ και παραγωγίσιμη για κάθε $x \in (a, b)$. Αν x_0, x_1, \dots, x_n είναι $n + 1$ διαφορετικά σημεία του $[a, b]$, τότε, όπως είναι ήδη γνωστό από το Μάθημα *Πολυωνυμική Παρεμβολή*, ισχύει ο παρακάτω τύπος παρεμβολής του Newton:

$$f(x) \approx P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots \quad (6.1.1 - 1) \\ + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Διακρίνονται τώρα οι παρακάτω ειδικές περιπτώσεις για τον αριθμό των παραπάνω σημείων παρεμβολής x_0, x_1, \dots, x_n :

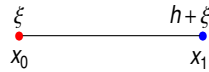
Σημεία παρεμβολής : x_0, x_1

Έστω $a = x_0$ και $b = x_1$. Τότε από τον τύπο (6.1.1 - 1) προκύπτει ότι

$$f(x) \approx P_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0),$$

οπότε

$$f'(x) \approx P_1'(x) = \overbrace{f'[x_0]}^{=0} + \{f[x_0, x_1](x - x_0)\}' \\ = f[x_0, x_1] \overbrace{(x - x_0)'}^{=1} = f[x_0, x_1].$$



Σχήμα 6.1.1 - 1: ο προς τα εμπρός τύπος προσέγγισης της 1ης παραγώγου μιας συνάρτησης στο σημείο ξ

¹Επομένως αν $\xi \in [x_0, x_1]$, τότε

$$f'(\xi) \approx P'_1(\xi) = f[x_0, x_1] \quad (6.1.1 - 2)$$

μια έκφραση που είναι ανεξάρτητη από το σημείο ξ .

Από τις παραπάνω άπειρες θέσεις του σημείου ξ στο $[x_0, x_1]$ οι περισσότερες ενδιαφέρουσες για τις εφαρμογές δίνονται στη συνέχεια. Αν:

i)

$$\xi = x_0 \quad \text{και} \quad h = x_1 - x_0 \quad (\text{Σχ. 6.1.1 - 1}),$$

από τον τύπο (6.1.1 - 2) προκύπτει

$$f'(\xi) \approx f[\xi, \xi + h] = \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}, \quad (6.1.1 - 3)$$

που είναι γνωστός ως ο προς τα εμπρός τύπος (forward-difference formula) προσέγγισης της 1ης παραγώγου μιας συνάρτησης.

ii)

$$\xi = x_1 \quad (\text{Σχ. 6.1.1 - 2}),$$

τότε

$$f'(\xi) \approx f[\xi - h, \xi] = \frac{f(\xi) - f(\xi - h)}{h} \quad (6.1.1 - 4)$$

γνωστός ως ο ανάδρομος τύπος (backward-difference formula) προσέγγισης της 1ης παραγώγου.

¹Εφόσον η προσέγγιση της 1ης παραγώγου δεν γίνεται με υπολογισμό οριακής τιμής, είναι δυνατόν το ξ να λαμβάνει τις τιμές x_0 και x_1 .



Σχήμα 6.1.1 - 2: ο **ανάδρομος τύπος** προσέγγισης της 1ης παραγώγου μιας συνάρτησης στο σημείο ξ

iii)

$$\xi = \frac{x_0 + x_1}{2},$$

οπότε τα σημεία x_0 και x_1 βρίσκονται συμμετρικά εκατέρωθεν του σημείου ξ (Σχ. 6.1.1 - 3) με

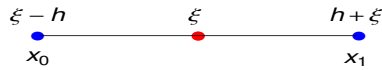
$$x_0 = \xi - h, \quad x_1 = \xi + h \quad \text{και} \quad h = \frac{x_1 - x_0}{2}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} f'(\xi) &\approx f[\xi - h, \xi + h] \\ &= \frac{f(\xi + h) - f(\xi - h)}{2h} \end{aligned} \quad (6.1.1 - 5)$$

γνωστός ως ο με **κεντρικές διαφορές τύπος** (central-difference formula) προσέγγισης της πρώτης παραγώγου.

Από τους τύπους (6.1.1-3) - (6.1.1-5) προκύπτει ότι, όταν τα σημεία x_0 και x_1 είναι αρκετά κοντά, τότε η $f[x_0, x_1]$ δίνει μία πολύ καλύτερη προσέγγιση της παραγώγου $f'(\xi)$ στο μέσον $\xi = (x_0 + x_1)/2$ παρά στα άκρα σημεία x_0 και x_1 , ένα συμπέρασμα που άλλωστε συμφωνεί και με το Θεώρημα της Μέσης Τιμής.



Σχήμα 6.1.1 - 3: ο με **κεντρικές διαφορές τύπος** προσέγγισης της 1ης παραγώγου μιας συνάρτησης στο σημείο ξ

Σημεία παρεμβολής : x_0, x_1, x_2

Έστω $a = x_0$ και $b = x_2$. Τότε

$$\begin{aligned} f(x) \approx P_2(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1), \quad (6.1.1 - 6) \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} f'(x) \approx P_2'(x) &= \overbrace{f'[x_0]}^{=0} + \{f[x_0, x_1](x - x_0)\}' \\ &\quad + \{f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)\}' \\ &= f[x_0, x_1] \overbrace{(x - x_0)'}^{=1} + f[x_0, x_1, x_2] \overbrace{\{(x - x_0)(x - x_1)\}'}^{=2x - x_0 - x_1} \\ &= f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2](2x - x_0 - x_1), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$f'(x) \approx P_2'(x) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2](2x - x_0 - x_1). \quad (6.1.1 - 7)$$

Επομένως αν όμοια $\xi \in [x_0, x_2]$, τότε

$$f'(\xi) \approx P_2'(\xi) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2](2\xi - x_0 - x_1). \quad (6.1.1 - 8)$$

Διακρίνονται τώρα οι παρακάτω περιπτώσεις για το ξ . Αν:

- i) $\xi = x_0$ και $x_1 = \xi + h$, $x_2 = \xi + 2h$,
τότε από την (6.1.1 - 8) προκύπτει

$$\begin{aligned} f'(\xi) &\approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} (2\xi - x_0 - x_1) \\ &\approx \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \\ &\quad + \frac{\frac{f(\xi + 2h) - f(\xi + h)}{h} - \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}}{2h} [2\xi - \xi - (\xi + h)] \\ &\approx \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} - \frac{f(\xi + 2h) - 2f(\xi + h) + f(\xi)}{2h} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$f'(\xi) \approx \frac{-3f(\xi) + 4f(\xi + h) - f(\xi + 2h)}{2h}. \quad (6.1.1 - 9)$$

- ii) $\xi = x_1$ και $x_0 = \xi - h$, $x_2 = \xi + h$,
τότε όμοια αποδεικνύεται ότι

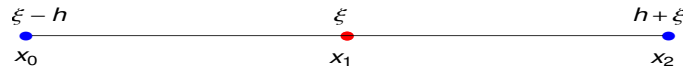
$$f'(\xi) \approx \frac{-f(\xi - h) + f(\xi + h)}{2h}. \quad (6.1.1 - 10)$$

Τελικά, αν

- iii) $\xi = x_2$ και $x_0 = \xi - 2h$, $x_1 = \xi - h$,
τότε

$$f'(\xi) \approx \frac{f(\xi - 2h) - 4f(\xi - h) + 3f(\xi)}{2h} \quad (6.1.1 - 11)$$

όπου προφανώς ο τύπος (6.1.1 - 11) προκύπτει από τον (6.1.1 - 9), θέτοντας όπου h το $-h$. Επομένως, τελικά οι διαφορετικοί τύποι υπολογισμού της 1ης παραγώγου στην περίπτωση των σημείων παρεμβολής x_0 , x_1 και x_2 είναι οι (6.1.1 - 9) και (6.1.1 - 10), που είναι γνωστοί και σαν οι **τύποι των 3 σημείων**.



Σχήμα 6.1.1 - 4: ο με **κεντρικές διαφορές τύπος** προσέγγισης της 2ης παραγώγου μιας συνάρτησης στο σημείο ξ

Προσέγγιση 2ης παραγώγου

Παραγωγίζοντας την (6.1.1 - 7) διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} f''(x) \approx P_2''(x) &= \overbrace{f'[x_0, x_1]}^{=0} + \{f[x_0, x_1, x_2](2x - x_0 - x_1)\}' \\ &= f[x_0, x_1, x_2] \overbrace{\{(2x - x_0 - x_1)\}'}^{=2} = 2f[x_0, x_1, x_2], \end{aligned}$$

οπότε αν $\xi \in [x_0, x_2]$, τότε

$$f''(\xi) \approx P_2''(\xi) = 2f[x_0, x_1, x_2] \quad (6.1.1 - 12)$$

μια έκφραση όμοια ανεξάρτητη του ξ .

Η περισσότερο χρησιμοποιούμενη εφαρμογή δίνεται στη συνέχεια. Αν:

$$\xi = x_1, \quad x_0 = \xi - h \quad \text{και} \quad x_2 = \xi + h \quad (\text{Σχ. 6.1.1 - 4}),$$

τότε από την (6.1.1 - 12) προκύπτει

$$f''(\xi) \approx \frac{f(\xi - h) - 2f(\xi) + f(\xi + h)}{h^2} \quad (6.1.1 - 13)$$

που είναι γνωστός ως ο με **κεντρικές διαφορές τύπος** (central-difference formula) προσέγγισης της 2ης παραγώγου μιας συνάρτησης.

Προσεγγίσεις παραγώγων ανώτερης τάξης προκύπτουν ανάλογα θεωρώντας μεγαλύτερου βαθμού πολυώνυμα παρεμβολής.

6.1.2 Υπολογισμός με τον τύπο του Taylor

Είναι ήδη γνωστό ότι, αν $f \in C^\nu(a, b)$ είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη μέχρι και ν -τάξη στο (a, b) , τότε, αν $\xi \in (a, b)$, ισχύει ο παρακάτω **τύπος του Taylor**²

$$f(x) \approx f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x - \xi) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - \xi)^2 + \dots + \frac{f^{(\nu)}(\xi)}{\nu!}(x - \xi)^\nu, \quad (6.1.2 - 1)$$

όταν οι αριθμοί $f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(\nu)}(\xi)/\nu!$ είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου στο ξ .

Έστω τώρα ότι στον τύπο (6.1.2 - 1) τα x και ξ αντικαθίστανται από τα $x + h$ και x αντίστοιχα με $h > 0$. Τότε η (6.1.2 - 1) γράφεται

$$f(x + h) \approx f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots + \frac{h^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(x). \quad (6.1.2 - 2)$$

Ο τύπος (6.1.2 - 2), όταν το h αντικατασταθεί με το $-h$, γράφεται ως εξής:

$$f(x - h) \approx f(x) - \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots + (-1)^\nu \frac{h^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(x). \quad (6.1.2 - 3)$$

Προσεγγίσεις 1ης παραγώγου

Από τον τύπο (6.1.2 - 2) προκύπτει ότι

$$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \mathcal{O}(h^2). \quad (6.1.2 - 4)$$

²Όταν $\xi = 0$, ο τύπος (6.1.2 - 1) γράφεται στην παρακάτω μορφή

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}x^\nu$$

που είναι γνωστός σαν **τύπος του Maclaurin**, ενώ οι αριθμοί $f(0), f'(0), \dots, f^{(\nu)}(0)/\nu!$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές του πολυωνύμου.

Παρατηρήσεις 6.1.2 - 1

- Στην (6.1.2 - 4) ο όρος $\mathcal{O}(h^2)$ θα συμβολίζει στο εξής κάθε παράσταση με όρους h βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του h^2 .
- Τότε, επειδή ο παραπάνω συμβολισμός $\mathcal{O}(h^2)$ συμπεριλαμβάνει και την περίπτωση του αθροίσματος των άπειρων όρων, δηλαδή της σειράς, η (6.1.2 - 4) και κάθε ανάλογη αυτής έκφραση θα γράφεται με ίσον, διαφορετικά θα χρησιμοποιείται το σύμβολο του κατά προσέγγιση ίσον (\approx).

Λύνοντας την (6.1.2 - 4) ως προς $f'(x)$ έχουμε

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (6.1.2 - 5)$$

που συμπίπτει με την (6.1.1 - 3), όταν $x = \xi$. Στην (6.1.2 - 5) ο βαθμός του h στον όρο $\mathcal{O}(h)$ είναι 1, οπότε και η προσέγγιση της $f'(x)$ θα είναι 1ου βαθμού.

Όμοια από τον τύπο (6.1.2 - 3) προκύπτει ότι

$$f(x-h) = f(x) - \frac{h}{1!} f'(x) + \mathcal{O}(h^2),$$

οπότε λύνοντας ως προς $f'(x)$ έχουμε

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (6.1.2 - 6)$$

δηλαδή η (6.1.1 - 4) με $x = \xi$ και προσέγγιση επίσης 1ου βαθμού.

Αν η (6.1.2 - 2) γραφεί ως εξής:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \mathcal{O}(h^4) \quad (6.1.2 - 7)$$

και η (6.1.2 - 3) ως:

$$f(x-h) = f(x) - \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \mathcal{O}(h^4), \quad (6.1.2 - 8)$$

τότε αφαιρώντας κατά μέλη τις (6.1.2 - 7) και (6.1.2 - 8) προκύπτει ότι

$$f(x+h) - f(x-h) = 2h f'(x) + \mathcal{O}(h^3),$$

οπότε

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \quad (6.1.2 - 9)$$

δηλαδή η (6.1.1-5) με $x = \xi$, που λόγω του όρου $\mathcal{O}(h^2)$ είναι μια προσέγγιση 2ου βαθμού.

Προσέγγιση 2ης παραγώγου

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (6.1.2-7) και (6.1.2-8) προκύπτει ότι

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \mathcal{O}(h^4),$$

οπότε διαιρώντας και τα δύο μέλη με h^2 τελικά έχουμε

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \quad (6.1.2 - 10)$$

δηλαδή η (6.1.1-13) με $x = \xi$ που ορίζει μια προσέγγιση 2ου βαθμού.

Συνδυάζοντας κατάλληλα τις (6.1.2-2) και (6.1.2-3) προκύπτουν προσεγγίσεις για κάθε παράγωγο της f .³

Παράδειγμα 6.1.2 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Με τους τύπους (6.1.1-3) και (6.1.1-13) να υπολογιστούν οι προσεγγίσεις των παραγώγων $f'(1)$ και $f''(1)$, όταν

$$h = 0.1, \quad 0.01 \quad \text{και} \quad 0.001.$$

Στη συνέχεια να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τις θεωρητικές τιμές

$$\begin{aligned} f'(1) &= \left. -2x e^{-x^2} \right|_{x=1} \approx -0.7357589, \\ f''(1) &= \left. (-2 + 4x^2) e^{-x^2} \right|_{x=1} \approx 0.7357589. \end{aligned}$$

³Ο αναγνώστης, για έναν πλήρη πίνακα με τις προσεγγίσεις των παραγώγων και των αντίστοιχων τάξεων παραπέμπεται στο βιβλίο B. Fornberg [9] Κεφ. 3.

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο (6.1.1 – 3) έχουμε:

$$h = 0.1$$

$$f'(1) \approx \frac{f(1+0.1) - f(1)}{0.1} = \frac{e^{1.1^2} - e^{-1}}{0.1} = -0.696\,821\,6,$$

$$h = 0.01$$

$$f'(1) \approx \frac{f(1+0.01) - f(1)}{0.01} = \frac{e^{1.01^2} - e^{-1}}{0.01} = -0.732\,055\,9,$$

$$h = 0.001$$

$$f'(1) \approx \frac{f(1+0.001) - f(1)}{0.001} = \frac{e^{1.001^2} - e^{-1}}{0.001} = -0.735\,390\,8,$$

ενώ με τον τύπο (6.1.1 – 13) είναι

$$h = 0.1$$

$$\begin{aligned} f''(1) &\approx \frac{f(1+0.1) - 2f(1) - f(1-0.1)}{0.1^2} = \frac{e^{1.1^2} - 2e^{-1} + e^{0.9^2}}{0.1^2} \\ &= 0.729\,646\,3, \end{aligned}$$

$$h = 0.01$$

$$\begin{aligned} f''(1) &\approx \frac{f(1+0.01) - 2f(1) - f(1-0.01)}{0.01^2} = \frac{e^{1.01^2} - 2e^{-1} + e^{0.99^2}}{0.01^2} \\ &= 0.735\,697\,6, \end{aligned}$$

$$h = 0.001$$

$$\begin{aligned} f''(1) &\approx \frac{f(1+0.001) - 2f(1) - f(1-0.001)}{0.001^2} = \frac{e^{1.001^2} - 2e^{-1} + e^{0.999^2}}{0.001^2} \\ &= 0.735\,758\,3. \end{aligned}$$

Συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα και τα απόλυτα σφάλματα δίνονται στον Πίνακα 6.1.2 - 1, όπου το $0.611\,2551\mathbf{E} - 02 = 0.00611\,255\,1$ κ.λπ. ■

Πίνακας 6.1.2 - 1: Παράδειγμα 6.1.2 - 1: προσέγγιση 1ης και 2ης παραγώγου

h	$f'(1)$	απόλυτο σφάλμα	$f''(1)$	απόλυτο σφάλμα
0.100	-0.696 821 6	0.038 937 26	0.729 646 3	0.611 255 1E-02
0.010	-0.732 055 9	0.370 301E-02	0.735 697 6	0.613 1136E-04
0.001	-0.735 390 8	0.368 124E-04	0.735 758 3	0.613 143 7E-06

Παράδειγμα 6.1.2 - 2

Με τους τύπους του Taylor (6.1.2 – 2) και (6.1.2 – 3) να υπολογιστεί η προσέγγιση της παραγώγου $f^{(3)}(x)$.

Λύση. Επειδή η παράγωγος που ζητείται η προσέγγιση είναι 3ης τάξης, πρέπει τα αναπτύγματα να περιέχουν την παράγωγο αυτή. Επομένως

$$f(x+2h) \approx f(x) + \frac{2h}{1!} f'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x) + \mathcal{O}(h^4),$$

$$f(x+h) \approx f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \mathcal{O}(h^4),$$

$$f(x-h) \approx f(x) - \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \mathcal{O}(h^4),$$

$$f(x-2h) \approx f(x) - \frac{2h}{1!} f'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x) - \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x) + \mathcal{O}(h^4).$$

Στη συνέχεια πρέπει προσθέτοντας κατά μέλη **κατάλληλα πολλαπλασιασμέ-**
νες τις παραπάνω σχέσεις να απαλείφονται η 1η και η 2η παράγωγος. Άρα

$$f(x+2h) \approx f(x) + \frac{2h}{1!} f'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x) + \mathcal{O}(h^4),$$

$$-2f(x+h) \approx -2f(x) - \frac{2h}{1!} f'(x) - \frac{2h^2}{2!} f''(x) - \frac{2h^3}{3!} f'''(x) + \mathcal{O}(h^4),$$

$$2f(x-h) \approx 2f(x) - \frac{2h}{1!} f'(x) + \frac{2h^2}{2!} f''(x) - \frac{2h^3}{3!} f'''(x) + \mathcal{O}(h^4),$$

$$-f(x-2h) \approx -f(x) + \frac{2h}{1!} f'(x) - \frac{(2h)^2}{2!} f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x) + \mathcal{O}(h^4),$$

οπότε τελικά

$$f^{(3)}(x) \approx \frac{-f(x-2h) + 2f(x-h) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{2h^3} + \mathcal{O}(h^2). \quad (6.1.2 - 11)$$

Η προσέγγιση αυτή λόγω του όρου $\mathcal{O}(h^2)$ είναι 2ης τάξης. ■

Ασκήσεις

1. Με τους τύπους (6.1.1–3) και (6.1.1–13) και ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων να υπολογιστεί η 1ης και η 2ης τάξης παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\begin{array}{ll} i) \ln(e^{2x} - 2) & iii) \sinh x \\ ii) \tan^{-1}(e^{-x}) & iv) \sqrt{1+x^2}. \end{array}$$

στο σημείο $\xi = 1.5$, όταν $h = 0.1, 0.01$ και 0.0025 . Στη συνέχεια να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με την αντίστοιχη θεωρητική τιμή.

2. Όμοια με τους τύπους (6.1.1 – 5) και (6.1.1 – 13) των συναρτήσεων:

$$i) \cos x^2 \quad ii) \frac{\sin x}{x},$$

όταν $h = 0.1, 0.01$ και 0.001 , στο σημείο $\xi = \pi/4$ και να γίνει σύγκριση με την αντίστοιχη θεωρητική τιμή.

3. Με τον τύπο (6.1.1 – 9) και $h = 0.01$ να υπολογιστεί η 1ης τάξης παράγωγος της συνάρτησης του Παραδείγματος 6.1.2 - 1 και να γίνει σύγκριση του αποτελέσματος με τα αντίστοιχα του Πίνακα 6.1.2 - 1.

4. Με τους τύπους του Taylor (6.1.2 – 2) και (6.1.2 – 3) να υπολογιστεί η προσέγγιση της παραγώγου $f^{(4)}(x)$.

Απαντήσεις

1. (i) Έστω

$$f(x) = \ln(e^{2x} - 2). \quad \text{Τότε} \quad f'(x) = \frac{2e^{2x}}{-2 + e^{2x}} \quad \text{με} \quad f'(1.5) = 2.221171$$

$$f''(x) = -\frac{8e^{2x}}{(-2 + e^{2x})^2} \quad \text{με} \quad f''(1.5) = -0.491259.$$

Σύμφωνα με τους τύπους (6.1.1 – 3) και (6.1.1 – 13) έχουμε:

$$h = 0.1$$

$$\begin{aligned} f'(1.5) &\approx \frac{f(1.5+0.1) - f(1.5)}{0.1} = \frac{\ln(e^{2(1.5+0.1)} - 2) - \ln(e^{2 \cdot 1.5} - 2)}{0.1} \\ &= 2.198475, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(1.5) &\approx \frac{f(1.5-0.1) - 2f(1.5) + f(1.5+0.1)}{0.1^2} \\ &= \frac{\ln(e^{2(1.5-0.1)} - 2) - 2\ln(e^{2 \cdot 1.5} - 2) + \ln(e^{2(1.5+0.1)} - 2)}{0.1^2} \\ &= -0.494118. \end{aligned}$$

$$h = 0.01$$

$$f'(1.5) \approx \frac{f(1.5+0.01) - f(1.5)}{0.01} = \dots = 2.218735,$$

$$f''(1.5) \approx \frac{f(1.5-0.01) - 2f(1.5) + f(1.5+0.01)}{0.01^2} = \dots = -0.491288.$$

$$h = 0.0025$$

$$f'(1.5) \approx \frac{f(1.5+0.0025) - f(1.5)}{0.0025} = \dots = 2.220558,$$

$$f''(1.5) \approx \frac{f(1.5-0.01) - 2f(1.5) + f(1.5+0.01)}{0.01^2} = \dots = -0.491261.$$

(ii) Έστω

$$f(x) = \tan^{-1}(e^{-x}). \quad \text{Τότε} \quad f'(x) = -\frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}} \quad \mu\epsilon \quad f'(1.5) = -0.212548$$

$$f''(x) = \frac{e^x(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2} \quad \mu\epsilon \quad f''(1.5) = 0.192388.$$

Σύμφωνα με τους τύπους (6.1.1 – 3) και (6.1.1 – 13) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 h &= 0.1 \\
 f'(1.5) &\approx \frac{f(1.5 + 0.1) - f(1.5)}{0.1} = \dots = -0.203\,155, \\
 f''(1.5) &\approx \frac{f(1.5 - 0.1) - 2f(1.5) + f(1.5 + 0.1)}{0.1^2} \\
 &= \dots = 0.192\,374.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h &= 0.01 \\
 f'(1.5) &\approx \frac{f(1.5 + 0.01) - f(1.5)}{0.01} = \dots = -0.211\,588, \\
 f''(1.5) &\approx \frac{f(1.5 - 0.01) - 2f(1.5) + f(1.5 + 0.01)}{0.01^2} = \dots = 0.192\,387.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h &= 0.0025 \\
 f'(1.5) &\approx \frac{f(1.5 + 0.0025) - f(1.5)}{0.0025} = \dots = -0.212\,308, \\
 f''(1.5) &\approx \frac{f(1.5 - 0.01) - 2f(1.5) + f(1.5 + 0.01)}{0.01^2} = \dots = 0.192\,388.
 \end{aligned}$$

(iii) Έστω

$$\begin{aligned}
 f(x) = \sinh 2x. \quad \text{Τότε} \quad f'(x) = 2 \cosh 2x \quad \mu\epsilon \quad f'(1.5) = 20.135\,320 \\
 f''(x) = 4 \sinh 2x \quad \mu\epsilon \quad f''(1.5) = 40.071\,500.
 \end{aligned}$$

Όμοια με τους τύπους (6.1.1 – 3) και (6.1.1 – 13) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 h &= 0.1 \\
 f'(1.5) &\approx \dots = 22.280\,090 \quad \text{και} \quad f''(1.5) \approx \dots = 40.205\,250.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h &= 0.01 \\
 f'(1.5) &\approx \dots = 20.337\,030 \quad \text{και} \quad f''(1.5) \approx \dots = 40.072\,840.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h &= 0.0025 \\
 f'(1.5) &\approx \dots = 20.185\,500 \quad \text{και} \quad f''(1.5) \approx \dots = 40.071\,580.
 \end{aligned}$$

(iv) Έστω

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}. \quad \text{Τότε} \quad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \mu\epsilon \quad f'(1.5) = 0.832050$$

$$f''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \quad \mu\epsilon \quad f''(1.5) = 0.170677.$$

Όμοια με τους τύπους (6.1.1 – 3) και (6.1.1 – 13) έχουμε:

$$h = 0.1$$

$$f'(1.5) \approx \dots = 0.840206 \quad \text{και} \quad f''(1.5) \approx \dots = 0.171000.$$

$$h = 0.01$$

$$f'(1.5) \approx \dots = 0.832900 \quad \text{και} \quad f''(1.5) \approx \dots = 0.170680.$$

$$h = 0.0025$$

$$f'(1.5) \approx \dots = 0.832263 \quad \text{και} \quad f''(1.5) \approx \dots = 0.170677.$$

2. (i) Έστω

$$f(x) = \cos x^2. \quad \text{Τότε} \quad f'(x) = -2x \cos x^2 \quad \mu\epsilon \quad f'(\pi/4) = -0.908657$$

$$f''(x) = -2(2x^2 \cos x^2 + \sin x^2) \quad \mu\epsilon \quad f''(\pi/4) = -3.169608.$$

Όμοια με τους τύπους (6.1.1 – 5) και (6.1.1 – 13) έχουμε:

$$h = 0.1$$

$$f'(\pi/4) \approx \dots = -0.917640 \quad \text{και} \quad f''(\pi/4) \approx \dots = -3.159267.$$

$$h = 0.01$$

$$f'(\pi/4) \approx \dots = -0.908747 \quad \text{και} \quad f''(\pi/4) \approx \dots = -3.169505.$$

$$h = 0.001$$

$$f'(\pi/4) \approx \dots = -0.908658 \quad \text{και} \quad f''(\pi/4) \approx \dots = -3.169607.$$

(ii) Έστω

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}. \quad \text{Τότε} \quad f'(x) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \quad \mu\epsilon \quad f'(\pi/4) = -0.246002$$

$$f''(x) = -\frac{2 \cos x}{x^2} + \frac{2 \sin x}{x^3} - \frac{\sin x}{x} \quad \mu\epsilon$$

$$f''(\pi/4) = -0.273877.$$

Όμοια με τους τύπους (6.1.1 – 5) και (6.1.1 – 13) έχουμε:

$$h = 0.1$$

$$f'(\pi/4) \approx \dots = -0.245759 \quad \text{και} \quad f''(\pi/4) \approx \dots = -0.273746.$$

$$h = 0.01$$

$$f'(\pi/4) \approx \dots = -0.246000 \quad \text{και} \quad f''(\pi/4) \approx \dots = -0.273876.$$

$$h = 0.001$$

$$f'(\pi/4) \approx \dots = -0.246002 \quad \text{και} \quad f''(\pi/4) \approx \dots = -0.273877.$$

3. Όμοια με Ασκήσεις 1 και 2.

4. Ακολουθώντας διαδικασία ανάλογη του Παραδείγματος 6.1.2 - 2 αποδεικνύεται ότι

$$f^{(4)}(x) \approx \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 6f(x) - 4f(x+h) + f(x+2h)}{h^4} + \mathcal{O}(h^2).$$

6.2 Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

6.2.1 Υπολογισμός με τον τύπο του Taylor

Έστω $u = u(x, t)$ μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, όπου το x συμβολίζει συνήθως τη μεταβλητή του διαστήματος και το t του χρόνου. Τότε ο τύπος (6.1.2 – 1) γράφεται

$$\begin{aligned} u(x+h, t) &\approx u(x, t) + \frac{h}{1!} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &+ \dots + \frac{h^\nu}{\nu!} \frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu}, \end{aligned} \quad (6.2.1 - 1)$$

όταν $h > 0$ η αύξηση της μεταβλητής x , αντίστοιχα

$$\begin{aligned} u(x, t+\ell) &\approx u(x, t) + \frac{\ell}{1!} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\ell^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ &+ \dots + \frac{\ell^\nu}{\nu!} \frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu}, \end{aligned} \quad (6.2.1 - 2)$$

όταν $\ell > 0$ η αύξηση της t . Θέτοντας όπου h το $-h$, αντίστοιχα όπου ℓ το $-\ell$, προκύπτουν ανάλογοι τύποι της (6.1.2 - 3).

Όμοια τότε με την Παράγραφο 6.1.2 αποδεικνύεται ότι ισχύουν για την 1η μερική παράγωγο ως προς x οι προσεγγίσεις:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (6.2.1 - 3)$$

$$= \frac{u(x, t) - u(x-h, t)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (6.2.1 - 4)$$

$$= \frac{u(x+h, t) - u(x-h, t)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (6.2.1 - 5)$$

με ανάλογες εκφράσεις για την $\partial u / \partial t$, ενώ για τη 2η μερική παράγωγο ως προς x η προσέγγιση:

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \quad (6.2.1 - 6)$$

αντίστοιχα

$$u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u(x, t+\ell) - 2u(x, t) + u(x, t-\ell)}{\ell^2} + \mathcal{O}(\ell^2). \quad (6.2.1 - 7)$$

Συνδυάζοντας κατάλληλα την (6.2.1 - 1), αντίστοιχα (6.2.1 - 2) είναι δυνατόν να προκύψουν και άλλες προσεγγίσεις για τις μερικές παραγώγους της u .⁴

Μια σημαντική εφαρμογή του τύπου (6.2.1 - 6) θα δοθεί στο Παράδειγμα 6.2.2 - 1 στη συνέχεια του μαθήματος.

6.2.2 Συνοριακές συνθήκες

Στον προσεγγιστικό υπολογισμό της λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης η παράγωγος ως προς τη μεταβλητή x ανάλογα με την τάξη της αντικαθίσταται με τις προσεγγίσεις (6.2.1 - 3) - (6.2.1 - 6) κ.λπ. Αυτό σημαίνει ότι το διάστημα $[a, b]$ πρέπει να υποδιαιρεθεί σε επιμέρους ισαπέχοντα υποδιαστήματα από τα σημεία (Σχ. 6.2.2 - 1)

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b \quad (6.2.2 - 1)$$

⁴Εκτός από τις μικτές παραγώγους που υπολογίζονται στην Παράγραφο 6.2.3.



Σχήμα 6.2.2 - 1: διαμέριση του $[a, b]$. Τα x_0 και x_N είναι τα **συνοριακά**, ενώ τα x_1, \dots, x_{N-1} τα **εσωτερικά σημεία**



Σχήμα 6.2.2 - 2: διαμέριση του $[a, b]$. Τα σημεία x_{-1} και x_{N+1} είναι **εκτός** του διαστήματος $[a, b]$

και στη συνέχεια σε καθένα από αυτά να εφαρμοστεί ο ανάλογος προσεγγιστικός τύπος.

Τότε το πρόβλημα με τις τιμές της συνάρτησης δημιουργείται, όταν η αντικατάσταση των παραγώγων γίνεται στα άκρα σημεία x_0 και x_N ή σε γειτονικά των. Για παράδειγμα, έστω ότι απαιτείται η προσέγγιση της u_{xx} στο σημείο x_0 . Σύμφωνα με τον τύπο (6.2.1 – 6) στην περίπτωση αυτή θα έχουμε

$$u_{xx}|_{x=x_0} = \frac{u(x_0 - h, t) - 2u(x_0, t) + u(x_0 + h, t)}{h^2}$$

όπου όμως το σημείο $x_0 - h$ είναι εκτός του πεδίου ορισμού $[a, b]$ (Σχ. 6.2.2 - 2). Ανάλογο πρόβλημα υπάρχει και στο σημείο x_N .

Για την αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων πρέπει να είναι γνωστή η συμπεριφορά της συνάρτησης u στα συνοριακά σημεία x_0 και x_N . Αυτό γίνεται με τις λεγόμενες **συνοριακές συνθήκες** (boundary conditions) της διαφορικής εξίσωσης.

Οι κυριότερες από αυτές είναι οι

- **Neumann** συνοριακές συνθήκες

$$u_x|_{x=x_0} = 0 \quad \text{και} \quad u_x|_{x=x_N} = 0.$$

Τότε από την (6.2.1 – 5) προκύπτουν τα εξής (Σχ. 6.2.2 - 2):

$$u_x|_{x=x_0} = \frac{u(x_0 + h, t) - u(x_0 - h, t)}{2h} = 0, \quad \text{οπότε}$$

$$u(x_0 - h, t) = u(x_0 + h, t), \quad \text{και}$$
(6.2.2 - 2)

$$u_x|_{x=x_N} = \frac{u(x_N + h, t) - u(x_N - h, t)}{2h} = 0, \quad \text{οπότε}$$

$$u(x_N + h, t) = u(x_N - h, t).$$

- **Dirichlet** συνοριακές συνθήκες

$$u(x_0) = v_0 \quad \text{και} \quad u(x_N) = v_1,$$

όταν v_0 και v_1 γνωστές τιμές. Στην περίπτωση αυτή, εφόσον δεν είναι γνωστές άλλες συνθήκες, η προσέγγιση των διαφορικών εξισώσεων γίνεται **μόνο στα εσωτερικά σημεία** (Σχ. 6.2.2 - 1).

Παράδειγμα 6.2.2 - 1

Η εξίσωση **διάδοσης θερμότητας** σε μία διάσταση γράφεται

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{όπου} \quad a < x < b, \quad t > 0, \quad (6.2.2 - 3)$$

όταν a θετική σταθερά και $u(x, t)$ μια επαρκώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, όπου η t συμβολίζει τη μεταβλητή του χρόνου και η x του διαστήματος. Στη Φυσική η συνάρτηση u ορίζει τη μεταβολή της θερμοκρασίας, ενώ η σταθερά a τον συντελεστή θερμικής διάχυσης.

Η εξίσωση θερμότητας είναι θεμελιώδους σημασίας σε διάφορους τομείς των θετικών επιστημών όπως στα Μαθηματικά ως το πρότυπο της λύσης παραβολικών PDE's, στη Θεωρία Πιθανοτήτων, στα Οικονομικά Μαθηματικά κ.λπ.

Στην προσεγγιστική λύση της (6.2.2–3) θεωρούνται οι παρακάτω **συνοριακές συνθήκες Dirichlet** (Dirichlet boundary conditions)

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad \text{όταν} \quad t > 0, \quad (6.2.2 - 4)$$

Το σύστημα αυτό γράφεται σε **διανυσματική μορφή** ως εξής:

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = A\mathbf{U}(t), \quad (6.2.2 - 7)$$

όταν

$$\mathbf{U}(t) = [U_1(t), \dots, U_N(t)]^T$$

είναι το διάνυσμα των προσεγγιστικών λύσεων της εξίσωσης (6.2.2 - 3) σε επίπεδο χρόνου t και A ένας τριδιαγώνιος πίνακας της μορφής

$$A = h^{-2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Από τη λύση του συστήματος (9.2.2 - 3) προκύπτουν τότε οι προσεγγιστικές τιμές της u στα σημεία (6.2.2 - 5). Η λύση της (6.2.2 - 3) για τις διάφορες τιμές του t θα δοθεί στο Μάθημα *Αριθμητική λύση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων που ακολουθεί*.

Ασκήσεις

1. Η γραμμική μορφή της εξίσωσης **διάχυσης-μεταφοράς** (diffusion-convection) σε μία διάσταση έχει τη μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{όπου } 0 < x < b \text{ και } t > 0, \quad (6.2.2 - 8)$$

όπου $\mu > 0$ είναι η **παράμετρος μεταφοράς** (convection parameter).

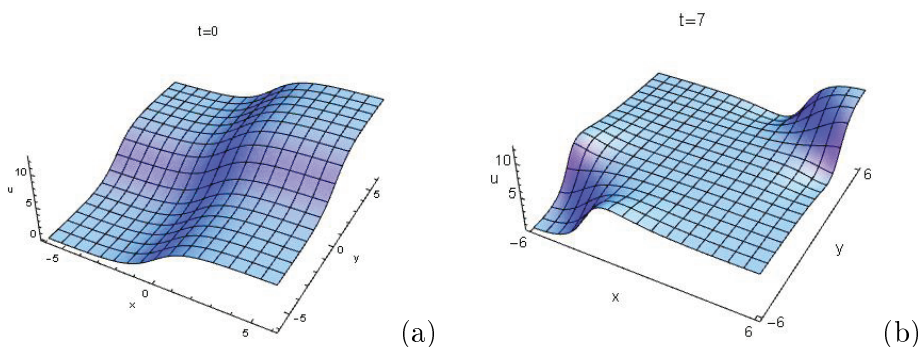
Οι συνοριακές συνθήκες, όταν $t > 0$, είναι

$$u(0, t) = v(t) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u(b, t)}{\partial x} = 0.$$

Με υπολογισμούς ανάλογους του Παραδείγματος 6.2.2 - 1 δείξτε ότι η διανυσματική μορφή της λύσης της εξίσωσης (9.2.2 - 23) είναι

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = A\mathbf{U}(t) + \mathbf{b} \quad \text{με} \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{g},$$

στην περίπτωση όπου $\rho = 0$ και $\phi(x, y) = 1$ δημιουργεί με την πάροδο του χρόνου δύο ευθύγραμμα κύματα που απομακρύνονται μεταξύ τους κατά τη διεύθυνση $y = x$ (Σχ. 6.2.2 - 4).



Σχήμα 6.2.2 - 4: Εξίσωση κύματος (6.2.2 - 9), όταν $x, y \in [-6, 6]$ την (a) χρονική στιγμή $t = 0$ και (b) $t = 7$

6.2.3 Υπολογισμός για δύο μεταβλητές

Ο τύπος του Taylor για την περίπτωση μιας συνάρτησης, έστω $u = u(x, t)$, όταν το ανάπτυγμα γίνεται και για τις δύο μεταβλητές x και t γράφεται

$$\begin{aligned}
 u(x+h, t+\ell) &= u(x, t) + \frac{1}{1!} \left(h \frac{\partial u}{\partial x} + \ell \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\
 &+ \frac{1}{2!} \left(h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2h\ell \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \ell^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \\
 &+ \frac{1}{3!} \left(h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3h^2\ell \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + 3h\ell^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + \ell^3 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right) \\
 &+ \dots \dots \dots
 \end{aligned} \tag{6.2.3 - 1}$$

Από την (6.2.3-1) εύκολα αποδεικνύεται τότε με κατάλληλους συνδυασμούς

των προσήμων των h και ℓ ότι⁶

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} &= \frac{1}{4h\ell} [u(x+h, t+\ell) - u(x+h, t-\ell) \\ &\quad - u(x-h, t+\ell) + u(x-h, t-\ell)] \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\frac{(h+\ell)^4}{hl}\right). \end{aligned} \quad (6.2.3 - 2)$$

Συνδυάζοντας κατάλληλα την (6.2.3 - 1) είναι δυνατόν να προκύψουν και άλλες ανώτερης τάξης προσεγγίσεις των μερικών μεικτών παραγώγων της u .

Παράδειγμα 6.2.3 - 1

Η συνάρτηση

$$u(x, t) = 4 \tan^{-1} [\exp(x - t)] \quad (6.2.3 - 3)$$

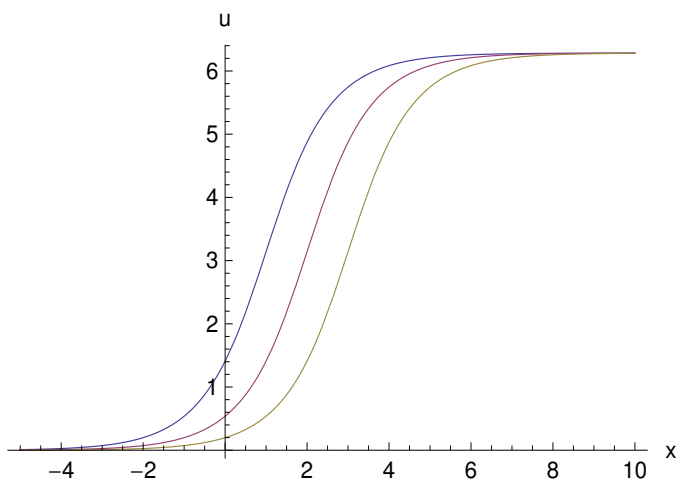
περιγράφει ένα κύμα, που διαδίδεται (Σχ. 6.2.3 - 1) χωρίς να αλλάζει μορφή (soliton).

Τότε

$$u_{xt} = 4 \frac{e^{t+x} (-e^{2t} + e^{2x})}{(e^{2t} + e^{2x})^2}, \quad \text{οπότε} \quad u_{xt}|_{x=0, t=1} = -0.9871087.$$

⁶Στην (6.2.3 - 1) θέτοντας κατάλληλα όπου h το $-h$ και όπου ℓ το $-\ell$, προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} u(x-h, t+\ell) &= u(x, t) + \frac{1}{1!} (-h u_x + \ell u_t) \\ &\quad + \frac{1}{2!} (h^2 u_{xx} - 2h\ell u_{xt} + \ell^2 u_{tt}) + \dots, \\ u(x+h, t-\ell) &= u(x, t) + \frac{1}{1!} (h u_x - \ell u_t) \\ &\quad + \frac{1}{2!} (h^2 u_{xx} - 2h\ell u_{xt} + \ell^2 u_{tt}) + \dots, \\ u(x-h, t-\ell) &= u(x, t) + \frac{1}{1!} (-h u_x - \ell u_t) \\ &\quad + \frac{1}{2!} (h^2 u_{xx} + 2h\ell u_{xt} + \ell^2 u_{tt}) + \dots. \end{aligned}$$



Σχήμα 6.2.3 - 1: Παράδειγμα 6.2.3 - 1: η μορφή του κύματος $u(x, t) = 4 \tan^{-1} [\exp(x - t)]$, όταν $t = 1, 2, 3$ και $x \in [-5, 10]$

Εφαρμόζοντας τον τύπο (6.2.3 - 2) για $h = \ell = 0.01$, όταν $x = 0, t = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} u_{xt}|_{x=0, t=1} &= \frac{1}{4h\ell} [u(0 + 0.01, 1 + 0.01) - u(0 + 0.01, 1 - 0.01) \\ &\quad - u(0 - 0.01, 1 + 0.01) + u(0 - 0.01, 1 - 0.01)] \\ &= -0.9870587. \end{aligned}$$

Άρα υπάρχει σφάλμα στην προσέγγιση: $|e| = 5 \times 10^{-5}$.

Ασκήσεις

1. Όμοια με τη συνάρτηση $u(x, t)$ του Παραδείγματος 6.2.3 - 1 η συνάρτηση

$$v(x, t) = 4 \tan^{-1} \{ \exp[-(x - t)] \}$$

περιγράφει ένα κύμα soliton. Εφαρμόζοντας τον τύπο (6.2.3 - 2) για $h = \ell = 0.01$, όταν $x = 0, t = 1$ να υπολογιστεί η $u_{xt}|_{x=0, t=1}$ και να γίνει σύγκριση με την αντίστοιχη θεωρητική 0.987109 .

Στη συνέχεια να γίνει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $u(x, t)$ και $v(x, t)$, όταν $x \in [-5, 10]$ και $t = 1, 2, 5$. Τι παρατηρείτε;

2. Έστω η συνάρτηση

$$u(x, y) = 4 \tan^{-1} \exp\left(3 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) \quad (6.2.3 - 4)$$

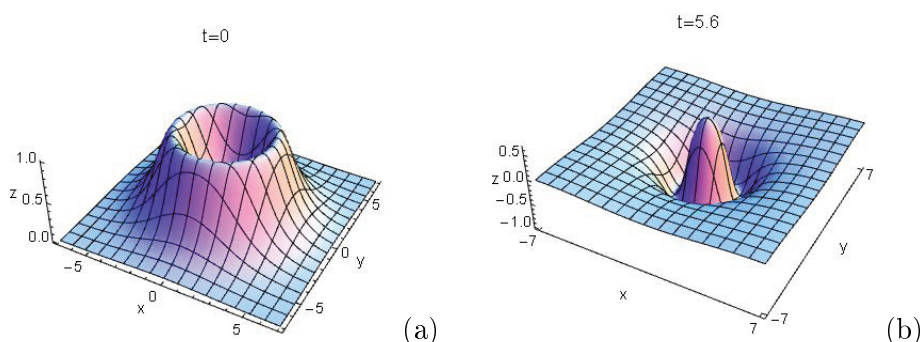
Όμοια με τον τύπο (6.2.3 - 2) για $h = k = 0.01$, όταν $x = y = 1$ να υπολογιστεί η $u_{xy}|_{x=1, y=1}$ και να γίνει σύγκριση με την αντίστοιχη θεωρητική -0.083490 .

Σημείωση 6.2.3 - 1

Η (6.2.3 - 4), όταν είναι η λύση τη χρονική στιγμή $t = 0$ της διδιάστατης ημιτονοειδούς διαφορικής εξίσωσης του Gordon (sine-Gordon equation)⁷

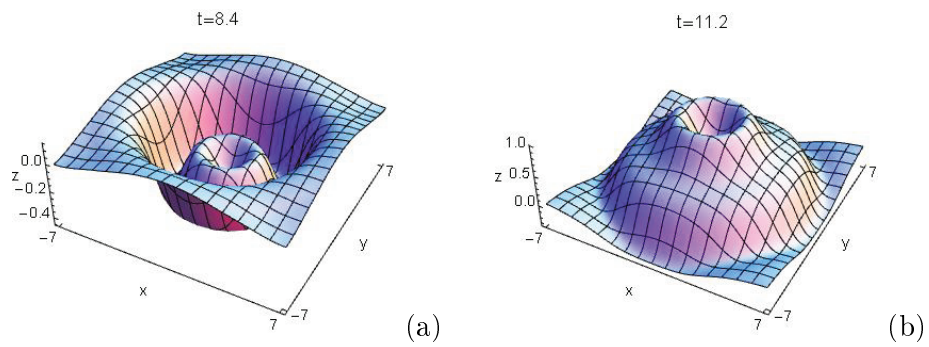
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \phi(x, y) \sin u$$

στην περίπτωση όπου $\rho = 0$ και $\phi(x, y) = 1$ δημιουργεί με την πάροδο του χρόνου ένα κυκλικό κύμα που αλλάζει μορφή (Σχ. 6.2.3 - 2 και 6.2.3 - 3).



Σχήμα 6.2.3 - 2: Εξίσωση κύματος (6.2.3 - 4): Γραφική παράσταση της συνάρτησης $z = \sin \frac{1}{2} u(x, y)$, όταν $x, y \in [-7, 7]$ την (a) χρονική στιγμή $t = 0$ και (b) $t = 5.6$

⁷Βλέπε όμοια δημοσίευση A. G. Bratsos [4].



Σχήμα 6.2.3 - 3: Εξίσωση κύματος (6.2.3 - 4): Γραφική παράσταση της συνάρτησης $z = \sin \frac{1}{2} u(x, y)$, όταν $x, y \in [-7, 7]$ την (a) χρονική στιγμή $t = 8.4$ και (b) $t = 11.2$

Βιβλιογραφία

- [1] Ακρίβης, Γ. & Δουγαλής, Β. (1995). *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978-960-524-022-6.
- [2] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978-960-351-874-7.
- [3] Στεφανάκος, Χ. (2009). *Προγραμματισμός H/Y με MATLAB*. Γκιούρδας Εκδοτική. ISBN 978-960-387-856-8.
- [4] Bratsos, A. G. (2006). The solution of the two-dimensional sine-Gordon equation using the method of lines. *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 206 No. 1, pp. 251-277.
- [5] Atkinson, K. E. (1989). *An Introduction to Numerical Analysis*. John Wiley & Sons (2nd ed.). ISBN 0-471-50023-2.
- [6] Burden, R. L. & Faires, D. J. (2010). *Numerical Analysis*. Brooks/Cole (7th ed.). ISBN 978-0-534-38216-2.
- [7] Conte, S. D. & de Boor, C. (1980). *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. McGraw-Hill Inc (3rd ed.). ISBN 978-0-07-012447-9.
- [8] Don, E. (2006). *Schaum's Outlines - Mathematica*. Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN 978-960-209-961-2.
- [9] Fonberg, B. (1998). *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*. Cambridge University Press. ISBN 0-521-49682-2/0-521-64564-6.

- [10] Leader, L. J. (2004). *Numerical Analysis and Scientific Computation*. Addison–Wesley. ISBN 978–0–201–73499–7.
- [11] Schatzman, M. (2002). *Numerical Analysis: A Mathematical Introduction*. Oxford: Clarendon Press. ISBN 978–0–19–850279–1.
- [12] Sli, E. & Mayers, D. (2003). *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge University Press. ISBN 978–0–521–00794–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- <http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm>
- <http://mathworld.wolfram.com/>
- <http://eom.springer.de/>