ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
(Τ.Ε.Ι.) ΑΘΗΝΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Δρ Α. Μπράτσος
E-mail: bratsos@teiath.gr **URL:** http://users.teiath.gr/bratsos/

ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ **ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

ΠΕΡΙΟΔΟΥ *ΙΟΥΝΙΟΥ 2015*

ΤΜΗΜΑΤΟΣ **ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.**

1^o

Να λυθεί με τη μέθοδο Runge-Kutta 3ης τάξης το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = y - 2t, \quad \text{όταν} \quad t \in [0.5,\, 0.6], \quad \ell = 0.1, \quad \text{η θεωρητική λύση είναι} \quad y(t) = 2 - e^t + 2t$$

και η αρχική τιμή y_0 ισούται με την αντίστοιχη θεωρητική.

Υπόδειξη: Αν $y = y(t)$ και $y' = f(t, y)$, τότε $\quad y_{i+1} = y_i + \frac{\ell}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3), \quad$ όταν

$$k_1 = f(t_i, y_i)\,; \quad k_2 = f\left(t_i + \frac{\ell}{2},\, y_i + \frac{\ell}{2}k_1\right); \quad k_3 = f(t_i + \ell,\, y_i - \ell k_1 + 2\ell k_2)\,.$$

2^o

i) Με τη μέθοδο των Gauss-Seidel να λυθεί το σύστημα

$$2x_1 - x_2 = 3, \qquad 3x_1 + 4x_2 = 10,$$

όταν οι αρχικές τιμές είναι: $x_1^0 = x_2^0 = 0.5$. Η διαδικασία να σταματήσει στην 3η επανάληψη. Εξετάστε αν υπάρχει σύγκλιση της μεθόδου και αιτιολογείστε την απάντησή σας.

Θεωρητική λύση: $x_1 = 2$ και $x_2 = 1$.

ii) Να υπολογιστεί με το σύνθετο κανόνα των 3/8 του Simpson το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{0.9} \ln\left(1 + x^2\right)\, dx, \quad \text{όταν} \quad h = 0.1$$

και το αποτέλεσμα να συγκριθεί με τη θεωρητική τιμή *0.199 624*.

Υπόδειξη:

$$\begin{aligned} I(f) \quad &\approx \quad \frac{3h}{8}\{f(x_0) + 3[f(x_1) + f(x_4) + \ldots + f(x_{3N-2})] + 3[f(x_2) + f(x_5) + \ldots + f(x_{3N-1})] \\ &\quad + 2[f(x_3) + f(x_6) + \ldots + f(x_{3N-3})] + f(x_{3N})\} \end{aligned}$$

3^o

i) Με τον τύπο παρεμβολής του Newton να υπολογιστεί το πολυώνυμο που διέρχεται από τα σημεία $(1.5, 2.5)$, $(2.0, 3.0)$ και $(2.2, 3.5)$.

ii) Με τη μέθοδο του Newton να υπολογιστεί μια ρίζα της εξίσωσης

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0,$$

όταν η αρχική τιμή είναι $x_0 = 1.8$. Η διαδικασία να σταματήσει στην 4η επανάληψη. Τι παρατηρείτε;

Θεωρητική λύση: $x^* = 2$.

Αθήνα 6 Ιουλίου 2015

Α. Μπράτσος

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
(Τ.Ε.Ι.) ΑΘΗΝΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Δρ Α. Μπράτσος
E-mail: bratsos@teiath.gr **URL:** http://users.teiath.gr/bratsos/

ΘΕΜΑΤΑ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΥ **ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**
ΠΕΡΙΟΔΟΥ *ΙΟΥΝΙΟΥ 2015*
ΤΜΗΜΑΤΟΣ **ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.**

1^o

Με τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων να υπολογιστεί το πολυώνυμο $y = ax + b$, που προσεγγίζει τα δεδομένα $(1.0, 2.5)$, $(1.5, 2.5)$, $(2.0, -1.5)$ και $(2.8, 1.0)$.

Υπόδειξη:

$$a = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \quad b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

2^o

Με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{0.9} \ln\left(1 + x^2\right)\, dx, \quad \text{όταν} \quad h = 0.1$$

και τα αποτελέσματα να συγκριθούν με τη θεωρητική τιμή *0.199 624*.

Υπόδειξη: $I(f) \approx \frac{h}{2}\left\{f\left(x_0\right) + 2\left[f\left(x_1\right) + \ldots + f\left(x_{N-1}\right)\right] + f\left(x_N\right)\right\}$

3^o

Να λυθεί με τη μέθοδο του Taylor τάξης $\nu = 2$ το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = y - 2t, \quad \text{όταν} \quad t \in [0.5,\, 0.6], \quad \ell = 0.1, \quad \text{η θεωρητική λύση είναι} \quad y(t) = 2 - e^t + 2t$$

και η αρχική τιμή y_0 ισούται με την αντίστοιχη θεωρητική. Να γίνει σύγκριση του αποτελέσματος με την αντίστοιχη θεωρητική.

Υπόδειξη: Αν $y = y(t)$ και $y' = f(t, y)$, τότε $y_{i+1} = y_i + \ell\, f\left(t_i, y_i\right) + \frac{\ell^2}{2} f'\left(t_i, y_i\right)$.

Αθήνα 6 Ιουλίου 2015

Α. Μπράτσος