Μάθημα 8

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

8.1 Εισαγωγικές έννοιες

Είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη ότι η επίλυση των περισσότερων προβλημάτων των θετικών επιστημών οδηγεί στη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης ή ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Η λύση όμως αυτή είναι δυνατόν να υπολογιστεί θεωρητικά **μόνον** σε ορισμένες περιπτώσεις, ενώ στα περισσότερα των προβλημάτων η λύση γίνεται μόνον προσεγγιστικά, δηλαδή με αριθμητικές μεθόδους, οι οποίες πολλές φορές εξακολουθούν να χρησιμοποιούνται και όταν ακόμα είναι γνωστή η θεωρητική λύση.[1]

Οι διαφορικές εξισώσεις είναι δυνατόν να χωριστούν στις παρακάτω δύο βασικές κατηγορίες:

[1] Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 10.

- τις **συνήθεις** διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ) (ordinary differential equations ή ODE's), όταν η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από μία μεταβλητή, και
- τις διαφορικές εξισώσεις με **μερικές παραγώγους** (ΜΔΕ) (partial differential equations ή PDE's), όταν εξαρτάται από περισσότερες της μιας μεταβλητές.

Σύμφωνα με την παραπάνω κατηγοριοποίηση η διαφορική εξίσωση:

- $$y'(t) = -y(t) + t + 1$$

  είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση, επειδή η άγνωστη συνάρτηση $y(t)$ εξαρτάται από μια μεταβλητή, την t, και ειδικότερα 1ης τάξης λόγω της της $y'(t)$.

- $$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = e^{2t}\sin t$$

  είναι όμοια μια συνήθης διαφορική εξίσωση, επειδή η άγνωστη συνάρτηση $y(t)$ εξαρτάται από μια μεταβλητή την t, 2ης τάξης λόγω της της $y''(t)$.

- $$i\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + q\,|u(x,t)|^2 u(x,t) = 0$$

  ή πιο απλά συμβολικά

  $$i\,u_t + u_{xx} + q|u|^2 u = 0$$

  είναι μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, επειδή η άγνωστη συνάρτηση $u(x,t)$ εξαρτάται από δύο μεταβλητές τις x, t, 1ης τάξης ως t και 2ης τάξης ως προς x λόγω των αντίστοιχων τάξεων των μερικών παραγώγων της.

- $$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} + \rho\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} - \phi(x,y)$$

ή

$$u_{tt} + \rho\, u_t = u_{xx} + u_{yy} - \phi(x, y)$$

είναι όμοια μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, επειδή η άγνωστη συνάρτηση $u(x, y, t)$ εξαρτάται από τρεις μεταβλητές τις x, y, t και 2ης τάξης ως προς καθεμιά από τις μεταβλητές της λόγω των αντίστοιχων τάξεων των μερικών παραγώγων της κ.λπ.

Από το σύνολο των ΣΔΕ θα εξεταστεί στο μάθημα αυτό μόνον η προσεγγιστική λύση των διαφορικών εξισώσεων **1ης τάξης**, δηλαδή διαφορικών εξισώσεων που η άγνωστη συνάρτηση εμφανίζεται με την 1ης τάξης παράγωγό της και από αυτές τις προσεγγιστικές λύσεις εκείνες που βασίζονται στον **τύπο του Taylor**.

Κρίνεται σκόπιμο στις δύο παραγράφους που ακολουθούν να δοθούν εν συντομία οι απαραίτητοι ορισμοί και θεωρήματα από την Ανάλυση, που εξασφαλίζουν την ύπαρξη και το μονοσήμαντο της λύσης των παραπάνω διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης.

8.1.1 Ορισμοί

[2]Οι κυριότεροι είναι οι εξής:

Ορισμός 8.1.1 - 1. *Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης είναι*

$$F\left(t, y, y'\right) = 0, \qquad (8.1.1 - 1)$$

όταν η άγνωστη συνάρτηση $y = y(t)$ *ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής* $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ *και υπάρχει η* $y'(t)$ *για κάθε* $t \in (a, b)$.

Τότε η λύση $y(t)$, εφόσον είναι δυνατόν να προσδιοριστεί, θα ορίζει τη λύση της $(8.1.1 - 1)$.

Ορισμός 8.1.1 - 2. *Μια διαφορική εξίσωση 1ης τάξης της μορφής* $(8.1.1{-}1)$ *θα λέγεται ότι γράφεται σε* **λυμένη** *(explicit) μορφή, όταν*

$$y' = f(t, y). \qquad (8.1.1 - 2)$$

[2]Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη θεωρητική μελέτη των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

Σε κάθε άλλη περίπτωση η $(8.1.1-1)$ θα λέγεται ότι ορίζεται με **πεπλεγμένη** (implicit) μορφή.

Παράδειγμα 8.1.1 - 1

Σύμφωνα με τον Ορισμό 8.1.1 - 2 οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης

$$y' = -y + t + 1, \quad \text{αντίστοιχα} \quad y' = 2yt + t^2 e^t,$$

όπου $y = y(t)$, είναι γραμμένες σε λυμένη μορφή με

$$f(t,y) = -y + t + 1, \quad \text{αντίστοιχα} \quad f(t,y) = 2yt + t^2 e^t,$$

ενώ η $y' + \sin(y + y') = t$ με πεπλεγμένη, επειδή η $y' + \sin(y + y')$ δεν είναι δυνατόν να λυθεί ως προς y'.

Ορισμός 8.1.1 - 3. *Μια λυμένη διαφορική εξίσωση 1ης τάξης θα λέγεται ότι ορίζει ένα* **πρόβλημα αρχικής τιμής** *(initial value problem ή IVP), όταν η λύση της επαληθεύει μια αρχική τιμή, δηλαδή*

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), \quad \text{όταν} \quad t \in [a,b] \subset \mathbb{R}, \quad \text{και} \\ y_0 &= y(a) \quad \textbf{αρχική τιμή}. \end{aligned} \tag{8.1.1 - 3}$$

Παράδειγμα 8.1.1 - 2

Σύμφωνα με τον Ορισμό 8.1.1 - 3 οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις

- $$y' = \sin t + e^{-t}; \quad t \in [0,1] \quad \text{με} \quad y_0 = y(0) = 0 \tag{8.1.1 - 4}$$

- $$y' = -ty + y^2; \quad t \in [1, 1.5] \quad \text{με} \quad y_0 = y(1) = -0.240\,683 \tag{8.1.1 - 5}$$

ορίζουν ένα πρόβλημα αρχικής τιμής 1ης τάξης.

Παρατηρήσεις 8.1.1 - 1

- Το y_0 συμβολίζει αρχική τιμή και δεν σημαίνει πάντοτε ότι $y_0 = y(0)$. Για παράδειγμα, στην (8.1.1−4) είναι $y_0 = y(0) = 0$, ενώ στην (8.1.1−5) είναι $y_0 = y(1) = -0.240\,683$.

- Το πεδίο ορισμού στον Ορισμό 8.1.1 - 3 είναι κλειστό, δηλαδή της μορφής $[a, b]$, ενώ στον Ορισμό 8.1.1 - 1 ανοικτό. Αυτό συμβαίνει, επειδή στο πρόβλημα αρχικής τιμής αναζητείται η λύση, ειδικότερα η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης με συγκεκριμένη αρχική τιμή την $y_0 = y(a)$. Επομένως το πεδίο ορισμού στην περίπτωση αυτή θεωρείται ότι είναι υποσύνολο αυτού του Ορισμού 8.1.1 - 1.

Ορισμός 8.1.1 - 4. *Μια συνάρτηση $f(t, y(t))$ με πεδίο ορισμού, έστω D όπου $D \subseteq \mathbb{R}^2$, λέγεται ότι ικανοποιεί μία* **συνθήκη του Lipschitz** *ως προς τη μεταβλητή y, όταν υπάρχει μία σταθερά L τέτοια, ώστε*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2| \qquad (8.1.1 - 6)$$

για κάθε $(t, y_1), (t, y_2) \in D$.

Τότε η σταθερά L θα λέγεται και σταθερά του Lipschitz για την f.

Παράδειγμα 8.1.1 - 3

Έστω η συνάρτηση $f(t, y) = t|y|$ με πεδίο ορισμού

$$D = \{(t, y)|\, 1 \leq t \leq 2, \ -3 \leq y \leq 4\}.$$

Τότε για κάθε (t, y_1), $(t, y_2) \in D$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(t, y_1) - f(t, y_2)| &= |t\,|y_1| - t\,|y_2|| = |t|\,||y_1| - |y_2|| \\ &\leq 2\,|y_1 - y_2|, \end{aligned}$$

οπότε η σταθερά του Lipschitz L για τη συνάρτηση f θα είναι $L = 2$, επειδή εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$|f(2, 1) - f(2, 0)| = |2 - 0| = 2|1 - 0| = 2.$$

Ορισμός 8.1.1 - 5. *Ένα σύνολο D με $D \subseteq \mathbb{R}^2$ λέγεται* **συνεκτικό** *(convex), όταν για κάθε (t, y_1), $(t, y_2) \in D$ το σημείο*

$$((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2)$$

ανήκει στο D για κάθε $\lambda \in [0, 1]$.

Η γεωμετρική ερμηνεία του ορισμού είναι ότι σε ένα συνεκτικό σύνολο, το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο οποιαδήποτε σημεία του συνόλου, ανήκει στο σύνολο.

Θεώρημα 8.1.1 - 1. *Έστω η συνάρτηση $f(t, y)$ με πεδίο ορισμού το συνεκτικό σύνολο D με $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Τότε, αν υπάρχει σταθερά L με $L > 0$ και ισχύει*

$$\left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right| \leq L \quad \text{για κάθε} \quad (t,y) \in D, \tag{8.1.1 - 7}$$

η συνάρτηση f θα ικανοποιεί μία συνθήκη του Lipschitz ως προς τη μεταβλητή y με σταθερά του Lipschitz L.

8.1.2 Θεμελιώδες θεώρημα

Το παρακάτω θεώρημα, που απεδείχθη από τον Henrici,[3] θεωρείται θεμελιώδες, επειδή δίνει τις συνθήκες που πρέπει να πληροί μια συνάρτηση $f(t, y(t))$, έτσι ώστε μία 1ης τάξης λυμένη διαφορική εξίσωση να έχει μία και μοναδική λύση.

Θεώρημα 8.1.2 - 1 (Henrici για ΣΔΕ). *Έστω ότι η $f(t, y(t))$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο D, όπου*

$$D = \{(t, y)| \quad a \leq t \leq b, \quad y \in \mathbb{R}\}.$$

Τότε, αν η f ικανοποιεί μία συνθήκη του Lipschitz ως προς τη μεταβλητή y, το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y)\,; \quad t \in [a, b] \quad \text{με} \\ y_0 &= y(t_0)\,, \quad \text{όταν} \quad (t_0, y_0) \in D \end{aligned} \tag{8.1.2 - 1}$$

έχει ακριβώς μία λύση για κάθε $t \in [a, b]$.

[3] Βλέπε [9] σελίδα 328.

Παρατήρηση 8.1.2 - 1

Στο εξής στις ασκήσεις του μαθήματος θα είναι $t_0 = a$, οπότε η αρχική τιμή y_0 θα ισούται με $y_0 = y\,(t_0) = y(a)$.

Παράδειγμα 8.1.2 - 1

Έστω το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = 1 + t\sin(ty) \quad \text{όπου } 0 \le t \le 2 \text{ και } y(0) = 0. \tag{8.1.2 - 2}$$

Τότε θεωρώντας το t σταθερό, από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση $f(t,y) = 1 + t\sin(ty)$, προκύπτει ότι για κάθε $y_1 < y_2$ υπάρχει $\xi \in (y_1, y_2)$, έτσι ώστε

$$t^2\cos(\xi t) = \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} = \frac{f\,(t,y_2) - f\,(t,y_1)}{y_2 - y_1}\,.$$

Άρα

$$|f\,(t,y_2) - f\,(t,y_1)| = |y_2 - y_1|\left|t^2\cos(\xi t)\right| \le 4\,|y_2 - y_1|\,,$$

δηλαδή η συνάρτηση f ικανοποιεί μία συνθήκη του Lipschitz ως προς τη μεταβλητή y με σταθερά του Lipschitz $L = 4$ και, επειδή προφανώς η f είναι συνεχής για κάθε $t \in [a,b]$ και $y \in \Re$, σύμφωνα με το Θεώρημα 8.1.2 - 1 θα υπάρχει ακριβώς μία λύση για το πρόβλημα αρχικής τιμής $(8.1.2 - 2)$.

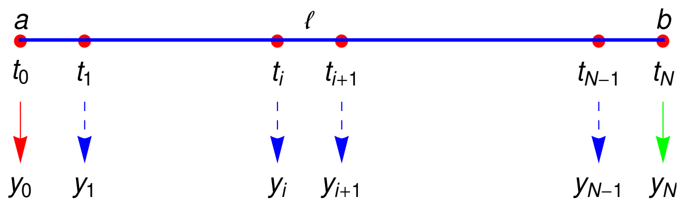
8.1.3 Συμβολισμοί

Έστω ότι το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = f(t,y)\,; \quad t \in [a,b] \quad \text{με} \quad y_0 = y\,(a) \tag{8.1.3 - 1}$$

επαληθεύει τις υποθέσεις του Θεωρήματος 8.1.2 - 1, οπότε υπάρχει ακριβώς μια λύση $y = y(t)$ για κάθε $t \in [a,b]$. Τότε, εφόσον υπάρχει η θεωρητική λύση του προβλήματος, η συνάρτηση $y(t)$ προσδιορίζεται εφαρμόζοντας μια κατάλληλη μέθοδο.

Στις περιπτώσεις όπου η θεωρητική λύση είναι άγνωστη, με τον όρο *προσέγγιση της λύσης* εννοείται ο υπολογισμός με κάποιο προσεγγιστικό τύπο, που ορίζεται κάθε φορά από την αντίστοιχη **αριθμητική μέθοδο**, των τιμών της



Σχήμα 8.1.3 - 1: η **διαμέριση** δ του διαστήματος $[a, b]$ από τα σημεία $t_0 = a,\, t_1,\, \ldots,\, t_N = b$, που ισαπέχουν κατά διάστημα πλάτους ℓ και οι αντίστοιχες προσεγγιστικές τιμές $y_0,\, y_1,\, \ldots,\, y_N$ με $y_N \approx y(b)$

λύσης αρχικά στα εσωτερικά σημεία του $[a, b]$ και τελικά της τιμής στο σημείο b, δηλαδή της $y(b)$.

Τότε για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής λύσης το διάστημα $[a, b]$ υποδιαιρείται σε N το πλήθος ίσα υποδιαστήματα πλάτους $\ell = \dfrac{b-a}{N}$ από τα $N+1$ σημεία[4]

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = b,$$

που ορίζουν τη **διαμέριση** δ του $[a, b]$ (Σχ. 8.3.2 - 1). Τότε προφανώς είναι $t_i = a + i\,\ell$.

Επειδή η $y(t)$ συμβολίζει τη θεωρητική λύση του προβλήματος αρχικής τιμής $(8.1.3-1)$, η τιμή της στο σημείο t_i θα είναι προφανώς η $y\left(t_i\right)$. Στην πραγματικότητα όμως η χρήση μιας προσεγγιστικής μεθόδου δεν θα δώσει τη θεωρητικά αναμενόμενη τιμή $y\left(t_i\right)$, αλλά κάποια άλλη τιμή, έστω y_i, που δεν θα ισούται με την τιμή $y\left(t_i\right)$.

[4]Στην περίπτωση όπου η μεταβλητή t συμβολίζει τον χρόνο, το ℓ θα λέγεται **βήμα του χρόνου** (time step). Είναι ήδη γνωστές στον αναγνώστη ανάλογες διαμερίσεις της μεταβλητής x του διαστήματος (space step) από την προσέγγιση των παραγώγων (Μάθημα *Προσέγγιση Παραγώγων*) και τους σύνθετους κανόνες ολοκλήρωσης (Μάθημα *Αριθμητική Ολοκλήρωση - Σύνθετοι κανόνες*).

Η τιμή y_i τότε

- είναι διαφορετική της θεωρητικής $y\left(t_i\right)$ λόγω της προσεγγιστικής μεθόδου, και
- περιέχει επιπλέον και τα **σφάλματα στρογγυλοποίησης** (round-off errors), που δημιουργούνται από τον υπολογιστή.

Τότε προφανώς το σφάλμα υπολογισμού της τιμής $y\left(t_i\right)$ από την y_i ισούται με

$$e=\left|y\left(t_i\right)-y_i\right|. \qquad (8.1.3 - 2)$$

Το σφάλμα αυτό θα λέγεται στο εξής **απόλυτο σφάλμα** ή απλά σφάλμα.[5]

8.1.4 Διαδικασία υπολογισμού αριθμητικής λύσης

Με γνωστή την

$$\textbf{αρχική τιμή} \quad y_0=y(a),$$

η αριθμητική λύση της $(8.1.3-1)$ υπολογίζεται εφαρμόζοντας τη μέθοδο λύσης διαδοχικά σε καθένα από τα σημεία t_i της παραπάνω διαμέρισης δ. Η εφαρμογή αυτή, που ορίζει κάθε φορά και το αντίστοιχο **βήμα** λύσης, θα δώσει την αντίστοιχη προσέγγιση y_i. Στη συνέχεια, με γνωστή την προσέγγιση y_i, υπολογίζεται από το επόμενο σημείο t_{i+1} η προσέγγιση y_{i+1} (όμοια Σχ. 8.3.2 - 1) και τελικά

$$\text{η τιμή} \quad y_N \quad \text{με} \quad y_N \approx y(b)=y\left(t_N\right).$$

Επομένως συμβολικά έχουμε

$$\begin{array}{ll}
(t_0,y_0) & \text{1ο βήμα} \;\rightarrow\; (t_1,y_1) \quad \text{2ο βήμα} \;\rightarrow\; (t_2,y_2) \\
\vdots & \vdots \\
\left(t_{N-1},y_{N-1}\right) & N\text{-στο βήμα} \;\rightarrow\; \left(t_N,y_N\right).
\end{array} \qquad (8.1.4 - 1)$$

[5] Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη ανάλυση των διαφόρων σφαλμάτων που προκύπτουν στις περιπτώσεις αυτές, παραπέμπεται στο Μάθημα *Αριθμητική λύση εξισώσεων*.

Παρατήρηση 8.1.4 - 1

Συνήθως η αρχική προσεγγιστική τιμή y_0 ισούται με την αντίστοιχη θεωρητική $y(a)$. Αν αυτό δεν ισχύει ή στις περιπτώσεις που η θεωρητική λύση είναι άγνωστη, τότε υπάρχει ένα **αρχικό σφάλμα** στη λύση, που αυξάνει με τη διαδικασία εφαρμογής της αριθμητικής μεθόδου.

Άσκηση

Να εξεταστεί αν ισχύει το Θεώρημα 8.1.2 - 1 στα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

$i)\quad y' = y\cos t;\quad 0 \le t \le 1,\quad y(0) = 1,$

$ii)\quad y' = 2yt + t^2 e^t;\quad 1 \le t \le 2,\quad y(1) = 0,$

$iii)\quad y' = \dfrac{4t^3 y}{1+t^4};\quad 0 \le t \le 1,\quad y(0) = 1.$

8.2 Μέθοδοι που βασίζονται στη σειρά Taylor

8.2.1 Μέθοδος του Euler

Αν και η μέθοδος αυτή δεν έχει σήμερα μεγάλες πρακτικές εφαρμογές, εξακολουθεί να παρουσιάζει ενδιαφέρον στην αριθμητική λύση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, επειδή αποτελεί τη βασική ή όπως διαφορετικά συνήθως λέγεται **γεννήτρια μέθοδο** (predictor method) πολλών άλλων ακριβέστερων μεθόδων.

Έστω ότι η συνάρτηση $y = y(t)$ είναι η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής $(8.1.2 - 1)$, δηλαδή του

$$y' = f(t,y),\quad \text{όταν}\quad t \in [a,b] \quad \text{με} \quad y_0 = y(a) \qquad (8.2.1 - 1)$$

και ότι η y έχει παραγώγους τουλάχιστον μέχρι και 2ης τάξης συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a,b]$, ενώ το $[a,b]$ έχει υποδιαιρεθεί σε N το πλήθος ίσα υποδιαστήματα από τα $N+1$ σημεία (Σχ. 8.3.2 - 1)

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b, \qquad (8.2.1 - 2)$$

όπου ℓ είναι το πλάτος κάθε υποδιαστήματος.

Είναι ήδη γνωστό ότι, αν $f \,|\, [a, b\,]$ είναι μια συνάρτηση που έχει παραγώγους μέχρι και ν - τάξη στο $[a, b]$, τότε, αν $\xi \in [a, b]$, ισχύει ο παρακάτω τύπος του Taylor:

$$f(t) \approx f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1\,!}(t-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2\,!}(t-\xi)^2 + \ldots + \frac{f^{(\nu)}(\xi)}{\nu\,!}(t-\xi)^{\nu}.$$

Αν στον παραπάνω τύπο το t αντικατασταθεί από το $t+\ell$ με $\ell > 0$ και το ξ από το t, τότε

$$f(t+\ell) \approx f(t) + \frac{\ell}{1\,!}\,f'(t) + \frac{\ell^2}{2\,!}\,f''(t) + \ldots + \frac{\ell^{\nu}}{\nu\,!}f^{(\nu)}(t).$$

Έστω τώρα ότι $f(t) = y(t)$. Τότε η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\begin{aligned} y(t+\ell) &\approx y(t) + \frac{\ell}{1\,!}\,y'(t) + \frac{\ell^2}{2\,!}\,y''(t) \\ &\quad + \ldots + \frac{\ell^{\nu}}{\nu\,!}y^{(\nu)}(t) \end{aligned} \qquad (8.2.1 - 3)$$

για κάθε $\nu = 1,\, 2,\, \ldots$.

Αν $\nu = 1$, τότε η $(8.2.2-1)$ λόγω της $(8.2.1-1)$ γράφεται

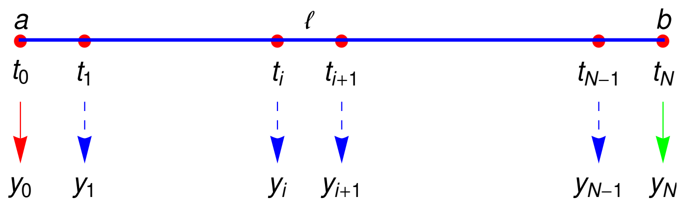
$$\begin{aligned} y(t+\ell) &\approx y(t) + \ell\, \overbrace{y'(t)}^{f(t,y)} \\ &= y(t) + \ell\, f(t,y), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$y(t+\ell) \approx y(t) + \ell f(t,y). \qquad (8.2.1 - 4)$$

Η αριθμητική λύση της $(8.2.1-1)$, δηλαδή η προσέγγιση της τιμής $y(b)$ με την $y\,(t_N)$, προκύπτει, όταν η $(8.2.1-4)$ εφαρμοστεί στην $(8.2.1-1)$ σε καθένα από τα σημεία $t_0,\, t_1,\, \ldots,\, t_{N-1}$ (Σχ. 8.2.1 - 1). Τότε, επειδή σύμφωνα με τους συμβολισμούς της Παραγράφου 8.1.3 είναι $y\,(t_i) = y_i$ και $y\,(t_{i+1}) = y_{i+1}$, έχουμε τελικά την παρακάτω αριθμητική μέθοδο:

$$y_{i+1} = y_i + \ell f\,(t_i, y_i) \quad \text{για κάθε} \quad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, N-1. \qquad (8.2.1 - 5)$$



Σχήμα 8.2.1 - 1: η εφαρμογή της μεθόδου του Euler $y_{i+1} = y_i + \ell f(t_i, y_i)$ διαδοχικά για $i = 0, 1, \ldots, N-1$ θα δώσει τις προσεγγιστικές τιμές $y_1, y_2, \ldots, y_N$ με $y_N \approx y(b)$

Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή σαν **μέθοδος του Euler** (Euler's method),[6] ενώ ο τύπος της σαν η **γεννήτρια σχέση** (predictor formula) του Euler, επειδή, όπως ήδη έχει γραφεί στην αρχή της παραγράφου αυτής, χρησιμοποιείται στη δημιουργία άλλων αριθμητικών μεθόδων. Η διαδικασία της μεθόδου του Euler περιγράφεται στον Αλγόριθμο 8.2.1 - 1.

Παρατήρηση 8.2.1 - 1

Η $(8.2.1-5)$ για $i = 0$ γράφεται:

$$y_1 = y_0 + \ell f(t_0, y_0),$$

όπου σύμφωνα με την $(8.2.1-1)$ είναι

$$t_0 = a \quad \text{και} \quad y_0 = y(a) \quad (\textbf{αρχική τιμή}). \qquad (8.2.1 - 6)$$

[6] Βλέπε βιβλιογραφία και: *https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_method*

Αλγόριθμος 8.2.1 - 1 (μεθόδου του Euler)

Δεδομένα a, b, N και η αρχική συνθήκη y_0

Έστω $\ell = (b-a)/N$, $t = a$, $y = y_0$

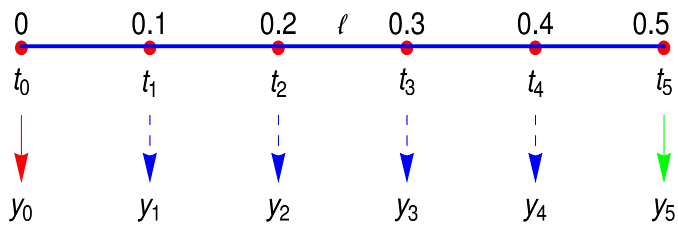
Για $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$

  $y := y + \ell f(t, y)$

  $t := t + \ell$

  $y := y$

τέλος i



Σχήμα 8.2.1 - 2: Παράδειγμα 8.2.1 - 1: η διαμέριση του διαστήματος $[0, 0.5]$, όταν $\ell = 0.1$. Η εφαρμογή της μεθόδου του Euler στον τύπο $(8.2.1-8)$ διαδοχικά για $i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ σύμφωνα και με τη διαδικασία της Παραγράφου 8.1.4 - τύπος $(8.1.4-1)$ - θα δώσει τις προσεγγιστικές τιμές $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_5$ με $y_5 \approx y(0.5)$. Η αρχική τιμή y_0 υπολογίζεται από τη θεωρητική λύση ως εξής: $y_0 = y(0) = \left[t + e^{-t}\right]_{t=0} = 1$

Παράδειγμα 8.2.1 - 1

Αν $y = y(t)$, να λυθεί με τη μέθοδο του Euler το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = -y + t + 1 \quad \text{με} \quad t \in [0, 0.5], \quad \text{όταν} \quad \ell = 0.1, \qquad (8.2.1 - 7)$$

και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική λύση

$$y(t) = t + e^{-t}.$$

Στη συνέχεια να λυθεί το πρόβλημα, όταν $\ell = 0.01$ και να συγκριθούν τα αποτελέσματα των προσεγγιστικών λύσεων.

Λύση. Επειδή $\ell = 0.1$, το διάστημα ολοκλήρωσης $[0, 0.5]$ πρέπει να υποδιαιρεθεί σε $\frac{0.5-0}{0.1} = 5$ υποδιαστήματα. Άρα $N = 5$ (Σχ. 8.2.1 - 2).

Συγκρίνοντας την $(8.2.1 - 7)$ με το πρόβλημα αρχικής τιμής $y' = f(t, y)$ στη σχέση $(8.2.1 - 1)$ προκύπτει ότι για το συγκεκριμένο παράδειγμα η συνάρτηση $f(t, y)$ είναι

$$f(t, y) = -y + t + 1, \quad \text{όταν} \quad t \in [0, 0.5].$$

Άρα σύμφωνα με τον τύπο $(8.2.1 - 5)$ η μέθοδος του Euler γράφεται

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \ell\, f(t_i, y_i) \\ &= y_i + 0.1(-y_i + t_i + 1) \qquad (8.2.1 - 8) \end{aligned}$$

όπου, επειδή είναι $t \in [0, 0.5]$, πρέπει σύμφωνα με την Παρατήρηση 8.2.1 - 1 και την $(8.2.1 - 6)$ να είναι $t_0 = a = 0$, ενώ είναι $b = 0.5$.

Η θεωρητική λύση του προβλήματος, σύμφωνα και με την Παρατήρηση 8.1.4 - 1, είναι δυνατόν στην περίπτωση αυτή να θεωρηθεί σαν η αρχική τιμή y_0 της λύσης, δηλαδή

$$y_0 = y(0) = \left[t + e^{-t}\right]_{t=0} = 1.$$

Εφαρμόζοντας την $(8.2.1 - 8)$ διαδοχικά για $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4$ έχουμε:

1ο βήμα $(t_0 = 0, \quad y_0 = 1) \longrightarrow (t_1 = 0.1, \quad y_1)$

$$\begin{aligned}
\text{για} \quad i = 0; \quad y_{0+1} = \quad y_1 \quad &= y_0 + 0.1\,(-y_0 + t_0 + 1) \\
&= 1 + 0.1(-1 + 0 + 1) = 1, \quad \text{ενώ} \\
&\text{η αντίστοιχη θεωρητική λύση είναι} \\
y\,(t_1) = \quad y(0.1) \quad &= \left[t + e^{-t}\right]_{t=0.1} = 1.004\,837
\end{aligned}$$

2ο βήμα $(t_1 = 0.1, \quad y_1 = 1) \longrightarrow (t_2 = 0.2, \quad y_2)$

$$\begin{aligned}
i = 1; \quad y_{1+1} = \quad y_2 \quad &= y_1 + 0.1\,(-y_1 + t_1 + 1) \\
&= 1 + 0.1(-1 + 0.1 + 1) = 1.01, \quad \text{ενώ} \\
y\,(t_2) = \quad y(0.2) \quad &= \left[t + e^{-t}\right]_{t=0.2} = 1.018\,731
\end{aligned}$$

3ο βήμα $(t_2 = 0.2, \quad y_2 = 1.01) \longrightarrow (t_3 = 0.3, \quad y_3)$

$$\begin{aligned}
i = 2; \quad y_{2+1} = \quad y_3 \quad &= y_2 + 0.1\,(-y_2 + t_2 + 1) \\
&= 1.01 + 0.1(-1.01 + 0.2 + 1) = 1.029, \quad \text{ενώ} \\
y\,(t_3) = \quad y(0.3) \quad &= \left[t + e^{-t}\right]_{t=0.3} = 1.040\,818
\end{aligned}$$

4ο βήμα $(t_3 = 0.3, \quad y_3 = 1.029) \longrightarrow (t_4 = 0.4, \quad y_4)$

$$\begin{aligned}
i = 3; \quad y_{3+1} = \quad y_4 \quad &= y_3 + 0.1\,(-y_3 + t_3 + 1) \\
&= 1.029 + 0.1(-1.029 + 0.3 + 1) = 1.0561, \quad \text{ενώ} \\
y\,(t_4) = \quad y(0.4) \quad &= \left[t + e^{-t}\right]_{t=0.4} = 1.070\,320
\end{aligned}$$

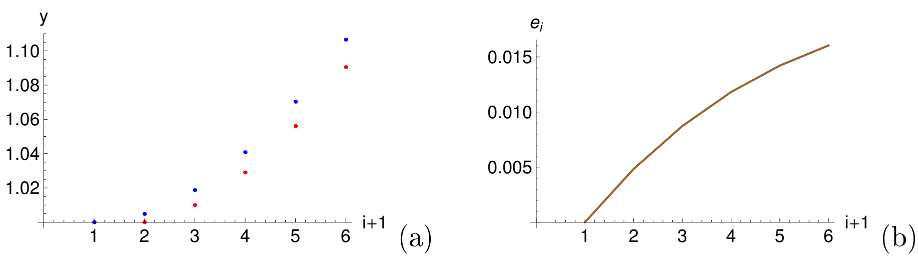
Πίνακας 8.2.1 - 1: Παράδειγμα 8.2.1 - 1: τα αποτελέσματα της μεθόδου του Euler, όταν $\ell = 0.1$

t_i	y_i	$y(t_i)$	$e_i = \lvert y_i - y(t_i) \rvert$
0.0	1.000 000	1.000 000	0.0
0.1	1.000 000	1.004 837	0.004 837
0.2	1.010 000	1.018 731	0.008 731
0.3	1.029 000	1.040 818	0.011 818
0.4	1.056 100	1.070 320	0.014 220
0.5	*1.090 490*	1.106 531	0.016 041

5ο βήμα $(t_2 = 0.4, \quad y_4 = 1.0561) \longrightarrow (t_5 = 0.5, \quad y_5)$

$$\begin{aligned} i = 4;\quad y_{4+1} = \quad y_5 &= y_4 + 0.1\left(-y_4 + t_4 + 1\right) \\ &= 1.0561 + 0.1(-1.0561 + 0.4 + 1) = 1.090\ 490, \quad \text{ενώ} \\ y\left(t_5\right) = \quad y(0.2) &= \left[t + e^{-t}\right]_{t=0.5} = 1.106\,531. \end{aligned}$$

Τα αποτελέσματα δίνονται στον Πίνακα 8.2.1 - 1 και η γραφική των παράσταση στο Σχ. 8.2.1 - 3.



Σχήμα 8.2.1 - 3: Παράδειγμα 8.2.1 - 1, όταν $\ell = 0.1$. (a) Τα μπλε σημεία ορίζουν τις θεωρητικές τιμές $y(t_i)$; $i = 0, 1, \ldots, 4$ και τα κόκκινα τις αριθμητικές y_i. (b) Η γραφική παράσταση των αντίστοιχων σφαλμάτων e_i

Πίνακας 8.2.1 - 2: Παράδειγμα 8.2.1 - 1: τα αποτελέσματα της μεθόδου του Euler, όταν $\ell = 0.01$

t_i	y_i	$y\,(t_i)$	$\lvert e_i\rvert = \lvert y_i - y\,(t_i)\rvert$
0.00	1.000 000	1.000 000	0.0
0.01	1.000 050	1.000 000	0.000 050
0.02	1.000 199	1.000 100	0.000 010
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0.5	*1.195 006*	1.106 531	0.001 525

Όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα αυτά, υπάρχει μια αύξηση του σφάλματος e_i, καθώς ο χρόνος πλησιάζει προς τη χρονική στιγμή $t = 0.5$.

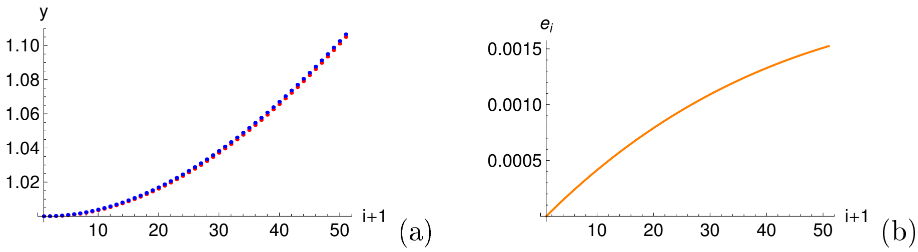
Η παραπάνω λύση υπολογίστηκε επίσης με βήμα χρόνου $\ell = 0.01$, οπότε το διάστημα ολοκλήρωσης $[0, 0.5]$ υποδιαιρείται στην περίπτωση αυτή σε $\frac{0.5-0}{0.01} = 50$ υποδιαστήματα. Άρα $N = 50$, ενώ είναι δυνατόν να γίνει υποδιαίρεση ανάλογη του Σχ. 8.2.1 - 2 θέτοντας στη συντεταγμένη 0.5 τα t_{50} και y_{50} αντί των t_5 και y_5. Τα αποτελέσματα δίνονται στον Πίνακα 8.2.1 - 2 και η γραφική των παράσταση στο Σχ. 8.2.1 - 4. Άμεσα τότε προκύπτει ότι ενώ τα αποτελέσματα σε σύγκριση με τα αντίστοιχα του Πίνακα 8.2.1 - 1 είναι ακριβέστερα, όμως και στην περίπτωση αυτή εξακολουθεί να υπάρχει μια αύξηση του σφάλματος με την πάροδο του χρόνου. Η σύγκριση των σφαλμάτων που προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου, όταν $\ell = 0.1$ και $\ell = 0.01$, δίνεται στο Σχ. 8.2.1 - 5.

Άσκηση

Αν $y = y(t)$, να υπολογιστεί με τη μέθοδο του Euler η λύση των παρακάτω προβλημάτων αρχικής τιμής:

i) $y' = \sin t + e^{-t}\,; \quad 0 \le t \le 0.5, \quad$ όταν $\ell = 0.1$,

$y(t) = 2 - e^{-t} - \cos t \quad$ και $\quad y_0 = y(0)$.



Σχήμα 8.2.1 - 4: Παράδειγμα 8.2.1 - 1, όταν $\ell = 0.01$. (a) Τα μπλε σημεία ορίζουν τις θεωρητικές τιμές $y(t_i)$; $i = 0, 1, \ldots, 50$ και τα κόκκινα τις αριθμητικές y_i. (b) Η γραφική παράσταση των αντίστοιχων σφαλμάτων e_i

ii) $y' = 1 + \dfrac{y}{t}$; $\quad 1 \le t \le 1.2, \quad$ όταν $\ell = 0.1,\, 0.05,$

$y(t) = 2t + t \ln t \quad$ και $\quad y_0 = y(1)$.

Στη συνέχεια να γίνει η γραφική παράσταση της λύσης και των αντίστοιχων σφαλμάτων.

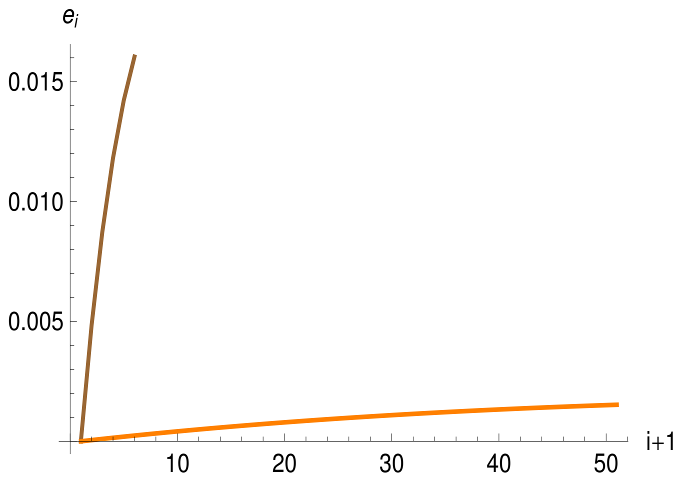
Απαντήσεις

(i) Είναι $f(t, y) = \sin t + e^{-t}$, οπότε σύμφωνα με τον τύπο $(8.2.1-5)$ η μέθοδος του Euler γράφεται

$$y_{i+1} \quad = \quad y_i + 0.1\left(\sin t_i + e^{-t_i}\right) \tag{1}$$

Επειδή $t \in [0, 0.5]$, πρέπει $t_0 = a = 0$ και $b = 0.5$. Η αρχική τιμή y_0 προκύπτει από τη θεωρητική λύση ως εξής:

$$y_0 = y(0) = \left[2 - e^{-t} - \cos t\right]_{t=0} = 0.$$



Σχήμα 8.2.1 - 5: Παράδειγμα 8.2.1 - 1. Η καφέ καμπύλη δείχνει τα σφάλματα $|e_i|$, όταν $\ell = 0.1$ και η πορτοκαλί, όταν $\ell = 0.01$

Εφαρμόζοντας την (1) διαδοχικά για $i = 0, 1, \ldots, 4$ με $\ell = 0.1$ έχουμε:

$$
\begin{array}{lllll}
\text{για} & i = 0; & y_{0+1} = & y_1 & = y_0 + 0.1\left(\sin t_i + e^{-t_i}\right) \\
 & & & & = 0 + 0.1(0+1) = 0.1, \quad \text{ενώ} \\
 & & y(t_1) = & y(0.1) & = \left[2 - e^{-t} - \cos t\right]_{t=0.1} = 0.100\,158 \\
\hline
 & i = 1; & y_2 = & \ldots & = 0.200\,467, \quad \text{ενώ} \\
 & & y(t_2) = & y(0.2) & = \left[2 - e^{-t} - \cos t\right]_{t=0.2} = 0.201\,203 \\
\hline
 & & \vdots & & \vdots \\
 & & y_5 = & \ldots & = \mathit{0.511\,815}, \quad \text{ενώ} \\
 & & y(t_5) = & y(0.5) & = \left[2 - e^{-t} - \cos t\right]_{t=0.5} = 0.515\,887 \\
\hline
\end{array}
$$

(ii) Είναι $f(t, y) = 1 + \dfrac{y}{t}$, οπότε όμοια σύμφωνα με τον τύπο $(8.2.1 - 5)$ η μέθοδος του Euler γράφεται

$$
y_{i+1} = y_i + 0.1\left(1 + \frac{y_i}{t_i}\right) \tag{2}
$$

Επειδή $t \in [1, 1.2]$, πρέπει $t_0 = a = 1$ και $b = 1.2$. Η αρχική τιμή y_0 προκύπτει από τη θεωρητική λύση ως εξής:

$$y_0 = y(1) = [2t + t \ln t]_{t=1} = 2.$$

Βήμα διαμέρισης $\ell = 0.1$

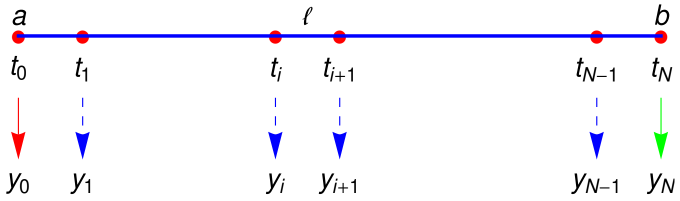
Εφαρμόζοντας την (2) διαδοχικά για $i = 0,\, 1$ έχουμε:

$$\begin{array}{llll}
\text{για} \quad i=0; & y_{0+1} = & y_1 & = y_0 + 0.1\left(1 + \dfrac{y_0}{t_0}\right) \\
 & & & = 2 + 0.1\left(1 + \dfrac{2}{1}\right) = 2.3, \quad \text{ενώ} \\
 & y(t_1) = & y(1.1) & = [2t + t\ln t]_{t=1.1} = 2.304\,841 \\
\hline
\quad i=1; & y_{1+1} = & y_2 & = y_1 + 0.1\left(1 + \dfrac{y_1}{t_1}\right) \\
 & & & = 2.3 + 0.1\left(1 + \dfrac{2.3}{1.1}\right) = \mathit{2.609\,091}, \quad \text{ενώ} \\
 & y(t_2) = & y(1.2) & = [2t + t\ln t]_{t=1.2} = 2.618\,786 \\
\hline
\end{array}$$

Βήμα διαμέρισης $\ell = 0.05$

Όμοια εφαρμόζοντας την (2) διαδοχικά για $i = 0,\, 1,\, 2,\, 3$ έχουμε:

$$\begin{array}{llll}
\text{για} \quad i=0; & y_{0+1} = & y_1 & = y_0 + 0.1\left(1 + \dfrac{y_0}{t_0}\right) \\
 & & & = 2 + 0.05\left(1 + \dfrac{2}{1}\right) = 2.15, \quad \text{ενώ} \\
 & y(t_1) = & y(1.05) & = [2t + t\ln t]_{t=1.05} = 2.151\,230 \\
\hline
\quad \vdots & & & \vdots \\
\quad i=3; & y_{3+1} = & y_4 & = \ldots = \mathit{2.613\,862}, \quad \text{ενώ} \\
 & y(t_2) = & y(1.2) & = [2t + t\ln t]_{t=1.2} = 2.618\,786 \\
\hline
\end{array}$$



Σχήμα 8.2.2 - 1: η **διαμέριση** δ του διαστήματος $[a, b]$ από τα σημεία $t_0 = a,\, t_1,\, \ldots,\, t_N = b$, που ισαπέχουν κατά διάστημα πλάτους ℓ και οι αντίστοιχες προσεγγιστικές τιμές $y_0,\, y_1,\, \ldots,\, y_N$ με $y_N \approx y(b)$ (βλέπε όμοιο Σχ. 8.3.2 - 1 της Παραγράφου 8.1.3)

8.2.2 Μέθοδος του Taylor ν-τάξης

Έχοντας υπόψη τη μέθοδο του Euler που προέκυψε από τον [7]τύπο $(8.2.2-1)$ του Taylor για $\nu = 1$, είναι προφανές ότι μία μεγαλύτερης ακρίβειας μέθοδος είναι δυνατό να προκύψει αυξάνοντας την τιμή του ν.

Έστω το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = f(t, y), \quad \text{όταν} \quad t \in [a, b] \quad \text{με} \quad y_0 = y(a), \tag{8.2.2 - 1}$$

όπου η y έχει παραγώγους στο $[a, b]$ μέχρι και ν τάξη συνεχείς συναρτήσεις και ότι το $[a, b]$ έχει υποδιαιρεθεί σε N το πλήθος ίσα υποδιαστήματα από τα $N + 1$ σημεία

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b \tag{8.2.2 - 2}$$

πλάτους ℓ (Σχ. 8.2.2 - 1).

---

[7]

$$y(t + \ell) \quad \approx \quad y(t) + \frac{\ell}{1\,!}\, y'(t) + \frac{\ell^2}{2\,!}\, y''(t) + \ldots + \frac{\ell^\nu}{\nu\,!} y^{(\nu)}(t)$$

για κάθε $\nu = 1,\, 2,\, \ldots$.

Τότε από τον τύπο $(8.2.2-1)$ του Taylor προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} y\,(t+\ell) &\approx y\,(t)+\ell y'\,(t)+\frac{\ell^2}{2\,!}\,y''\,(t) \\ &\quad +\ldots+\frac{\ell^\nu}{\nu\,!}\,y^{(\nu)}\,(t)\,. \end{aligned} \tag{8.2.2 - 3}$$

Επειδή η συνάρτηση $y(t)$ επαληθεύει το πρόβλημα αρχικής τιμής $(8.2.2-1)$, έχουμε

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t,y(t)) \\ y''(t) &= f'(t,y(t)) \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ y^{(\nu)}(t) &= f^{(\nu-1)}(t,y(t)). \end{aligned} \tag{8.2.2 - 4}$$

Τότε η $(8.2.2-1)$ σύμφωνα με την $(8.2.2-4)$ γράφεται

$$y\,(t+\ell) \approx y\,(t)+\ell\,\overbrace{y'\,(t)}^{f(t,y)}+\frac{\ell^2}{2\,!}\,\overbrace{y''\,(t)}^{f'(t,y)}+\ldots+\frac{\ell^\nu}{\nu\,!}\,\overbrace{y^{(\nu)}\,(t)}^{f^{(\nu-1)}(t,y)}\,,$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} y\,(t+\ell) &\approx y\,(t)+\ell\,f(t,y)+\frac{\ell^2}{2\,!}\,f'(t,y) \\ &\quad +\ldots+\frac{\ell^\nu}{\nu\,!}\,f^{(\nu-1)}(t,y). \end{aligned} \tag{8.2.2 - 5}$$

Από την $(8.2.2-5)$ προκύπτει τότε η παρακάτω αριθμητική μέθοδος

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i+\ell f\,(t_i,y_i)+\frac{\ell^2}{2\,!}\,f'\,(t_i,y_i) \\ &\quad +\ldots+\frac{\ell^\nu}{\nu\,!}\,f^{(\nu-1)(t_i,y_i)} \end{aligned} \tag{8.2.2 - 6}$$

για κάθε $i=0,\,1,\,\ldots,\,N-1$ που είναι γνωστή σαν η **μέθοδος του Taylor τάξης** ν.[8]

[8]Βλέπε βιβλιογραφία και: *https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_methods_for_ordinary_differential_equations#Generalizations*

Αλγόριθμος 8.2.2 - 1 (μεθόδου του Taylor τάξης ν)

Δεδομένα a, b, N και η αρχική συνθήκη y_0
Έστω $\ell = (b-a)/N$, $t = t_0$, $y = y_0$
Υπολόγισε $T = T(\ell, t, y)$
Για $i = 0, 1, \ldots, N-1$
  $y := y + \ell T$
  $t := t + \ell$
  $y := y$
τέλος i

Η διαδικασία της μεθόδου περιγράφεται στον Αλγόριθμο 8.2.2 - 1, που για ευκολία έχει χρησιμοποιηθεί ο τελεστής T, με τιμή στην i - επανάληψη

$$\begin{aligned} T_i \quad &= f(t_i, y_i) + \frac{\ell}{2\,!} f'(t_i, y_i) \\ &+ \frac{\ell^2}{3\,!} f''(t_i, y_i) + \ldots + \frac{\ell^{n-1}}{n\,!} f^{(n-1)}(t_i, y_i), \qquad (8.2.2 - 7) \end{aligned}$$

όταν $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$.

Το βασικό μειονέκτημα της μεθόδου του Taylor τάξης ν είναι ότι για να είναι η μέθοδος ακριβής, απαιτείται η τάξη ν να είναι αρκετά μεγάλη, που απαιτεί σύμφωνα με την (8.2.2−6) τον υπολογισμό των παραγώγων της $f(t, y)$ μέχρι και τάξη $\nu - 1$, κάτι που όμως δεν είναι πάντοτε εύκολο, επειδή ο τύπος της f τις περισσότερες φορές στις διάφορες εφαρμογές είναι πολύπλοκος.

Παρατήρηση 8.2.2 - 1

Σύμφωνα με την (8.2.2 − 6) η τάξη ν της μεθόδου του Taylor ορίζει και τον βαθμό του αναπτύγματος σε δυνάμεις του ℓ στο 2ο μέλος. Επομένως η μέθοδος Taylor

- τάξης $\nu = 2$ θα δίνεται από τον τύπο

$$y_{i+1} = y_i + \ell f(t_i, y_i) + \frac{\ell^2}{2\,!} f'(t_i, y_i), \qquad (8.2.2 - 8)$$

- ενώ η μέθοδος Taylor τάξης $\nu = 3$ από τον τύπο

$$y_{i+1} = y_i + \ell f\left(t_i, y_i\right) + \frac{\ell^2}{2\,!}\, f'\left(t_i, y_i\right) + + \frac{\ell^2}{2\,!}\, f'\left(t_i, y_i\right). \qquad (8.2.2 - 9)$$

Παράδειγμα 8.2.2 - 1

Με τη μέθοδο του Taylor τάξης $\nu = 2$ να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y'(t) = -y(t) + t + 1, \quad \text{όταν} \quad t \in [0, 0.5] \quad \text{και} \quad \ell = 0.1. \qquad (8.2.2 - 10)$$

Στη συνέχεια να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική λύση

$$y(t) = t + e^{-t}.$$

και την αντίστοιχη λύση της μεθόδου του Euler (βλέπε Παράδειγμα 8.2.1 - 1).
Λύση. Επειδή η τάξη της μεθόδου είναι 2 ($\nu = 2$), σύμφωνα με την (8.2.2−8) η μέθοδος του Taylor στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$y_{i+1} = y_i + \ell\, f\left(t_i, y_i\right) + \frac{\ell^2}{2\,!}\, f'\left(t_i, y_i\right), \qquad (8.2.2 - 11)$$

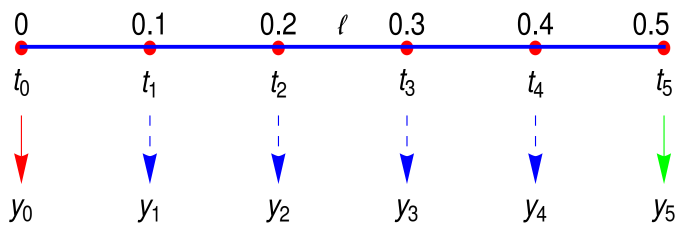
όπου η $f(t, y)$ προκύπτει από την $(8.2.2 - 10)$ και ισούται με

$$f(t, y) = -y + t + 1, \qquad (8.2.2 - 12)$$

ενώ η $f'(t, y)$ υπολογίζεται επίσης από την (8.2.2−10), δηλαδή την $f(t, y) = y'$, εφαρμόζοντας τη διαδικασία $(8.2.2 - 4)$ ως εξής:

$$\begin{aligned} f'(t, y) &= y'' = \left(y'\right)' \overbrace{=}^{(8.2.2-10)} (-y + t + 1)' \\ &= -y' + 1 \overbrace{=}^{(8.2.2-10)} -(-y + t + 1) + 1 \\ &= y - t. \qquad (8.2.2 - 13) \end{aligned}$$

Όμοια, όπως και στο Παράδειγμα 8.2.1 - 1, επειδή είναι $\ell = 0.1$, το διάστημα ολοκλήρωσης $[0, 0.5]$ υποδιαιρείται σε 5 ($N = 5$) υποδιαστήματα (Σχ. 8.2.2 - 2).



Σχήμα 8.2.2 - 2: Παράδειγμα 8.2.2 - 1: η διαμέριση του διαστήματος $[0, 0.5]$, όταν $\ell = 0.1$. Η εφαρμογή της μεθόδου του Taylor τάξης $\nu = 2$, που δίνεται από τον τύπο (8.2.2−14), διαδοχικά για $i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ θα δώσει σύμφωνα και με τη διαδικασία της Παραγράφου 8.1.4 - τύπος (8.1.4−1) - τις προσεγγιστικές τιμές $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_5$ με $y_5 \approx y(0.5)$. Το σχήμα είναι ίδιο με το Σχ. 8.2.1 - 2 του Παραδείγματος 8.2.1 - 1. Η αρχική τιμή y_0 υπολογίζεται επίσης από τη θεωρητική λύση ως εξής: $y_0 = y(0) = \left[t + e^{-t}\right]_{t=0} = 1$

Είναι $t \in [0, 0.5]$, οπότε $a = t_0 = 0$ και $b = 0.5$, ενώ η **αρχική τιμή** y_0 της λύσης θα προκύψει σύμφωνα και με την Παρατήρηση 8.1.4 - 1 από τη θεωρητική λύση ως εξής:

$$y_0 = y(0) = \left[t + e^{-t}\right]_{t=0} = 1.$$

Άρα αντικαθιστώντας τις $(8.2.2 - 12)$ και $(8.2.2 - 13)$ στην $(8.2.2 - 11)$ έχουμε

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \ell\, f\left(t_i, y_i\right) + \frac{\ell^2}{2\,!}\, f'\left(t_i, y_i\right) \\ &= y_i + 0.1\left(-y_i + t_i + 1\right) + \frac{0.1^2}{2}\left(y_i - t_i\right). \end{aligned} \tag{8.2.2 - 14}$$

Εφαρμόζοντας την $(8.2.2 - 14)$ διαδοχικά για $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, 4$ προκύπτει:

1ο βήμα $\quad (t_0 = 0, \quad y_0 = 1) \longrightarrow (t_1 = 0.1, \quad y_1)$

$$\begin{aligned} \text{για} \quad i = 0; \quad y_{0+1} = \quad y_1 \quad &= y_0 + 0.1\left(-y_0 + t_0 + 1\right) + \frac{0.1^2}{2}\left(y_0 - t_0\right) \\ &= 1 + 0.1\left(-1 + 0 + 1\right) + \frac{0.1^2}{2}\left(1 - 0\right) \\ &= 1.005, \quad \text{ενώ η θεωρητική λύση είναι} \\ y\left(t_1\right) = \quad y(0.1) \quad &= \left[t + e^{-t}\right]_{t=0.1} = 1.004\,837 \end{aligned}$$

2ο βήμα $\quad (t_0 = 0.1, \quad y_0 = 1.005) \longrightarrow (t_2 = 0.2, \quad y_2)$

$$\begin{aligned} i = 1; \quad y_{1+1} = \quad y_2 \quad &= y_1 + 0.1\left(-y_1 + t_1 + 1\right) + \frac{0.1^2}{2}\left(y_1 - t_1\right) \\ &= 1.005 + 0.1\left(-1.005 + 0.1 + 1\right) + \frac{0.1^2}{2}\left(1.005 - 0.1\right) \\ &= 1.019\,025, \quad \text{ενώ είναι} \\ y\left(t_2\right) = \quad y(0.2) \quad &= \left[t + e^{-t}\right]_{t=0.2} = 1.018\,731 \end{aligned}$$

$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

Πίνακας 8.2.2 - 1: Παράδειγμα 8.2.2 - 1: τα αποτελέσματα της μεθόδου του Taylor, όταν $\ell = 0.1$

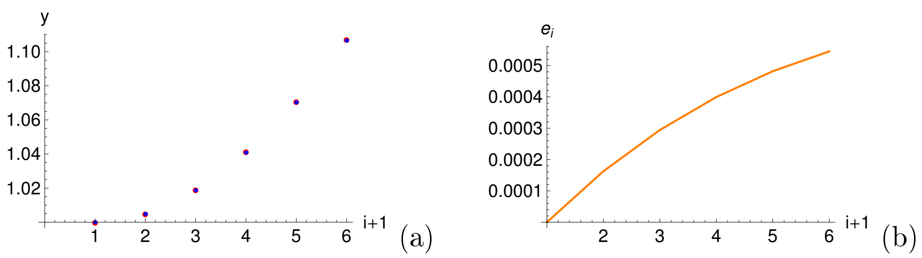
t_i	y_i	$y(t_i)$	$e_i = \lvert y_i - y(t_i) \rvert$
0.0	1.000 000	1.000 000	0.0
0.1	1.005 000	1.004 837	0.000 163
0.2	1.019 025	1.018 731	0.000 294
0.3	1.041 218	1.040 818	0.000 399
0.4	1.070 802	1.070 320	0.000 482
0.5	*1.107 076*	1.106 531	0.000 545

5ο βήμα $(t_4 = 0.4, \quad y_4 = 1.070\,802) \longrightarrow (t_5 = 0.5, \quad y_5)$

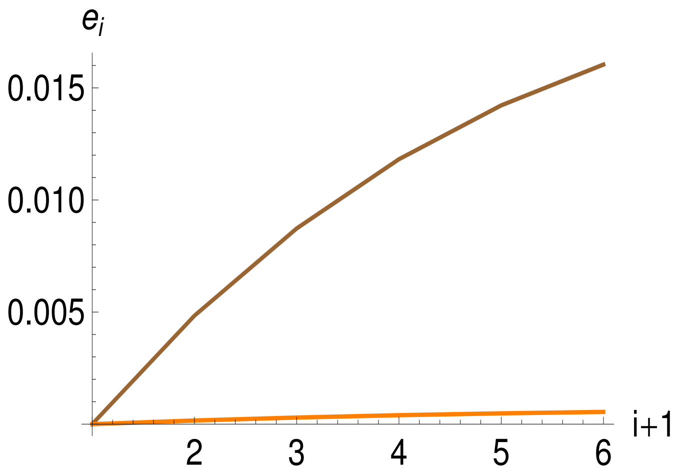
$$\begin{aligned} i = 4;\quad y_{4+1} = \quad & y_5 && = \ldots = \mathit{1.107\ 076}, \quad \text{ενώ είναι} \\ y(t_5) = \quad & y(0.5) && = \left[t + e^{-t}\right]_{t=0.5} = 1.106\,531. \end{aligned}$$

Τα αποτελέσματα της παραπάνω διαδικασίας δίνονται στον Πίνακα 8.2.2 - 1 και η γραφική των παράσταση στο Σχ. 8.2.2 - 3.

Όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα, υπάρχει μία μικρή αύξηση του σφάλματος e_i, καθώς ο χρόνος πλησιάζει προς τη χρονική στιγμή $t = 0.5$.



Σχήμα 8.2.2 - 3: Παράδειγμα 8.2.1 - 1, όταν $\ell = 0.1$. (a) Τα μπλε σημεία ορίζουν τις θεωρητικές τιμές $y(t_i)$; $i = 0, 1, \ldots, 4$ και τα κόκκινα τις αριθμητικές y_i. (b) Η γραφική παράσταση των αντίστοιχων σφαλμάτων e_i



Σχήμα 8.2.2 - 4: Παράδειγμα 8.2.1 - 1, όταν $\ell = 0.1$. Η καφέ καμπύλη δείχνει τα σφάλματα e_i με τη μέθοδο του Euler και η πορτοκαλί με του Taylor

Στο Σχ. 8.2.2 - 4 γίνεται η σύγκριση των παραπάνω αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα της μεθόδου του Euler. Άμεσα προκύπτει τότε ότι η μέθοδος του Taylor όπως έχει ήδη γραφεί παραπάνω, αν και έχει επίσης μια αύξηση του σφάλματος με την πάροδο του χρόνου, δίνει τελικά περισσότερο ακριβή αποτελέσματα σε σύγκριση με αυτά της μεθόδου του Euler.

Άσκηση

Αν $y = y(t)$, να υπολογιστεί με τη μέθοδο του Taylor τάξης $\nu = 2$, αντίστοιχα $\nu = 3$ η λύση των παρακάτω προβλημάτων αρχικής τιμής

i) $y' = \sin t + e^{-t}; \quad 0 \leq t \leq 0.5, \quad$ όταν $\ell = 0.1$,

$y(t) = 2 - e^{-t} - \cos t \quad$ και $\quad y_0 = y(0)$.

ii) $y' = 1 + \dfrac{y}{t}; \quad 1 \leq t \leq 1.2, \quad$ όταν $\ell = 0.1,\ 0.05$,

$y(t) = 2t + t \ln t \quad$ και $\quad y_0 = y(1)$.

Να γίνει σύγκριση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της μεθόδου του Euler στην Άσκηση της Παραγράφου 8.2.1.

Απαντήσεις

(i) **Μέθοδος του Taylor τάξης** $\nu = 2$: Είναι

$$f(t,y) = \sin t + e^{-t} \quad \text{και} \quad f'(t,y) = \cos t - e^{-t},$$

οπότε σύμφωνα με τον τύπο $(8.2.2-8)$ η μέθοδος γράφεται

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \ell\, f(t_i, y_i) + \frac{\ell^2}{2} f'(t_i, y_i) \\ &= y_i + \ell\left(\sin t_i + e^{-t_i}\right) + \frac{\ell^2}{2}\left(\cos t_i - e^{-t_i}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Επειδή $t \in [0, 0.5]$, πρέπει $t_0 = a = 0$ και $b = 0.5$. Η αρχική τιμή y_0 προκύπτει από τη θεωρητική λύση ως εξής:

$$y_0 = y(0) = \left[2 - e^{-t} - \cos t\right]_{t=0} = 0.$$

Εφαρμόζοντας την (1) διαδοχικά για $i = 0, 1, \ldots, 4$ με $\ell = 0.1$ έχουμε:

$$\begin{array}{llll} \text{για} \quad i=0; & y_{0+1} = & y_1 & = y_0 + 0.1\left(\sin t_i + e^{-t_i}\right) + \dfrac{0.1^2}{2}\left(\cos t_i - e^{-t_i}\right) \\ & & & = 0 + 0.1(0+1) + \dfrac{0.1^2}{2}(1-1) = 0.1, \quad \text{ενώ} \\ & y(t_1) = & y(0.1) & = \left[2 - e^{-t} - \cos t\right]_{t=0.1} = 0.100\,158 \\ \hline i=1; & y_2 = & \ldots & = 0.200\,918, \quad \text{ενώ} \\ & y(t_2) = & y(0.2) & = \left[2 - e^{-t} - \cos t\right]_{t=0.2} = 0.201\,203 \\ \hline & \vdots & & \vdots \\ & y_5 = & \ldots & = 0.515\,399, \quad \text{ενώ} \\ & y(t_5) = & y(0.5) & = \left[2 - e^{-t} - \cos t\right]_{t=0.5} = 0.515\,887 \\ \hline \end{array}$$

Μέθοδος του Taylor τάξης $\nu = 3$: Είναι

$$f(t,y) = \sin t + e^{-t}, \quad f'(t,y) = \cos t - e^{-t} \quad \text{και} \quad f''(t,y) = -\sin t + e^{-t},$$

οπότε σύμφωνα με τον τύπο $(8.2.2-9)$ η μέθοδος γράφεται

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \ell\, f(t_i, y_i) + \frac{\ell^2}{2} f'(t_i, y_i) + \frac{\ell^3}{6} f''(t_i, y_i) \\ &= y_i + \ell\left(\sin t_i + e^{-t_i}\right) + \frac{\ell^2}{2}\left(\cos t_i - e^{-t_i}\right) \\ &\quad + \frac{\ell^3}{6}\left(-\sin t_i + e^{-t_i}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

όπου επίσης είναι $t_0 = a = 0$ και $y_0 = y(0) = 0$.

Εφαρμόζοντας την (2) διαδοχικά για $i = 0, 1, \ldots, 4$ με $\ell = 0.1$ έχουμε:

$$
\begin{array}{llll}
\text{για} \quad i=0; & y_{0+1} = y_1 & = & y_0 + 0.1\left(\sin t_i + e^{-t_i}\right) + \dfrac{0.1^2}{2}\left(\cos t_i - e^{-t_i}\right) \\
& & & + \dfrac{0.1^3}{6}\left(-\sin t_i + e^{-t_i}\right) \\
& & = & 0 + 0.1(0+1) + \dfrac{0.1^2}{2}(1-1) \\
& & & + \dfrac{0.1^3}{6}(0+1) = 0.100\,167, \quad \text{ενώ} \\
& y(t_1) = y(0.1) & = & \left[2 - e^{-t} - \cos t\right]_{t=0.1} = 0.100\,158 \\
\hline
i=1; & y_2 = \ldots & = & 0.201\,219, \quad \text{ενώ} \\
& y(t_2) = y(0.2) & = & \left[2 - e^{-t} - \cos t\right]_{t=0.2} = 0.201\,203 \\
\hline
& \vdots & & \vdots \\
& y_5 = \ldots & = & \mathit{0.515\,924}, \quad \text{ενώ} \\
& y(t_5) = y(0.5) & = & \left[2 - e^{-t} - \cos t\right]_{t=0.5} = 0.515\,887 \\
\hline
\end{array}
$$

(ii) Είναι

$$
f(t, y) = 1 + \frac{y}{t}, \tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(t, y) &= \left(1 + \frac{y}{t}\right)' = \left(\frac{y}{t}\right)' = \frac{y't - y \cdot 1}{t^2} \quad \text{σύμφωνα με την}(3) \\
&= \frac{\left(1 + \frac{y}{t}\right) t - y}{t^2} = \frac{1}{t}\,,
\end{aligned} \tag{4}
$$

οπότε από τον τύπο $(8.2.2-8)$ προκύπτει ότι η μέθοδος γράφεται

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \ell\, f\left(t_i, y_i\right) + \frac{\ell^2}{2}\, f'\left(t_i, y_i\right) \\
&= y_i + \ell\left(1 + \frac{y_i}{t_i}\right) + \frac{\ell^2}{2}\,\frac{1}{t_i}\,.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Επειδή $t \in [1, 1.2]$, πρέπει $t_0 = a = 1$ και $b = 1.2$. Η αρχική τιμή y_0 προκύπτει από τη θεωρητική λύση ως εξής:

$$
y_0 = y(1) = \left[2t + t \ln t\right]_{t=1} = 2.
$$

Βήμα διαμέρισης $\ell = 0.1$

Εφαρμόζοντας την (5) διαδοχικά για $i = 0,\ 1$ με $\ell = 0.1$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\text{για}\quad i=0;\quad y_{0+1} = \quad y_1 \quad &= y_0 + 0.1\left(1+\frac{y_0}{t_0}\right) + \frac{0.1^2}{2}\frac{1}{t_0} \\
&= 2 + 0.1\left(1+\frac{2}{1}\right) + \frac{0.1^2}{2}\frac{1}{1} = 2.305, \quad \text{ενώ} \\
y(t_1) = \quad y(1.1) \quad &= [2t + t\ln t]_{t=1.1} = 2.304\,841
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i=1;\quad y_{1+1} = \quad y_2 \quad &= y_1 + 0.1\left(1+\frac{y_1}{t_1}\right) + \frac{0.1^2}{2}\frac{1}{t_1} \\
&= 2.305 + 0.1\left(1+\frac{2.305}{1.1}\right) + \frac{0.1^2}{2}\frac{1}{1.1} = \mathit{2.619\,091}, \quad \text{ενώ} \\
y(t_2) = \quad y(1.2) \quad &= [2t + t\ln t]_{t=1.2} = 2.618\,786
\end{aligned}
$$

Βήμα διαμέρισης $\ell = 0.05$

Όμοια εφαρμόζοντας την (5) διαδοχικά για $i = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\text{για}\quad i=0;\quad y_{0+1} = \quad y_1 \quad &= y_0 + 0.05\left(1+\frac{y_0}{t_0}\right) + \frac{0.05^2}{2}\frac{1}{t_0} \\
&= 2 + 0.05\left(1+\frac{2}{1}\right) + \frac{0.05^2}{2}\frac{1}{1} = 2.152\,250, \quad \text{ενώ} \\
y(t_1) = \quad y(1.05) \quad &= [2t + t\ln t]_{t=1.05} = 2.151\,230
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
i=3;\quad y_{3+1} = \quad y_4 \quad &= \ldots = \mathit{2.618\,862}, \quad \text{ενώ} \\
y(t_4) = \quad y(1.2) \quad &= [2t + t\ln t]_{t=1.2} = 2.618\,786
\end{aligned}
$$

Μέθοδος του Taylor τάξης $\nu = 3$: Από τις (3) και (6) προκύπτει ότι είναι

$$
\begin{aligned}
f(t,y) \quad &= \quad 1 + \frac{y}{t}, \quad f'(t,y) = \ldots = \frac{1}{t}, \quad \text{και} \\
f''(t,y) \quad &= \quad -\frac{1}{t^2}, \qquad (6)
\end{aligned}
$$

οπότε σύμφωνα με τον τύπο $(8.2.2-9)$ η μέθοδος γράφεται

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} \quad &= \quad y_i + \ell\, f(t_i, y_i) + \frac{\ell^2}{2} f'(t_i, y_i) + \frac{\ell^3}{6} f''(t_i, y_i) \\
&= \quad y_i + \ell\left(1+\frac{y_i}{t_i}\right) + \frac{\ell^2}{2}\frac{1}{t_i} - \frac{\ell^3}{6}\frac{1}{t_i^3}. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Βήμα διαμέρισης $\ell = 0.1$

Εφαρμόζοντας την (7) διαδοχικά για $i = 0,\, 1$ με $\ell = 0.1$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\text{για} \quad i = 0; \quad y_{0+1} = \quad y_1 &= y_0 + 0.1\left(1 + \frac{y_0}{t_0}\right) + \frac{0.1^2}{2}\frac{1}{t_0} - \frac{0.1^3}{6}\frac{1}{t_0^2} \\
&= 2 + 0.1\left(1 + \frac{2}{1}\right) + \frac{0.1^2}{2}\frac{1}{1} - \frac{0.1^3}{6}\frac{1}{1^2} = 2.304\,921, \quad \text{ενώ} \\
y\left(t_1\right) = \quad y(1.1) &= \left[2t + t\ln t\right]_{t=1.1} = 2.304\,841
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i = 1; \quad y_{1+1} = \quad y_2 &= y_1 + 0.1\left(1 + \frac{y_1}{t_1}\right) + \frac{0.1^2}{2}\frac{1}{t_1} - \frac{0.1^3}{6}\frac{1}{t_1^2} \\
&= 2.305 + 0.1\left(1 + \frac{2.305}{1.1}\right) + \frac{0.1^2}{2}\frac{1}{1.1} - \frac{0.1^3}{6}\frac{1}{1.1^2} = \mathit{2.618\,912}, \quad \text{ενώ} \\
y\left(t_2\right) = \quad y(1.2) &= \left[2t + t\ln t\right]_{t=1.2} = 2.618\,786
\end{aligned}
$$

Βήμα διαμέρισης $\ell = 0.05$

Όμοια εφαρμόζοντας την (5) διαδοχικά για $i = 0,\, 1,\, 2,\, 3$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\text{για} \quad i = 0; \quad y_{0+1} = \quad y_1 &= y_0 + 0.05\left(1 + \frac{y_0}{t_0}\right) + \frac{0.05^2}{2}\frac{1}{t_0} - \frac{0.05^3}{6}\frac{1}{t_0^2} \\
&= 2 + 0.05\left(1 + \frac{2}{1}\right) + \frac{0.05^2}{2}\frac{1}{1} - \frac{0.05^3}{6}\frac{1}{1^2} = 2.151\,240, \quad \text{ενώ} \\
y\left(t_1\right) = \quad y(1.05) &= \left[2t + t\ln t\right]_{t=1.05} = 2.151\,230
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\vdots && \vdots \\
i = 3; \quad y_{3+1} = \quad y_4 &= \ldots = \mathit{2.618\,815}, \quad \text{ενώ} \\
y\left(t_4\right) = \quad y(1.2) &= \left[2t + t\ln t\right]_{t=1.2} = 2.618\,786
\end{aligned}
$$

8.3 Μέθοδοι των Runge-Kutta

8.3.1 Εισαγωγή

Στην παράγραφο αυτή γίνεται μια προσέγγιση της λύσης του προβλήματος αρχικής τιμής 1ης τάξης

$$y' = f(t, y)\,; \quad t \in [a, b] \quad \text{με} \quad y_0 = y\,(a)$$

διαφορετικής εκείνης που δόθηκε στην Παράγραφο 8.2.

Ειδικότερα σύμφωνα με την Παράγραφο 8.2, αν υποτεθεί ότι το διάστημα $[a, b]$ έχει υποδιαιρεθεί σε N το πλήθος ίσα υποδιαστήματα πλάτους ℓ, τότε η μέθοδος:

i) του **Euler**, που δίνεται από τη σχέση

$$y_{i+1} = y_i + \ell f\left(t_i, y_i\right), \quad \text{και}$$

ii) του **Taylor** τάξης ν από τη σχέση

$$y_{i+1} = y_i + \ell f_i + \frac{\ell^2}{2\,!}\, f_i' + \ldots + \frac{\ell^{\,\nu}}{\nu\,!}\, f_i^{(\nu-1)},$$

όταν $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, N-1$, υπολογίζει την προσεγγιστική λύση y_{i+1} από την y_i προσθέτοντας τον όρο

- $$\ell\, f\left(t_i, y_i\right) \quad \text{για την} \quad (i) \quad \text{μέθοδο,}$$

  αντίστοιχα τον

- $$\ell \left(f_i + \frac{\ell}{2\,!}\, f_i' + \ldots + \frac{\ell^{\,\nu-1}}{\nu\,!}\, f_i^{(\nu-1)} \right) \quad \text{για τη} \quad (ii).$$

Και οι δύο μέθοδοι ανήκουν στην κατηγορία των **μονοβηματικών** μεθόδων ή των μεθόδων του **απλού βήματος**, δηλαδή των μεθόδων οι οποίες για τον υπολογισμό της προσέγγισης y_{i+1} χρησιμοποιούν μόνο την αμέσως προηγούμενη τιμή y_i. Κύρια χαρακτηριστικά των μεθόδων αυτών είναι:

- η δυσκολία του υπολογισμού των παραγώγων στη (ii), και
- η μικρή ακρίβεια των αποτελεσμάτων.[9]

[9] Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 10.

8.3.2 Ορισμοί

Έστω το πρόβλημα αρχικής τιμής 1ης τάξης[10]

$$y' = f(t, y)\,; \quad t \in [a, b] \quad \text{με} \quad y_0 = y\,(a)\,. \tag{8.3.2 - 1}$$

Σύμφωνα με την Παράγραφο 8.2 και την παραπάνω εισαγωγή όλες οι μέθοδοι που εξετάστηκαν τελικά γράφονται στη μορφή

$$y_{i+1} = y_i + \ell F\left(t_i, f_i^{(\nu-1)}, \ell\right), \tag{8.3.2 - 2}$$

όταν $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, N-1$, όπου F είναι μία γνωστή συνάρτηση, που εξαρτάται από

- τη διαμέριση δ του διαστήματος $[a, b]$ (Σχ. 8.3.2 - 1),
- τη μέθοδο του Euler, αντίστοιχα του Taylor και την τάξη της ν.

Ο Runge[11] και αργότερα ο Kutta[12] απέδειξαν ότι είναι δυνατή η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής $(8.3.2-1)$ με αριθμητικές μεθόδους της μορφής $(8.3.2{-}2)$, χωρίς να απαιτείται ο υπολογισμός των παραγώγων της συνάρτησης αλλά με την ίδια ακρίβεια της λύσης. Οι μέθοδοι αυτές, που είναι γνωστές σαν **μέθοδοι των Runge-Kutta** (RK), [13] γράφονται στη γενική τους μορφή ως εξής:

$$y_{i+1} = y_i + \ell\varphi\,(t_i, y_i, \ell) \quad \text{για κάθε} \quad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, N-1, \tag{8.3.2 - 3}$$

[10] Υπενθυμίζεται από την Παράγραφο 8.2 ο παρακάτω ορισμός:

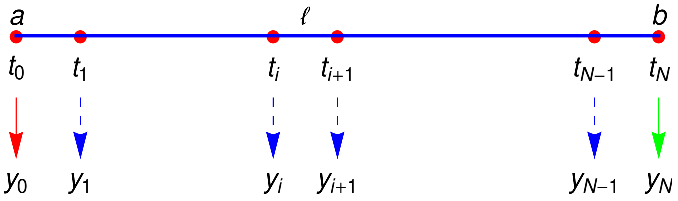
Ορισμός 8.3.2 - 1. *Μια λυμένη διαφορική εξίσωση 1ης τάξης θα λέγεται ότι ορίζει ένα* **πρόβλημα αρχικής τιμής** *(initial value problem ή IVP), όταν η λύση της επαληθεύει μια αρχική τιμή, δηλαδή*

$$y'(t) \quad = \quad f(t, y(t)), \quad \text{όταν} \quad t \in [a, b] \subset \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \textbf{αρχική τιμή} \quad y_0 = y\,(a)\,.$$

[11] Βλέπε Runge, C. (1895). *Math. Ann.* 46, 167. και

[12] Kutta, M. W. Z. (1901). *Für Math.u.Phys.* 46, 435.

[13] Βλέπε βιβλιογραφία και: *https://en.wikipedia.org/wiki/Runge–Kutta_methods*



Σχήμα 8.3.2 - 1: η διαμέριση δ του διαστήματος $[a, b]$ από τα σημεία $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = b$, όταν ℓ το βήμα της διαμέρισης, y_0 η αρχική τιμή και οι προσεγγιστικές τιμές y_1, y_2, $\ldots$, y_N με $y_N \approx y(b)$ που προκύπτουν από την $(8.3.2 - 2)$

όταν για την ν-τάξη της μεθόδου, η συνάρτηση φ δίνεται από τη σχέση

$$\varphi(t, y, \ell) = c_1\, k_1 + c_2\, k_2 + \ldots + c_\nu\, k_\nu, \qquad (8.3.2 - 4)$$

όπου

$$\begin{array}{lcl} k_1 & = & f(t, y), \\ k_2 & = & f\left(t + \ell a_2,\ y + \ell\, b_{21}\, k_1\right) \\ a_2 & = & b_{21}, \\ \hline k_3 & = & f\left(t + \ell a_3,\ y + \ell\, \left(b_{31}\, k_1 + b_{32}\, k_2\right)\right), \\ a_3 & = & b_{31} + b_{32}, \\ \vdots & & \vdots \\ k_\nu & = & f\left(t + \ell a_\nu,\ y + \ell \displaystyle\sum_{m=1}^{\nu-1} b_{\nu m}\, k_m\right), \\ a_\nu & = & \displaystyle\sum_{m=1}^{\nu-1} b_{\nu m}. \end{array}$$

Παρατήρηση 8.3.2 - 1

Είναι προφανές ότι όλες οι μέθοδοι $(8.3.2-3)$:

- εκφράζονται με την **αναλυτική** (explicit) μορφή $(8.3.2-4)$.
- Σύμφωνα με τους τύπους $(8.3.2-5)$ για να υπολογιστεί η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής $(8.3.2-1)$ με εφαρμογή μιας μεθόδου ν-τάξης, απαιτείται ο υπολογισμός ν το πλήθος συναρτήσεων.

Δίνονται στη συνέχεια οι παρακάτω δύο χρήσιμοι για τα επόμενα ορισμοί:

Ορισμός 8.3.2 - 2. *Έστω $y(t)$ η θεωρητική λύση του προβλήματος αρχικής τιμής $(8.3.2-1)$. Τότε η μέθοδος των Runge-Kutta, που ορίζεται από τη σχέση $(8.3.2-3)$, λέγεται ότι είναι* **ν-τάξης**, *όταν ν είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει*

$$y(t+\ell)-y(t)-\ell\varphi(t,y(t),\ell)=\mathcal{O}\left(\ell^{\nu+1}\right). \qquad (8.3.2 - 5)$$

Υπενθυμίζεται ότι με το $\mathcal{O}\left(\ell^{\nu+1}\right)$ συμβολίζεται το άθροισμα από του όρου $\ell^{\nu+1}$ και μετά, δηλαδή του $a_1\ell^{\nu+1}+a_2\ell^{\nu+2}+\dots$.

Ορισμός 8.3.2 - 3. *Η μέθοδος Runge-Kutta $(8.3.2-3)$ λέγεται ότι είναι* **συμβατή** *(consistent) με το πρόβλημα αρχικής τιμής $(8.3.2-1)$, όταν*

$$\varphi(t,y,0)=f(t,y). \qquad (8.3.2 - 6)$$

Παρατήρηση 8.3.2 - 2

Οι συντελεστές c_i και $k_i;\ i=1,\dots,\nu$ στην $(8.3.2-4)$ υπολογίζονται αναπτύσσοντας όλους τους όρους κατά Taylor ως προς t και στη συνέχεια εφαρμόζοντας τις συνθήκες των Ορισμών 8.3.2 - 2 και 8.3.2 - 3. Τότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 8.3.2 - 2, όλοι οι συντελεστές των δυνάμεων $\ell^i;\ i=1,\dots,\nu$ πρέπει στην περίπτωση αυτή να είναι 0.

Δίνονται στη συνέχεια οι παρακάτω δύο περισσότερο χρησιμοποιούμενες στις εφαρμογές μέθοδοι των Runge-Kutta:

8.3.3 Μέθοδος 3ης τάξης

Έστω ότι η τάξη της μεθόδου RK είναι $\nu = \mathbf{3}$. Τότε σύμφωνα με τη σχέση $(8.3.2-4)$ είναι

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \ell\left(c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3\right) \\ &= y_i + \ell\varphi\left(t_i, y_i, \ell\right), \end{aligned} \qquad (8.3.3 - 1)$$

όπου τα k_1, k_2 και k_3 υπολογίζονται από την $(8.3.2-5)$ ως εξής:

$$k_1 = f\left(t, y\right),$$

$$k_2 = f\left(t + \ell a_2, y + \ell b_{21} k_1\right) \quad \text{με} \quad a_2 = b_{21}, \quad \text{οπότε}$$

$$k_2 = f\left(t + \ell a_2,\, y + \ell\, a_2\, k_1\right).$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(t + \ell a_3, y + \ell\left(b_{31} k_1 + b_{32} k_2\right)\right) \quad \text{με} \\ a_3 &= b_{31} + b_{32}, \quad \text{οπότε} \quad b_{31} = a_3 - b_{32}. \end{aligned}$$

Άρα

$$k_3 = f\left(t + \ell a_3,\, y + \ell\left(a_3 - b_{32}\right) k_1 + \ell\, b_{32} k_2\right).$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές των k_1, k_2 και k_3 στην $(8.3.3-1)$ προκύπτει τελικά ότι το y_{i+1} εξαρτάται από τις παραμέτρους

$$c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad a_2, \quad a_3 \quad \text{και} \quad b_{32}. \qquad (8.3.3 - 2)$$

Επειδή σύμφωνα με τον Ορισμό 8.3.2 - 2 και την Παρατήρηση 8.3.2 - 2 η μέθοδος RK είναι τάξης $\nu = 3$, οι παράμετροι της σχέσης $(8.3.3-2)$ πρέπει στην $(8.3.3-1)$ να εκλεγούν, έτσι ώστε να ισχύει

$$y(t+\ell) - y(t) - \ell\varphi(t, y(t), \ell) = \mathcal{O}\left(\ell^4\right). \qquad (8.3.3 - 3)$$

Παραλείποντας στο σημείο αυτό τους ενδιάμεσους υπολογισμούς, παραπέμποντας τον αναγνώστη προς τούτο στη βιβλιογραφία, τελικά από την $(8.3.3-3)$

προκύπτει ένα σύστημα 4 εξισώσεων με 6 αγνώστους τις παραμέτρους στην $(8.3.3-2)$, που αναλυτικά γράφεται ως εξής:

$$\begin{array}{ll} c_1+c_2+c_3=1 & c_2a_2+c_3a_3=\dfrac{1}{2} \\ c_2a_2^2+c_3a_3^2=\dfrac{1}{3} & c_3a_2b_{32}=\dfrac{1}{6}\,. \end{array} \qquad (8.3.3 - 4)$$

Επειδή στο σύστημα αυτό ο αριθμός των αγνώστων είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των εξισώσεων, θα υπάρχουν άπειρες λύσεις.[14] Επομένως υπάρχει ένα **άπειρο** πλήθος μεθόδων Runge-Kutta 3ης τάξης των οποίων ο τύπος σύμφωνα με την $(8.3.3-1)$ θα εκφράζεται με αναλυτική μορφή.

Από το σύνολο των μεθόδων αυτών εξετάζεται μόνον η παρακάτω περισσότερο χρησιμοποιούμενη στις εφαρμογές μέθοδος:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i+\frac{\ell}{6}\left(k_1+4k_2+k_3\right) \qquad (8.3.3 - 5)\\ k_1 &= f\left(t_i,y_i\right)\\ k_2 &= f\left(t_i+\frac{\ell}{2},\,y_i+\frac{\ell}{2}\,k_1\right)\\ k_3 &= f\left(t_i+\ell,\,y_i-\ell k_1+2\ell k_2\right). \end{aligned}$$

Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως ο **κανόνας 3ης τάξης του Kutta** (RK3).

Παράδειγμα 8.3.3 - 1

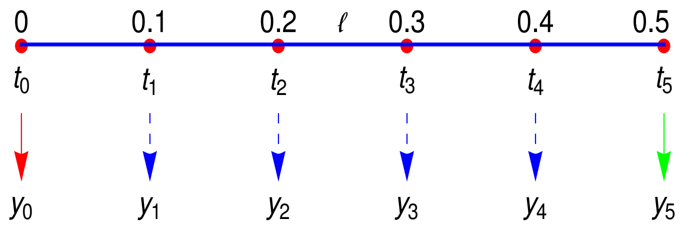
Αν $y=y(t)$, να λυθεί με τη μέθοδο RK3 το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y'=-y+t^2+1, \quad \text{όταν} \quad t\in[0,\,0.5] \quad \text{και} \quad \ell=0.1. \qquad (8.3.3 - 6)$$

Στη συνέχεια να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική λύση

$$y(t)=2e^{-t}+t^2-2t+3.$$

[14]Βλέπε Μαθήματα *Ανώτερων Μαθηματικών* και Μάθημα *Γραμμική Άλγεβρα - Γραμμικά συστήματα.*



Σχήμα 8.3.3 - 1: η διαμέριση του διαστήματος $[0, 0.5]$, όταν $\ell = 0.1$. Η εφαρμογή της μεθόδου RK3, που δίνεται από τις σχέσεις (8.3.3−7), διαδοχικά για $i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ θα δώσει τις προσεγγιστικές τιμές $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_5$ με $y_5 \approx y(0.5)$. Η αρχική τιμή y_0 υπολογίζεται από τη θεωρητική λύση ως εξής: $y_0 = y\left(t_0\right) = y(0) = \left[2e^{-t} + t^2 - 2t + 3\right]_{t=0} = 5$

Λύση. Συγκρίνοντας το 2ο μέλος της (8.3.3−6) με το αντίστοιχο της (8.3.2−1) προκύπτει ότι

$$f(t, y) = -y + t^2 + 1.$$

Επειδή είναι γνωστή η θεωρητική λύση $y(t)$, η αρχική τιμή y_0, που αντιστοιχεί στην τιμή $t = 0$, υπολογίζεται από την $y(t)$ ως εξής:

$$y_0 = y(0) = \left[2e^{-t} + t^2 - 2t + 3\right]_{t=0} = 2 + 3 = 5.$$

Επομένως η μέθοδος RK3, που δίνεται από τους τύπους (8.3.3−5), γράφεται στην περίπτωση αυτή ως εξής:

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_i, y_i\right) = -y_i + t_i^2 + 1, \\ k_2 &= f\left(t_i + \frac{\ell}{2},\, y_i + \frac{\ell}{2}\, k_1\right) \\ &= -\left(y_i + \frac{\ell}{2}\, k_1\right) + \left(t_i + \frac{\ell}{2}\right)^2 + 1, \\ k_3 &= f\left(t_i + \ell,\, y_i - \ell k_1 + 2\ell k_2\right) \\ &= -\left(y_i - \ell\, k_1 + 2\,\ell\, k_2\right) + \left(t_i + \ell\right)^2 + 1, \end{aligned}$$

οπότε

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\ell}{6}\left(k_1 + 4k_2 + k_3\right). \qquad (8.3.3 - 7)$$

Τότε για $i = 0, 1, 2, 3,\ 4$ (Σχ. 8.3.3 - 1) σύμφωνα με τις σχέσεις $(8.3.3-7)$ έχουμε:

1ο βήμα $\left(t_0 = 0, \quad y_0 = 5\right) \longrightarrow \left(t_1 = 0.1, \quad y_1\right)$

για $i = 0$

$$k_1 = f\left(t_0, y_0\right) = -y_0 + t_0^2 + 1 = -5 + 0 + 1 = -4,$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(t_0 + \frac{\ell}{2},\, y_0 + \frac{\ell}{2}\, k_1\right) \\ &= -\left(y_0 + \frac{\ell}{2}\, k_1\right) + \left(t_0 + \frac{\ell}{2}\right)^2 + 1 \\ &= -\left[5 + \frac{0.1}{2}\,(-4)\right] + \left(0 + \frac{0.1}{2}\right)^2 + 1 \\ &= -3.7975, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= f\left(t_0+\ell,\, y_0-\ell k_1+2\ell k_2\right) \\
&= -\left(y_0-\ell\, k_1+2\,\ell\, k_2\right)+\left(t_0+\ell\right)^2+1 \\
&= -\left[5-0.1\,(-4)-2\,\cdot\,0.1\,\cdot\,3.7975\right]+(0+0.1)^2+1 \\
&= -3.6305,
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0+\frac{\ell}{6}\left(k_1+4k_2+k_3\right) \\
&= 5+\frac{0.1}{6}\left[-4+4\,(-3.7975)-3.6305\,\right]=4.619\,658,
\end{aligned}$$

όταν η αντίστοιχη θεωρητική τιμή είναι

$$y\left(t_1\right) = y(0.1)=\left[2e^{-t}+t^2-2t+3\right]_{t=0.1}=4.619\,675.$$

2ο βήμα $\left(t_1=0.1, \quad y_1=4.619\,658\right) \longrightarrow \left(t_2=0.2, \quad y_2\right)$

για $i=1$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f\left(t_1,y_1\right)=-y_1+t_1^2+1 \\
&= -4.619\,658+0.1^2+1=-3.609\,658,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= f\left(t_1+\frac{\ell}{2},\, y_1+\frac{\ell}{2}\,k_1\right) \\
&= -\left(y_1+\frac{\ell}{2}\,k_1\right)+\left(t_1+\frac{\ell}{2}\right)^2+1 \\
&= -\left[4.619\,658+\frac{0.1}{2}\,\cdot\,(-3.609\,658)\right]+\left(0.1+\frac{0.1}{2}\right)^2+1 \\
&= -3.416\,675,
\end{aligned}$$

Πίνακας 8.3.3 - 1: Παράδειγμα 8.3.3 - 1: αποτελέσματα μεθόδου RK3

t_i	y_i	$y(t_i)$	$e_i = \lvert y_i - y(t_i)\rvert$
0.0	5.000000	5.000000	0.0
0.1	4.619658	4.619675	0.165E-04
0.2	4.277431	4.277462	0.307E-04
0.3	3.971594	3.971636	0.428E-04
0.4	3.700587	3.700640	0.531E-04
0.5	*3.462 999*	3.463061	0.618E-04

$$\begin{aligned}
k_3 &= f\left(t_1+\ell,\, y_1-\ell k_1+2\ell k_2\right)\\
&= -\left(y_1-\ell\, k_1+2\,\ell\, k_2\right)+\left(t_1+\ell\right)^2+1\\
&= -\left[4.619\,658-0.1\cdot(-3.609\,658)+2\cdot 0.1\cdot(-3.416\,675)\right]\\
&\quad +(0.1+0.1)^2+1=-3.257\,289,
\end{aligned}$$

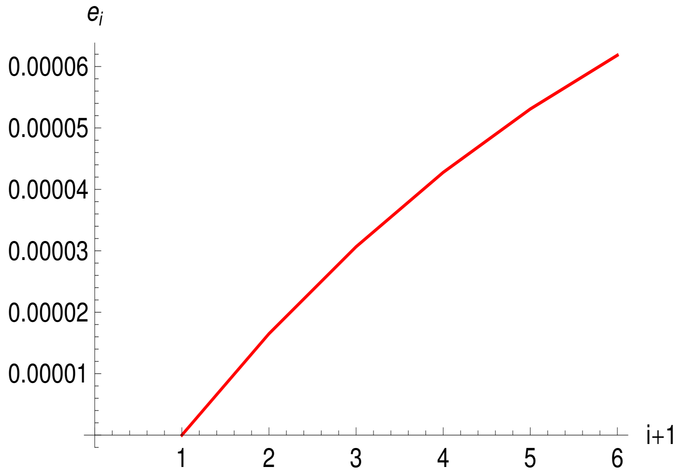
οπότε

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1+\frac{\ell}{6}\left(k_1+4k_2+k_3\right)\\
&= 4.619\,658+\frac{0.1}{6}\left[-3.609\,658+4\cdot(-3.416\,675)-3.257\,289\right]\\
&= 4.277\,431,
\end{aligned}$$

όταν η αντίστοιχη θεωρητική τιμή είναι

$$y\left(t_2\right) = y(0.2)=\left[2e^{-t}+t^2-2t+3\right]_{t=0.2}=4.277\,462.$$

Συνεχίζοντας με όμοιο τρόπο έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 8.3.3 - 1, ενώ στο Σχ. 8.3.3 - 2 το διάγραμμα των αντίστοιχων σφαλμάτων e_i.



Σχήμα 8.3.3 - 2: Παράδειγμα 8.3.3 - 1. Η καμπύλη δείχνει τα σφάλματα e_i

Άσκηση

Αν $y = y(t)$, να υπολογιστεί με τη μέθοδο RK3 η λύση των παρακάτω προβλημάτων αρχικής τιμής:

i) $y' = \sin t + e^{-t}; \quad 0 \leq t \leq 0.5, \quad$ όταν $\ell = 0.1$,

$y(t) = 2 - e^{-t} - \cos t \quad$ και $\quad y_0 = y(0)$.

ii) $y' = 1 + \dfrac{y}{t}; \quad 1 \leq t \leq 1.2, \quad$ όταν $\quad \ell = 0.1,\ 0.05$,

$y(t) = 2t + t \ln t \quad$ και $\quad y_0 = y(1)$.

Στη συνέχεια να γίνει η γραφική παράσταση της λύσης και των αντίστοιχων σφαλμάτων.

Απαντήσεις

(i) Είναι

$$f(t, y) = \sin t + e^{-t}.$$

Επειδή είναι γνωστή η θεωρητική λύση $y(t)$, η αρχική τιμή y_0, που αντιστοιχεί στην τιμή $t = 0$, υπολογίζεται από την $y(t)$ ως εξής:

$$y_0 = y(0) = \left[2 - e^{-t} - \cos t\right]_{t=0} = 0.$$

Επομένως η μέθοδος RK3, που δίνεται από τους τύπους $(8.3.3-5)$, χρησιμοποιώντας για ευκολία τον συμβολισμό $e^t = \exp(t)$ γράφεται στην περίπτωση αυτή ως εξής:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_i, y_i) = \sin t_i + \exp(-t_i), \\
k_2 &= f\left(t_i + \frac{\ell}{2},\, y_i + \frac{\ell}{2} k_1\right) \\
&= \sin\left(t_i + \frac{\ell}{2}\right) + \exp\left[-\left(t_i + \frac{\ell}{2}\right)\right], \\
k_3 &= f(t_i + \ell,\, y_i - \ell k_1 + 2\ell k_2) \\
&= \sin(t_i + \ell) + \exp\left[-(t_i + \ell)\right],
\end{aligned}$$

οπότε

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\ell}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3). \tag{1}$$

Τότε για $i = 0, 1, 2, 3, 4$ σύμφωνα με τις σχέσεις (1) έχουμε:

1ο βήμα $(t_0 = 0, \quad y_0 = 0) \longrightarrow (t_1 = 0.1, \quad y_1)$

για $i = 0$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_0, y_0) = \sin t_0 + \exp(-t_0) \\
&= \sin 0 + \exp(-0) = 0 + 1 = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= f\left(t_0 + \frac{\ell}{2},\, y_0 + \frac{\ell}{2} k_1\right) \\
&= \sin\left(t_0 + \frac{\ell}{2}\right) + \exp\left[-\left(t_0 + \frac{\ell}{2}\right)\right] \\
&= \sin\left(0 + \frac{0.1}{2}\right) + \exp\left[-\left(0 + \frac{0.1}{2}\right)\right] = 1.001\,209,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= f(t_0 + \ell,\, y_0 - \ell k_1 + 2\ell k_2) \\
&= \sin(t_0 + \ell) + \exp\left[-(t_0 + \ell)\right] \\
&= \sin(0 + 0.1) + \exp\left[-(0 + 0.1)\right] = 1.004\,671,
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{\ell}{6}\left(k_1 + 4k_2 + k_3\right) \\ &= 0 + \frac{0.1}{6}\left[1 + 4 \cdot 1.001\,209 + 1.004\,671\right] = 0.100\,158, \\ &\quad \text{όταν η αντίστοιχη θεωρητική τιμή είναι} \\ y\left(t_1\right) &= y(0.1) = \left[\sin t + e^{-t}\right]_{t=0.1} = 0.100\,158. \end{aligned}$$

Παρατήρηση 8.3.3 - 1

Διευκρινίζεται ότι, όταν η ακρίβεια των αποτελεσμάτων αυξηθεί, τότε $y_1 \neq y(0.1)$ όπως αυτό φαίνεται στο αντίστοιχο σφάλμα του Πίνακα 1.

2ο βήμα $\quad (t_1 = 0.1, \quad y_1 = 0.100\,158) \longrightarrow (t_2 = 0.2, \quad y_2)$

για $i = 1$

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_1, y_1\right) = \sin t_1 + \exp\left(-t_1\right) \\ &= \sin 0.1 + \exp(-0.1) = 1.004\,671, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(t_1 + \frac{\ell}{2}, y_1 + \frac{\ell}{2}k_1\right) \\ &= \sin\left(t_1 + \frac{\ell}{2}\right) + \exp\left[-\left(t_1 + \frac{\ell}{2}\right)\right] \\ &= \sin\left(0.1 + \frac{0.1}{2}\right) + \exp\left[-\left(0.1 + \frac{0,1}{2}\right)\right] = 1.010\,146, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(t_1 + \ell, y_1 - \ell k_1 + 2\ell k_2\right) \\ &= \sin\left(t_1 + \ell\right) + \exp\left[-\left(t_1 + \ell\right)\right] \\ &= \sin\left(0.1 + 0.1\right) + \exp\left[-\left(0.1 + 0.1\right)\right] = 1.017\,400, \end{aligned}$$

Πίνακας 1: Άσκηση (i): αποτελέσματα μεθόδου RK3

t_i	y_i	$y\left(t_i\right)$	$e_i = \lvert y_i - y\left(t_i\right)\rvert$
0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.100 158	0.100 158	$0.348E-08$
0.2	0.201 203	0.201 203	$0.699E-08$
0.3	0.303 845	0.303 845	$0.106E-07$
0.4	0.408 619	0.408 619	$0.142E-07$
0.5	*0.515 887*	0.515 887	$0.179E-07$

οπότε

$$
\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + \frac{\ell}{6}\left(k_1 + 4k_2 + k_3\right) \\
&= 0.100\,158 + \frac{0.1}{6}\left[1.004\,671 + 4 \cdot 1.010\,146 + 1.017\,400\right] \\
&= 0.201\,203, \\
&\quad \text{όταν η αντίστοιχη θεωρητική τιμή είναι} \\
y\left(t_2\right) &= y(0.2) = \left[\sin t + e^{-t}\right]_{t=0.2} = 0.201\,203
\end{aligned}
$$

με ανάλογη διευκρίνηση αυτής της Παρατήρησης 8.3.3 - 1 του 1ου βήματος. Συνεχίζοντας με όμοιο τρόπο έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 1.

(ii) Είναι

$$f(t, y) = 1 + \frac{y}{t}\,.$$

Επειδή όμοια είναι γνωστή η θεωρητική λύση $y(t)$, η αρχική τιμή y_0, που αντιστοιχεί στην τιμή $t = 1$, υπολογίζεται από την $y(t)$ ως εξής:

$$y_0 = y(1) = \left[2t + t\ln t\right]_{t=1} = 2.$$

Επομένως η μέθοδος RK3, που δίνεται από τους τύπους $(8.3.3-5)$, γράφεται στην περίπτωση αυτή ως εξής:

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_i, y_i\right) = 1 + \frac{y_i}{t_i}, \\ k_2 &= f\left(t_i + \frac{\ell}{2},\, y_i + \frac{\ell}{2}\, k_1\right) = 1 + \frac{y_i + \frac{\ell}{2}\, k_1}{t_i + \frac{\ell}{2}} \\ k_3 &= f\left(t_i + \ell,\, y_i - \ell k_1 + 2\ell k_2\right) = 1 + \frac{y_i - \ell k_1 + 2\ell k_2}{t_i + \ell}, \end{aligned}$$

οπότε

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\ell}{6}\left(k_1 + 4k_2 + k_3\right). \tag{2}$$

Βήμα διαμέρισης $\quad \ell = 0.1$

Τότε για $i = 0,\, 1$ σύμφωνα με τις σχέσεις (2) έχουμε:

1ο βήμα $\quad (t_0 = 1, \quad y_0 = 2) \longrightarrow (t_1 = 1.1, \quad y_1)$

για $i = 0$

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_0, y_0\right) = 1 + \frac{y_0}{t_0} = 1 + \frac{2}{1} = 3, \\ k_2 &= f\left(t_0 + \frac{\ell}{2},\, y_0 + \frac{\ell}{2}\, k_1\right) = 1 + \frac{y_0 + \frac{\ell}{2}\, k_1}{t_0 + \frac{\ell}{2}} \\ &= 1 + \frac{2 + \frac{0.1}{2} \cdot 3}{1 + \frac{0.1}{2}} = 3.047\,619, \\ k_3 &= f\left(t_0 + \ell,\, y_0 - \ell k_1 + 2\ell k_2\right) = 1 + \frac{y_0 - \ell k_1 + 2\ell k_2}{t_0 + \ell}, \\ &= 1 + \frac{2 - 0.1 \cdot 3 + 2 \cdot 0.1 \cdot 3.047\,619}{1 + 0.1} = 3.099\,567, \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{\ell}{6}\left(k_1 + 4k_2 + k_3\right), \\ &= 2 + \frac{\ell}{6}\left(3 + 4 \cdot 3.047\,619 + 3.099\,567\right) = 2.304\,834 \end{aligned}$$

όταν η αντίστοιχη θεωρητική τιμή είναι

$$y\left(t_1\right) = y(1.1) = \left[2t + t\ln t\right]_{t=1.1} = 2.304\,841.$$

2ο βήμα $\quad (t_1 = 1.1, \quad y_1 = 2.304\,834) \longrightarrow (t_2 = 1.2, \quad y_1)$

για $i = 1$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f\,(t_1, y_1) = 1 + \frac{y_1}{t_1} = 1 + \frac{2.304\,834}{1.1} = 3.095\,304, \\
k_2 &= f\left(t_1 + \frac{\ell}{2},\, y_1 + \frac{\ell}{2}\,k_1\right) = 1 + \frac{y_1 + \frac{\ell}{2}\,k_1}{t_1 + \frac{\ell}{2}} \\
&= 1 + \frac{2.304\,834 + \frac{0.1}{2} \cdot (3.095\,304)}{1.1 + \frac{0.1}{2}} = 3.138\,782, \\
k_3 &= f\,(t_1 + \ell,\, y_1 - \ell k_1 + 2\ell k_2) = 1 + \frac{y_1 - \ell k_1 + 2\ell k_2}{t_1 + \ell}\,, \\
&= 1 + \frac{2.304\,834 - 0.1 \cdot 3.095\,304 + 2 \cdot 0.1 \cdot 3.138\,782}{1.1 + 0.1} \\
&= 3.185\,883,
\end{aligned}
$$

οπότε

$$
\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + \frac{\ell}{6}\,(k_1 + 4k_2 + k_3)\,, \\
&= 2.304\,834 + \frac{\ell}{6}\,(3.095\,304 + 4 \cdot 3.138\,782 + 3.185\,883) \\
&= \mathit{2.618\,773} \\
&\quad \text{όταν η αντίστοιχη θεωρητική τιμή είναι} \\
y\,(t_2) &= y(1.2) = [2t + t\ln t]_{t=1.1} = 2.618\,786.
\end{aligned}
$$

Βήμα διαμέρισης $\quad \ell = 0.05$

Τότε για $i = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ σύμφωνα με τις σχέσεις (2) έχουμε:

1ο βήμα $(t_0 = 1, \quad y_0 = 2) \longrightarrow (t_1 = 1.05, \quad y_1)$

για $i = 0$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f\left(t_0, y_0\right) = 1 + \frac{y_0}{t_0} = 1 + \frac{2}{1} = 3, \\
k_2 &= f\left(t_0 + \frac{\ell}{2},\, y_0 + \frac{\ell}{2}\, k_1\right) = 1 + \frac{y_0 + \dfrac{\ell}{2}\, k_1}{t_0 + \dfrac{\ell}{2}} \\
&= 1 + \frac{2 + \dfrac{0.05}{2} \cdot 3}{1 + \dfrac{0.05}{2}} = 3.024\,390, \\
k_3 &= f\left(t_0 + \ell,\, y_0 - \ell k_1 + 2\ell k_2\right) = 1 + \frac{y_0 - \ell k_1 + 2\ell k_2}{t_0 + \ell}\,, \\
&= 1 + \frac{2 - 0.1 \cdot 3 + 2 \cdot 0.1 \cdot 3.024\,390}{1 + 0.05} = 3.049\,942,
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \frac{\ell}{6}\left(k_1 + 4k_2 + k_3\right), \\
&= 2 + \frac{\ell}{6}\left(3 + 4 \cdot 3.024\,390 + 3.049\,942\right) = 2.151\,229 \\
&\quad \text{όταν η αντίστοιχη θεωρητική τιμή είναι} \\
y\left(t_1\right) &= y(1.05) = \left[2t + t\ln t\right]_{t=1.05} = 2.151\,230. \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

4ο βήμα $(t_3 = 1.15, \quad y_3 = 2.460\,725) \longrightarrow (t_4 = 1.2, \quad y_4)$

για $i = 3$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_3, y_3) = 1 + \frac{y_3}{t_3} = 1 + \frac{2.460\,725}{1.15} = 3.139\,761, \\
k_2 &= f\left(t_3 + \frac{\ell}{2},\, y_3 + \frac{\ell}{2} k_1\right) = 1 + \frac{y_3 + \frac{\ell}{2} k_1}{t_3 + \frac{\ell}{2}} \\
&= 1 + \frac{2.460\,725 + \frac{0.05}{2} \cdot (3.139\,761)}{1.15 + \frac{0.05}{2}} = 3.161\,037, \\
k_3 &= f(t_3 + \ell,\, y_3 - \ell k_1 + 2\ell k_2) = 1 + \frac{y_3 - \ell k_1 + 2\ell k_2}{t_3 + \ell}, \\
&= 1 + \frac{2.460\,725 - 0.05 \cdot 3.139\,761 + 2 \cdot 0.05 \cdot 3.161\,037}{1.15 + 0.05} = 3.183\,201,
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
y_4 &= y_3 + \frac{\ell}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3), \\
&= 2.460\,725 + \frac{\ell}{6}(3.139\,761 + 4 \cdot 3.161\,037 + 3.183\,201) = \mathit{2.618\,784}
\end{aligned}$$

όταν η αντίστοιχη θεωρητική τιμή είναι

$$y(t_2) = y(1.2) = [2t + t\ln t]_{t=1.2} = 2.618\,786.$$

Παρατήρηση 8.3.3 - 2

Από τα αποτελέσματα της Άσκησης (ii) προκύπτει ότι υπάρχει μια αύξηση της ακρίβειας, όταν το βήμα της διαμέρισης μικραίνει. Όμως σε περιπτώσεις πολύπλοκων φυσικών προβλημάτων και για μεγάλα χρονικά διαστήματα, πολλές φορές παρατηρείται η ελάττωση του βήματος να μη συνοδεύεται και από ανάλογη ελάττωση του σφάλματος. Αυτό οφείλεται στο ότι απαιτούνται στην περίπτωση αυτή περισσότερα βήματα για τη λύση του προβλήματος, δηλαδή περισσότερες πράξεις, που έχουν σαν συνέπεια την αύξηση των λαθών στρογγυλοποίησης (round-off errors). Για παράδειγμα, όταν $\ell = 0.05$, για τη λύση της Άσκησης (ii) απαιτήθηκαν 4 βήματα, ενώ αν $\ell = 10^{-4}$, απαιτούνται 2.000.

8.3.4 Μέθοδος 4ης τάξης

Αν η τάξη της μεθόδου RK είναι $\nu = \mathbf{4}$, τότε σύμφωνα με τη σχέση $(8.3.2-4)$ πρέπει

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \ell\left(c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3 + c_4 k_4\right) \\ &= y_i + \ell\varphi\left(t_i, y_i, \ell\right), \end{aligned} \qquad (8.3.4 - 1)$$

όπου τα c_i, k_i; $i = 1, 2, 3, 4$ υπολογίζονται από την $(8.3.2-5)$ ως εξής:

$$k_1 = f\left(t, y\right),$$

$$k_2 = f\left(t + \ell a_2, y + \ell b_{21} k_1\right) \quad \text{με} \quad a_2 = b_{21}, \quad \text{οπότε}$$

$$k_2 = f\left(t + \ell a_2,\, y + \ell\, a_2\, k_1\right).$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(t + \ell a_3, y + \ell\left(b_{31} k_1 + b_{32} k_2\right)\right) \quad \text{με} \\ a_3 &= b_{31} + b_{32}, \quad \text{οπότε} \quad b_{31} = a_3 - b_{32}. \end{aligned}$$

Άρα

$$k_3 = f\left(t + \ell a_3,\, y + \ell\left(a_3 - b_{32}\right) k_1 + \ell\, b_{32} k_2\right).$$

$$\begin{aligned} k_4 &= f\left(t + \ell a_4, y + \ell\left(b_{41} k_1 + b_{42} k_2 + b_{43} k_3\right)\right) \quad \text{με} \\ a_4 &= b_{41} + b_{42} + b_{43}, \quad \text{οπότε} \quad b_{41} = a_4 - b_{42} - b_{43}. \end{aligned}$$

Άρα

$$k_4 = f\left(t + \ell a_4,\, y + \ell\left(a_4 - b_{42} - b_{43}\right) k_1 + \ell\, b_{42} k_2 + +\ell\, b_{43} k_3\right).$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές των k_i; $i = 1, 2, 3, 4$ στην $(8.3.4-1)$ προκύπτει τελικά ότι το y_{i+1} εξαρτάται από τις παραμέτρους

$$c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad c_4, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad b_{32}, \quad b_{42} \quad \text{και} \quad b_{43}. \qquad (8.3.4 - 2)$$

Επειδή σύμφωνα με τον Ορισμό 8.3.2 - 2 και την Παρατήρηση 8.3.2 - 2 η μέθοδος RK είναι τάξης $\nu = 4$, οι παράμετροι της σχέσης $(8.3.4 - 2)$ πρέπει στην $(8.3.4 - 1)$ να εκλεγούν, έτσι ώστε να ισχύει

$$y(t+\ell) - y(t) - \ell\varphi(t, y(t), \ell) = \mathcal{O}\left(\ell^5\right). \tag{8.3.4 - 3}$$

Όμοια, όπως και στην περίπτωση της μεθόδου RK3 στην Παράγραφο 8.3.3, παραλείποντας τους ενδιάμεσους υπολογισμούς παραπέμποντας τον αναγνώστη προς τούτο στη βιβλιογραφία, τελικά προκύπτει ένα σύστημα 8 εξισώσεων με 10 αγνώστους τις παραμέτρους στην $(8.3.4 - 2)$, οπότε θα υπάρχει και στην περίπτωση αυτή ένα άπειρο πλήθος μεθόδων Runge-Kutta 4ης τάξης, των οποίων ο τύπος σύμφωνα με την $(8.3.4 - 1)$ θα εκφράζεται με αναλυτική μορφή.

Από το σύνολο αυτό θα εξεταστεί μόνον η παρακάτω περισσότερο χρησιμοποιούμενη μέθοδος

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \frac{\ell}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) && (8.3.4 - 4)\\
k_1 &= f\left(t_i,\, y_i\right) \\
k_2 &= f\left(t_i + \frac{\ell}{2},\, y_i + \frac{\ell}{2}\, k_1\right) \\
k_3 &= f\left(t_i + \frac{\ell}{2},\, y_i + \frac{\ell}{2}\, k_2\right) \\
k_4 &= f\left(t_i + \ell,\, y_i + \ell k_3\right)
\end{aligned}$$

που είναι γνωστή και σαν **μέθοδος RK4**.[15]

Παράδειγμα 8.3.4 - 1

Όμοια αν $y = y(t)$, να λυθεί με τη μέθοδο RK4 το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = -y + t + 1, \quad \text{όταν} \quad t \in [0,\, 0.5], \quad \text{και} \quad \ell = 0.1. \tag{8.3.4 - 5}$$

[15] Βλέπε βιβλιογραφία και:
https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Runge-Kutta_methods&redirect=no#The_Runge.E.80.93Kutta_method
Επίσης *mathworld.wolfram.com/Runge-KuttaMethod.html*

Στη συνέχεια να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική λύση

$$y(t) = t + e^{-t}.$$

Λύση. Συγκρίνοντας με την $(8.3.2-1)$ προκύπτει ότι

$$f(t, y) = -y + t + 1.$$

Όμοια, επειδή είναι γνωστή η θεωρητική λύση $y(t)$, η αρχική τιμή y_0, που αντιστοιχεί στην τιμή $t = 0$, υπολογίζεται από την $y(t)$ ως εξής:

$$y_0 = y(0) = \left[t + e^{-t}\right]_{t=0} = 1.$$

Επομένως η μέθοδος RK4, που ορίζεται από τους τύπους $(8.3.4-4)$ γράφεται στην περίπτωση αυτή ως εξής:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f\left(t_i, y_i\right) = -y_i + t_i + 1, \\
k_2 &= f\left(t_i + \frac{\ell}{2},\, y_i + \frac{\ell}{2}\, k_1\right) \\
&= -\left(y_i + \frac{\ell}{2}\, k_1\right) + \left(t_i + \frac{\ell}{2}\right) + 1, \\
k_3 &= f\left(t_i + \frac{\ell}{2},\, y_i + \frac{\ell}{2}\, k_2\right) \\
&= -\left(y_i + \frac{\ell}{2}\, k_2\right) + \left(t_i + \frac{\ell}{2}\right) + 1, \\
k_4 &= f\left(t_i + \ell,\, y_i + \ell k_3\right) \\
&= -\left(y_i + \ell\, k_3\right) + \left(t_i + \ell\right) + 1,
\end{aligned}$$

οπότε

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\ell}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right). \qquad (8.3.4 - 6)$$

Τότε για $i = 0, 1, 2, 3,\, 4$ σύμφωνα με τις $(8.3.4-6)$ έχουμε:

1ο βήμα $(t_0 = 0, \quad y_0 = 1) \longrightarrow (t_1 = 0.1, \quad y_1)$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_0, y_0) = -y_0 + t_0 + 1 \\
&= -1 + 0 + 1 = 0, \\
k_2 &= f\left(t_0 + \frac{\ell}{2},\, y_0 + \frac{\ell}{2}\, k_1\right) \\
&= -\left(y_0 + \frac{\ell}{2}\, k_1\right) + \left(t_0 + \frac{\ell}{2}\right) + 1 \\
&= -\left(1 + \frac{0.1}{2} \cdot 0\right) + \left(0 + \frac{0.1}{2}\right) + 1 = 0.05, \\
k_3 &= f\left(t_0 + \frac{\ell}{2},\, y_0 + \frac{\ell}{2}\, k_2\right) \\
&= -\left(y_0 + \frac{\ell}{2}\, k_2\right) + \left(t_0 + \frac{\ell}{2}\right) + 1 \\
&= -\left(1 + \frac{0.1}{2} \cdot (0.05)\right) + \left(0 + \frac{0.1}{2}\right) + 1 \\
&= 0.0475, \\
k_4 &= f(t_0 + \ell,\, y_0 + \ell k_3) \\
&= -(y_0 + \ell k_3) + (t_0 + 0.1) + 1 \\
&= -(1 + 0.1 \cdot 0.0475) + (0 + 0.1) + 1 = 0.095\,250,
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \frac{\ell}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&= 1 + \frac{0.1}{6}(0 + 2 \cdot 0.05 + 2 \cdot 0.0475 + 0.095\,250) \\
&= 1.004\,838,
\end{aligned}$$

όταν η αντίστοιχη θεωρητική τιμή είναι

$$y(t_1) = y(0.1) = \left[t + e^{-t}\right]_{t=0.1} = 1.004\,837.$$

2ο βήμα $(t_1 = 0.1, \quad y_1 = 1.004\,838) \longrightarrow (t_2 = 0.2, \quad y_1)$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_1, y_1) = -y_1 + t_1 + 1 = -1.004\,838 + 0.1 + 1 \\
&= 0.095\,163,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= f\left(t_1 + \frac{\ell}{2},\, y_1 + \frac{\ell}{2}\, k_1\right) \\
&= -\left(y_1 + \frac{\ell}{2}\, k_1\right) + \left(t_1 + \frac{\ell}{2}\right) + 1 \\
&= -\left(1.004\,838 + \frac{0.1}{2} \cdot (0.095\,163)\right) + \left(0.1 + \frac{0.1}{2}\right) + 1 \\
&= 0.140\,404,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= f\left(t_1 + \frac{\ell}{2},\, y_1 + \frac{\ell}{2}\, k_2\right) \\
&= -\left(y_1 + \frac{\ell}{2}\, k_2\right) + \left(t_1 + \frac{\ell}{2}\right) + 1 \\
&= -\left(1.004\,838 + \frac{0.1}{2} \cdot (0.140\,404)\right) + \left(0.1 + \frac{0.1}{2}\right) + 1 \\
&= 0.138\,142,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= f(t_1 + \ell,\, y_1 + \ell k_3) \\
&= -(y_1 + \ell k_3) + (t_1 + 0.1) + 1 \\
&= -(1.004\,838 + 0.1 \cdot 0.138\,142) + (0.1 + 0.1) + 1 = 0.181\,348,
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + \frac{\ell}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&= 1.004\,838 + \frac{0.1}{6}(0.095\,163 + 2 \cdot 0.140\,404 + 2 \cdot 0.138\,142 + 0.181\,348) \\
&= 1.018\,731,
\end{aligned}$$

όταν η αντίστοιχη θεωρητική τιμή είναι

$$y(t_2) = y(0.2) = \left[t + e^{-t}\right]_{t=0.2} = 1.018\,731.$$

Πίνακας 8.3.4 - 1: Παράδειγμα 8.3.4 - 1: αποτελέσματα μεθόδου RK4

t_i	y_i	$y(t_i)$	$\lvert e_i \rvert$
0.0	1.000 000	1.000 000	0.0
0.1	1.004 838	1.004 837	$0.820E-07$
0.2	1.018 731	1.018 731	$0.148E-06$
0.3	1.040 818	1.040 818	$0.201E-06$
0.4	1.070 320	1.070 320	$0.243E-06$
0.5	*1.106 531*	1.106 531	$0.275E-06$

Συνεχίζοντας με παρόμοιο τρόπο, τελικά έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 8.3.4 - 1. Από την εξέταση των σφαλμάτων του Πίνακα 8.3.4 - 1 προκύπτει ότι, αν και οι τιμές των είναι ελάχιστες, υπάρχει μια αύξησή των με την πάροδο του χρόνου. Τελικά στο Σχ. 8.3.4 - 1 γίνεται η σύγκριση των σφαλμάτων της λύσης του παραπάνω παραδείγματος με τις μεθόδους RK3 (άσκηση Παραγράφου 8.3.3) και της RK4, από το οποίο άμεσα προκύπτει η μεγαλύτερη ακρίβεια της RK4.

Άσκηση

Αν $y = y(t)$, να υπολογιστεί με τη μέθοδο RK4 η λύση των παρακάτω προβλημάτων αρχικής τιμής:

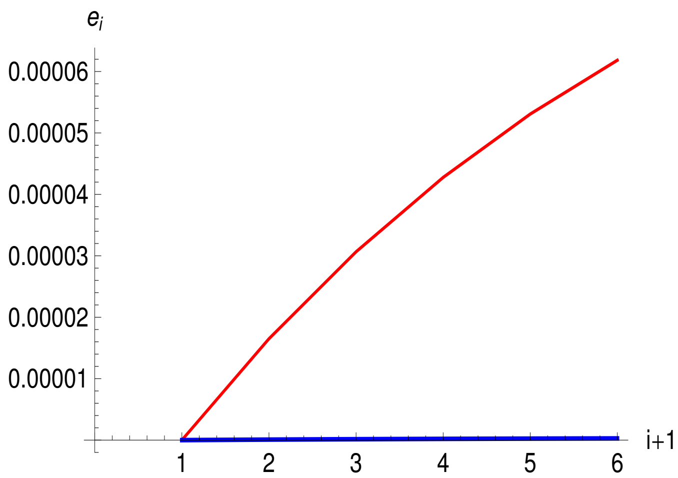
i) $y' = \sin t + e^{-t}\,; \quad 0 \le t \le 0.5, \quad$ όταν $\quad \ell = 0.1,$

$y(t) = 2 - e^{-t} - \cos t \quad$ και $\quad y_0 = y(0).$

ii) $y' = 1 + \dfrac{y}{t}; \quad 1 \le t \le 1.2, \quad$ όταν $\quad \ell = 0.1,\ 0.05,$

$y(t) = 2t + t \ln t \quad$ και $\quad y_0 = y(1)\,.$

Στη συνέχεια να γίνει σύγκριση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα των μεθόδων RK3 και του Taylor τάξης $\nu = 2$, αντίστοιχα τάξης $\nu = 3$ του Μαθήματος.



Σχήμα 8.3.4 - 1: Παράδειγμα 8.3.4 - 1. Η κόκκινη καμπύλη δείχνει τα σφάλματα $|e_i|$ με τη μέθοδο RK3 και η μπλε με την RK4

Απαντήσεις

(i) Είναι

$$f(t, y) = \sin t + e^{-t}.$$

Επειδή είναι γνωστή η θεωρητική λύση $y(t)$, η αρχική τιμή y_0, που αντιστοιχεί στην τιμή $t = 0$, υπολογίζεται από την $y(t)$ ως εξής:

$$y_0 = y(0) = \left[2 - e^{-t} - \cos t\right]_{t=0} = 0.$$

Επομένως η μέθοδος RK4, που δίνεται από τους τύπους $(8.3.4 - 4)$, χρησιμοποιώντας επίσης για ευκολία τον συμβολισμό $e^t = \exp(t)$ γράφεται στην περίπτωση αυτή ως εξής:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f\left(t_i, y_i\right) = \sin t_i + \exp\left(-t_i\right), \\
k_2 &= f\left(t_i + \frac{\ell}{2},\, y_i + \frac{\ell}{2}\, k_1\right) \\
&= \sin\left(t_i + \frac{\ell}{2}\right) + \exp\left[-\left(t_i + \frac{\ell}{2}\right)\right], \\
k_3 &= f\left(t_i + \frac{\ell}{2},\, y_i + \frac{\ell}{2}\, k_2\right) \\
&= \sin\left(t_i + \frac{\ell}{2}\right) + \exp\left[-\left(t_i + \frac{\ell}{2}\right)\right], \\
k_4 &= f\left(t_i + \ell,\, y_i + \ell k_3\right) \\
&= \sin\left(t_i + \ell\right) + \exp\left(t_i + \ell\right),
\end{aligned}$$

οπότε

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\ell}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right). \tag{1}$$

Τότε για $i = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4$ σύμφωνα με τις σχέσεις (1) έχουμε:

1ο βήμα $\quad (t_0 = 0, \quad y_0 = 0) \longrightarrow (t_1 = 0.1, \quad y_1)$

για $i = 0$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f\left(t_0, y_0\right) = \sin t_0 + \exp\left(-t_0\right) \\
&= \sin 0 + \exp(-0) = 0 + 1 = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= f\left(t_0 + \frac{\ell}{2},\, y_0 + \frac{\ell}{2}\, k_1\right) \\
&= \sin\left(t_0 + \frac{\ell}{2}\right) + \exp\left[-\left(t_0 + \frac{\ell}{2}\right)\right] \\
&= \sin\left(0 + \frac{0.1}{2}\right) + \exp\left[-\left(0 + \frac{0.1}{2}\right)\right] = 1.001\,209,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= f\left(t_0+\frac{\ell}{2},\, y_0+\frac{\ell}{2}\,k_2\right)\\
&= \sin\left(t_0+\frac{\ell}{2}\right)+\exp\left[-\left(t_0+\frac{\ell}{2}\right)\right]\\
&= \sin\left(0+\frac{0.1}{2}\right)+\exp\left[-\left(0+\frac{0.1}{2}\right)\right]=1.001\,209,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= f\left(t_0+\ell,\, y_0+\ell k_3\right)\\
&= \sin\left(t_0+\ell\right)+\exp\left[-\left(t_0+\ell\right)\right]\\
&= \sin\left(0+0.1\right)+\exp\left[-\left(0+0.1\right)\right]=1.004\,671,
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0+\frac{\ell}{6}\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right)\\
&= 0+\frac{0.1}{6}\left[1+2\,\cdot\,1.001\,209+2\,\cdot\,1.001\,209+1.004\,671\right]\\
&= 0.100\,158,\\
&\quad\text{όταν η αντίστοιχη θεωρητική τιμή είναι}\\
y\left(t_1\right) &= y(0.1)=\left[\sin t+e^{-t}\right]_{t=0.1}=0.100\,158.
\end{aligned}$$

Παρατηρήσεις 8.3.4 - 1

- Όπως και στην περίπτωση λύσης της άσκησης με τη μέθοδο RK3 (Παρατήρηση 8.3.3 - 1), όταν η ακρίβεια των αποτελεσμάτων αυξηθεί, τότε $y_1 \neq y(0.1)$, όπως αυτό φαίνεται στο αντίστοιχο σφάλμα του Πίνακα 1.

- Τα αποτελέσματα εμφανίζονται ότι είναι ίσα με τα αντίστοιχα λύσης της άσκησης με τη μέθοδο RK3. Αυτό κύρια οφείλεται στο ότι είναι $f(t,y)=\sin t+\exp(-t)=f(t)$, δηλαδή η f δεν εξαρτάται από το y.

2ο βήμα $(t_1 = 0.1, \quad y_1 = 0.100\,158) \longrightarrow (t_2 = 0.2, \quad y_2)$

για $i = 1$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_1, y_1) = \sin t_1 + \exp(-t_1) \\
&= \sin 0.1 + \exp(-0.1) = 1.004\,671, \\
k_2 &= f\left(t_1 + \frac{\ell}{2},\, y_1 + \frac{\ell}{2}\,k_1\right) \\
&= \sin\left(t_1 + \frac{\ell}{2}\right) + \exp\left[-\left(t_1 + \frac{\ell}{2}\right)\right] \\
&= \sin\left(0.1 + \frac{0.1}{2}\right) + \exp\left[-\left(0.1 + \frac{0.1}{2}\right)\right] = 1.010\,146, \\
k_3 &= f\left(t_1 + \frac{\ell}{2},\, y_1 + \frac{\ell}{2}\,k_2\right) \\
&= \sin\left(t_1 + \frac{\ell}{2}\right) + \exp\left[-\left(t_1 + \frac{\ell}{2}\right)\right] \\
&= \sin\left(0.1 + \frac{0.1}{2}\right) + \exp\left[-\left(0.1 + \frac{0.1}{2}\right)\right] = 1.010\,146, \\
k_4 &= f(t_1 + \ell,\, y_1 + \ell k_3) \\
&= \sin(t_1 + \ell) + \exp[-(t_1 + \ell)] \\
&= \sin(0.1 + 0.1) + \exp[-(0.1 + 0.1)] = 1.017\,400,
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + \frac{\ell}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&= 0.100\,158 + \frac{0.1}{6}\,[1 + 2 \cdot 1.010\,146 + 2 \cdot 1.010\,146 + 1.017\,400] \\
&= 0.201\,203,
\end{aligned}$$

όταν η αντίστοιχη θεωρητική τιμή είναι

$$y(t_1) = y(0.1) = \left[\sin t + e^{-t}\right]_{t=0.1} = 0.201\,203$$

με ανάλογες διευκρινήσεις αυτών των Παρατηρήσεων 8.3.4 - 1 του 1ου βήματος.

Συνεχίζοντας με όμοιο τρόπο έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 1.

Πίνακας 1: Άσκηση (i): αποτελέσματα μεθόδου RK4

t_i	y_i	$y(t_i)$	$e_i = \lvert y_i - y(t_i) \rvert$
0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.100 158	0.100 158	$0.348E-08$
0.2	0.201 203	0.201 203	$0.699E-08$
0.3	0.303 845	0.303 845	$0.106E-07$
0.4	0.408 619	0.408 619	$0.142E-07$
0.5	*0.515 887*	0.515 887	$0.179E-07$

(ii) Είναι

$$f(t,y) = 1 + \frac{y}{t}\,.$$

Επειδή όμοια είναι γνωστή η θεωρητική λύση $y(t)$, η αρχική τιμή y_0, που αντιστοιχεί στην τιμή $t=1$, υπολογίζεται από την $y(t)$ ως εξής:

$$y_0 = y(1) = [2t + t\ln t]_{t=1} = 2.$$

Επομένως η μέθοδος RK4, που δίνεται από τους τύπους $(8.3.4-4)$, γράφεται στην περίπτωση αυτή ως εξής:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_i, y_i) = 1 + \frac{y_i}{t_i}\,,\\
k_2 &= f\left(t_i + \frac{\ell}{2},\, y_i + \frac{\ell}{2}k_1\right) = 1 + \frac{y_i + \frac{\ell}{2}k_1}{t_i + \frac{\ell}{2}}\\
k_3 &= f\left(t_i + \frac{\ell}{2},\, y_i + \frac{\ell}{2}k_2\right) = 1 + \frac{y_i + \frac{\ell}{2}k_2}{t_i + \frac{\ell}{2}}\\
k_4 &= f(t_i + \ell,\, y_i + \ell k_3) = 1 + \frac{y_i + \ell k_3}{t_i + \ell}\,,
\end{aligned}$$

οπότε

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\ell}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\,. \tag{2}$$

Βήμα διαμέρισης $\quad \ell = 0.1$

Τότε για $i = 0,\,1$ σύμφωνα με τις σχέσεις (2) έχουμε:

1ο βήμα $\quad (t_0 = 1, \quad y_0 = 2) \longrightarrow (t_1 = 1.1, \quad y_1)$

για $i = 0$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_0, y_0) = 1 + \frac{y_0}{t_0} = 1 + \frac{2}{1} = 3, \\
k_2 &= f\left(t_0 + \frac{\ell}{2},\, y_0 + \frac{\ell}{2}\, k_1\right) = 1 + \frac{y_0 + \frac{\ell}{2}\, k_1}{t_0 + \frac{\ell}{2}} \\
&= 1 + \frac{2 + \frac{0.1}{2} \cdot 3}{1 + \frac{0.1}{2}} = 3.047\,619, \\
k_3 &= f\left(t_0 + \frac{\ell}{2},\, y_0 + \frac{\ell}{2}\, k_2\right) = 1 + \frac{y_0 + \frac{\ell}{2}\, k_2}{t_0 + \frac{\ell}{2}} \\
&= 1 + \frac{2 + \frac{0.1}{2} \cdot 3.047\,619}{1 + \frac{0.1}{2}} = 3.049\,887, \\
k_4 &= f(t_0 + \ell,\, y_0 + \ell k_3) = 1 + \frac{y_0 + \ell k_3}{t_0 + \ell}\,, \\
&= 1 + \frac{2 + 0.1 \cdot 3.049\,887}{1 + 0.1} = 3.095\,444,
\end{aligned}
$$

οπότε

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \frac{\ell}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right), \\
&= 2 + \frac{\ell}{6}\left(3 + 2 \cdot 3.047\,619 + 2 \cdot 3.049\,887 + 3.095\,444\right) \\
&= 2.304\,841
\end{aligned}
$$

όταν η αντίστοιχη θεωρητική τιμή είναι

$$
y(t_1) = y(1.1) = [2t + t\ln t]_{t=1.1} = 2.304\,841.
$$

2ο βήμα $(t_1 = 1.1, \quad y_1 = 2.304\,841) \longrightarrow (t_2 = 1.2, \quad y_1)$

για $i = 1$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_1, y_1) = 1 + \frac{y_1}{t_1} = 1 + \frac{2.304\,841}{1.1} = 3.095\,310, \\
k_2 &= f\left(t_1 + \frac{\ell}{2},\, y_1 + \frac{\ell}{2}\,k_1\right) = 1 + \frac{y_1 + \frac{\ell}{2}\,k_1}{t_1 + \frac{\ell}{2}} \\
&= 1 + \frac{2.304\,841 + \frac{0.1}{2} \cdot 3.095\,310}{1.1 + \frac{0.1}{2}} = 3.138\,788, \\
k_3 &= f\left(t_1 + \frac{\ell}{2},\, y_1 + \frac{\ell}{2}\,k_2\right) = 1 + \frac{y_1 + \frac{\ell}{2}\,k_2}{t_1 + \frac{\ell}{2}} \\
&= 1 + \frac{2.304\,841 + \frac{0.1}{2} \cdot 3.138\,788}{1.1 + \frac{0.1}{2}} = 3.140\,679, \\
k_4 &= f(t_1 + \ell,\, y_1 + \ell k_3) = 1 + \frac{y_1 + \ell k_3}{t_1 + \ell}, \\
&= 1 + \frac{2.304\,841 + 0.1 \cdot 3.140\,679}{1.1 + 0.1} = 3.182\,424,
\end{aligned}
$$

οπότε

$$
\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + \frac{\ell}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\
&= 2.304\,841 + \frac{\ell}{6}(3.095\,310 + 2 \cdot 3.138\,788 + 2 \cdot 3.140\,679 + 3.182\,424) \\
&= \mathit{2.618\,785}
\end{aligned}
$$

όταν η αντίστοιχη θεωρητική τιμή είναι

$$
y(t_2) = y(1.2) = [2t + t\ln t]_{t=1.1} = 2.618\,786.
$$

Βήμα διαμέρισης $\ell = 0.05$

Τότε για $i = 0,\, 1,\, 2,\, 3$ σύμφωνα με τις σχέσεις (2) έχουμε:

1ο βήμα $(t_0 = 1, \quad y_0 = 2) \longrightarrow (t_1 = 1.05, \quad y_1)$

για $i = 0$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_0, y_0) = 1 + \frac{y_0}{t_0} = 1 + \frac{2}{1} = 3, \\
k_2 &= f\left(t_0 + \frac{\ell}{2}, y_0 + \frac{\ell}{2} k_1\right) = 1 + \frac{y_0 + \frac{\ell}{2} k_1}{t_0 + \frac{\ell}{2}} \\
&= 1 + \frac{2 + \frac{0.05}{2} \cdot 3}{1 + \frac{0.05}{2}} = 3.024\,390, \\
k_3 &= f\left(t_0 + \frac{\ell}{2}, y_0 + \frac{\ell}{2} k_2\right) = 1 + \frac{y_0 + \frac{\ell}{2} k_2}{t_0 + \frac{\ell}{2}} \\
&= 1 + \frac{2 + \frac{0.05}{2} \cdot 3.024\,390}{1 + \frac{0.05}{2}} = 3.024\,985, \\
k_4 &= f(t_0 + \ell, y_0 + \ell k_3) = 1 + \frac{y_0 + \ell k_3}{t_0 + \ell}, \\
&= 1 + \frac{2 + 0.05 \cdot 3.024\,985}{1 + 0.05} = 3.048\,809,
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \frac{\ell}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\
&= 2 + \frac{\ell}{6}(3 + 2 \cdot 3.024\,390 + 2 \cdot 3.024\,985 + 3.048\,809) \\
&= 2.151\,230
\end{aligned}$$

όταν η αντίστοιχη θεωρητική τιμή είναι

$$\begin{aligned}
y(t_1) &= y(1.05) = [2t + t\ln t]_{t=1.05} = 2.215\,230. \\
&\vdots \qquad \vdots
\end{aligned}$$

4ο βήμα $(t_3 = 1.15, \quad y_3 = 2.460\,726) \longrightarrow (t_4 = 1.2, \quad y_4)$

για $i = 3$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_3, y_3) = 1 + \frac{y_3}{t_3} = 1 + \frac{2.460\,726}{1.15} = 3.139\,762, \\
k_2 &= f\left(t_3 + \frac{\ell}{2}, y_3 + \frac{\ell}{2}\,k_1\right) = 1 + \frac{y_3 + \frac{\ell}{2}\,k_1}{t_3 + \frac{\ell}{2}} \\
&= 1 + \frac{2.460\,726 + \frac{0.05}{2}\,3.139\,762}{1.15 + \frac{0.05}{2}} = 3.161\,039, \\
k_3 &= f\left(t_3 + \frac{\ell}{2}, y_3 + \frac{\ell}{2}\,k_2\right) = 1 + \frac{y_3 + \frac{\ell}{2}\,k_2}{t_3 + \frac{\ell}{2}} \\
&= 1 + \frac{2.460\,726 + \frac{0.05}{2}\,3.161\,039}{1.15 + \frac{0.05}{2}} = 3.161\,491, \\
k_4 &= f(t_3 + \ell, y_3 + \ell k_3) = 1 + \frac{y_3 + \ell k_3}{t_3 + \ell}\,, \\
&= 1 + \frac{2.460\,726 + 0.05 \cdot 3.161\,491}{1.15 + 0.05} = 3.182\,334,
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
y_4 &= y_3 + \frac{\ell}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right), \\
&= 2.460\,726 + \frac{\ell}{6}\left(3.139\,762 + 2 \cdot 3.161\,039 + 2 \cdot 3.161\,491 + 3.182\,334\right) \\
&= \mathit{2.618\,786}
\end{aligned}$$

όταν η αντίστοιχη θεωρητική τιμή είναι

$$y\left(t_2\right) = y(1.2) = \left[2t + t\ln t\right]_{t=1.2} = 2.618\,786.$$

Παρατήρηση 8.3.4 - 1

Ισχύει και στην περίπτωση αυτή για τα αποτελέσματα της μεθόδου RK4 παρατήρηση ανάλογη της 8.3.4 - 1.

8.4 Συστήματα διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης

8.4.1 Ορισμοί και σχετικό θεώρημα

Στην παράγραφο αυτή γίνεται μία εισαγωγή στη λύση των συστημάτων διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης, όπου οι μέθοδοι λύσης μπορεί να θεωρηθούν σαν μία γενίκευση των ήδη γνωστών μεθόδων λύσης των συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Συγκεκριμένα, ένα πρόβλημα αρχικής τιμής 1ης τάξης με n εξισώσεις και n αγνώστους τις συναρτήσεις $y_i(t)$, όταν $i = 1, 2, \ldots, n$ γράφεται:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= f_1\left(t, y_1, y_2, \ldots, y_n\right) \\
\frac{dy_2}{dt} &= f_2\left(t, y_1, y_2, \ldots, y_n\right) \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\frac{dy_n}{dt} &= f_n\left(t, y_1, y_2, \ldots, y_n\right),
\end{aligned} \qquad (8.4.1 - 1)$$

όταν $y_i\left(t_0\right) = g_i$ για κάθε $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ οι αρχικές συνθήκες ή σε διανυσματική μορφή

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{y}\right) \quad \text{με } \mathbf{y}\left(t_0\right) = \mathbf{g}, \text{ όταν } t > t_0, \qquad (8.4.1 - 2)$$

όπου

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) &= \left[y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\right]^T, \quad \mathbf{g} = \left[g_1, g_2, \ldots, g_n\right]^\top \quad \text{και} \\
\mathbf{f}\left(t, \mathbf{y}\right) &= \left[f_1\left(t, \mathbf{y}\right), f_2\left(t, \mathbf{y}\right), \ldots, f_n\left(t, \mathbf{y}\right)\right]^\top.
\end{aligned}$$

Δίνονται τώρα οι παρακάτω ορισμοί που, όπως θα διαπιστωθεί, είναι μία γενίκευση των αντίστοιχων ορισμών μιας μεταβλητής:

Ορισμός 8.4.1 - 1. *Μία συνάρτηση $f\left(t, y_1, y_2, \ldots, y_n\right)$ με πεδίο ορισμού $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, όπου $D = \left\{\left(t, u_1, u_2, \ldots, u_n\right) \,|\, a \leq t \leq b,\ u_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n\right\}$, λέγεται ότι πληροί μία συνθήκη του Lipschitz ως προς τις μεταβλητές u_1, u_2, …, u_n, όταν υπάρχει σταθερά L με $L > 0$ που λέγεται και σταθερά του Lipschitz για τη συνάρτηση* **f** *τέτοια, ώστε*

$$\left|f\left(t, u_1, u_2, \ldots, u_n\right) - f\left(t, z_1, z_2, \ldots, z_n\right)\right| \leq L \sum_{j=1}^{n} \left|u_j - z_j\right| \qquad (8.4.1 - 3)$$

για κάθε $\left(t, u_1, u_2, \ldots, u_n\right)$, $\left(t, z_1, z_2, \ldots, z_n\right) \in D$.

Με τη βοήθεια του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής αποδεικνύεται ότι, αν η συνάρτηση f και οι μερικές παράγωγοί της είναι συνεχείς συναρτήσεις στο D και επιπλέον ισχύει

$$\left|\frac{\partial f\left(t, y_1, y_2, \ldots, y_n\right)}{\partial y_i}\right| \leq L \quad \text{για κάθε } i=1,\, 2,\, \ldots,\, n,$$

τότε η συνάρτηση f ικανοποιεί μία συνθήκη του Lipschitz στο D με σταθερά του Lipschitz L.

Αποδεικνύεται τότε το παρακάτω βασικό θεώρημα:

Θεώρημα 8.4.1 - 1 (θεμελιώδες για συστήματα ΣΔΕ).
Έστω ότι οι συναρτήσεις $f_i\left(t, y_1, y_2, \ldots, y_n\right)$ για κάθε $i=1,\, 2,\, \ldots,\, n$ με πεδίο ορισμού D, όπου $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ είναι συνεχείς και ικανοποιούν μία συνθήκη του Lipschitz στο D. Τότε το πρόβλημα αρχικής τιμής $(8.4.1-2)$ έχει ακριβώς μία λύση στο D.

Δίνονται τώρα οι γενικεύσεις των παρακάτω δύο ήδη γνωστών μεθόδων:

i) του **Euler**

$$\mathbf{y}_{i+1}=\mathbf{y}_i+\ell\, \mathbf{f}\left(t_i, \mathbf{y}_i\right), \tag{8.4.1 - 4}$$

ii) των **Runge-Kutta**

$$\mathbf{y}_{i+1}=\mathbf{y}_i-\ell\, \varphi\left(t_i, \mathbf{y}_i, \ell\right). \tag{8.4.1 - 5}$$

Ορισμός 8.4.1 - 2. *Μια μέθοδος λύσης του προβλήματος αρχικής τιμής $(8.4.1-2)$ λέγεται ότι είναι* **τάξης p**, *όταν p είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει*

$$\mathbf{y}(t+\ell)-\mathbf{y}(t)-\ell \varphi\left(t, \mathbf{y}(t), \ell\right)=\mathcal{O}\left(\ell^{p+1}\right), \tag{8.4.1 - 6}$$

όπου $\mathbf{y}(t)$ είναι η θεωρητική λύση του προβλήματος.

Ορισμός 8.4.1 - 3. *Μια μέθοδος λύσης του προβλήματος αρχικής τιμής $(8.4.1-2)$ λέγεται ότι είναι* **συμβατή** *(consistent), όταν*

$$\varphi(t, \mathbf{y}, 0)=\mathbf{f}\left(t, \mathbf{y}\right). \tag{8.4.1 - 7}$$

Το Θεώρημα 8.4.1 - 1 εφαρμόζεται και στην περίπτωση αυτή, όταν οι απόλυτες τιμές αντικατασταθούν από τις norm των διανυσμάτων. Ο αναγνώστης παραπέμπεται για την απόδειξη στη βιβλιογραφία.

8.4.2 Μέθοδος RK4

Σαν χαρακτηριστικό παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου αναφέρεται η μέθοδος των RK4, που γράφεται

$$
\begin{aligned}
k_{1j} &= f_j\left(t_i,\, y_{1i},\, y_{2i},\, \ldots,\, y_{ni}\right) \\
k_{2j} &= f_j\left(t_i + \frac{\ell}{2},\, y_{1i} + \frac{\ell}{2}k_{11},\, y_{2i} + \frac{\ell}{2}k_{12},\, \ldots,\, y_{ni} + \frac{\ell}{2}k_{1n}\right) \\
k_{3j} &= f_j\left(t_i + \frac{\ell}{2},\, y_{1i} + \frac{\ell}{2}k_{21},\, y_{2i} + \frac{\ell}{2}k_{22},\, \ldots,\, y_{ni} + \frac{\ell}{2}k_{2n}\right) \\
k_{4j} &= f_j\left(t_i + \ell,\, y_{1i} + \ell k_{31},\, y_{2i} + \ell k_{32},\, \ldots,\, y_{ni} + \ell k_{3n}\right) \\
y_{j,i+1} &= y_{ji} + \frac{\ell}{6}\left(k_{1j} + 2k_{2j} + 2k_{3j} + k_{4j}\right) \qquad (8.4.2 - 1)
\end{aligned}
$$

για κάθε $j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$.

Παράδειγμα 8.4.2 - 1

Έστω το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$
\begin{aligned}
y_1' &= f_1\left(t, y_1, y_2\right) = -4.0y_1 + 3.0y_2 + 6.0 \\
y_2' &= f_2\left(t, y_1, y_2\right) = -2.4y_1 + 1.6y_2 + 3.6,
\end{aligned}
$$

όπου $y_1(0) = y_2(0) = 0$ και θεωρητική λύση

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= -3.375e^{-2t} + 1.875e^{-0.4t} + 1.5 \\
y_2(t) &= -2.255e^{-2t} + 2.25e^{-0.4t}.
\end{aligned}
$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των Runge-Kutta 4ης τάξης με βήμα $\ell = 0.1$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
k_{11} &= f_1\left(t_0,\, y_{1,0},\, y_{2,0}\right) \\
&= f_1(0,0,0) = -4\times 0 + 3\times 0 + 6 = 6, \\[2ex]
k_{12} &= f_2\left(t_0,\, y_{1,0},\, y_{2,0}\right) \\
&= f_2(0,0,0) = -2.4\times 0 + 1.6\times 0 + 3.6 = 3.6, \\[2ex]
k_{21} &= f_1\left(t_0 + \frac{\ell}{2},\, y_{1,0} + \frac{\ell}{2}k_{11},\, y_{2,0} + \frac{\ell}{2}k_{12}\right) \\
&= f_1(0.05, 0.3, 0.18) = 5.34, \\[2ex]
k_{22} &= f_2\left(t_0 + \frac{\ell}{2},\, y_{1,0} + \frac{\ell}{2}k_{11},\, y_{2,0} + \frac{\ell}{2}k_{12}\right) \\
&= f_2(0.05, 0.3, 0.18) = 3.168, \\[2ex]
k_{31} &= f_1\left(t_0 + \frac{\ell}{2},\, y_{1,0} + \frac{\ell}{2}k_{21},\, y_{2,0} + \frac{\ell}{2}k_{22}\right) \\
&= f_1(0.05, 0.267, 0.1584) = 5.4072, \\[2ex]
k_{32} &= f_2\left(t_0 + \frac{\ell}{2},\, y_{1,0} + \frac{\ell}{2}k_{21},\, y_{2,0} + \frac{\ell}{2}k_{22}\right) \\
&= f_2(0.05, 0.267, 0.1584) = 3.21264, \\[2ex]
k_{41} &= f_1\left(t_0 + \ell,\, y_{1,0} + \ell k_{31},\, y_{2,0} + \ell k_{32}\right) \\
&= f_1(0.1, 0.54072, 0.321264) = 4.800912, \\
k_{42} &= f_2\left(t_0 + \ell,\, y_{1,0} + \ell k_{31},\, y_{2,0} + \ell k_{32}\right) \\
&= f_2(0.1, 0.54072, 0.321264) = 2.8162944.
\end{aligned}
$$

Τότε

$$
\begin{aligned}
y_{1,1} &= y_{1,0} + \frac{\ell}{6}\left(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41}\right) = \mathit{0.538\,2550}, \\
y_{2,1} &= y_{2,0} + \frac{\ell}{6}\left(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42}\right) = \mathit{0.319\,6263}
\end{aligned}
$$

με αντίστοιχα απόλυτα σφάλματα $e_1 = 0.870\,677E - 08$ και $e_2 = 0.0040\,8785$.

Το Πρόγραμμα 8.4.2 - 1 δίνει τη λύση του Παραδείγματος 8.4.2 - 1 τη χρονική στιγμή $t = 1$ και διάγραμμα των σφαλμάτων e_1 και e_2 με το MATHEMATICA.

Πρόγραμμα 8.4.2 - 1 (μεθόδου RK4 για συστήματα)

```
m1=Array[d1,{11,1}];         διανύσματα τιμών
m2=Array[d2,{11,1}];
g1[t_]:=-3.375 Exp[-2t]+1.875 Exp[-0.4t]+1.5;
g2[t_]:=-2.255 Exp[-2t]+2.25 Exp[-0.4t];
Print["i"," , ","ti"," , ","y1i"," , ","y2i" ," , ","e1",
" , ","e2"];Print[" "];
f1[t_,y1_,y2_]:=-4y1+3y2+6;
f2[t_,y1_,y2_]:=-2.4y1+1.6y2+3.6;
a=0, b=1; n=10; l=(b-a)/n;
t=0; y1=0 ;y2=0;
tx1=N[g1[t]];ex1=Abs[y1-tx1];m1[[1]]=ex1;
tx2=N[g2[t]];ex2=Abs[y2-tx2];m2[[1]]=ex2;
Print["0"," , ","t"," , ","y1"," , ","y2"
," , ","ex1"," , ",ex2];
Do[  k11=f1[t,y1,y2];k12=f2[t,y1,y2];
     k21=f1[t+l/2,y1+l*k11/2,y2+l*k12/2];
     k22=f2[t+l/2,y1+l*k11/2,y2+l*k12/2];
     k31=f1[t+l/2,y1+l*k21/2,y2+l*k22/2];
     k32=f2[t+l/2,y1+l*k21/2,y2+l*k22/2];
     k41=f1[t+l,y+l*k31,y2+l*k32];
     k42=f2[t+l,y+l*k31,y2+l*k32];
     x1=y1+l*(k11+2*k21+2*k31+k41)/6;
     x2=y2+l*(k12+2*k22+2*k32+k41)/6;
     t=t+l; t1=N[t]; x11=N[x1]; x22=N[x2];
     y1=x1; y2=x2; tx1=N[g1[t]];
     ex1=Abs[x1-tx1]; m1[[i+1]]=ex1;
     tx2=N[g2[t]]; ex2=Abs[x2-tx2];
     m2[[i+1]]=ex2;
     Print["i"," , ","t1"," , ","x11",
     " , ","x22"," , ",
     "ex1"," , ",ex2],{i,1,10}];
     ListPlot[m1,PlotJoined->True,PlotLabel->"error e1"];
     ListPlot[m2,PlotJoined->True,PlotLabel->"error e2"]
```

Άσκηση

Αν $\ell = 0.1$, να λυθούν τα προβλήματα αρχικής τιμής 1ης τάξης:

i)

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + 2y_2; \quad 0 \le t \le 2, \quad y_1(0) = 0, \\ y_2' &= 4y_1 + y_2; \quad 0 \le t \le 2, \quad y_2(0) = 1 \end{aligned}$$

και η θεωρητική λύση είναι

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{e^{5t} - e^{-t}}{3}, \\ y_2(t) &= \frac{e^{5t} + 2e^{-t}}{3}. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} y_1' &= -4y_1 - 2y_2 + \cos t + 4\sin t; \quad 0 \le t \le 1, \quad y_1(0) = 0, \\ y_2' &= 3y_1 + y_2 - 3\sin t; \quad 0 \le t \le 1, \quad y_2(0) = -1 \end{aligned}$$

και η θεωρητική λύση είναι

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 2e^{-t} - 2e^{-2t} + \sin t, \\ y_2(t) &= -3e^{-t} + 2e^{-2t}. \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2; \quad 0 \le t \le 1, \quad y_1(0) = 3, \\ y_2' &= -y_1 + 2e^{-t} + 1; \quad 0 \le t \le 1, \quad y_2(0) = 0, \\ y_3' &= -y_1 + e^{-t} + 1; \quad 0 \le t \le 1, \quad y_3(0) = 1 \end{aligned}$$

και η θεωρητική λύση είναι

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \cos t + e^{-t} + \sin t + 1, \\ y_2(t) &= \cos t - e^{-t} - \sin t, \\ y_3(t) &= -\sin t + \cos t. \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 - y_3 + t; & 0 \le t \le 1, \quad y_1(0) = 1, \\ y_2' &= 3t^2; & 0 \le t \le 1, \quad y_2(0) = 1, \\ y_3' &= y_2 + e^{-t}; & 0 \le t \le 1, \quad y_3(0) = -1 \end{aligned}$$

και η θεωρητική λύση είναι

$$\begin{aligned} y_1(t) &= t - 0.05t^2 + 0.25t^4 - e^{-t} + 2, \\ y_2(t) &= t^3 + 1, \\ y_3(t) &= 0.25t^4 + t - e^{-t}. \end{aligned}$$

8.5 Διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης

8.5.1 Ορισμός

Έστω η διαφορική εξίσωση n-τάξης που γράφεται στην αναλυτική της μορφή ως

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), \quad a \le t \le b \tag{8.5.1 - 1}$$

με αρχικές συνθήκες $y\,(t_0) = g_1$, $y'\,(t_0) = g_2$, …, $y^{(n-1)}\,(t_0) = g_n$. Θέτοντας $y_1(t) = y(t)$, $y_2(t) = y'(t)$, …, $y_n(t) = y^{(n-1)}(t)$, η $(8.5.1 - 1)$ ανάγεται στο παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με n εξισώσεις και n αγνώστους τις συναρτήσεις $y_i(t)$; $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \frac{dy}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= \frac{dy'}{dt} = y_3 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dt} &= \frac{dy^{(n-2)}}{dt} = y_n \\ \frac{dy_n}{dt} &= \frac{dy^{(n-1)}}{dt} = y^{(n)} \\ &= f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = f\left(t, y_1, y_2, \ldots, y_n\right) \end{aligned} \tag{8.5.1 - 2}$$

με αρχικές συνθήκες $y_1\,(t_0) = y\,(t_0) = g_1$, $y_2\,(t_0) = y'\,(t_0) = g_2$, …, $y_n\,(t_0) = y^{(n-1)}\,(t_0) = g_n$.

Το σύστημα $(8.5.1-2)$ γράφεται με τη βοήθεια πινάκων σε διανυσματική μορφή ως

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{b} \quad \text{με } \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{g} \text{ και } t > t_0, \tag{8.5.1 - 3}$$

όπου $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)]^\top$, $\mathbf{g} = [g_1, g_2, \ldots, g_n]^\top$ και

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}. \tag{8.5.1 - 4}$$

Η μορφή $(8.5.1-3)$ είναι ήδη γνωστή και η λύση ανάγεται στα προηγούμενα.

8.5.2 Μέθοδος RK4

Παράδειγμα 8.5.2 - 1

Με τη μέθοδο RK4, όταν $\ell = 0.1$, να υπολογιστεί η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής

$$y'' - 2y' + 2y = e^{2t} \sin t, \tag{8.5.2 - 1}$$

όταν $0 \leq t \leq 0.5$, $y(0) = -0.4$ και $y'(0) = -0.6$.

Λύση. Έστω $y_1(t) = y(t)$ και $y_2(t) = y'(t)$. Τότε σύμφωνα με τη $(8.5.1-3)$ το πρόβλημα $(8.5.2-1)$ ανάγεται στο σύστημα

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t) \\ y_2'(t) &= e^{2t} \sin t - 2y_1(t) + 2y_2(t) \end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες $y_1(0) = -0.4$, $y_2(0) = -0.6$ και θεωρητική λύση

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 0.2e^{2t} (\sin t - 2\cos t), \\ y_2(t) &= y_1'(t) = 0.2e^{2t} (4\sin t - 3\cos t). \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο RK4 με $\ell = 0.1$, όταν $y_{1,0} = -0.4$ και $y_{2,0} = -0.6$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
k_{11} &= f_1\left(t_0,\, y_{1,0},\, y_{2,0}\right) = y_{2,0} = -0.6, \\
k_{12} &= f_2\left(t_0,\, y_{1,0},\, y_{2,0}\right) = e^{2t_0}\sin t_0 - 2y_{1,0} + 2y_{2,0} = -0.4, \\
k_{21} &= f_1\left(t_0 + \frac{\ell}{2},\, y_{1,0} + \frac{1}{2}k_{11},\, y_{2,0} + \frac{1}{2}k_{12}\right) = y_{2,0} + \frac{1}{2}k_{12} = 0.62, \\
k_{22} &= f_2\left(t_0 + \frac{\ell}{2},\, y_{1,0} + \frac{1}{2}k_{11},\, y_{2,0} + \frac{1}{2}k_{12}\right) \\
&= e^{2(t_0+0.05)}\sin\left(t_0 + 0.05\right) - 2\left(y_{1,0} + \frac{1}{2}k_{11}\right) + 2\left(y_{2,0} + \frac{1}{2}k_{12}\right) \\
&= -0.32476448, \\
k_{31} &= f_1\left(t_0 + \frac{\ell}{2},\, y_{1,0} + \frac{1}{2}k_{21},\, y_{2,0} + \frac{1}{2}k_{22}\right) \\
&= y_{2,0} + \frac{1}{2}k_{22} = -0.61623822, \\
k_{32} &= f_2\left(t_0 + \frac{\ell}{2},\, y_{1,0} + \frac{1}{2}k_{21},\, y_{2,0} + \frac{1}{2}k_{22}\right) \\
&= e^{2(t_0+0.05)}\sin\left(t_0 + 0.05\right) - 2\left(y_{1,0} + \frac{1}{2}k_{21}\right) + 2\left(y_{2,0} + \frac{1}{2}k_{22}\right) \\
&= -0.31524092, \\
k_{41} &= f_1\left(t_0 + \frac{\ell}{2},\, y_{1,0} + \frac{1}{2}k_{31},\, y_{2,0} + \frac{1}{2}k_{32}\right) \\
&= y_{2,0} + \frac{1}{2}k_{32} = -0.63152409, \\
k_{42} &= f_2\left(t_0 + \frac{\ell}{2},\, y_{1,0} + \frac{1}{2}k_{31},\, y_{2,0} + \frac{1}{2}k_{32}\right) \\
&= e^{2(t_0+0.05)}\sin\left(t_0 + 0.05\right) - 2\left(y_{1,0} + \frac{1}{2}k_{31}\right) + 2\left(y_{2,0} + \frac{1}{2}k_{32}\right) \\
&= -0.21786373.
\end{aligned}
$$

Πίνακας 8.5.2 - 1: Παράδειγμα 8.5.2 - 1

$y_{1,i}$	Θεωρητική λύση	$y_{2,i}$	Θεωρητική λύση
-0.4000 00002	-0.4000 0000	-0.6000 0000	-0.6000 000
-0.4617 3334	-0.4617 3297	-0.6316 3124	-0.6316 304
-0.5886 0144	-0.5255 5905	-0.6401 4895	-0.6401 478
-0.6466 1231	-0.5886 0005	-0.6136 6381	-0.6136 630
-0.6935 6667	-0.6466 1028	*-0.5365 8203*	-0.5365 821

Τότε

$$y_{1,1} = y_{1,0} + \frac{\ell}{6}\left(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41}\right) = \text{-}\ \mathit{0.4617\,3334},$$

$$y_{2,1} = y_{2,0} + \frac{\ell}{6}\left(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42}\right) = \text{-}\ \mathit{0.6316\,3124}.$$

Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία μέχρι και τη χρονική στιγμή $t = 0.5$, προκύπτουν τα αποτελέσματα του Πίνακα 8.5.2 - 1.

Άσκηση

Αν $\ell = 0.1,\ 0.05$, να λυθούν με τη μέθοδο RK4 τα παρακάτω προβλήματα αρχικής τιμής και να συγκριθούν τα αποτελέσματα με τη θεωρητική λύση:

i) $y'' + 2y' + y = e^t; \quad 0 \leq t \leq 0.3,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ και θεωρητική λύση

$$y(t) = \frac{1}{4}\left(-e^{-t} + e^t + 2te^{-t}\right),$$

ii) $y'' - 2y' + y = te^t - t; \quad 0 \leq t \leq 0.3,\ y(0) = y'(0) = 0$ και

$$y(t) = \frac{1}{6}t^3e^t - te^t + 2e^t - t - 2,$$

iii) $t^2y'' - 2ty' + 2y = t^3 \ln t; \quad 1 \leq t \leq 1.2,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0$ και

$$y(t) = \frac{7}{4}t - \frac{1}{2}t^3 \ln t - \frac{3}{4}t^3.$$

Βιβλιογραφία

[1] Ακρίβης, Γ. & Δουγαλής, Β. (1995). *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–022–6.

[2] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[3] Στεφανάκος, Χ. (2009). *Προγραμματισμός Η/Υ με MATLAB*. Γκιούρδας Εκδοτική. ISBN 978–960–387–856–8.

[4] Atkinson, K. E. (1989). *An Introduction to Numerical Analysis*. John Wiley & Sons (2nd ed.). ISBN 0–471–50023–2.

[5] Butcher, J. (2003). *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. New York: John Wiley & Sons. ISBN 978–0–471–96578–3.

[6] Burden, R. L. & Faires, D. J. (2010). *Numerical Analysis*. Brooks/Cole (7th ed.). ISBN 978–0–534–38216–2.

[7] Conte, S. D. & de Boor, C. (1980). *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. McGraw–Hill Inc (3rd ed.). ISBN 978–0–07–012447–9.

[8] Don, E. (2006). *Schaum's Outlines–Mathematica*. Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN 978–960–209–961–2.

[9] Henrici, P. (1966). *Elements of Numerical Analysis*. New York: John Wiley & Sons. ISBN 978–0–471–37238–7.

[10] Iserles, A. (1996). *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*. Cambridge University Press. ISBN 978–0–521–55655–2.

[11] Leader, L. J. (2004). *Numerical Analysis and Scientific Computation*. Addison–Wesley. ISBN 978–0–201–73499–7.

[12] Schatzman, M. (2002). *Numerical Analysis: A Mathematical Introduction*. Oxford: Clarendon Press. ISBN 978–0–19–850279–1.

[13] Stoer, J. & Bulirsch, R. (2002). *Introduction to Numerical Analysis*. Springer (3rd ed.). ISBN 978–0–387–95452–3.

[14] Sli, E. & Mayers, D. (2003). *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge University Press. ISBN 978–0–521–00794–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/