

Μάθημα 7

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Εισαγωγή

Όμοια, όπως και στο Μάθημα *Προσέγγιση Παραγώγων*, η προσεγγιστική τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

χρησιμοποιείται κυρίως, όταν

- i) λόγω της πολύπλοκης μορφής του τύπου μιας συνάρτησης είναι αδύνατος ο θεωρητικός υπολογισμός του, και
- ii) δεν είναι γνωστός ο τύπος της συνάρτησης, αλλά μόνον οι τιμές της σε ορισμένα σημεία.

Οι προσεγγίσεις που θα εξεταστούν στο μάθημα αυτό βασίζονται στον τύπο παρεμβολής του Newton. Σύμφωνα με τον αριθμό και τον τρόπο που

συνδυάζονται τα σημεία παρεμβολής προκύπτουν οι μέθοδοι υπολογισμού ή όπως συνήθως λέγονται οι **κανόνες ολοκλήρωσης** (quadrature rules).¹

7.1 Απλοί κανόνες ολοκλήρωσης

Ανάλογα με τον θεωρούμενο αριθμό των σημείων παρεμβολής έχουμε τους παρακάτω κανόνες:

7.1.1 Κανόνας του ορθογωνίου

Εισαγωγικές έννοιες

Έστω το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx, \quad (7.1.1 - 1)$$

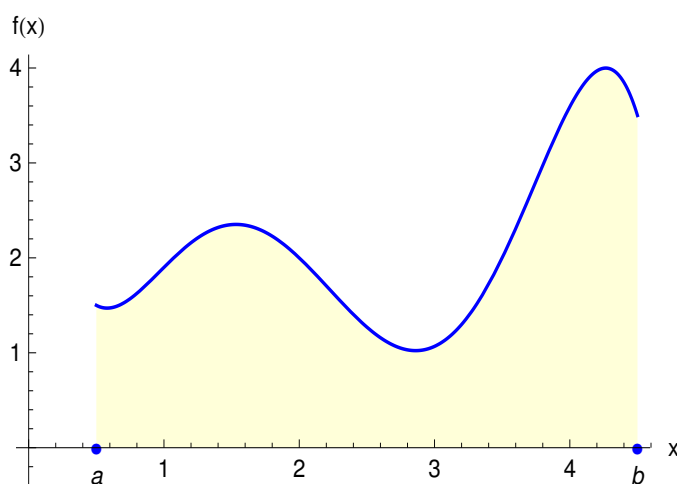
όπου η $f(x)$ θεωρείται ότι είναι μία συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ ή γενικότερα στην περίπτωση που δεν είναι γνωστός ο τύπος της ότι είναι γνωστές οι τιμές της στα $n + 1$ διαφορετικά σημεία x_0, x_1, \dots, x_n του $[a, b]$. Τότε, όπως είναι ήδη γνωστό, ισχύει ο παρακάτω τύπος παρεμβολής του Newton:

$$f(x) \approx P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \quad (7.1.1 - 2)$$

Υποθέτοντας ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, το ολοκλήρωμα (7.1.1 - 1) γεωμετρικά ισούται με το εμβαδόν του σχήματος που ορίζεται από τον x -άξονα, τις ευθείες $x = a$, $x = b$ και το διάγραμμα της $y = f(x)$ (Σχ. 7.1.1 - 1).

Στον κανόνα που ακολουθεί χρησιμοποιείται μόνον ένα σημείο παρεμβολής. Έστω ότι έχουμε το

¹Βλέπε βιβλιογραφία και: https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_integration



Σχήμα 7.1.1 - 1: Γεωμετρική ερμηνεία ορισμένου ολοκληρώματος $\int_a^b f(x) dx$

σημείο παρεμβολής : x_0

²Τότε από την (7.1.1 - 2) προκύπτει τότε ότι

$$f(x) \approx P_0(x) = f[x_0] = f(x_0),$$

οπότε

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx f(x_0) \int_a^b dx = (b-a)f(x_0) \quad (7.1.1 - 3)$$

που είναι γνωστός σαν ο **κανόνας του ορθογωνίου** (rectangle rule).

Ανάλογα με τις θέσεις του σημείου x_0 διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

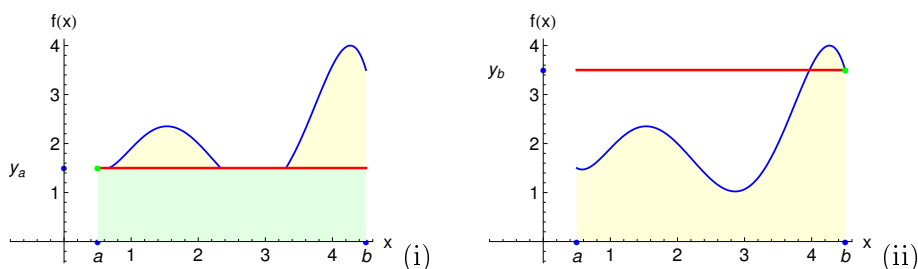
- αν $x_0 = a$ (Σχ. 7.1.1 - 2a), αντίστοιχα $x_0 = b$ (Σχ. 7.1.1 - 2b), τότε από την (7.1.1 - 3) έχουμε

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f(a), \quad (7.1.1 - 4)$$

²Επειδή υπάρχει ένα σημείο παρεμβολής πρέπει $n+1 = 0+1$, οπότε $n = 0$ και επομένως το πολυώνυμο παρεμβολής θα είναι μηδενικού βαθμού - βλέπε Μάθημα: Πολυωνυμική Παρεμβολή - Θεώρημα του Lagrange.

αντίστοιχα

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f(b). \quad (7.1.1 - 5)$$



Σχήμα 7.1.1 - 2: (i) Προσέγγιση (7.1.1-4) όπου $x_0 = a$, $y_a = f(a)$ (πράσινη επιφάνεια) και (ii) προσέγγιση (7.1.1-5) όπου $x_0 = b$, $y_b = f(b)$. Η μπλε καμπύλη δείχνει το διάγραμμα της $f(x)$

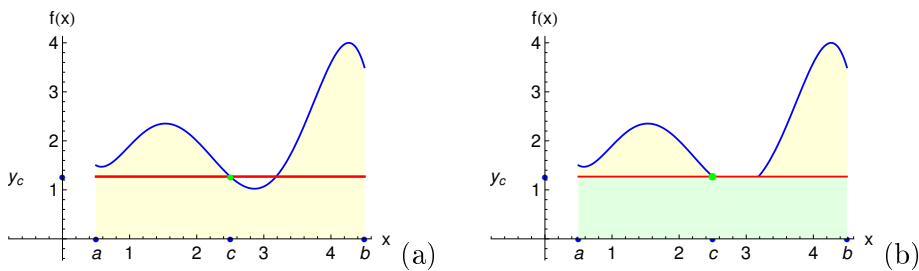
- Έστω τώρα ότι $x_0 = (a+b)/2$ (Σχ. 7.1.1 - 3). Τότε η (7.1.1 - 3) γράφεται

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (7.1.1 - 6)$$

που είναι γνωστός σαν ο **κανόνας του μέσου σημείου** (midpoint rule).

Παρατήρηση 7.1.1 - 1

Οι τύποι (7.1.1-4) - (7.1.1-5) είναι από τους πρώτους που χρησιμοποιήθηκαν στην προσέγγιση του ολοκληρώματος (7.1.1-1). Έχουν ιστορικό ενδιαφέρον, αλλά λόγω της μικρής ακρίβειας δεν χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές.



Σχήμα 7.1.1 - 3: (a) Γεωμετρική ερμηνεία ορισμένου ολοκληρώματος $\int_a^b f(x) dx$. (b) Κανόνας του μέσου σημείου: τύπος (7.1.1 - 6) όπου $c = x_0 = \frac{a+b}{2}$ και $y_c = f(c)$ (κόκκινη ευθεία). Η πράσινη επιφάνεια προσεγγίζει το ολοκλήρωμα (7.1.1 - 1)

Παράδειγμα 7.1.1 - 1

Ζητείται να υπολογιστεί με τους παραπάνω κανόνες το ολοκλήρωμα (Σχ. 7.1.1 - 4a)

$$I = \int_0^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \tag{7.1.1 - 7}$$

όταν η θεωρητική τιμή είναι

$$I = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \Big|_0^{1.2} \approx 1.015973.$$

Λύση. Έστω $f(x) = 1/\sqrt{1+x^2}$. Τότε διαδοχικά έχουμε:

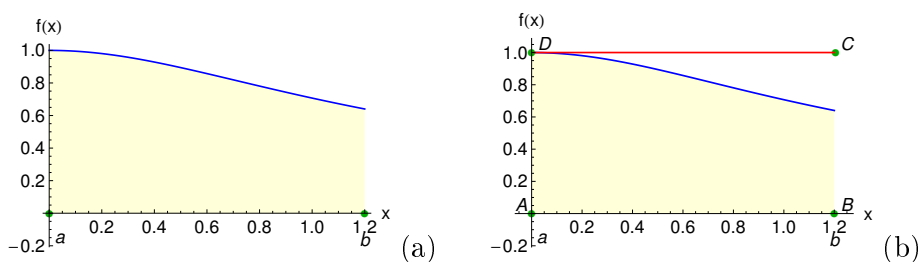
- Τύπος (7.1.1 - 4), όπου $f(a) = f(0) = 1$ και $b - a = 1.2 - 0 = 1.2$ (Σχ. 7.1.1 - 4b)

$$I \approx 1.2 \cdot 1 = 1.2 \text{ με απόλυτο σφάλμα } e = |1.2 - 1.015973| = 0.184027.$$

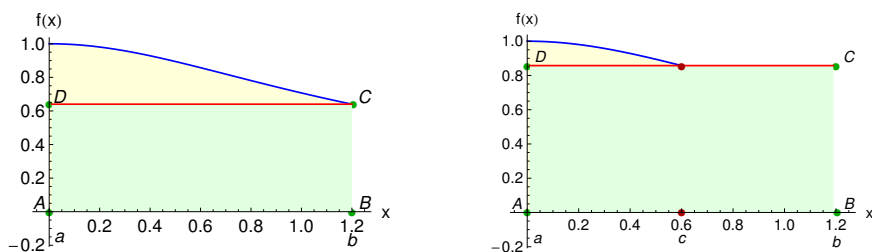
- Τύπος (7.1.1 - 5), όπου $f(b) = f(1.2) = 0.640184$, όμοια $b - a = 1.2$ (Σχ. 7.1.1 - 5a)

$$I \approx 1.2 \cdot 0.640184 = 0.768221 \text{ με απόλυτο σφάλμα}$$

$$e = |0.768221 - 1.015973| = 0.247752.$$



Σχήμα 7.1.1 - 4: (a) Η γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος (7.1.1 – 7) και (b) το ορθογώνιο $ABCD$ που το προσεγγίζει σύμφωνα με τον τύπο (7.1.1 – 4), όταν $b - a = |AB| = 1.2$ και $f(a) = |AD| = 1.0$, όπου το $|AB|$ συμβολίζει το μέτρο του AB



Σχήμα 7.1.1 - 5: (a) το ορθογώνιο $ABCD$ που προσεγγίζει το ολοκλήρωμα (7.1.1 – 7) σύμφωνα με τον τύπο (7.1.1 – 5), όταν $b - a = |AB| = 1.2$, $f(b) = |AD| = 0.640184$ και (b) με τον τύπο (7.1.1 – 6), όταν όμοια $b - a = |AB| = 1.2$ και $f(c) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = |AD| = 0.857493$

- Τύπος (7.1.1 – 6), όπου $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(0.6) = 0.857493$ με $b - a = 1.2$ (Σχ. 7.1.1 - 5b)

$$I \approx 1.2 \cdot 0.857493 = 1.028992 \text{ με απόλυτο σφάλμα}$$

$$e = |1.028992 - 1.015973| = 0.013019.$$

■

7.1.2 Κανόνας του τραπεζίου

Έστω ότι έχουμε τα

σημεία παρεμβολής : x_0, x_1

Τότε, επειδή τα σημεία είναι 2 το πολυώνυμο παρεμβολής $P(x)$ θα είναι 1ου βαθμού, δηλαδή σύμφωνα με την (7.1.1 - 2)

$$f(x) \approx P_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0),$$

δηλαδή πρόκειται για ευθεία γραμμή. Θέτοντας (Σχ. 7.1.2 - 1)

$$x_0 = a, \quad x_1 = b \quad \text{και} \quad h = b - a,$$

από την (7.1.1 - 1) προκύπτει ότι

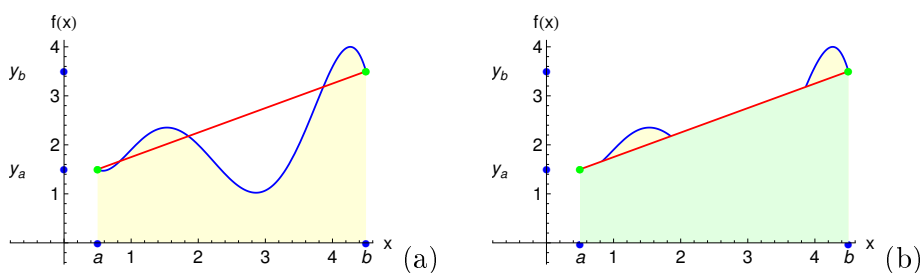
$$\begin{aligned} I(f) &\approx \int_a^b P_1(x) dx = \int_a^b \{f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)\} dx \\ &= f(x_0) \int_a^b dx + f[x_0, x_1] \int_a^b (x - x_0) dx \\ &= \frac{h}{2} \{f(a) + f(b)\}. \end{aligned} \quad (7.1.2 - 1)$$

Ο τύπος (7.1.2-1) είναι γνωστός ως ο **κανόνας του τραπεζίου** (trapezoidal rule).

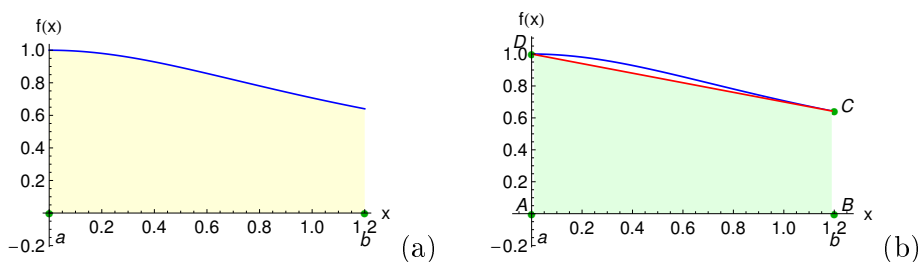
Παράδειγμα 7.1.2 - 1

Ζητείται να υπολογιστεί με τον κανόνα του τραπεζίου το ολοκλήρωμα (7.1.1 - 7) του Παραδείγματος 7.1.1 - 1.

Λύση. Όμοια είναι $f(x) = 1/\sqrt{1+x^2}$, ενώ η θεωρητική τιμή $I \approx 1.015973$.



Σχήμα 7.1.2 - 1: Απλός κανόνας του τραπέζιου τύπος (7.1.2–1): (a) Σημεία παρεμβολής: $x_0 = a$, $x_1 = b$ με τιμές $y_a = f(a)$, $y_b = f(b)$ αντίστοιχα. Η μπλε καμπύλη δείχνει το διάγραμμα της $f(x)$, η κόκκινη του πολυωνύμου $P_1(x)$ και η κίτρινη επιφάνεια το εμβαδόν $I(f)$. (b) Η πράσινη επιφάνεια ορίζει το τραπέζιο που προσεγγίζει το ολοκλήρωμα $I(f)$



Σχήμα 7.1.2 - 2: (a) Η γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος (7.1.1 – 7) και (b) το τραπέζιο $ABCD$ που το προσεγγίζει σύμφωνα με τον τύπο (7.1.2 – 1)

Τότε σύμφωνα με τον τύπο (7.1.2 – 1) έχουμε (Σχ. 7.1.2 - 2):

$$|AB| = b - a = h = 1.2, \quad f(a) = |AD| = 1 \quad \text{και}$$

$$f(b) = |BC| = 0.640184, \quad \text{οπότε}$$

$$I \approx \frac{1.2}{2} (1.0 + 0.640184) = 0.984104 \quad \text{με σφάλμα}$$

$$e = |1.015973 - 0.9841104| = 0.031863.$$

■

7.1.3 Κανόνας του Simpson

Ανάλογα, έστω ότι έχουμε τα

σημεία παρεμβολής : x_0, x_1, x_2

Τότε, επειδή τα σημεία είναι 3, το πολυώνυμο παρεμβολής $P(x)$ θα είναι 2ου βαθμού (παραβολή), δηλαδή

$$f(x) \approx P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

Θέτοντας (Σχ. 7.1.3 - 1)

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = b \quad \text{με} \quad h = \frac{b-a}{2}$$

και αντικαθιστώντας στην (7.1.1 - 1) τελικά με παρόμοιους υπολογισμούς εκείνων της Παραγράφου 7.1.2 έχουμε τον παρακάτω κανόνα ολοκλήρωσης:

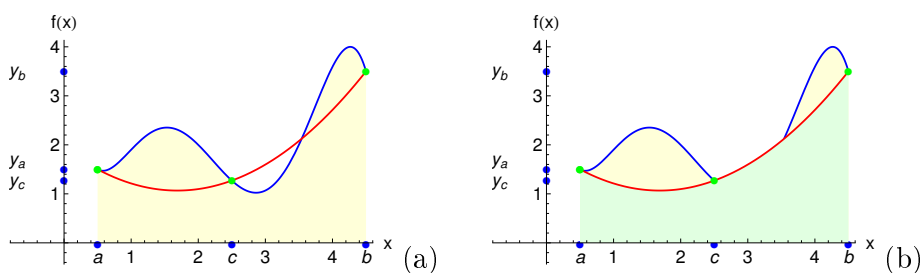
$$\begin{aligned} I(f) &\approx \int_a^b P_2(x) dx \\ &= \frac{b-a}{6} \left\{ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right\} \\ &= \frac{h}{3} \{ f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \} \end{aligned} \quad (7.1.3 - 1)$$

που είναι γνωστός σαν ο **κανόνας του Simpson**³ (Simpson's rule).

Παράδειγμα 7.1.3 - 1

Να υπολογιστεί με τον κανόνα του Simpson το ολοκλήρωμα (7.1.1 - 7) του Παραδείγματος 7.1.1 - 1.

³ Ακριβέστερα κανόνας του Simpson με 2ου βαθμού πολυώνυμο παρεμβολής (Simpson's rule with quadratic interpolating polynomial).



Σχήμα 7.1.3 - 1: Απλός κανόνας του Simpson τύπος (7.1.2 – 1): (a) Σημεία παρεμβολής: $x_0 = a$, $x_1 = c = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$ με αντίστοιχες τιμές $y_a = f(a)$, $y_c = f(c)$ και $y_b = f(b)$. Η μπλε καμπύλη δείχνει το διάγραμμα της $f(x)$ και η κόκκινη του πολυωνύμου $P_2(x)$, ενώ η κίτρινη επιφάνεια το εμβαδόν $I(f)$. (b) Η πράσινη επιφάνεια προσεγγίζει το ολοκλήρωμα $I(f)$

Λύση. Όμοια είναι $f(x) = 1/\sqrt{1+x^2}$, ενώ η θεωρητική τιμή $I \approx 1.015973$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο (7.1.3 – 1) έχουμε (Σχ. 7.1.3 - 2):

$$h = \frac{b-a}{2} = \frac{1.2}{2} = 0.6,$$

$$f(a) = f(x_0) = |AD| = 1,$$

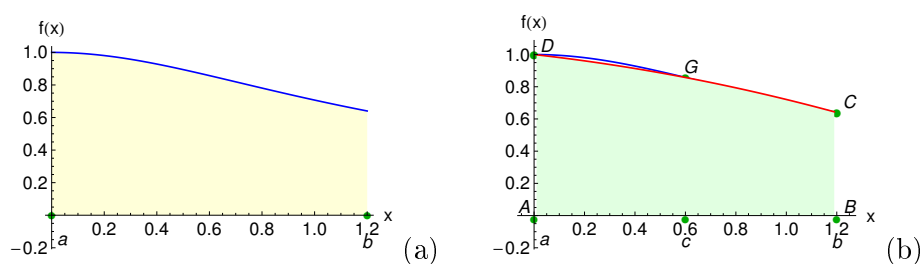
$$f(c) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(x_1) = 0.857493, \quad \text{και}$$

$$f(b) = f(x_2) = |BC| = 0.640184, \quad \text{οπότε}$$

$$I \approx \frac{0.6}{3} (1.0 + 4 \cdot 0.857493 + 0.640184) = 1.014031 \quad \text{με σφάλμα}$$

$$e = |1.014031 - 1.015973| = 0.001942.$$

■



Σχήμα 7.1.3 - 2: (a) Το ολοκλήρωμα (7.1.1–7) και (b) η επιφάνεια $ABCGD$ που το προσεγγίζει σύμφωνα με τον τύπο (7.1.3 – 1)

7.1.4 Κανόνας των 3/8

Έστω ότι έχουμε τα

σημεία παρεμβολής : x_0, x_1, x_2, x_3

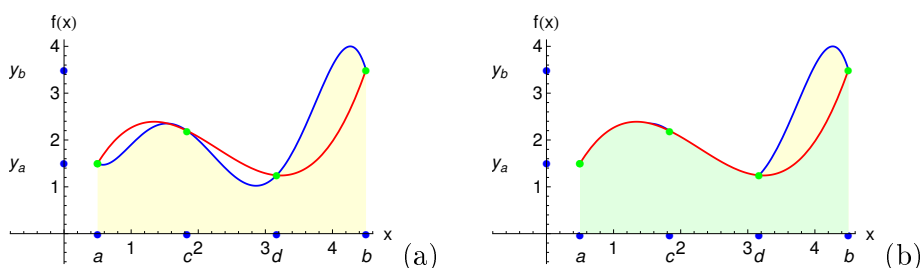
Τότε επειδή τα σημεία είναι 4, το πολυώνυμο παρεμβολής $P(x)$ θα είναι 3ου βαθμού, δηλαδή

$$\begin{aligned} f(x) \approx P_3(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Με υπολογισμούς όμοιους εκείνων της Παραγράφου 7.1.2 θεωρώντας ότι το διάστημα $[a, b]$ υποδιαιρείται σε 3 ισαπέχοντα διαστήματα από τα σημεία (Σχ. 7.1.4 - 1)

$$\begin{aligned} x_0 &= a, \quad x_1 = x_0 + \frac{a+b}{3}, \quad x_2 = x_0 + \frac{2(a+b)}{3}, \\ x_3 &= b \quad \text{με} \quad h = \frac{b-a}{3} \end{aligned}$$

αποδεικνύεται ότι ο τύπος υπολογισμού του ολοκληρώματος (7.1.1–1) τελικά



Σχήμα 7.1.4 - 1: Απλός κανόνας των 3/8 του Simpson με τύπο (7.1.4-1). (a) Σημεία παρεμβολής $x_0 = a$, $x_1 = c = \frac{a+b}{3}$, $x_2 = d = \frac{2(a+b)}{3}$, $x_3 = b$ με τιμές στα άκρα $y_a = f(a)$ και $y_b = f(b)$. Η μπλε καμπύλη δείχνει το διάγραμμα της $f(x)$ και η κόκκινη του πολυωνύμου $P_3(x)$, ενώ η κίτρινη επιφάνεια το εμβαδόν $I(f)$. (b) Η πράσινη επιφάνεια προσεγγίζει το ολοκλήρωμα $I(f)$

γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 I(f) &\approx \int_a^b P_3(x) dx \\
 &= \frac{3h}{8} \{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\}. \quad (7.1.4 - 1)
 \end{aligned}$$

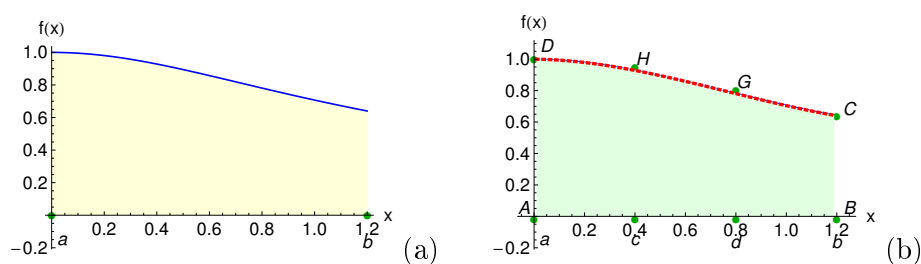
Ο τύπος (7.1.4 - 1) είναι γνωστός σαν ο **κανόνας των 3/8 του Simpson** (Simpson's 3/8 rule).⁴

Παράδειγμα 7.1.4 - 1

Όμοια με τον κανόνα των 3/8 του Simpson το ολοκλήρωμα (7.1.1 - 7) του Παραδείγματος 7.1.1 - 1.

Λύση. Είναι $f(x) = 1/\sqrt{1+x^2}$ και η θεωρητική τιμή $I \approx 1.015973$, οπότε

⁴Επίσης είναι γνωστός και σαν κανόνας του Simpson με 3ου βαθμού πολυώνυμο παρεμβολής (Simpson's rule with cubic interpolating polynomial).



Σχήμα 7.1.4 - 2: (a) Το ολοκλήρωμα (7.1.1 – 7) και (b) η επιφάνεια $ABCGHD$ που το προσεγγίζει σύμφωνα με τον τύπο (7.1.4 – 1)

σύμφωνα με τον τύπο (7.1.4 – 1) έχουμε (Σχ. 7.1.4 - 2):

$$h = \frac{b - a}{3} = \frac{1.2}{3} = 0.4,$$

$$f(a) = f(x_0) = |AD| = 1,$$

$$f(c) = f\left(\frac{a+b}{3}\right) = f(x_1) = 0.928\,477,$$

$$f(d) = f\left(\frac{2(a+b)}{3}\right) = f(x_2) = 0.780\,869, \quad \text{και}$$

$$f(b) = f(x_3) = |BC| = 0.640\,184, \quad \text{οπότε}$$

$$I \approx \frac{3 \cdot 0.4}{8} (1.0 + 3 \cdot 0.928\,477 + 3 \cdot 0.780\,869 + 0.640\,184)$$

$$= 1.015\,233 \quad \text{με σφάλμα}$$

$$e = |1.015\,223 - 1.014\,031| = 0.000\,740.$$

Στον Πίνακα 7.1.4 - 1 δίνονται συγκεντρωτικά οι παραπάνω υπολογισθείσες προσεγγίσεις του ολοκληρώματος (7.1.1 – 7) του Παραδείγματος 7.1.1 - 1 και τα αντίστοιχα σφάλματα σε σχέση με τη θεωρητική τιμή $I \approx 1.015\,973$. Άμεσα προκύπτει ότι ο κανόνας των 3/8 του Simpson δίνει τα ακριβέστερα αποτελέσματα.

Όλοι οι παραπάνω κανόνες ολοκλήρωσης είναι γνωστοί επίσης και σαν κανόνες ολοκλήρωσης των **Newton-Cotes** (Newton-Cotes rules) και χαρακτη-

Πίνακας 7.1.4 - 1: Απλοί κανόνες ολοκλήρωσης: υπολογισμός του ολοκληρώματος (7.1.1 – 7) του Παραδείγματος 7.1.1 - 1 με θεωρητική τιμή $I \approx 1.015973$

Κανόνας	Προσέγγιση I	Σφάλμα υπολογισμού
Μέσου σημείου	1.028992	0.013019
Τραπεζίου	0.984104	0.031863
Simpson	1.014031	0.001942
Simpson 3/8	1.015233	0.000740

ριστικό τους είναι η προσέγγιση του ολοκληρώματος (7.1.1–1) με ισαπέχοντα σημεία. Οι αντίστοιχοι τύποι λέγονται τότε και τύποι ολοκλήρωσης των Newton-Cotes (Newton-Cotes formulas).⁵

7.2 Σύνθετοι κανόνες

Η ακρίβεια των τύπων στους απλούς κανόνες ολοκλήρωσης είναι περιορισμένη, κυρίως όταν το διάστημα ολοκλήρωσης είναι μεγάλο. Ένας τρόπος για να έχουμε καλύτερη ακρίβεια είναι να αυξηθεί ο αριθμός των σημείων παρεμβολής, που όμως, όπως είναι φυσικό, θα δυσκολέψει περισσότερο τον υπολογισμό του τύπου. Ένας άλλος τρόπος τότε, που παρακάμπτει τις δυσκολίες αυτές, είναι να υποδιαφραστεί κατάλληλα το διάστημα ολοκλήρωσης σε επιμέρους υποδιαστήματα και να εφαρμοστεί ένας από τους παραπάνω κανόνες σε καθένα από τα υποδιαστήματα αυτά. Η παραπάνω διαδικασία, όταν γενικευτεί, οδηγεί στους λεγόμενους **σύνθετους κανόνες ολοκλήρωσης** (composite quadrature rules).

Στη συνέχεια δίνονται οι κυριότεροι σύνθετοι κανόνες ολοκλήρωσης, που κυρίως συναντώνται στις διάφορες εφαρμογές:

⁵Ο αναγνώστης για μια εκτενέστερη μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [3] Κεφ. 9.

7.2.1 Σύνθετος κανόνας του τραπεζίου

Έστω το ολοκλήρωμα (Σχ. 7.2.1 - 1)

$$\int_a^b f(x) dx,$$

όπου το διάστημα ολοκλήρωσης $[a, b]$ υποδιαιρείται σε N το πλήθος υποδιαστημάτων πλάτους (Σχ. 7.2.1 - 2)

$$h = \frac{b-a}{N} \quad \text{από τα } N+1 \text{ σημεία } x_i = a + ih; \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Τότε σύμφωνα με γνωστή ιδιότητα των ορισμένων ολοκληρωμάτων⁶ και τον τύπο (7.1.1 - 1) έχουμε

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{a=x_0}^{b=x_N} f(x) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x) dx \\ &\approx \frac{h}{2} \{f(x_0) + f(x_1)\} + \frac{h}{2} \{f(x_1) + f(x_2)\} \\ &\quad + \dots + \frac{h}{2} \{f(x_{N-1}) + f(x_N)\}, \end{aligned}$$

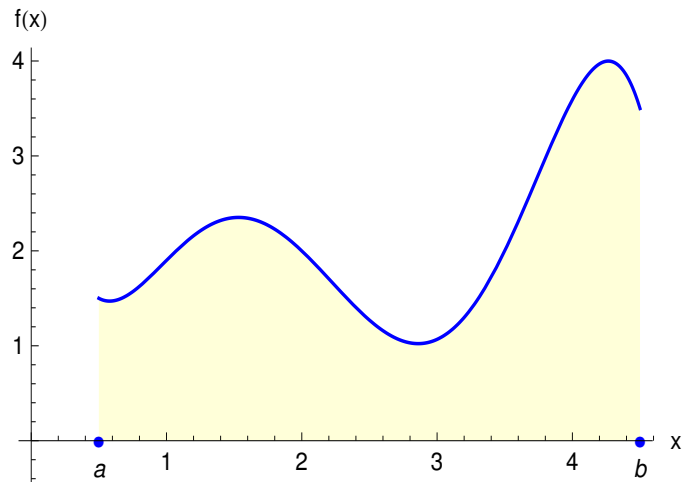
δηλαδή

$$I(f) \approx \frac{h}{2} \{f(x_0) + 2[f(x_1) + \dots + f(x_{N-1})] + f(x_N)\} \quad (7.2.1 - 1)$$

6

Θεώρημα 7.2.1 - 1. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$. Τότε, αν γ είναι ένα σημείο με $\alpha < \gamma < \beta$, ισχύει ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx.$$



Σχήμα 7.2.1 - 1: Γεωμετρική ερμηνεία ορισμένου ολοκληρώματος $\int_a^b f(x) dx$

Αλγόριθμος 7.2.1 - 1 (σύνθετου κανόνα του τραπεζίου)

Δεδομένα $a, b, N, h = (b - a)/N$

Έστω $S_0 = f(a) + f(b)$, $S_1 = 0$.

Για $i = 1, 2, \dots, N - 1$

$x = x_0 + ih$;

$S_1 := S_1 + f(x)$

τέλος i

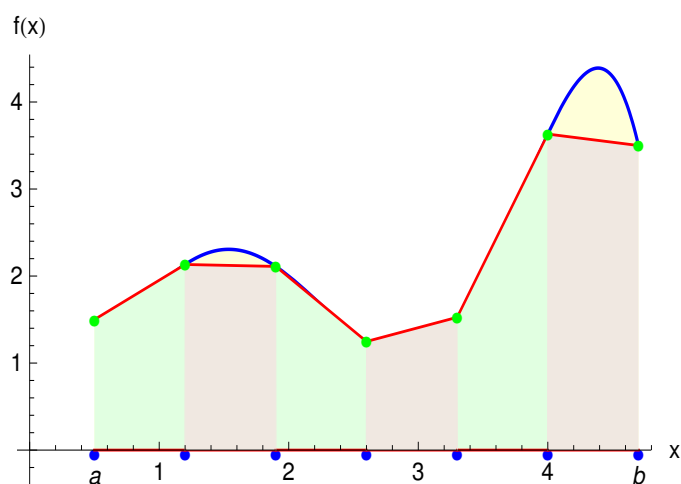
$I = \frac{h}{2} (S_0 + 2S_1)$

που είναι γνωστός σαν ο **σύνθετος κανόνας του τραπεζίου** (composite trapezoidal rule). Ο υπολογισμός δίνεται στον Αλγόριθμο 7.2.1 - 1.

7.2.2 Σύνθετος κανόνας του Simpson

⁷Υποδιαιρώντας το διάστημα ολοκλήρωσης $[a, b]$ σε $2N$ το πλήθος υποδιαστημάτων πλάτους $h = (b - a)/2N$ από τα $2N + 1$ σημεία x_0, x_1, \dots, x_{2N} , όμοια

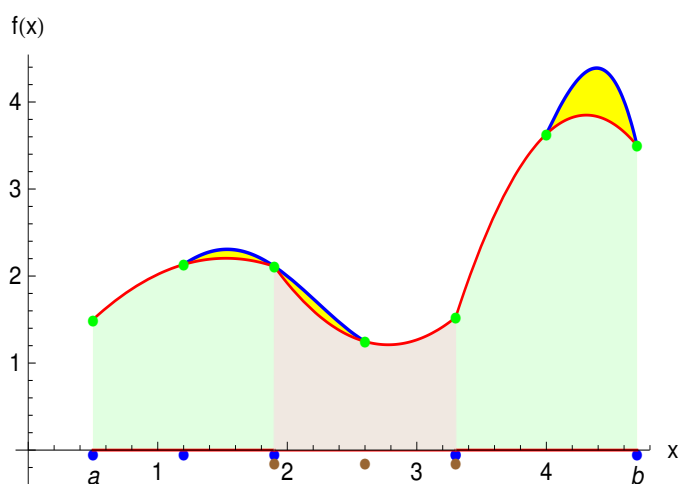
⁷Επειδή ο απλός κανόνας του Simpson απαιτεί για την εφαρμογή του 3 σημεία, δηλαδή 2 υποδιαστήματα, η υποδιαίρεση του διαστήματος ολοκλήρωσης $[a, b]$ πρέπει να γίνει σε **άρτιο** αριθμό υποδιαστημάτων.



Σχήμα 7.2.1 - 2: Σύνθετος κανόνας του τραπεζίου. Η μπλε καμπύλη δείχνει το διάγραμμα της $f(x)$

σύμφωνα με τη γνωστή ιδιότητα των ορισμένων ολοκληρωμάτων και τον τύπο (7.1.1 – 1) έχουμε

$$\begin{aligned}
 I(f) &= \int_{a=x_0}^{b=x_{2N}} f(x) dx \\
 &= \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{2N-2}}^{x_{2N}} f(x) dx \\
 &\approx \frac{h}{3} \{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\} \\
 &\quad + \frac{h}{3} \{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\} + \dots \\
 &\quad + \frac{h}{3} \{f(x_{2N-2}) + 4f(x_{2N-1}) + f(x_{2N})\},
 \end{aligned}$$



Σχήμα 7.2.2 - 1: σύνθετος κανόνας του Simpson. Η μπλε καμπύλη δείχνει το διάγραμμα της $f(x)$

δηλαδή

$$\begin{aligned}
 I(f) \approx & \frac{h}{3} \{f(x_0) + 4[f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2N-1})] \\
 & + 2[f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2N-2})] \\
 & + f(x_{2N})\} \quad (7.2.2 - 1)
 \end{aligned}$$

που είναι γνωστός σαν **σύνθετος κανόνας του Simpson** (composite Simpson's rule). Ο υπολογισμός δίνεται στον Αλγόριθμο 7.2.2 - 1.

Παράδειγμα 7.2.2 - 1

Ζητείται να υπολογιστεί με τον σύνθετο κανόνα του τραπεζίου, αντίστοιχα του Simpson το ολοκλήρωμα (7.1.1 - 7) του Παραδείγματος 7.1.1 - 1, δηλαδή το

$$I = \int_0^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \text{όταν } h = 0.1.$$

Η θεωρητική τιμή είναι $I = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Big|_0^{1.2} \approx 1.015973$.

Αλγόριθμος 7.2.2 - 1 (σύνθετου κανόνα του Simpson)

$$\begin{array}{l}
 \Delta\epsilon\delta\omicron\mu\epsilon\nu\alpha \ a, b \ \kappa\alpha\iota \ n = 2N \ \acute{\alpha}\rho\tau\iota\omicron\varsigma \\
 \text{Έστω } h = (b - a)/n, \ S_0 = f(a) + f(b), \ S_1 = S_2 = 0. \\
 \text{Για } i = 1, 2, \dots, n - 1 \\
 \quad x = x_0 + ih \\
 \quad \text{αν } i \ \acute{\alpha}\rho\tau\iota\omicron\varsigma \ S_2 = S_2 + f(x), \ \text{διαφορετικά } S_1 = S_1 + f(x) \\
 \text{τέλος } i \\
 I = \frac{h}{3} (S_0 + 4S_1 + 2S_2)
 \end{array}$$

Λύση. Αν $a_0 = x_0 = 0$ και $b = x_{12} = 1.2$ αρχικά δημιουργείται ο Πίνακας 7.2.2 - 1 των τιμών $(x_i, f(x_i))$. Τότε ο τύπος:

- (7.2.1 - 1) για το **σύνθετο κανόνα του τραπεζίου** δίνει

$$I \approx \frac{h}{2} \{f(x_0) + 2[f(x_1) + \dots + f(x_{11})] + f(x_{12})\} = 1.015711,$$

αντίστοιχα ο

- (7.2.2 - 1) για τον **σύνθετο κανόνα του Simpson**

$$\begin{aligned}
 I &\approx \frac{h}{3} \{f(x_0) + 4[f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9) + f(x_{11})] \\
 &\quad + 2[f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8) + f(x_{10})] + f(x_{12})\} \\
 &= 1.015973.
 \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τις παραπάνω τιμές με τις αντίστοιχες του Πίνακα 7.1.4 - 1 επαληθεύεται αυτό που έχει ήδη γραφεί στην εισαγωγή της Παραγράφου 7.2, δηλαδή ότι οι σύνθετοι κανόνες ολοκλήρωσης οδηγούν σε αύξηση της ακρίβειας προσέγγισης του ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)dx$.

Στον Πίνακα 7.2.2 - 2 παρατίθενται οι τιμές των σφαλμάτων του ολοκληρώματος I για διάφορες τιμές του h . Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 7.2.2 - 2 προκύπτει ότι ο σύνθετος κανόνας του Simpson για τιμές του h με $h \leq 0.001$, οπότε το N είναι αρκετά μεγάλο, δίνει ακριβέστερα αποτελέσματα από τον

Πίνακας 7.2.2 - 1: Παράδειγμα 7.2.2 - 1: οι τιμές $(x_i, f(x_i))$

x_i	$f(x_i)$	x_i	$f(x_i)$
$x_0 = 0.0$	0.100 000	$x_7 = 0.7$	0.819 2319
$x_1 = 0.1$	0.995 037	$x_8 = 0.8$	0.780 8688
$x_2 = 0.2$	0.980 580	$x_9 = 0.9$	0.743 2941
$x_3 = 0.3$	0.957 826	$x_{10} = 1.0$	0.707 1068
$x_4 = 0.4$	0.928 476	$x_{11} = 1.1$	0.672 6728
$x_5 = 0.5$	0.894 427	$x_{12} = 1.2$	0.640 1844
$x_6 = 0.6$	0.857 492		

Πίνακας 7.2.2 - 2: Παράδειγμα 7.2.2 - 1: τα σφάλματα της ολοκλήρωσης του I για τις διάφορες τιμές του h (υπενθυμίζεται ότι $2.62E - 04 = 2.62 \cdot 10^{-4} = 0.00062$ κ.λπ.)

h	Σφάλμα τραπεζίου	Σφάλμα Simpson
0.1000	2.62E-04	9.06E-09
0.0500	6.55E-05	1.39E-09
0.0100	2.62E-06	7.69E-10
0.0010	2.55E-08	7.68E-10
0.0001	5.06E-10	7.68E-10

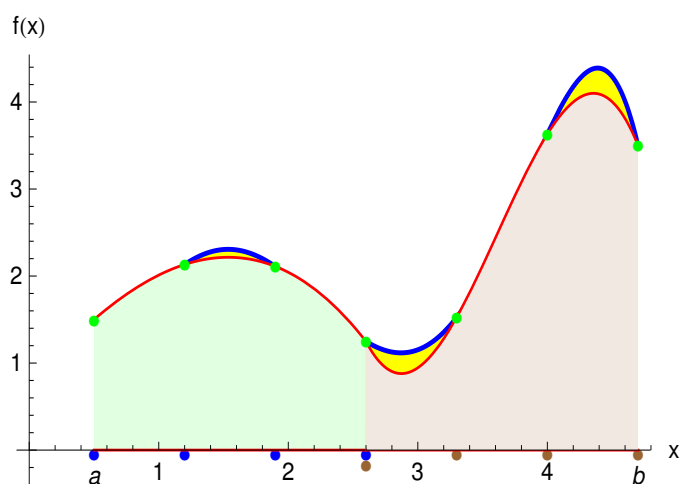
αντίστοιχο του τραπεζίου, ενώ, όταν $h = 0.0001$, οπότε έχουμε μεγαλύτερη αύξηση του N , ακριβέστερα αποτελέσματα προκύπτουν από τον κανόνα του τραπεζίου. Θεωρητικά είναι αναμενόμενο, όταν η λεπτότητα της διαμέρισης τείνει στο μηδέν ή διαφορετικά όταν το h τείνει στο μηδέν, η αριθμητική τιμή του ολοκληρώματος να τείνει στη θεωρητική τιμή του. Πολλές φορές όμως, όπως και παραπάνω, συμβαίνει το h να ελαττώνεται, χωρίς να έχουμε και αντίστοιχη μείωση του σφάλματος. Αυτό κύρια οφείλεται αφενός μεν στο σφάλμα που παρουσιάζει ο κανόνας ολοκλήρωσης που χρησιμοποιείται και αφετέρου στα σφάλματα στρογγυλοποίησης που υπεισέρχονται στους διάφορους υπολογισμούς.

7.2.3 Σύνθετος κανόνας των 3/8

⁸Υποδιαιρώντας το διάστημα ολοκλήρωσης σε $3N$ το πλήθος υποδιαστήματα πλάτους $h = (b - a)/3N$ από τα $3N + 1$ σημεία x_0, x_1, \dots, x_{3N} όμοια με τους παραπάνω σύνθετους κανόνες του τραπεζίου και του Simpson έχουμε

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{a=x_0}^{b=x_{3N}} f(x) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_3} f(x) dx + \int_{x_3}^{x_6} f(x) dx + \dots + \int_{x_{3N-3}}^{x_{3N}} f(x) dx \\ &\approx \frac{3h}{8} \{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\} \\ &\quad + \frac{3h}{8} \{f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + f(x_6)\} + \dots \\ &\quad + \frac{3h}{8} \{f(x_{3N-3}) + 3f(x_{3N-2}) + 3f(x_{3N-1}) + f(x_{3N})\}, \end{aligned}$$

⁸Επειδή ο απλός κανόνας των 3/8 απαιτεί για την εφαρμογή του 4 σημεία, δηλαδή 3 υποδιαστήματα, η υποδιάρθρωση του διαστήματος ολοκλήρωσης $[a, b]$ πρέπει να γίνει σε αριθμό υποδιαστημάτων, που να είναι πολλαπλάσιος του 3.



Σχήμα 7.2.3 - 1: σύνθετος κανόνας των 3/8 του Simpson. Η μπλε καμπύλη δείχνει το διάγραμμα της $f(x)$

οπότε

$$\begin{aligned}
 I(f) \approx & \frac{3h}{8} \{f(x_0) + 3[f(x_1) + f(x_4) + \dots + f(x_{3N-2})] \\
 & + 3[f(x_2) + f(x_5) + \dots + f(x_{3N-1})] \\
 & + 2[f(x_3) + f(x_6) + \dots + f(x_{3N-3})] \\
 & + f(x_{3N})\} \qquad (7.2.3 - 1)
 \end{aligned}$$

που είναι γνωστός σαν **σύνθετος κανόνας ολοκλήρωσης των 3/8 του Simpson** (composite 3/8 Simpson's rule).

Παράδειγμα 7.2.3 - 1

Έστω ότι ζητείται να υπολογιστεί με τον σύνθετο κανόνα των 3/8 το ολοκλήρωμα I του Παραδείγματος 7.2.2 - 1. Τότε σύμφωνα με τον τύπο (7.2.3 - 1),

όταν $h = 0.1$, έχουμε

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{3h}{8} \{f(x_0) + 3[f(x_1) + f(x_4) + f(x_7) + f(x_{10})] \\ &\quad + 3[f(x_2) + f(x_5) + f(x_8) + f(x_{11})] \\ &\quad + 2[f(x_3) + f(x_6) + f(x_9)] + f(x_{12})\} \\ &= 1.015\,973. \end{aligned}$$

Άρα η προσεγγιστική τιμή συμπίπτει με την αντίστοιχη θεωρητική στα 6 δεκαδικά ψηφία.

Ασκήσεις

1. Έστω ότι το διάστημα ολοκλήρωσης $[a, b]$ υποδιαιρείται σε N το πλήθος υποδιαστήματα πλάτους (Σχ. 7.2.3 - 2)

$$h = \frac{b-a}{N} \quad \text{από τα } N+1 \text{ σημεία } x_i = a + ih; \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο (7.1.1 - 6) του απλού κανόνα του μέσου σημείου σε κάθε ένα υποδιάστημα, υπολογίστε τον αντίστοιχο τύπο του σύνθετου κανόνα. Στη συνέχεια εφαρμόστε τον τύπο αυτό στον υπολογισμό του ολοκληρώματος του Παραδείγματος 7.2.2 - 1 και συγκρίνατε τα αποτελέσματα με τα αντίστοιχα των άλλων μεθόδων.

2. Να υπολογιστεί με τους παραπάνω σύνθετους κανόνες το ολοκλήρωμα

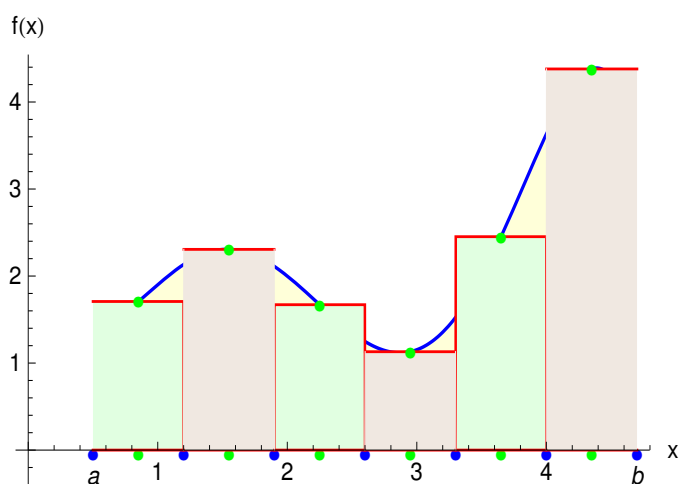
$$I = \int_0^{1.2} e^{-x^2} dx, \quad \text{όταν } h = 0.1$$

και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική τιμή $I \approx 0.806\,745$.

3. Είναι γνωστό ότι

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα με τον σύνθετο κανόνα του τραπεζίου και του Simpson όταν το $h = 0.1, 0.01$ και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με



Σχήμα 7.2.3 - 2: σύνθετος κανόνας του μέσου σημείου. Η μπλε καμπύλη δείχνει το διάγραμμα της $f(x)$

τη θεωρητική τιμή.

4. Με τον σύνθετο κανόνα του τραπεζίου να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x e^{-x^2} dx,$$

όταν $h = 0.1$ και να γίνει σύγκριση του αποτελέσματος με τη θεωρητική τιμή του ολοκληρώματος.

5. Όμοια με τον σύνθετο κανόνα του Simpson και των $3/8$ το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{0.6} (1 - x^2)^{3/2} dx,$$

όταν $h = 0.1, 0.05$ και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική τιμή του ολοκληρώματος $I \approx 0.439919$.

7.3 Κανόνες ολοκλήρωσης του Gauss

7.3.1 Εισαγωγικές έννοιες

Όλοι οι σύνθετοι κανόνες ολοκλήρωσης της Παραγράφου 7.2, που είναι γνωστοί επίσης και σαν σύνθετοι κανόνες ολοκλήρωσης των Newton-Cotes, είχαν προκύψει από το πολυώνυμο παρεμβολής του Newton θεωρώντας κάθε φορά έναν αριθμό **ισαπεχόντων** σημείων. Οι τύποι υπολογισμού των σύνθετων κανόνων που εξετάστηκαν τελικά λαμβάνουν τη μορφή:

Τραπεζίου

$$\begin{aligned} I(f) &\approx \frac{h}{2} f(x_0) + h f(x_1) + \dots + h f(x_{N-1}) + \frac{h}{2} f(x_N) \\ &= w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \dots + w_{N-1} f(x_{N-1}) + w_N f(x_N). \end{aligned}$$

Simpson

$$\begin{aligned} I(f) &\approx \frac{h}{3} f(x_0) + \frac{4h}{3} f(x_1) + \frac{4h}{3} f(x_3) + \dots + \frac{4h}{3} f(x_{2N-1}) \\ &\quad + \frac{2h}{3} f(x_2) + \frac{2h}{3} f(x_4) + \dots + \frac{2h}{3} f(x_{2N-2}) + \frac{h}{3} f(x_{2N}) \\ &= \frac{h}{3} f(x_0) + \frac{4h}{3} f(x_1) + \frac{2h}{3} f(x_2) + \dots + \frac{2h}{3} f(x_{2N-2}) \\ &\quad + \frac{4h}{3} f(x_{2N-1}) + \frac{h}{3} f(x_{2N}) \\ &= w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \dots + w_{2N-2} f(x_{2N-2}) \\ &\quad + w_{2N-1} f(x_{2N-1}) + w_{2N} f(x_{2N}). \end{aligned}$$

3/8 του Simpson

$$\begin{aligned}
I(f) &\approx \frac{3h}{8} f(x_0) + \frac{9h}{8} f(x_1) + \dots + \frac{9h}{8} f(x_{3N-2}) \\
&\quad + \frac{9h}{8} f(x_2) + \dots + \frac{9h}{8} f(x_{3N-1}) \\
&\quad + \frac{6h}{8} f(x_3) + \dots + \frac{6h}{8} f(x_{3N-3}) + \frac{3h}{8} f(x_{3N}) \\
&= \frac{3h}{8} f(x_0) + \frac{9h}{8} f(x_1) + \frac{9h}{8} f(x_2) + \frac{6h}{8} f(x_3) + \dots \\
&\quad + \frac{6h}{8} f(x_{3N-3}) + \frac{9h}{8} f(x_{3N-2}) + \frac{9h}{8} f(x_{3N-1}) + \frac{3h}{8} f(x_{3N}) \\
&= w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3) + \dots \\
&\quad + w_{3N-3} f(x_{3N-3}) + w_{3N-2} f(x_{3N-2}) + w_{3N-1} f(x_{3N-1}) \\
&\quad + w_{3N} f(x_{3N}).
\end{aligned}$$

Επομένως είναι δυνατό να γραφούν τελικά - παραλείποντας χωρίς βλάβη της γενικότητας και για λόγους ευκολίας τον όρο με δείκτη 0 - στη μορφή:

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \dots + w_n f(x_n), \quad (7.3.1 - 1)$$

όπου οι συντελεστές των τιμών $f(x_i)$; $i = 1, 2, \dots, n$ ή όπως συνήθως λέγονται **βάρη** (weights) w_i ; $i = 1, 2, \dots, n$ **δεν εξαρτώνται** από τη συνάρτηση $f(x)$.

Στους κανόνες ολοκλήρωσης που θα εξεταστούν στη συνέχεια του μαθήματος και που είναι γνωστοί σαν **κανόνες ολοκλήρωσης του Gauss** (Gaussian quadrature), η ολοκληρωτέα συνάρτηση αντικαθίσταται με άλλα προσεγγιστικά πολυώνυμα, οπότε δημιουργούνται άλλοι τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης με συντελεστές κατά κανόνα μη ρητούς αριθμούς. Έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι οι τύποι που προκύπτουν από τους κανόνες αυτούς έχουν το πλεονέκτημα με κατάλληλη εκλογή των σημείων x_i ; $i = 1, 2, \dots, n$ να δίνουν μεγαλύτερη

ακρίβεια αυτής που δίνεται από τους τύπους των Newton-Cotes με τον ίδιο αριθμό σημείων. Τα σημεία παρεμβολής στις περιπτώσεις αυτές γενικά δεν ισαπέχουν.

Έστω το ολοκλήρωμα

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Αποδεικνύεται στα Μαθηματικά ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι δυνατόν να γραφεί στη μορφή

$$f(x) = w(x) g(x), \quad (7.3.1 - 2)$$

όταν $w(x)$ είναι μία μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[a, b]$ που λέγεται **συνάρτηση βάρους**. Τότε η (7.3.1 - 2) σύμφωνα με την (7.3.1 - 1) γράφεται

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b w(x) g(x) dx & (7.3.1 - 3) \\ &\approx w_1 g(x_1) + w_2 g(x_2) + \dots + w_n g(x_n), \end{aligned}$$

όπου τα βάρη w_i ; $i = 1, 2, \dots, n$ εξαρτώνται από τα σημεία x_i ; $i = 1, 2, \dots, n$ και τη συνάρτηση $w(x)$ αλλά όχι από την $g(x)$.⁹

Επειδή η μελέτη της (7.3.1 - 3) στη γενική περίπτωση ξεφεύγει του σκοπού του μαθήματος, εξετάζεται μόνον η περίπτωση όπου η συνάρτηση $g(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού έστω m , δηλαδή

$$g(x) = P_m(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m, \quad (7.3.1 - 4)$$

όταν $a_i \in \mathfrak{R}$ για κάθε $i = 0, 1, \dots, m$. Στον τύπο (7.3.1 - 3) ζητείται να προσδιοριστούν τα w_i και τα σημεία x_i ; $i = 1, 2, \dots, n$, έτσι ώστε το σφάλμα της προσέγγισης να είναι **ελάχιστο**.

⁹Η αρίθμηση των σημείων στην περίπτωση αυτή γίνεται από τον δείκτη 1, σε αντίθεση με των τύπων Newton-Cotes που χρησιμοποιούν πολυώνυμα παρεμβολής και γίνεται από τον δείκτη 0.

Η (7.3.1 - 3) διαδοχικά γράφεται

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b w(x) [a_0 + \dots + a_m x^m] dx \\ &= w_1 g(x_1) + w_2 g(x_2) + \dots + w_n g(x_n), \quad (7.3.1 - 5) \end{aligned}$$

όπου προφανώς $g(x_i) = a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

Από την (7.3.1 - 5) προκύπτει τότε ότι

$$\begin{aligned} I(f) &= a_0 \int_a^b w(x) dx + a_1 \int_a^b x w(x) dx + \dots + a_m \int_a^b x^m w(x) dx \\ &= w_1 (a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_m x_1^m) + w_2 (a_0 + a_1 x_2 + \dots + a_m x_2^m) \\ &\quad + \dots + w_n (a_0 + a_1 x_n + \dots + a_m x_n^m) \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} &a_0 \int_a^b w(x) dx + a_1 \int_a^b x w(x) dx + \dots + a_m \int_a^b x^m w(x) dx \\ &= a_0 (w_1 + w_2 + \dots + w_n) + a_1 (w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n) \\ &\quad + \dots + a_m (w_1 x_1^m + w_2 x_2^m + \dots + w_n x_n^m). \end{aligned}$$

Επειδή η τελευταία ισότητα πρέπει να ισχύει για κάθε πολώνυμο της μορφής (7.3.1 - 4), από την εξίσωση των συντελεστών a_i ; $i = 0, 1, \dots, m$ έχουμε

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + \dots + w_n &= \int_a^b w(x) dx \\ w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n &= \int_a^b x w(x) dx \\ w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + \dots + w_n x_n^2 &= \int_a^b x^2 w(x) dx \quad (7.3.1 - 6) \\ &\vdots \\ w_1 x_1^m + w_2 x_2^m + \dots + w_n x_n^m &= \int_a^b x^m w(x) dx. \end{aligned}$$

Η (7.3.1 – 6) ορίζει ένα σύστημα

- $m + 1$ εξισώσεων με n αγνώστους τα βάρη w_1, w_2, \dots, w_n , και
- n αγνώστους τα σημεία x_1, x_2, \dots, x_n .

Το σύστημα αυτό θα πρέπει να έχει λύση για κάθε συνάρτηση $w(x)$, που, όπως αποδεικνύεται στα Μαθηματικά, απαιτείται να ισχύει ότι $m + 1 \leq 2n$, δηλαδή

$$\mathbf{m \leq 2n - 1.} \quad (7.3.1 - 7)$$

Τότε, αν $m = 2n - 1$, το σύστημα (7.3.1 – 7) έχει πάντοτε λύση που όμως είναι αρκετά πολύπλοκη ακόμα και όταν το πλήθος των σημείων n είναι πολύ μικρό.

Από το σύνολο των λύσεων του παραπάνω συστήματος θα εξεταστεί στη συνέχεια μόνο μια περίπτωση:

7.3.2 Κανόνες ολοκλήρωσης των Gauss-Legendre

Στην περίπτωση αυτή η λύση του συστήματος (7.3.1 – 6) υπολογίζεται, όταν η συνάρτηση βάρους είναι $w(x) = 1$ και το διάστημα ολοκλήρωσης $[a, b] = [-1, 1]$. Τότε το σύστημα γράφεται

$$\begin{aligned} w_1 + \dots + w_n &= \int_{-1}^1 dx = 2 \\ w_1 x_1 + \dots + w_n x_n &= \int_{-1}^1 x dx = 0 \\ w_1 x_1^2 + \dots + w_n x_n^2 &= \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ w_1 x_1^m + \dots + w_n x_n^m &= \int_{-1}^1 x^m dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{αν } m \text{ περιττός,} \\ \frac{1}{1+m}, & \text{αν } m \text{ άρτιος.} \end{cases} \end{aligned} \quad (7.3.2 - 1)$$

Από τη θεωρία των ορθογωνίων πολυωνύμων προκύπτει ότι τα σημεία x_i ; $i = 1, 2, \dots, n$ που επαληθεύουν το σύστημα (7.3.2 - 3) είναι οι ρίζες των πολυωνύμων $P_n(x)$ του Legendre βαθμού n , που δίνονται από τον τύπο¹⁰

$$P_n(x) = \frac{[(x^2 - 1)^n]^{(n)}}{2^n n!} \quad (7.3.2 - 2)$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots$, όταν $x \in [-1, 1]$, ενώ είναι $P_0(x) = 1$.

Με εφαρμογή του τύπου (7.3.2 - 2) προκύπτει τότε ότι

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \quad \text{κ.λπ.} \end{aligned}$$

Οι ρίζες x_i ; $i = 1, 2, \dots, n$ και τα αντίστοιχα βάρη w_i , όπου

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2) [P_n'(x_i)]^2}; \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

για κάθε περίπτωση δίνονται από πίνακες, ενώ για την περίπτωση όπου $i = 1, 2, \dots, 6$ από τον Πίνακα 7.3.2 - 1 στη συνέχεια του μαθήματος.

Αποδεικνύεται ότι:

- i) τα βάρη w_i είναι πάντοτε θετικοί αριθμοί,
- ii) οι ρίζες x_i είναι πραγματικές και ανά δύο συμμετρικές ως προς το μηδέν,
- iii) τα βάρη w_i , που αντιστοιχούν σε συμμετρικές ρίζες, είναι ίσα μεταξύ τους.

Αν το διάστημα ολοκλήρωσης είναι διάφορο του $[-1, 1]$, τότε με τον μετασχηματισμό¹¹

$$x = \frac{(b-a)t}{2} + \frac{b+a}{2} \quad (7.3.2 - 3)$$

¹⁰Ο τύπος (7.3.2 - 2) είναι γνωστός σαν τύπος του Rodrigues (Rodrigues formula).

¹¹Αν $x = a$, τότε εύκολα προκύπτει από την (7.3.2 - 3) ότι $t = -1$, ενώ, αν $x = b$ ότι $t = 1$.

το ολοκλήρωμα με διάστημα ολοκλήρωσης $[a, b]$ μετασχηματίζεται σε αντίστοιχο με άκρα $[-1, 1]$, δηλαδή

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f \left[\frac{(b-a)x}{2} + \frac{b+a}{2} \right] dx. \end{aligned} \quad (7.3.2 - 4)$$

Επομένως στην περίπτωση αυτή

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx \\ &\approx \sum_{i=1}^n w_i \left\{ \frac{b-a}{2} f \left[\frac{(b-a)x_i}{2} + \frac{b+a}{2} \right] \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n w_i g(x_i), \end{aligned} \quad (7.3.2 - 5)$$

όταν

$$g(x_i) = \frac{b-a}{2} f \left[\frac{(b-a)x_i}{2} + \frac{b+a}{2} \right] \quad (7.3.2 - 6)$$

όπου στο δεξιό μέλος χρησιμοποιήθηκε για λόγους ευκολίας το x_i αντί του t_i .

Η παραπάνω μέθοδος ολοκλήρωσης είναι γνωστή σαν **ολοκλήρωση των Gauss-Legendre** (Gauss-Legendre quadrature), ενώ ο (7.3.2 - 5) σαν ο τύπος ολοκλήρωσης των Gauss-Legendre.¹²

Σημείωση 7.3.2 - 1

Η μέθοδος ολοκλήρωσης των Gauss-Legendre

- i) δίνει τη μεγαλύτερη ακρίβεια από κάθε άλλη μέθοδο που χρησιμοποιεί τον ίδιο αριθμό σημείων,

¹²Βλέπε βιβλιογραφία και: https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_quadrature

Πίνακας 7.3.2 - 1: ριζών πολυωνύμων των P_n ; $n = 1, 2, \dots, 6$ και των αντίστοιχων βαρών

P_n	x_i	w_i
P_1	$x_1 = 0$	$w_1 = 2.00000000$
P_2	$-x_1 = x_2 = 0.57735027$	$w_1 = w_2 = 1.00000000$
P_3	$-x_1 = x_3 = 0.77459667$ $x_2 = 0$	$w_1 = w_3 = 0.55555556$ $w_2 = 0.88888889$
P_4	$-x_1 = x_4 = 0.86113631$ $-x_2 = x_3 = 0.33998104$	$w_1 = w_4 = 0.34785485$ $w_2 = w_3 = 0.65214515$
P_5	$-x_1 = x_5 = 0.90617985$ $-x_2 = x_4 = 0.53846931$ $x_3 = 0$	$w_1 = w_5 = 0.23692689$ $w_2 = w_4 = 0.47862867$ $w_0 = 0.56888889$
P_6	$-x_1 = x_6 = 0.93246951$ $-x_2 = x_5 = 0.66120939$ $-x_3 = x_4 = 0.23861919$	$w_1 = w_6 = 0.17132449$ $w_2 = w_5 = 0.36076157$ $w_3 = w_4 = 0.46791396$

- ii) δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί για τις περιπτώσεις εκείνες που η συνάρτηση δίνεται με τις τιμές της σε ορισμένα σημεία x_i , τα οποία δεν συμπίπτουν με τις ρίζες των πολυωνύμων Legendre, είναι όμως η καλύτερη για τις περιπτώσεις που η συνάρτηση $f(x)$ δίνεται με τον αναλυτικό της τύπο - περίπτωση (i).

Πίνακας 7.3.2 - 2: Παράδειγμα 7.3.2 - 1

x_i	w_i	$g(x_i) = w_i e^{-x_i^2}$
$x_1 = -0.86114$	$w_1 = 0.34785$	$w_1 e^{-x_1^2} = 0.34785 \cdot e^{-(-0.86114)^2} = 0.1657$
$x_2 = -0.33998$	$w_2 = 0.65214$	$w_2 e^{-x_2^2} = 0.65214 \cdot e^{-(-0.33998)^2} = 0.5809$
$x_3 = 0.33998$	$w_3 = 0.65214$	$w_3 e^{-x_3^2} = 0.65214 \cdot e^{-(0.33998)^2} = 0.5809$
$x_4 = 0.86114$	$w_4 = 0.34785$	$w_4 e^{-x_4^2} = 0.34785 \cdot e^{-(0.86114)^2} = 0.1657$

Παράδειγμα 7.3.2 - 1

Με τον τύπο των Gauss-Legendre για 4 σημεία να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα (Σχ. 7.3.2 - 1)

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx.$$

Λύση. Επειδή η ολοκλήρωση γίνεται στο διάστημα $[-1, 1]$, δεν απαιτείται να γίνει ο μετασχηματισμός (7.3.2 - 3). Τότε έχουμε

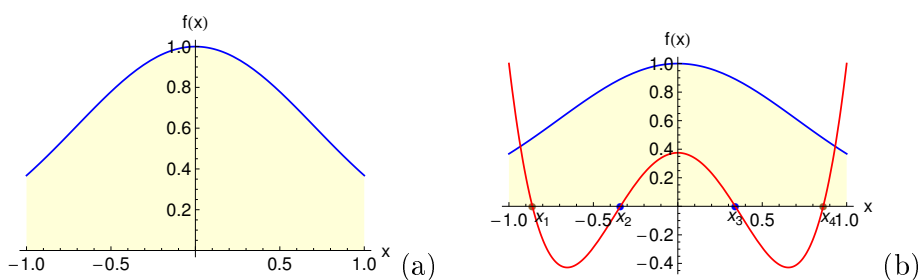
$$\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx \approx \sum_{i=1}^4 g(x_i) = w_1 e^{-x_1^2} + w_2 e^{-x_2^2} + w_3 e^{-x_3^2} + w_4 e^{-x_4^2},$$

όταν οι ρίζες x_i και τα βάρη w_i ; $i = 1, 2, 3, 4$ δίνονται από τον Πίνακα 7.3.2 - 1. Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 7.3.2 - 2 σύμφωνα και με τον τύπο (7.3.2 - 5) προκύπτει ότι

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx \approx 1.4932 \quad (\text{ακριβής τιμή } I = \sqrt{\pi} \operatorname{Erf}(1) \approx 1.49365).$$

Σημείωση 7.3.2 - 2

Όταν το διάστημα ολοκλήρωσης δεν είναι το $[-1, 1]$, τότε η παραπάνω λύση απαιτεί αρχικά την εφαρμογή του μετασχηματισμού (7.3.2 - 3), όπως αυτό γίνεται στο παρακάτω παράδειγμα:



Σχήμα 7.3.2 - 1: Παράδειγμα 7.3.2 - 1. (a) Η μπλε καμπύλη ορίζει το διάγραμμα της συνάρτησης e^{-x^2} , ενώ το εμβαδόν του σχήματος ισούται με την τιμή του ολοκληρώματος $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$. (b) Η κόκκινη καμπύλη ορίζει το διάγραμμα του πολυωνύμου $P_4(x) = \frac{1}{8}(3 - 30x^2 + 35x^4)$ του Legendre, ενώ τα σημεία x_1, x_2, x_3, x_4 τις ρίζες του.

Παράδειγμα 7.3.2 - 2

Όμοια με τον τύπο των Gauss-Legendre για 4 σημεία το ολοκλήρωμα (Σχ. 7.3.2 - 2)

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx, \quad \text{όταν η θεωρητική τιμή είναι } 0.746824.$$

Λύση. Αρχικά με τον τύπο (7.3.2-3) γίνεται μετασχηματισμός του διαστήματος ολοκλήρωσης στο διάστημα $[-1, 1]$ θέτοντας

$$x = \frac{(1-0)t}{2} + \frac{1+0}{2} = 0.5t + 0.5, \quad \text{οπότε}$$

$$dx = d(0.5t + 0.5) = (0.5t + 0.5)' dt = 0.5 dt.$$

Άρα

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_{-1}^1 e^{-(0.5t+0.5)^2} 0.5 dt \\ &= \int_{-1}^1 0.5 e^{-(0.5x+0.5)^2} dx = \int_{-1}^1 g(x) dx, \end{aligned}$$

Πίνακας 7.3.2 - 3: Παράδειγμα 7.3.2 - 2

x_i	w_i	$w_i g(x_i) = w_i \left[0.5 e^{-(0.5x_i+0.5)^2} \right]$
$x_1 = -0.86114$	$w_1 = 0.34785$	$w_1 g(x_1) = 0.1730886$
$x_2 = -0.33998$	$w_2 = 0.65214$	$w_2 g(x_2) = 0.2924242$
$x_3 = 0.33998$	$w_3 = 0.65214$	$w_3 g(x_3) = 0.208143$
$x_4 = 0.86114$	$w_4 = 0.34785$	$w_4 g(x_4) = 0.07316108$

όταν τεθεί για ευκολία x αντί του t και

$$g(x) = 0.5 e^{-(0.5x+0.5)^2}.$$

Τότε από τα αποτελέσματα του Πίνακα 7.3.2 - 3, όταν

$$w_1 g(x_1) = 0.34785 \left[0.5 e^{-[0.5(-0.86114)+0.5]^2} \right] = 0.1730886$$

$$w_2 g(x_2) = 0.65214 \left[0.5 e^{-[0.5(-0.33998)+0.5]^2} \right] = 0.2924242$$

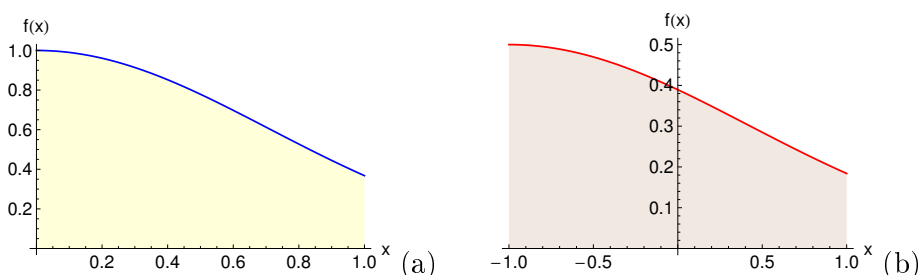
$$w_3 g(x_3) = 0.65214 \left[0.5 e^{-[0.5(0.33998)+0.5]^2} \right] = 0.208143$$

$$w_4 g(x_4) = 0.34785 \left[0.5 e^{-[0.5(0.86114)+0.5]^2} \right] = 0.07316108,$$

σύμφωνα και με τον τύπο (7.3.2 - 5) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &= \int_{-1}^1 0.5 e^{-(0.5x+0.5)^2} dx = \int_{-1}^1 g(x) dx \\ &\approx w_1 g(x_1) + w_2 g(x_2) + w_3 g(x_3) + w_4 g(x_4) \\ &= 0.7468169. \end{aligned}$$

Τότε, επειδή η θεωρητική τιμή είναι 0.746824, έχουμε απόλυτο σφάλμα $e = 7.213364 \times 10^{-6}$.



Σχήμα 7.3.2 - 2: Παράδειγμα 7.3.2 - 2. (a) Η μπλε καμπύλη ορίζει το διάγραμμα της συνάρτησης e^{-x^2} , ενώ το εμβαδόν του σχήματος ισούται με την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 e^{-x^2} dx$. (b) Η κόκκινη καμπύλη ορίζει το διάγραμμα της συνάρτησης $0.5e^{-(0.5x+0.5)^2}$, ενώ το εμβαδόν του σχήματος ισούται με την τιμή του ολοκληρώματος $\int_{-1}^1 0.5e^{-(0.5x+0.5)^2} dx$.

Παράδειγμα 7.3.2 - 3

Έστω το ολοκλήρωμα (Σχ. 7.3.2 - 3)

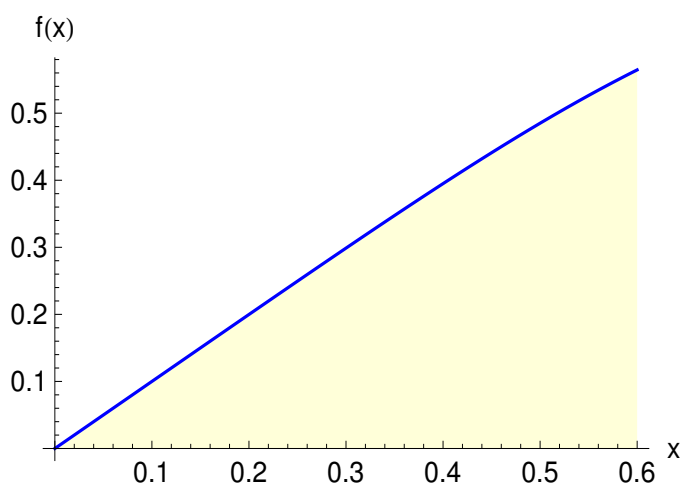
$$I = \int_0^{0.6} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Να λυθεί με τον κανόνα των Gauss-Seidel για 3, αντίστοιχα 6 σημεία και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική τιμή

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh}(x^2) \Big|_0^{0.6} \approx 0.1763227.$$

Στη συνέχεια να γίνει σύγκριση με την αντίστοιχη λύση που προκύπτει από τους σύνθετους κανόνες του τραπεζίου, του Simpson και των 3/8 του Simpson, όταν $h = 0.1$.

Λύση.



Σχήμα 7.3.2 - 3: Παράδειγμα 7.3.2 - 3. Η μπλε καμπύλη ορίζει το διάγραμμα της συνάρτησης $\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$, ενώ το εμβαδόν του σχήματος ισούται με την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^{0.6} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}} \approx 0.1763227$

Κανόνας των Gauss-Seidel για 3 σημεία (Σχ. 7.3.2 - 4a)

Αρχικά με τον τύπο (7.3.2 - 3) γίνεται μετασχηματισμός του διαστήματος ολοκλήρωσης στο διάστημα $[-1, 1]$ θέτοντας

$$x = \frac{(0.6 - 0)t}{2} + \frac{0.6 + 0}{2} = 0.3t + 0.3, \quad \text{οπότε}$$

$$dx = d(0.3t + 0.3) = (0.3t + 0.3)' dt = 0.3 dt.$$

Άρα

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{0.6} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int_{-1}^1 \frac{0.3t + 0.3}{\sqrt{1 + (0.3t + 0.3)^4}} 0.3 dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{0.9(x+1)}{\sqrt{1 + (0.3x + 0.3)^4}} dx = \int_{-1}^1 g(x) dx, \end{aligned}$$

Πίνακας 7.3.2 - 4: Παράδειγμα 7.3.2 - 3: κανόνας των Gauss-Seidel για 3 σημεία

x_i	w_i	$w_i g(x_i) = w_i \frac{0.9(x_i+1)}{\sqrt{1+(0.3x_i+0.3)^4}}$
$x_1 = -0.77459667$	$w_1 = 0.55555556$	$w_1 g(x_1) = 0.01127005$
$x_2 = 0$	$w_2 = 0.88888889$	$w_2 g(x_2) = 0.07967796$
$x_3 = 0.77459667$	$w_3 = 0.55555556$	$w_3 g(x_3) = 0.08536724$

όταν όμοια έχει τεθεί για ευκολία x αντί του t και

$$g(x) = \frac{0.9(x+1)}{\sqrt{1+(0.3x+0.3)^4}}.$$

Τότε από τα αποτελέσματα του Πίνακα 7.3.2 - 4, σύμφωνα και με τον τύπο (7.3.2 - 5) όταν

$$w_1 g(x_1) = 0.55555556 \left[\frac{0.9(-0.77459667+1)}{\sqrt{1+[0.3(-0.77459667)+0.3]^4}} \right] = 0.01127005$$

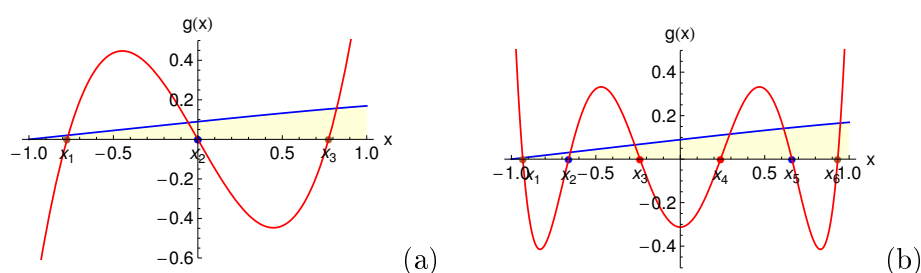
$$w_2 g(x_2) = 0.88888889 \left[\frac{0.9(0+1)}{\sqrt{1+(0.3 \cdot 0+0.3)^4}} \right] = 0.07967796$$

$$w_3 g(x_3) = 0.55555556 \left[\frac{0.9(0.77459667+1)}{\sqrt{1+(0.3 \cdot 0.77459667+0.3)^4}} \right] = 0.08536724,$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_0^{0.6} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}} &= \int_{-1}^1 \frac{0.9(x+1)}{\sqrt{1+(0.3x+0.3)^4}} dx = \int_{-1}^1 g(x) dx \\ &\approx w_1 g(x_1) + w_2 g(x_2) + w_3 g(x_3) = 0.1763152, \end{aligned}$$

δηλαδή υπάρχει απόλυτο σφάλμα $e = 7.422724 \times 10^{-6}$.



Σχήμα 7.3.2 - 4: Παράδειγμα 7.3.2 - 3: Η μπλε καμπύλη ορίζει το διάγραμμα της συνάρτησης $g(x) = \frac{0.9(x+1)}{\sqrt{1+(0.3x+0.3)^4}}$. Η κόκκινη καμπύλη ορίζει τη γραφική παράσταση του πολυωνύμου: (a) $P_3(x) = \frac{1}{2}(-3x + 5x^3)$ του Legendre, ενώ τα σημεία x_1, x_2, x_3 είναι οι ρίζες του και (b) $P_6(x) = \frac{1}{16}(-5 + 105x^2 - 315x^4 + 231x^6)$ του Legendre, ενώ τα σημεία x_1, \dots, x_6 είναι οι ρίζες του.

Κανόνας των Gauss-Seidel για 6 σημεία (Σχ. 7.3.2 - 4b)

Όμοια από τα αποτελέσματα του Πίνακα 7.3.2 - 5, σύμφωνα και με τον τύπο (7.3.2 - 5), έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{0.6} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}} &= \int_{-1}^1 \frac{0.9(x+1)}{\sqrt{1+(0.3x+0.3)^4}} dx = \int_{-1}^1 g(x) dx \\ &\approx w_1 g(x_1) + w_2 g(x_2) + w_3 g(x_3) + w_4 g(x_4) \\ &\quad + w_5 g(x_5) + w_6 g(x_6) = 0.1763227 \end{aligned}$$

και συγκρίνοντας με τη θεωρητική τιμή προκύπτει απόλυτο σφάλμα

$$e = 3.450799 \times 10^{-9}.$$

Σύνθετοι κανόνες

Σύμφωνα με τις τιμές του Πίνακα 7.3.2 - 6 προκύπτουν τα εξής:

Τραπεζίου

$$I \approx \frac{h}{2} \{f(x_0) + 2[f(x_1) + \dots + f(x_5)] + f(x_6)\} = 0.176094$$

Πίνακας 7.3.2 - 5: Παράδειγμα 7.3.2 - 3: κανόνες των Gauss-Seidel για 6 σημεία

x_i	w_i	$w_i g(x_i) = w_i \frac{0.9(x_i+1)}{\sqrt{1+(0.3x_i+0.3)^4}}$
$x_1 = -0.9324695$	$w_1 = 0.17132449$	$w_1 g(x_1) = 0.001\,041\,27$
$x_2 = -0.66120939$	$w_2 = 0.36076157$	$w_2 g(x_2) = 0.010\,999\,45$
$x_3 = -0.23861919$	$w_3 = 0.46791396$	$w_3 g(x_3) = 0.032\,019\,91$
$x_4 = 0.23861919$	$w_4 = 0.46791396$	$w_4 g(x_4) = 0.051\,670\,82$
$x_5 = 0.66120939$	$w_5 = 0.36076157$	$w_5 g(x_5) = 0.052\,346\,69$
$x_6 = -0.9324695$	$w_6 = 0.17132449$	$w_6 g(x_6) = 0.028\,244\,52$

Πίνακας 7.3.2 - 6: Παράδειγμα 7.3.2 - 3 Σύνθετοι κανόνες: οι τιμές των σημείων x_i και των τιμών $f(x_i) = \frac{x_i}{\sqrt{1+x_i^4}}$

x_i	$f(x_i)$	x_i	$f(x_i)$
$x_0 = 0.0$	0	$x_4 = 0.4$	0.394976
$x_1 = 0.1$	0.099995	$x_5 = 0.5$	0.485071
$x_2 = 0.2$	0.199840	$x_6 = 0.6$	0.564532
$x_3 = 0.3$	0.298792		

με απόλυτο σφάλμα: $e = 0.000\,228\,54$.

Simpson

$$I \approx \frac{h}{3} \{f(x_0) + 4[f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)] \\ + 2[f(x_2) + f(x_4)] + f(x_6)\} = 0.176\,320$$

με απόλυτο σφάλμα: $e = 2.676\,308 \times 10^{-6}$.

3/8 του Simpson

$$I \approx \frac{3h}{8} \{f(x_0) + 3[f(x_1) + f(x_4)] + 3[f(x_2) + f(x_5)] \\ + 2f(x_3) + f(x_6)\} = 0.176\,316$$

με απόλυτο σφάλμα: $e = 6.470\,302 \times 10^{-6}$.

Συγκρίνοντας το ελάχιστο των σφαλμάτων των παραπάνω σύνθετων κανόνων με το αντίστοιχο σφάλμα $e = 3.450\,799 \times 10^{-9}$ του κανόνα των Gauss-Legendre για 6 σημεία έχουμε μια προφανή πειραματική επαλήθευση της Παρατήρησης 7.3.2 - 1(i).

Ασκήσεις

1. Έστω το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{0.6} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

i) Να λυθεί με τον κανόνα των Gauss-Legendre για 3, αντίστοιχα 6 σημεία και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική τιμή

$$I = \frac{1}{3} (x^2 - 2) \sqrt{1+x^2} \Big|_0^{0.6} \approx 0.029\,149\,26$$

και την αντίστοιχη λύση που προκύπτει από τους σύνθετους κανόνες του τραπεζίου, Simpson και 3/8 του Simpson, όταν $h = 0.1$.

ii) Το ολοκλήρωμα να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{0.6} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_0^{0.1} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} + \dots + \int_{0.5}^{0.6} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= I_1 + \dots + I_6. \end{aligned}$$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα I εφαρμόζοντας σε καθένα από τα παραπάνω ολοκληρώματα I_i ; $i = 1, \dots, 6$ τον κανόνα των Gauss-Legendre για 6 σημεία και να γίνει σύγκριση του αποτελέσματος με τον αντίστοιχο της περίπτωσης (i). Στη συνέχεια να γραφεί το πρόγραμμα λύσης της (ii) με το MATLAB.

2. Όμοια με τον κανόνα των Gauss-Legendre για 3, αντίστοιχα 6 σημεία το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

όταν $h = 0.1$ με θεωρητική τιμή

$$I = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \Big|_0^{1.2} \approx 1.015973$$

(βλέπε Παράδειγμα 7.2.2 - 1) και να γίνει σύγκριση με τα αποτελέσματα του Πίνακα 7.2.2 - 2 και του σύνθετου κανόνα των 3/8 του Simpson (Παράδειγμα 7.2.3 - 1).

Απαντήσεις

1. Τιμή ολοκληρώματος με σύνθετο κανόνα

τραπεζίου: 0.029 853 61, Simpson: 0.029 146 39, 3/8 Simpson: 0.029 142 67, Gauss-Legendre 3 σημεία: 0.029 146 38 6 σημεία: 0.029 149 26.

2. Όμοια είναι

τραπεζίου: 1.015 711, Simpson: 1.015 973, 3/8 Simpson: 1.015 973,

Gauss-Legendre 3 σημεία: 1.015 853 6 σημεία: 1.015 973 με σφάλμα: 6.715957×10^{-10} .

Παρατήρηση 7.3.2 - 1

Σε ορισμένα αποτελέσματα υπάρχει για τη χρησιμοποιούμενη ακρίβεια ταύτιση με την αντίστοιχη θεωρητική τιμή. Στην πραγματικότητα, όταν η άσκηση λυθεί με υπολογιστή, υπάρχει σφάλμα στην προσέγγιση, όπως αυτό του κανόνα των 6 σημείων των Gauss-Legendre της Άσκησης 2.

Βιβλιογραφία

- [1] Ακρίβης, Γ. & Δουγαλής, Β. (1995). *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978-960-524-022-6.
- [2] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978-960-351-874-7.
- [3] Στεφανάκος, Χ. (2009). *Προγραμματισμός H/Y με MATLAB*. Γκιούρδας Εκδοτική. ISBN 978-960-387-856-8.
- [4] Atkinson, K. E. (1989). *An Introduction to Numerical Analysis*. John Wiley & Sons (2nd ed.). ISBN 0-471-50023-2.
- [5] Burden, R. L. & Faires, D. J. (2010). *Numerical Analysis*. Brooks/Cole (7th ed.). ISBN 978-0-534-38216-2.
- [6] Conte, S. D. & de Boor, C. (1980). *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. McGraw-Hill Inc (3rd ed.). ISBN 978-0-07-012447-9.
- [7] Don, E. (2006). *Schaum's Outlines - Mathematica*. Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN 978-960-209-961-2.
- [8] Leader, L. J. (2004). *Numerical Analysis and Scientific Computation*. Addison-Wesley. ISBN 978-0-201-73499-7.
- [9] Schatzman, M. (2002). *Numerical Analysis: A Mathematical Introduction*. Oxford: Clarendon Press. ISBN 978-0-19-850279-1.

- [10] Stoer, J. & Bulirsch, R. (2002). *Introduction to Numerical Analysis*. Springer (3rd ed.). ISBN 978-0-387-95452-3.
- [11] Sli, E. & Mayers, D. (2003). *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-00794-8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- <http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm>
- <http://mathworld.wolfram.com/>
- <http://eom.springer.de/>