ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
(Τ.Ε.Ι.) ΑΘΗΝΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Δρ Α. Μπράτσος
E-mail: bratsos@teiath.gr **URL:** http://users.teiath.gr/bratsos/

ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ **ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

ΠΕΡΙΟΔΟΥ **ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2014**

ΤΜΗΜΑΤΟΣ **ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.**

1^o

ii) Να οριστεί το πρόβλημα αρχικής τιμής μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης. Ποια είναι τα κυριότερα μειονεκτήματα λύσης του προβλήματος με τις μεθόδους που βασίζονται στη σειρά Taylor;

ii) Να λυθεί με τη μέθοδο Runge Kutta 4ης τάξης το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = -y + t + 1, \quad \text{όταν} \quad t \in [0.6,\, 0.7], \quad \ell = 0.1, \quad \text{θεωρητική λύση } y(t) = t + e^{-t},$$

όταν η αρχική τιμή y_0 ισούται με την αντίστοιχη θεωρητική.
Υπόδειξη: Αν $y' = f(t, y)$, τότε $y_{i+1} = y_i + \frac{\ell}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$, όταν

$$k_1 = f\left(t_i, y_i\right), \quad k_2 = f\left(t_i + \frac{\ell}{2}, y_i + \frac{\ell}{2}k_1\right), k_3 = f\left(t_i + \frac{\ell}{2}, y_i + \frac{\ell}{2}, k_2\right), \quad k_4 = f\left(t_i + \ell, y_i + \ell k_3\right).$$

2^o

i) Δώστε τους ορισμούς της spline και της φυσικής spline. Στη συνέχεια δείξτε ότι η συνάρτηση

$$s(x) = 2x + 1 + (x+1)_+^3 - 3(x-1)_+^3 + 2(x-2)_+^3$$

ορίζει μια κυβική φυσική spline.

ii) Να υπολογιστεί με τους σύνθετους κανόνες του τραπεζίου και των 3/8 του Simpson το ολοκλήρωμα

$$\int_{-0.3}^{0.3} e^{-x^2} dx, \quad \text{όταν} \quad h = 0.1$$

και τα αποτελέσματα να συγκριθούν με τη θεωρητική τιμή 0.582 476.
Υπόδειξη: Τραπεζίου: $I(f) \approx \frac{h}{2}\left\{f\left(x_0\right) + 2\left[f\left(x_1\right) + \ldots + f\left(x_{N-1}\right)\right] + f\left(x_N\right)\right\}$ και 3/8 του Simpson:

$$\begin{aligned} I(f) \quad \approx \quad & \frac{3h}{8}\left\{f\left(x_0\right) + 3\left[f\left(x_1\right) + f\left(x_4\right) + \ldots + f\left(x_{3N-2}\right)\right] + 3\left[f\left(x_2\right) + f\left(x_5\right) + \ldots + f\left(x_{3N-1}\right)\right]\right. \\ & \left. +2\left[f\left(x_3\right) + f\left(x_6\right) + \ldots + f\left(x_{3N-3}\right)\right] + f\left(x_{3N}\right)\right\}. \end{aligned}$$

3^o

i) Εξετάστε αν το θεώρημα, που εξασφαλίζει τη σύγκλιση της μεθόδου των Gauss-Seidel για τη λύση γραμμικών συστημάτων, εφαρμόζεται στην περίπτωση του συστήματος

$$2x_1 - 3x_2 = -7; \quad x_1 + 3x_2 - 10x_3 = 9; \quad 3x_1 + x_3 = 13. \tag{1}$$

Στη συνέχεια εφαρμόστε την παραπάνω μέθοδο στη λύση του συστήματος (1) δυο φορές.
Υπόδειξη: Θεωρητική λύση $x_1 = 4, \quad x_2 = 5 \quad$ και $\quad x_3 = 1$.

ii) Να οριστούν οι διαιρεμένες διαφορές. Στη συνέχεια με τον τύπο παρεμβολής του Newton να υπολογιστεί το πολυώνυμο που διέρχεται από τα σημεία $(-1.0, 2.5)$, $(1.2, 0.5)$ και $(2.0, 1.5)$.

Αθήνα 7 Φεβρουαρίου 2014

Α. Μπράτσος

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
(Τ.Ε.Ι.) ΑΘΗΝΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Δρ Α. Μπράτσος
E-mail: bratsos@teiath.gr **URL:** http://users.teiath.gr/bratsos/

ΘΕΜΑΤΑ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΥ **ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**
ΠΕΡΙΟΔΟΥ **ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2014**
ΤΜΗΜΑΤΟΣ **ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.**

1^o

Να λυθεί με τη μέθοδο του Newton η εξίσωση

$$x^3 + 3x^2 - 1 = 0, \quad \text{όταν} \quad x_0 = 0.5.$$

Η διαδικασία να σταματήσει στη 2η επανάληψη.

2^o

Να υπολογιστεί με το σύνθετο κανόνα του Simpson το ολοκλήρωμα

$$\int_{0.6}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \text{όταν} \quad h = 0.1$$

και το αποτέλεσμα να συγκριθεί με τη θεωρητική τιμή $0.447\,148$.

3^o

Να λυθεί με τη μέθοδο του Taylor τάξης $n = 2$ το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = \sin t + e^{-t}; \quad t \in [0, 0.1], \quad y_0 = y(0) = 0, \quad \text{όταν} \quad \ell = 0.1$$

και η θεωρητική λύση είναι $y(t) = 2 - e^{-t} - \cos t$. Να γίνει σύγκριση του αποτελέσματος με την αντίστοιχη θεωρητική.

4^o

Να γραφεί η μορφή του συστήματος υπολογισμού της κυβικής φυσικής spline παρεμβολής στα σημεία

$$(1, 2), \quad (2, 1) \quad \text{και} \quad (3, 4).$$

Υπόδειξη: Όσοι φοιτητές δεν έχουν παραδώσει ή έχουν παραδώσει ορισμένες μόνον εργασίες

5^o (προαιρετικό)

Η μέθοδος των Crank-Nicolson χρησιμοποιείται στη λύση της μονοδιάστατης εξίσωσης διάδοσης θερμότητας

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{όπου} \quad 0 < x < 1; \quad t > 0 \tag{1}$$

και $u(x,t)$ μια επαρκώς διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν το διάστημα της μεταβλητής x υποδιαιρεθεί σε υποδιαστήματα πλάτους $h = 0.1$ και στην (1) εφαρμοστούν μηδενικές συνοριακές συνθήκες Dirichlet, να γραφεί το σύστημα λύσης που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου. Ποια η αντίστοιχη μορφή του συστήματος στην περίπτωση της αντίστοιχης διδιάστατης εξίσωσης

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}, \quad \text{όταν} \quad 0 < x, y < 1 \quad \text{και} \quad t > 0.$$

Αθήνα 7 Φεβρουαρίου 2014

Α. Μπράτσος