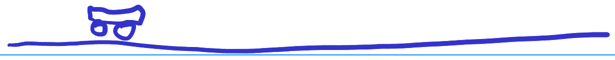


$\vec{x}, \vec{v}, \vec{a}$ $\qquad t$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v\,dt \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt \quad (1)$$

$v =$ σταθερή $\qquad v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = v\,\Delta t$

$$(1) \quad \int_{x_1}^{x} dx = v\int_{t_1}^{t_2} dt \Rightarrow x_2 - x_1 = v\,(t_2 - t_1)$$

$$\Delta x = v \cdot \Delta t$$

Όταν $\alpha =$ σταθερή $\qquad v = v_0 + \alpha t$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\alpha = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = \alpha \cdot dt \Rightarrow \int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} \alpha\,dt \quad (2)$$

$v_1 = v_0 \qquad v_2 = v \qquad t_1 = 0 \qquad t_2 = t$

$$(2) \quad \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t \alpha\,dt \Rightarrow v\Big|_{v_0}^{v} = \alpha\int_0^t dt \Rightarrow$$

$$v - v_0 = \alpha t \Rightarrow v = v_0 + \alpha t \quad (3)$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v \cdot dt \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$$

$x_1 = x_0 \qquad x_2 = x \qquad t_1 = 0 \qquad t_2 = t$

③ $\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (v_0 + at)\,dt \Rightarrow$

$x\Big|_{x_0}^{x} = \int_0^t v_0\,dt + \int_0^t \alpha t\,dt \Rightarrow$

$x - x_0 = v_0 \int_0^t dt + \alpha \int_0^t t\,dt \Rightarrow$

$x - x_0 = v_0 t\Big|_0^t + \alpha \cdot \frac{1}{2} t^2\Big|_0^t \Rightarrow$

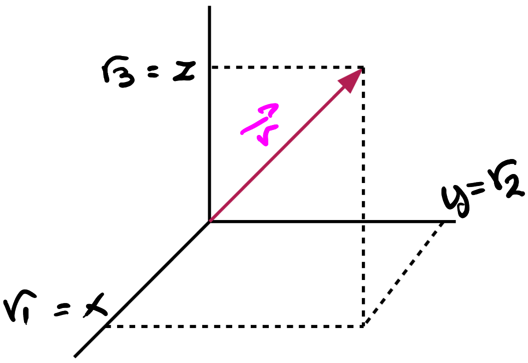
$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow$

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

$\int_{x_1}^{x_2} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{x_1}^{x_2}$

Κίνηση σε Δύο ή Τρεις Διαστάσεις



$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\vec{r} = r_1\hat{i} + r_2\hat{j} + r_3\hat{k}$

↳ Θέση

Μετατόπιση → $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \Rightarrow$

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

ή $\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} + \Delta z\,\hat{k}$

Π.χ. 1

$\vec{r}_1 = 2{,}0\hat{i} - 3{,}0\hat{j} + 4{,}0\hat{k}$

$\vec{r}_2 = 1{,}0\hat{i} + 5{,}0\hat{j} - 2{,}0\hat{k}$

$\Delta\vec{r} =$; $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \Rightarrow$

$\Delta\vec{r} = (1{,}0 - 2{,}0)\hat{i} + (5{,}0 + 3{,}0)\hat{j} + (-2{,}0 - 4{,}0)\hat{k}$

$\Delta\vec{r} = -1{,}0\hat{i} + 8{,}0\hat{j} - 6{,}0\hat{k}$

Π.Χ.2

Θέση κινητού $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$

$x(t) = -0{,}4t^2 + 7{,}2t + 12$

$y(t) = 2{,}3t^2 - 5{,}1t + 15$

$x \to m$
$y \to m$
$t \to s$

α) $\vec{r}(0) = ;$, $\vec{r}(15) = ;$ $\Delta\vec{r} = ;$

$t=0$ $t=15$

$x(0) = +12\ (m)$ $y(0) = +15\ (m)$ $\vec{r}(0) = 12\hat{i} + 15\hat{j}\ (m)$

$x(15) = 30\ (m)$ $y(15) = 456\ (m)$

$\vec{r}(15) = 30\hat{i} + 456\hat{j}\ (m)$

$\Delta\vec{r} = (30-12)\hat{i} + (456-15)\hat{j} \Rightarrow \Delta\vec{r} = 18\hat{i} + 441\hat{j}\ (m)$

Μέση κ' στιγμιαία ταχύτητα

Μέση ταχύτητα: $\vec{v}_\mu = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

Στιγμιαία ταχύτητα: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

Προσοχή: Η κατεύθυνση της στιγμιαίας ταχύτητας $\vec{v}$ ενός σωματιδίου είναι πάντοτε εφαπτόμενη της τροχιάς του σωματιδίου στη θέση στην οποία βρίσκεται.

Αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \Rightarrow$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \Rightarrow$$

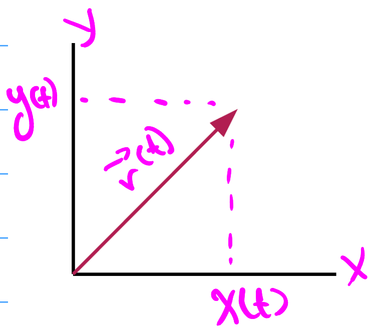
$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

Π.Χ. 3

$$x(t) = -0{,}4t^2 + 7{,}2t + 12$$
$$y(t) = 2{,}3t^2 - 5{,}1t + 15$$

$t = 15\ s$ $\quad \vec{v}$

δηλαδή $\vec{v}, |\vec{v}|, \phi$



$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v_x = -0{,}8t + 7{,}2 \quad (m/s)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow v_y = 4{,}6t - 5{,}1 \quad (m/s)$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \Rightarrow \vec{v} = (-0,8t + 7,2)\hat{i} + (4,6t - 5,1)\hat{j}$$

$$\vec{v}(15) = (-0,8\cdot 15 + 7,2)\hat{i} + (4,6\cdot 15 - 5,1)\hat{j} \Rightarrow$$

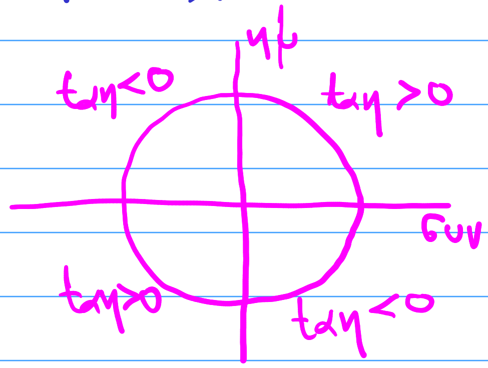
$$\vec{v}(15) = -4,8\hat{i} + 63,9\hat{j}$$

$$|\vec{v}(15)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Rightarrow$$

$$|\vec{v}(15)| = \sqrt{(-4,8)^2 + 63,9^2} \Rightarrow |\vec{v}(15)| = \dots$$

$$\tan\phi = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \tan\phi = \frac{63,9}{-4,8} \Rightarrow \tan\phi = -13,3125$$

$$\tan\phi = \frac{v_y}{v_x}$$



$$\tan = \frac{\sin}{\cos}$$

Μέση κ' στιγμιαία επιτάχυνση

Μέση επιτάχυνση : $\vec{\alpha} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

Στιγμιαία επιτάχυνση : $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

$$\alpha_x = \frac{dv_x}{dt} \quad , \quad \alpha_y = \frac{dv_y}{dt} \quad , \quad \alpha_z = \frac{dv_z}{dt}$$

$$\vec{\alpha} = \alpha_x \hat{i} + \alpha_y \hat{j} + \alpha_z \hat{k}$$

Π.Χ 4

$\vec{\alpha}$; $\quad |\vec{\alpha}| \quad \tan\phi$

(Πχ 3)

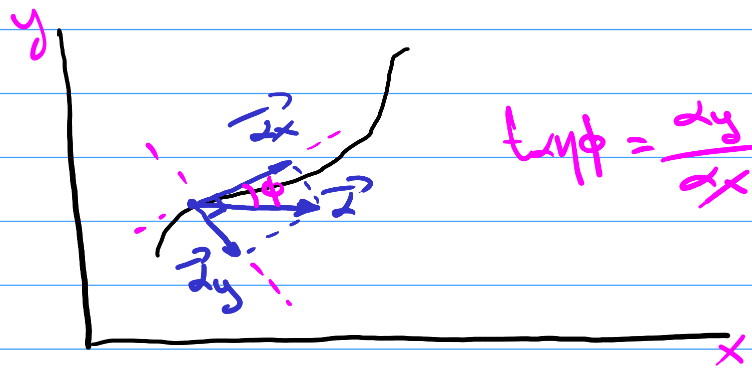
$\alpha_x = \frac{dv_x}{dt} = -0,8 \quad (m/s^2)$

$\alpha_y = \frac{dv_y}{dt} = 4,6 \quad (m/s^2)$

$$\vec{\alpha} = \alpha_x \hat{i} + \alpha_y \hat{j} \Rightarrow \vec{\alpha} = -0,8\hat{i} + 4,6\hat{j}$$

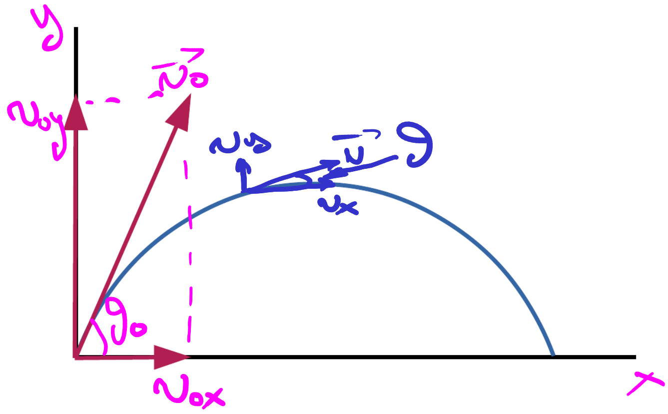
$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2} \Rightarrow |\vec{\alpha}| = \sqrt{(-0,8)^2 + 4,6^2} \Rightarrow |\vec{\alpha}| = \cdot\cdot \quad (m/s^2)$$

$$\tan\phi = \frac{\alpha_y}{\alpha_x} \Rightarrow \tan\phi = \frac{4,6}{-0,8}$$



$\tan\phi = \frac{\alpha_y}{\alpha_x}$

Πλάγια βολή



$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$

$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$

$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$

1) $\vec{a} = \vec{g}$ πάντα προς τα κάτω

2) $a_x = 0$

Προσοχή: Στην πλάγια βολή η κατακόρυφη και η οριζόντια κίνηση είναι ανεξάρτητες η μια από την άλλη, δηλαδή η μια κίνηση δεν επηρεάζει την άλλη.

Ανάλυση της πλάγιας βολής

Οριζόντια κίνηση: $x - x_0 = v_{0x} \cdot t \Rightarrow x - x_0 = v_0 \cos\theta_0 \cdot t$ (1)

Κατακόρυφη κίνηση: $y - y_0 = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$

$y - y_0 = v_0 \cdot \sin\theta_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$ (2)

ταχύτητες

$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$

$v_y = v_0 \sin\theta_0 - g t$

(1,2) $\Rightarrow$ $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{g \cdot x^2}{2(v_0 \cdot \cos\theta_0)^2}$$

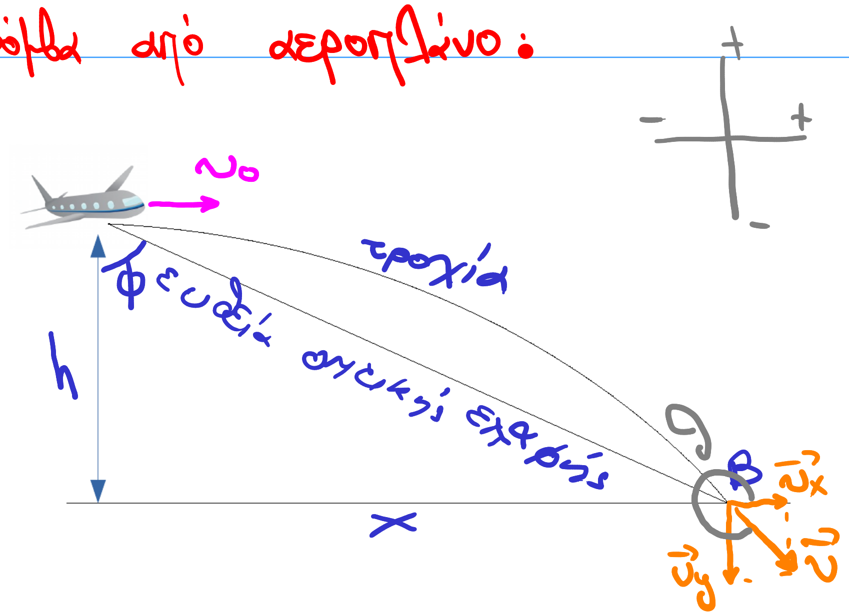
εξίσωση τροχιάς

$|\vec{v}_0| = 300\ m/s$, $\theta_0 = 45^\circ$

μέγιστο ύψος
t ανόδου
x_{max}

Π.Χ 5

Βόμβα από αεροπλάνο:



$h = 500 m$

$v_0 = 198 \ km/h$
$= 55,0 \ m/s$

$\phi = ;$ $\quad$ $\tan\phi = ;$

$B = ;$

$v_B = ;$

Κατακόρυφα: $h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ χρόνος πτώσης

$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 500}{10}} \Rightarrow t = 10,0 s$

Οριζόντια: $x = v_0 \cdot t \Rightarrow x = 55,0 \cdot 10,0 \Rightarrow$
$x = 550 \ m$

$\tan\phi = \frac{x}{h} \Rightarrow \tan\phi = \frac{550}{500} \Rightarrow \tan\phi = 1,1$

$\phi = 47,7°$

$x_B = x = 550 m$

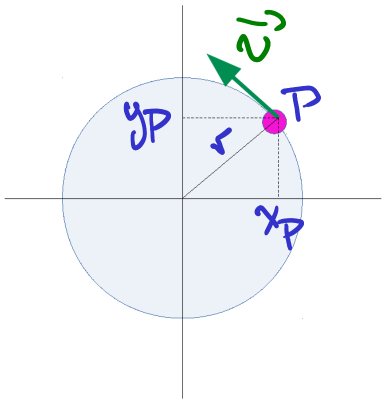
B: $v_x = v_0 = 55,0 \ m/s$

$v_y = -gt \Rightarrow v_y = -10 \cdot 10 = -100 \ m/s$

$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} \Rightarrow \vec{v} = 55,0 \hat{i} - 100 \hat{j}$ $\quad (m/s)$

$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$ $\quad$ $\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-100}{55} = -1,818$

Ομαλή κυκλική κίνηση



$$\sqrt{x_P^2+y_P^2}=r$$

v = σταθερό μέτρο, αλλάζει κατεύθυνση (υπάρχει επιτάχυνση)

Τύποι: $f=\frac{N}{t}$

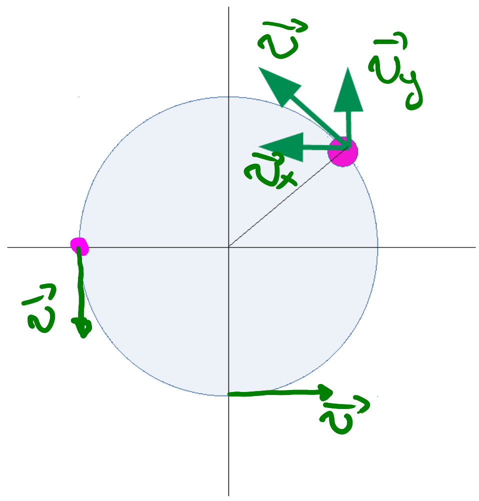
$T=\frac{t}{N}$

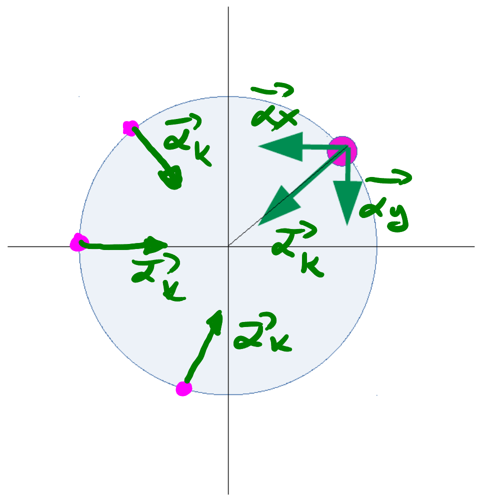
$\omega=2\pi f$ ή $\omega=\frac{2\pi}{T}$

κεντρομόλος επιτάχυνση: $\alpha=\frac{v^2}{r}$

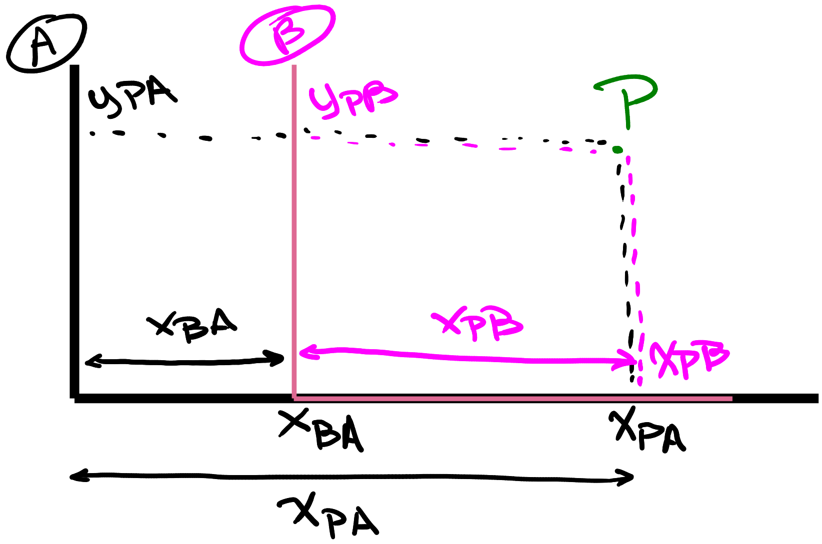
$v=\omega\cdot r$ $\qquad$ $\alpha=\frac{4\pi^2 r}{T^2}=\omega^2\cdot r$

↳ $T=\frac{2\pi r}{v}$ → φυσική σημασία → χρόνος μιας περιστροφής





Σχετική κίνηση σε μια Διάσταση



$$x_{PA} = x_{BA} + x_{PB}$$

$$\frac{dx_{PA}}{dt} = \frac{dx_{BA}}{dt} + \frac{dx_{PB}}{dt} \Rightarrow \upsilon_{PA} = \upsilon_{BA} + \upsilon_{PB}$$

$$\frac{d\upsilon_{PA}}{dt} = \frac{d\upsilon_{BA}}{dt} + \frac{d\upsilon_{PB}}{dt} \Rightarrow \alpha_{PA} = \alpha_{BA} + \alpha_{PB}$$

Περίπτωση $\upsilon_{BA} =$ σταθερή $\qquad \alpha_{PA} = \alpha_{PB}$