24/1/2022

Ροπή

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$|\vec{\tau}| = \tau = r \cdot F \sin\theta$$

Στροφορμή

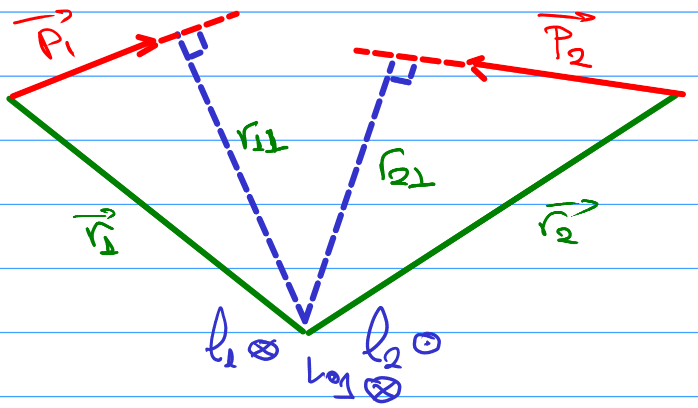
$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \text{ή} \quad \vec{l} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

$$l \to kg \cdot \frac{m^2}{s}$$

$$l = m \cdot r \cdot v \cdot \sin\phi \quad \text{ή} \quad l = m\, r_\perp v \quad \text{ή} \quad l = m\, r\, v_\perp$$

$$l = r_\perp p \quad \text{ή} \quad l = r \cdot p_\perp$$

Η ροπή και η στροφορμή έχουν νόημα μόνο σε σχέση με κάποιο καθορισμένο σημείο



Γνωστά:

$p_1 = 5{,}0 \; kg \cdot m/s$

$r_{1\perp} = 2{,}0 \; m$

$p_2 = 2{,}0 \; kg \cdot m/s$

$r_{2\perp} = 4{,}0 \; m$

$$l_1 = r_{1\perp} \cdot p_1 = 10 \; kg\, m^2/s \quad (-)$$

$$l_2 = r_{2\perp} \cdot p_2 = 8 \; kg\, m^2/s \quad (+)$$

$$L_{ολ} = -10 + 8 = -2 \; kg\, m^2/s$$

Ο Δεύτερος Νόμος του Newton σε γωνιακή μορφή

$$\vec{F}_{\varepsilon\xi} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad , \quad \vec{\tau}_{\varepsilon\xi} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$ (μεμονωμένο σωματίδιο)

Προσοχή: Έχει νόημα μόνο αν οι ροπές $\vec{\tau}$ και η στροφορμή $\vec{\ell}$ ορίζονται ως προς την ίδια αρχή.

Απόδειξη $\left(\vec{\tau} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}\right)$

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow \vec{\ell} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

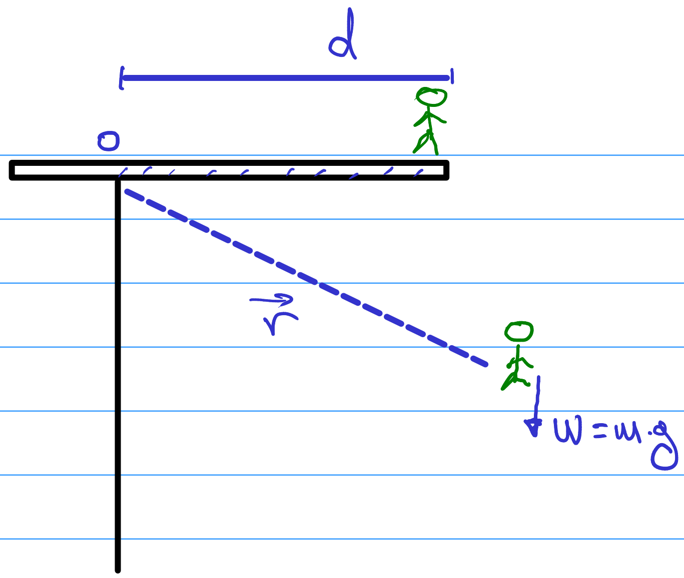
$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[m(\vec{r} \times \vec{v})\right] \Rightarrow \frac{d\vec{\ell}}{dt} = m\left[\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\ell}}{dt} = m\left[\vec{r} \times \vec{\alpha} + \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{0}\right] \Rightarrow \frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{\alpha})$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times m\vec{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{\varepsilon\xi}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{\tau}_{\varepsilon\xi}$$



ελεύθερη πτώση

$v = g \cdot t$

Γνωστά: m, g, d

Άγνωστα: $\underbrace{L = ; \quad , \quad \tau = ;}_{\text{ως προς } O}$

$\tau = r_{\perp} \cdot F$

$\tau = d \cdot w \Rightarrow \tau = d \cdot m \cdot g$

$L = r_{\perp} \cdot P$

$L = d \cdot m \cdot \upsilon \Rightarrow$

$L = d \cdot m \cdot g \cdot t$

Σύστημα Σωματιδίων

$$\vec{L} = \vec{l_1} + \vec{l_2} + \dots + \vec{l_n} \Rightarrow \vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{l_i}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{l_i}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau_i}$$

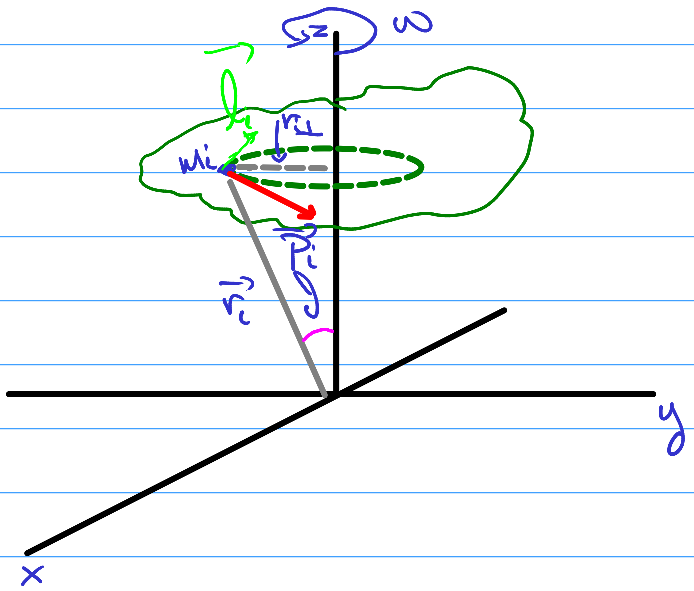
$$\vec{\tau_{\varepsilon\xi}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

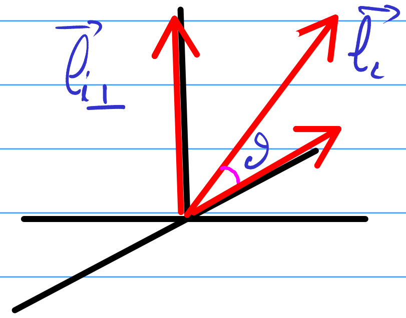
→ Οι ροπές και η στροφορμή του συστήματος πρέπει να μετρώνται ως προς την ίδια αρχή

→ Αν το κέντρο μάζας του συστήματος <u>δεν επιταχύνεται</u> ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, αυτή η αρχή μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο.

→ Αν το κέντρο μάζας του συστήματος <u>επιταχύνεται</u>, η αρχή μπορεί να είναι μόνο στο κέντρο μάζας

Στροφορμή ενός άκαμπτου στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα





Η θέση της μάζας m_i προσδιορίζεται σε σχέση με την αρχή O από το διάνυσμα θέσης $\vec{r_i}$.
Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του στοιχείου μάζας m_i είναι $r_{\perp i}$ = η κάθετη απόσταση ανάμεσα στην m_i και στον άξονα z.

Άρα $l_i = r_i p_i \cdot \sin\phi$ (με $\phi = 90^\circ$ γιατί $\vec{r_i} \perp \vec{p_i}$)

$l_i = r_i p_i \cdot 1$ ή $l_i = r_i \cdot m_i \cdot v_i$

Θέλουμε μόνο την $l_{iz} = l_i \cdot \sin\theta$

$(v_i = \omega \cdot r_{i\perp})$

$l_{iz} = \underbrace{r_i \cdot \sin\theta}_{r_{i\perp}} \cdot m_i \cdot v_i \Rightarrow l_{iz} = r_{i\perp} \cdot m_i \cdot v_i$

$\Rightarrow l_{iz} = m_i \cdot \omega \cdot r_{i\perp}^2$

$L_z = \sum_{i=1}^{n} l_{iz} \Rightarrow L_z = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_{i\perp}^2 \Rightarrow L_z = \omega I$

(I: ροπή αδράνειας ως προς τον ίδιο άξονα)

Διατήρηση της Στροφορμής

Αν ισχύει $\Sigma \vec{\tau} = 0$ τότε $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ και $\vec{L}$ = σταθερό

→ Οι ροπές των εσωτερικών δυνάμεων μπορούν να μεταδώσουν στροφορμή από ένα σώμα του συστήματος σε άλλο σώμα του ίδιου συστήματος, αλλά δεν μπορούν να μεταβάλλουν την ολική στροφορμή του συστήματος.

Όταν $\Sigma \vec{\tau}_{\varepsilon\xi} = 0$ $\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$

1) Δίνεται ο έλικοφόρος στρόβιλος μιας τουρμπίνας αεριωθούμενου αεροπλάνου που έχει $I = 2{,}5\ kg \cdot m^2$ (ροπή αδράνειας) και περιστρέφεται με $\omega_z = \left(40\ \frac{rad}{s^3}\right) \cdot t^2$

Ζητούνται: α) $L_z = ;$ β) $\tau_{o\lambda} = ;$
γ) $\tau_{o\lambda} = ;$ για $t = 3{,}0\ s$

Λύση

α) $L_z = I \cdot \omega_z = (2{,}5\ kg \cdot m^2) \cdot (40\ rad/s^3) \cdot t^2$

$$\Rightarrow L_z = \left(100\ \frac{kg \cdot m^2}{s^3}\right) \cdot t^2$$

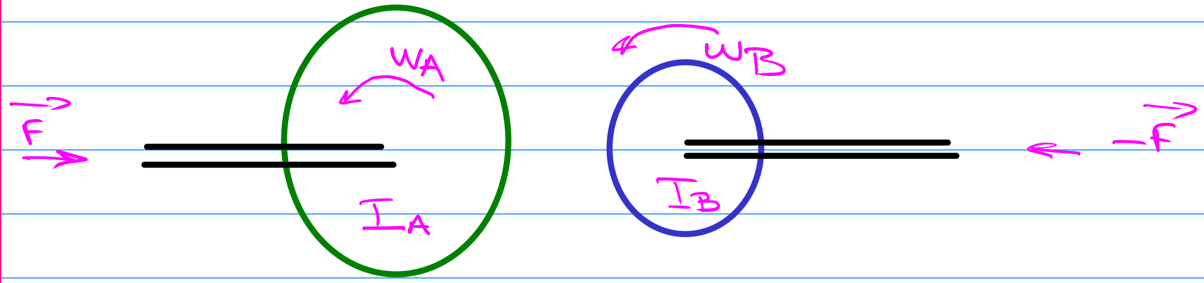
β) $\tau_{o\lambda z} = \frac{dL_z}{dt} \Rightarrow \tau_{o\lambda z} = \left(100\ \frac{kg \cdot m^2}{s^3}\right) \cdot 2 \cdot t$

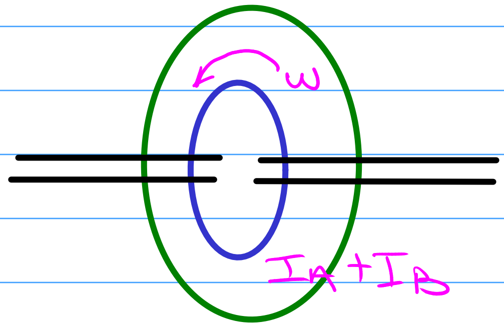
$$\Rightarrow \tau_{o\lambda_z} = \left(200\ \frac{kg \cdot m^2}{s^3}\right) t$$

γ) $\tau_{o\lambda_z} = \left(200\ \frac{kg\ m^2}{s^3}\right) \cdot 3{,}0\ s$

$$\tau_{o\lambda z} = 600\ \frac{kg \cdot m^2}{s^2} \Rightarrow \tau_{o\lambda z} = 600\ N \cdot m$$

2) Δίσκος συμπλέκτη — Σφόνδυλος μηχανής
(Μια περιστροφική σύγκρουση)





Οι δυνάμεις είναι κατά μήκος του άξονα περιστροφής άρα δεν ασκείται καμία εξωτερική ροπή

Δηλαδή $\vec{\tau}_{εξ}=0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt}=0 \Rightarrow \vec{L}=$ σταθερό

$$L_{πριν}=L_{μετά} \Rightarrow I_A\cdot\omega_A+I_B\,\omega_B=(I_A+I_B)\cdot\omega$$

$$\omega=\frac{I_A\omega_A+I_B\omega_B}{I_A+I_B}$$

Η "σύγκρουση" είναι ανάλογη μιας τελείως ανελαστικής κρούσης.

Δεδομένα : Σφόνδυλος : $m = 2{,}0\ kg$ $r = 0{,}20\ m$
$\omega_A = 50\ rad/s$

Δίσκος συμπλέκτη : $m = 4{,}0\ kg$ $r = 0{,}10\ m$
$\omega_B = 200\ rad/s$

Λύση

$$\omega = \frac{I_A \cdot \omega_A + I_B \cdot \omega_B}{I_A + I_B}$$

$$\omega = \ldots = 100\ rad/s$$

$$I_A = \frac{1}{2} m_A r_A^2$$

$$I_A = \frac{1}{2} \cdot 2{,}0 \cdot (0{,}20)^2$$

$$I_A = 0{,}040\ kg \cdot m^2$$

$$I_B = \frac{1}{2} m_B r^2$$

$$I_B = \frac{1}{2}\, 4{,}0 \cdot (0{,}10)^2$$

$$I_B = 0{,}020\ kg\, m^2$$

Αρχική κινητική ενέργεια

$$K_{ΑΡΧ} = \frac{1}{2} I_A \cdot \omega_A^2 + \frac{1}{2} I_B\, \omega_B^2$$

$$\Rightarrow K_{ΑΡΧ} = \ldots = 450\ J$$

Τελική κινητική ενέργεια

$$K_{ΤΕΛ} = \frac{1}{2} (I_A + I_B) \cdot \omega^2$$

$$\Rightarrow K_{ΤΕΛ} = 300\ J$$

Άρα χάθηκε το $\frac{1}{3}$ της αρχικής κινητικής ενέργειας

(ανάλογο μιας τελείως ανελαστικής κρούσης)