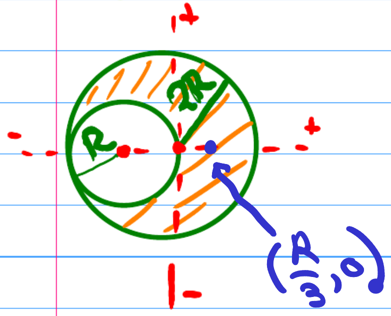
Π.χ



στερεό $x_{cm}^{\varsigma}=;$ $\quad y_{cm}^{\varsigma}=;$

Όλος ο δίσκος

$$x_{cm}^{\delta}=0\,,\quad y_{cm}^{\delta}=0$$

Μικρή πλάκα (που λείπει)

$$x_{cm}^{\varsigma'}=-R \qquad y_{cm}^{\varsigma'}=0$$

$$x_{cm}^{\delta}=\frac{x_{cm}^{\varsigma}\cdot m_{\varsigma}+x_{cm}^{\varsigma'}\cdot m_{\varsigma'}}{m_{\varsigma}+m_{\varsigma'}}$$

$$\downarrow$$

$$0 = x_{cm}^{\varsigma}\cdot m_{\varsigma}+x_{cm}^{\varsigma'}\cdot m_{\varsigma'} \Rightarrow x_{cm}^{\varsigma}=-x_{cm}^{\varsigma'}\cdot\frac{m_{\varsigma'}}{m_{\varsigma}}$$

$$\left.\begin{array}{l} m_{\varsigma'}=\rho V_{\varsigma'} \Rightarrow m_{\varsigma'}=\rho\cdot E_{\varsigma'}\cdot \text{πάχος} \\ m_{\varsigma}=\rho V_{\varsigma} \Rightarrow m_{\varsigma}=\rho\cdot E_{\varsigma}\cdot \text{πάχος}\end{array}\right\} \frac{m_{\varsigma'}}{m_{\varsigma}}=\frac{E_{\varsigma'}}{E_{\varsigma}}$$

$$E_{\varsigma'}=\pi R^2 \qquad E_{\varsigma}=\underbrace{\pi(2R)^2}_{\text{όλου του δίσκου}}-\underbrace{\pi R^2}_{\text{λείπει}}=3\pi R^2$$

$$\frac{m_{\varsigma'}}{m_{\varsigma}}=\frac{\cancel{\rho}\cdot(\pi \cancel{R^2})\cdot \cancel{\text{πάχος}}}{\cancel{\rho}\,(3\pi\cancel{R^2})\,\cancel{\text{πάχος}}}=\frac{1}{3}$$

$$x_{cm}^{\varsigma}=-x_{cm}^{\varsigma'}\,\frac{m_{\varsigma'}}{m_{\varsigma}} \Rightarrow x_{cm}^{\varsigma}=-(-R)\,\frac{1}{3}$$

Άρα $x_{cm}^{\varsigma}=\dfrac{R}{3}$ $\qquad y_{cm}^{\varsigma}=0$

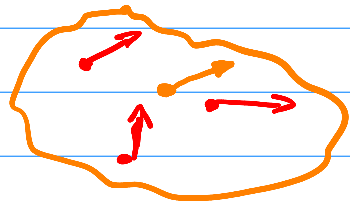
2ος Νόμος του Νεύτωνα (για σύστημα σωμάτων)

$\vec{F}_{\varepsilon\xi} = M\vec{\alpha}_{cm}$ $\quad$ $\vec{F}_{\varepsilon\xi}$ (μόνο εξωτερικές δυνάμεις)

→ σε συνιστώσες

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_\eta\vec{r}_\eta$$

$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_\eta\vec{v}_\eta \; *$$



$$M\vec{\alpha}_{cm} = m_1\vec{\alpha}_1 + m_2\vec{\alpha}_2 + \dots + m_\eta\vec{\alpha}_\eta$$

* $\vec{P} = M\vec{v}_{cm} = (m_1+m_2)\vec{v}_{cm}$ $\quad$ (δύο σώματα)

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \Rightarrow \vec{v}_{cm} = \frac{\vec{P}}{m_1+m_2} \Rightarrow \vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

Ορμή κ' Ώθηση

Ένα σωμάτιο : $\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow \Sigma\vec{F} = m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} \Rightarrow$

$$\Sigma\vec{F} = \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} \Rightarrow \boxed{\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

Ορμή ή γραμμική Ορμή : $\vec{P} = m\vec{\upsilon}$

$\vec{P} \longrightarrow kg\dfrac{m}{s}$

$\vec{P} = P_x\hat{i} + P_y\hat{j} + P_z\hat{k}$

$$P_x = m\upsilon_x$$
$$P_y = m\upsilon_y$$
$$P_z = m\upsilon_z$$

Έστω $\Sigma\vec{F} \to$ σταθερή

Ώθηση $= \Sigma\vec{F}(t_2 - t_1)$ ή $\vec{J} = \Sigma\vec{F}\cdot\Delta t$

$$\Sigma\vec{F} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \Rightarrow \Sigma\vec{F} = \frac{\vec{P}_2 - \vec{P}_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow$$

$$\Sigma\vec{F}(t_2 - t_1) = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 \Rightarrow \boxed{\vec{J} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1}$$

$$\vec{J} = \Delta\vec{P}$$

Η ώθηση της ολικής δύναμης που δρα στο σωμάτιο κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος είναι ίση με τη μεταβολή της ορμής στο χρονικό αυτό διάστημα.

Όταν οι δυνάμεις δεν είναι σταθερές

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\vec{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{P}}{dt}\cdot dt = \int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} d\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

$$\vec{J} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 \; *$$

Γενικός ορισμός της ώθησης

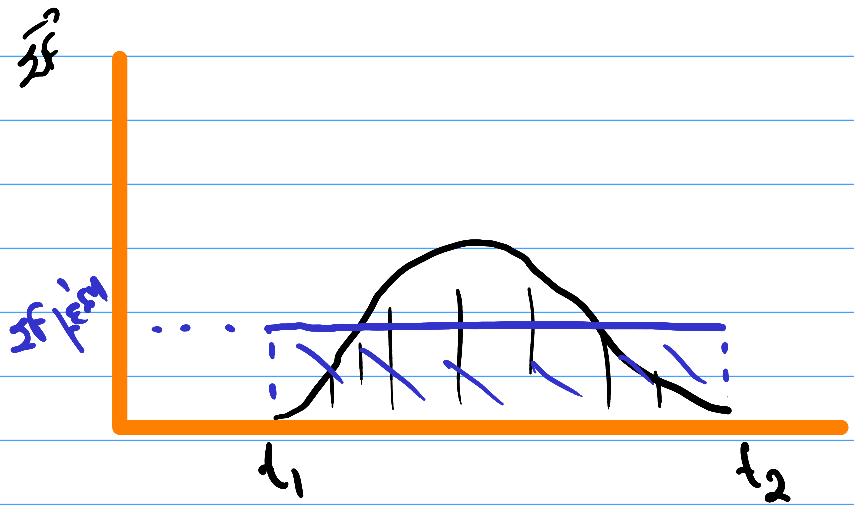
$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\vec{F}\cdot dt$$

*

$$J_x = P_{2x} - P_{1x}$$

$$J_y = P_{2y} - P_{1y}$$

$$J_z = P_{2z} - P_{1z}$$



$\vec{J} \rightsquigarrow$ εμβαδόν

$\vec{J} = \Sigma\vec{F}_{μέση}(t_2 - t_1)$

ορισμός της μέσης ολικής δύναμης

Παρ $\Sigma\vec{F} = \begin{cases} 3t & 0 \le t < 4s \\ 3t + e^t & 4 \le t \end{cases}$

α) $\vec{J}$ $(t_1 = 2s - t_2 = 3s)$; $\int_2^3 3t\,dt$

β) $\vec{J}$ $(t_1 = 3s - t_2 = 5s)$; $\int_3^4 (3t)\,dt + \int_4^5 (3t + e^t)\,dt$

γ) μέση ολική δύναμη $(t_1 = 3s - t_2 = 5s)$

Διατήρηση της ορμής

1 → Εσωτερικές δυνάμεις: Δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των σωμάτων που αποτελούν το σύστημα

2 → Εξωτερικές δυνάμεις: Δυνάμεις που ασκούνται πάνω σε κάποιο μέρος του συστήματος από κάποιο αντικείμενο εκτός του συστήματος.

Αρχή διατήρησης της ορμής: Αν το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων (εξωτερικών) που ασκούνται πάνω σε ένα σύστημα είναι μηδέν, η ολική ορμή του συστήματος είναι σταθερή.

$$\Sigma \vec{F}_{εξ} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{σταθερή}$$

Ισχύει και στις συνιστώσες

Ανάκρουση καραμπίνας

$P_{πριν} = 0$

$P_{μετά} = m_κ υ_κ + m_σ \cdot υ_σ$

$m_κ = 3{,}00\,kg$

$m_σ = 5{,}00\,g$

$υ_σ = 300\,m/s$

ΑΔΟ $P_{μετά} = P_{πριν}$

$m_κ υ_κ + m_σ \cdot υ_σ = 0 \Rightarrow$

$$υ_κ = -\frac{m_σ}{m_κ} υ_σ$$

$$U_K = -\frac{5,00 \cdot 10^{-3}}{3,00} \cdot 300 \Rightarrow U_K = -0,500 \ m/s$$

Πριν $\quad P_\gamma = 0 \qquad K_\gamma = 0$

$\qquad P_K = 0 \qquad K_K = 0$

Μετά $\quad P_\gamma = m_\gamma U_\gamma = 5,00 \cdot 10^{-3} \cdot 300 = 1,50 \ kg \cdot m/s$

$P_K = m_K U_K = 3,00 \cdot (-0,500) = -1,50 \ kg \cdot m/s$

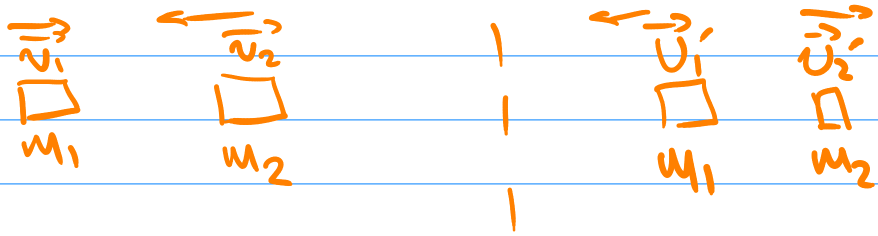
$K_\gamma = \frac{1}{2} m_\gamma U_\gamma^2 = \frac{1}{2} 5,00 \cdot 10^{-3} \cdot (300)^2 \Rightarrow$

$K_\gamma = 225 \ J$

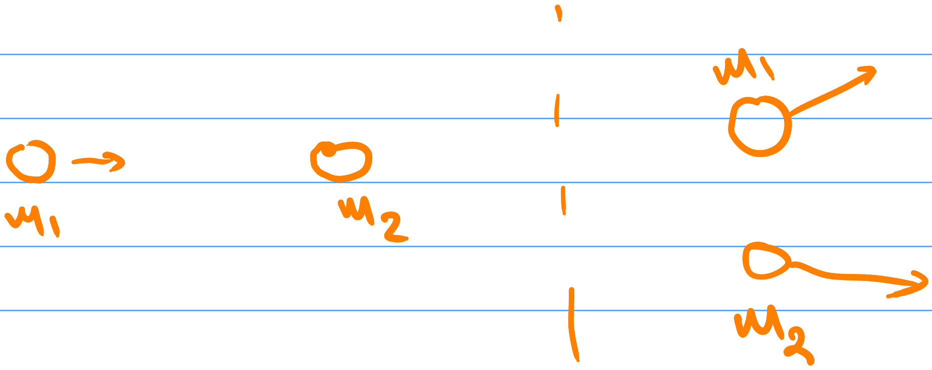
$K_K = \frac{1}{2} m_K U_K^2 = \frac{1}{2} 3,00 \cdot (-0,500)^2 \Rightarrow$

$K_K = 0,375 \ J$

$P_\gamma = -P_K \qquad K_\gamma \neq K_K$



γνωστά : m_1, m_2 και τρεις $υ$ → υπολογίζω την $υ_4$ μόνο με ΑΔΟ



ΑΔΟ : στον $x'x$
ΑΔΟ : στον $y'y$

Ελαστική κρούση: Αν οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωμάτων είναι διατηρητικές ώστε να μην υπάρχει μεταβολή της μηχανικής ενέργειας, η ολική κινητική ενέργεια είναι ίδια πριν και μετά την κρούση.

Μη ελαστική κρούση: η ολική κινητική ενέργεια μετά την κρούση είναι μικρότερη από αυτήν πριν την κρούση.

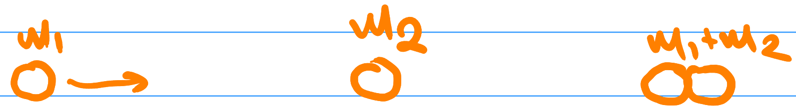
Πλαστική κρούση: Μη ελαστική κρούση που τα σώματα κολλάνε και κινούνται ως ένα σώμα μετά τη κρούση.

Προσοχή: Σε κάθε κρούση στην οποία οι εξωτερικές δυνάμεις μπορούν να αγνοηθούν η ορμή διατηρείται

Δηλαδή $\vec{P}_{πριν} = \vec{P}_{μετά}$

Τελείως μη ελαστικές κρούσεις (Πλαστικές)

Π.χ. m_1, m_2 στον $x'x$ $\quad u_1 > 0, \; u_2 = 0$



ΑΔΟ $\vec{P}_{πριν} = \vec{P}_{μετά} \Rightarrow m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = (m_1+m_2)\vec{u}'$ *

$$K_{πριν} = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$$

$$K_{μετά} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)(u')^2$$

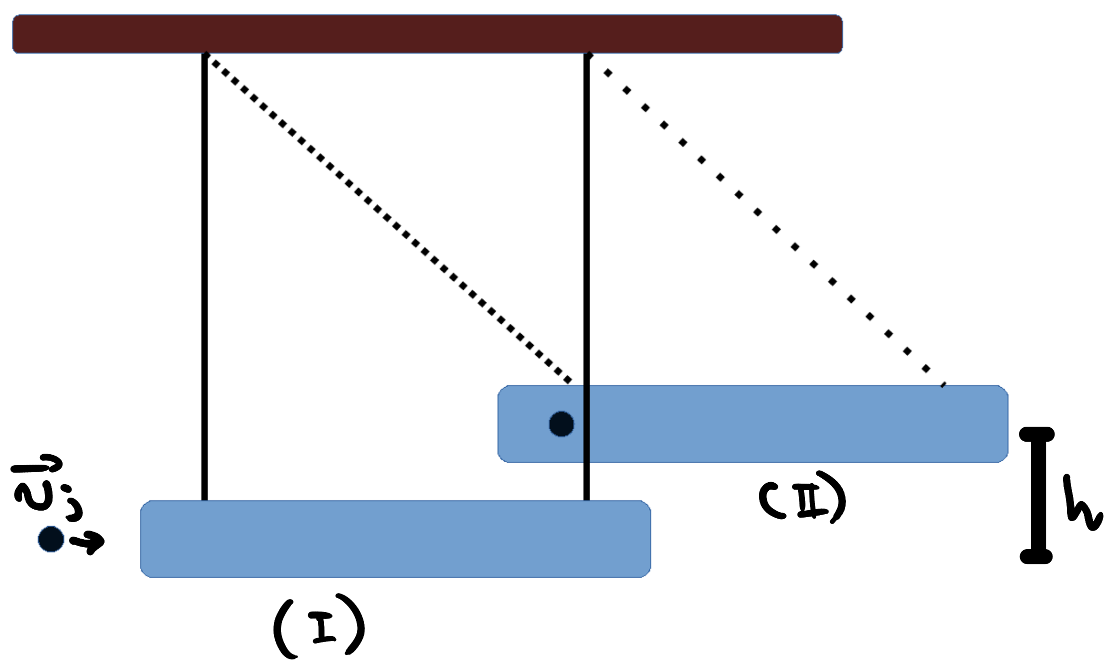
* $m_1u_1 = (m_1+m_2)u' \Rightarrow u' = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}u_1 > 0$

$$\frac{K_{πριν}}{K_{μετά}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}m_1u_1^2}{\cancel{\frac{1}{2}}(m_1+m_2)u'^2} = \frac{m_1u_1^2}{(m_1+m_2)\left(\dfrac{m_1}{m_1+m_2}u_1\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{K_{πριν}}{K_{μετά}} = \frac{\cancel{m_1}\cancel{u_1^2}}{\cancel{(m_1+m_2)}\dfrac{m_1^{\cancel{2}}}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}}\cancel{u_1^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{K_{πριν}}{K_{μετά}} = \frac{m_1+m_2}{m_1}}$$

Το βαλλιστικό εκκρεμές



$m_\sigma = 10g = m_1$ $\qquad M_\Xi = 5\,kg = m_2$ $\qquad h = 7cm$

$g = 10\ m/s^2$

$\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu\ \kappa\rho o\upsilon\sigma\eta} = \vec{P}_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \Rightarrow m_1 u_1 = (m_1 + m_2) u'$ *

ΑΔΜΕ: $\quad$ (I) $K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u'^2 \qquad U = 0$

(II) $U = (m_1 + m_2) g h \qquad K = 0$

$E_{(I)} = E_{(II)} \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{(m_1 + m_2)} u'^2 = \cancel{(m_1 + m_2)} g h$

$u' = \sqrt{2gh} \Rightarrow$

$u' = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow u' = \sqrt{1{,}4}\ m/s$

* $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v' \Rightarrow v_1 = \dfrac{(m_1 + m_2) v'}{m_1}$

$\Rightarrow v_1 = \dfrac{(10 \cdot 10^{-3} + 5)}{10 \cdot 10^{-3}} \cdot \sqrt{1,4} \quad m/s$

Ελαστικές κρούσεις (σε μια διάσταση)

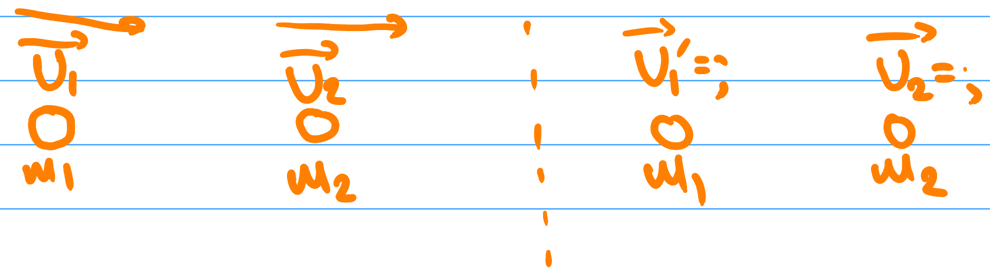
Ισχύουν ΑΔΟ

Διατήρηση κινητικής ενέργειας

$\vec{P}_{πριν} = \vec{P}_{μετά}$, $K_{πριν} = K_{μετά}$

Π.χ. m_1, m_2 υ_1, υ_2 $\upsilon_1' = ;$ $\upsilon_2' = ;$

Ελαστική κρούση



(x'x) $P_{πριν} = P_{μετά} \Rightarrow m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2'$ (1)

$K_{πριν} = K_{μετά} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2$ (2)

(1) $m_1\upsilon_1 - m_1\upsilon_1' = m_2\upsilon_2' - m_2\upsilon_2 \Rightarrow$

$m_1(\upsilon_1 - \upsilon_1') = m_2(\upsilon_2' - \upsilon_2)$ (3)

(2) $m_1\upsilon_1^2 - m_1\upsilon_1'^2 = m_2\upsilon_2'^2 - m_2\upsilon_2^2 \Rightarrow$

$m_1(\upsilon_1^2 - \upsilon_1'^2) = m_2(\upsilon_2'^2 - \upsilon_2^2) \Rightarrow$

$m_1(\upsilon_1 - \upsilon_1')(\upsilon_1 + \upsilon_1') = m_2(\upsilon_2' - \upsilon_2)(\upsilon_2' + \upsilon_2)$ (4)

$$\frac{(4)}{(3)} \Rightarrow v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \quad (5)$$

(3),(5)

$$m_1 v_1 - m_1 v_1' = m_2 v_2' - m_2 v_2$$
$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2$$

λύσεις :

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$+m_1 v_1' + m_2 v_2' = +m_1 v_1 + m_2 v_2$$
$$v_1' - v_2' = -v_1 + v_2$$

$$D = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -m_1 - m_2 = -(m_1 + m_2)$$

$$D_{v_1'} = \begin{vmatrix} m_1 v_1 + m_2 v_2 & m_2 \\ -v_1 + v_2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$D_{v_2'} = \begin{vmatrix} m_1 & m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ 1 & -v_1 + v_2 \end{vmatrix} =$$

$$v_1' = \frac{D_{v_1'}}{D}, \quad v_2' = \frac{D_{v_2'}}{D}$$