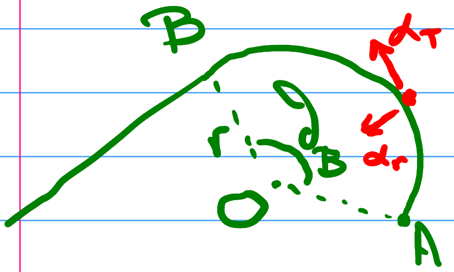


Επιταχύνσεις $(\alpha, \alpha_T, \alpha_r)$

εφαπτομενική γραμμική επιτάχυνση

$$\boxed{\alpha_T = g}$$

ακτινική επιτάχυνση $\alpha_r = \frac{\upsilon^2}{r}$

$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ (γων. επιτ.)

↳ $\omega - \omega_0 = \alpha t \Rightarrow$

$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$ (1)

$\alpha_T = \alpha \cdot r$ ή $\alpha = \frac{\alpha_T}{r}$

$\alpha_T = g$ (σταθερή)

άρα $\alpha = \frac{g}{r}$ (σταθερή)

$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ (2)

$\theta - \cancel{\theta_0} = \cancel{\omega_0 t} + \frac{1}{2}\frac{\alpha_T}{r}t^2$

$\theta = \frac{1}{2}\frac{g}{r}t^2$

(1),(2) $\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$ (3)

$\alpha = \frac{\alpha_T}{r}$, $\omega_0 = 0$, $\theta_0 = 0$

(3) $\to \omega^2 = 2\alpha\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega^2 = 2\frac{\alpha_T}{r}\cdot\theta$

$\upsilon^2 = \omega^2 \cdot r^2$

$\alpha_r = \frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow \alpha_r = \omega^2 \cdot r \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_r = 2\frac{\alpha_T \cdot \theta}{r}\cdot r$

$\Rightarrow \boxed{\alpha_r = 2\alpha_T \cdot \theta}$

$A \to B$ $\alpha_{ολ} = \sqrt{\alpha_T^2 + \alpha_r^2}$ $\Rightarrow$

$$\alpha_{\text{ολ}} = \sqrt{\alpha_T^2 + 4\alpha_T^2 \theta^2} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\text{ολ}}^2 = \alpha_T^2 + 4\alpha_T^2 \theta^2 \Rightarrow$$

$$\theta^2 = \frac{\alpha_{\text{ολ}}^2 - \alpha_T^2}{4\alpha_T^2} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\alpha_{\text{ολ}}}{\alpha_T}\right)^2 - 1}}$$

Αν $\alpha_T = g$ $\quad \alpha_{\text{ολ}} = 2g$ $\quad \theta = ;$

$$\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2g}{g}\right)^2 - 1} \Rightarrow \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{rad}$$

$$\theta = 49{,}6^\circ$$

Αν $\alpha_T = g$ $\quad \alpha_{\text{ολ}} = 4g$ $\quad \theta = ;$

$$\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4g}{g}\right)^2 - 1} \Rightarrow \theta = \frac{\sqrt{15}}{2}\ \text{rad}$$

$$\theta = 1{,}94\ \text{rad}$$

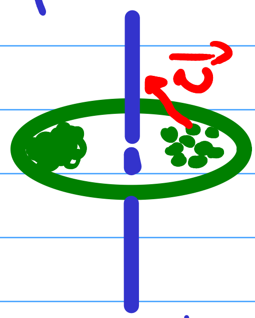
$$\theta = 110{,}95^\circ$$

μετά το B $\quad \alpha_{\text{ολ}} = \alpha_T \qquad \alpha_r = 0$

$$\alpha_{\text{ολ}} = g$$

Κινητική ενέργεια Περιστροφής

• Έστω δίσκος που περιστρέφεται γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο του.



$\cancel{K=\frac{1}{2}mv^2}$ Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το $K=\frac{1}{2}mv^2$ στο δίσκο σαν σύνολο γιατί θα παίρναμε την κινητική ενέργεια μόνο του κέντρου του (κέντρο μάζας) που είναι μηδέν

: Κάθε περιστρεφόμενο στερεό σώμα (π.χ. δίσκος) είναι συλλογή σωματιδίων με διαφορετικά μέτρα ταχύτητας

$$K=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2+\dots+\frac{1}{2}m_\nu v_\nu^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K=\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{2}m_iv_i^2$$ ξέρω $v=\omega\cdot r$

$$\Rightarrow K=\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{2}m_i(\omega\cdot r_i)^2$$

$$\Rightarrow K=\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{2}(m_ir_i^2)\cdot\omega^2$$

$$K=\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{\nu}(m_i\cdot r_i^2)}_{I=\sum_{i=1}^{\nu}(m_i\cdot r_i^2)}\cdot\omega^2$$

$I=\sum_{i=1}^{\nu}(m_i\cdot r_i^2)$ ροπή αδράνειας

Άρα $K=\frac{1}{2}I\omega^2$

Ροπή αδράνειας

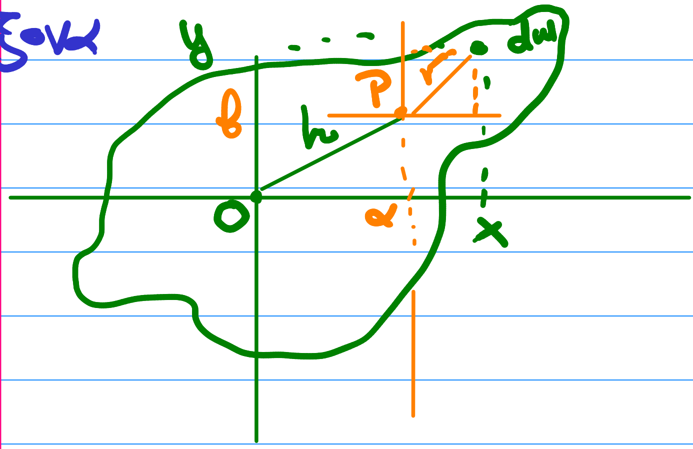
$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (kg \cdot m^2)$$

$$I = \int r^2 \, dm$$ (ροπή αδράνειας συνεχούς κατανομής μάζας)

Θεώρημα των παράλληλων αξόνων

O: άξονας περιστροφής από το cm

P: // άξονα



$x_{cm} = 0 \quad y_{cm} = 0$

$P(\alpha, \beta)$

$dm(x, y)$

$dm(x-\alpha, y-\beta)$

I ροπή αδράνειας ως προς άξονα που περνά από το P

$$I = \int r^2 dm = \int \left[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2\right] dm \Rightarrow$$

$$I = \int \left[(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + (y^2 - 2\beta y + \beta^2)\right] dm \Rightarrow$$

$$I = \int (x^2+y^2) dm + \int (\alpha^2+\beta^2) dm - \int 2\alpha x \, dm \int 2\beta y \, dm$$

$$\int (x^2+y^2) dm = I_{cm} = \int r_{cm}^2 \, dm$$

$$\int (\alpha^2+\beta^2) dm = \int h^2 dm = h^2 \int dm = h^2 \cdot M_{ολ}$$

$$\int 2\alpha x\, dm = 2\alpha \int x\, dm = 2\alpha \cdot M \cdot \underset{0}{\cancel{x_{cm}}} = 0$$

Υπολογισμός x_{cm}, y_{cm}

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\, dm$$

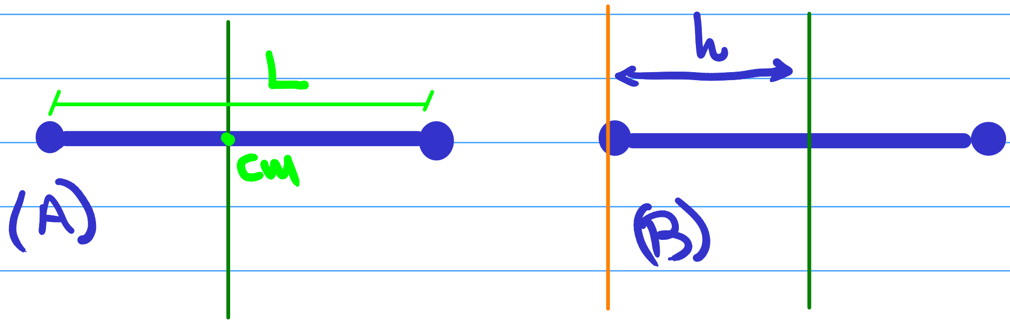
$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\, dm$$

$$\int 2\beta y\, dm = 2\beta \int y\, dm = 2\beta M \cdot \underset{0}{\cancel{y_{cm}}} = 0$$

Άρα $\quad I = I_{cm} + h^2 \cdot M_{ολ} - 0 - 0$

$$I = I_{cm} + h^2 \cdot M_{ολ}$$

Π.Χ.



$m_1 = m_2 = m$ άξονας χωρίς μάζα

(A) άξονα που περνά από cm $I = \sum_{i=1}^{2} m_i r_i^2 \Rightarrow$

$I = m_1 \left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2 \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$I = 2\,\frac{mL^2}{4} \Rightarrow I = \frac{1}{2} m L^2$

$I_{cm} = \frac{1}{2} m L^2$

(B) 1ος τρόπος
άξονας περιστροφής περνά από τη μία μάζα

$I = \sum_{i=1}^{2} m_i r_i^2 \Rightarrow I = m_1 \cdot 0^2 + m_2 L^2$

$\Rightarrow I = m L^2$

2ος τρόπος $I = I_{cm} + m_{ολ} h^2 \Rightarrow$

$I = \frac{1}{2} m L^2 + (m_1 + m_2)\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$I = \frac{1}{2} m L^2 + 2m\,\frac{L^2}{4} \Rightarrow$

$I = m L^2$

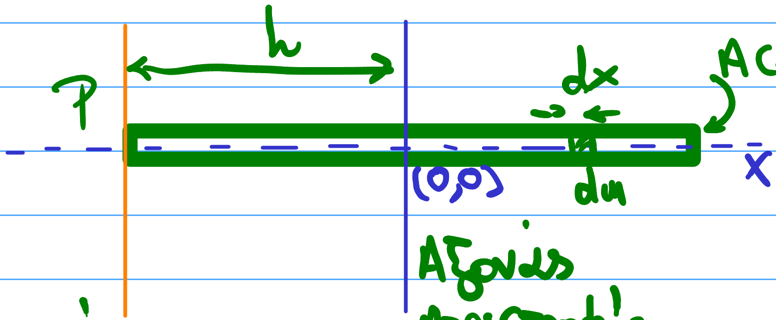
Π.Χ. ομογενής ράβδος (μήκους L)

Πυκνότητα: $\rho = \sigma\tau\alpha\theta.$

A (εμβαδόν διατομής)

α) I_{cm}

β) I ως προς άξονα P



νέος άξονας

Άξονας περιστροφής ως προς CM

α) $I = \int r^2 dm \Rightarrow I = \int x^2 dm \quad (1)$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{dm}{dV} \qquad dV = A\cdot dx \qquad V = A\cdot L$$

$$\frac{M}{A\cdot L} = \frac{dm}{A\cdot dx} \Rightarrow dm = \frac{M}{L}\cdot dx$$

$$(1)\quad I = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \frac{M}{L}\, dx \Rightarrow I = \frac{M}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{M}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$I = \frac{M}{L}\left(\frac{L^3}{8\cdot 3} - \left(-\frac{L^3}{8\cdot 3}\right)\right) \Rightarrow I = \frac{1}{12}\,\frac{M\cdot L^3}{L}$$

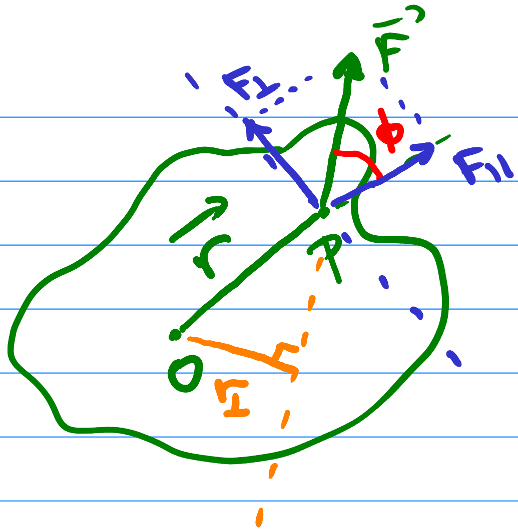
$$I_{cm} = \frac{1}{12} M L^2$$

β) $I = ;$ νέο άξονα

$$I = I_{cm} + m \cdot h^2 \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{12} m L^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{3} m L^2$$



$\tau = F \cdot r \cdot \sin\phi$

$\tau = F \cdot r_{\perp}$

$\tau = F_{\perp} \cdot r$

r μοχλοβραχίονας της $F_{\perp}$

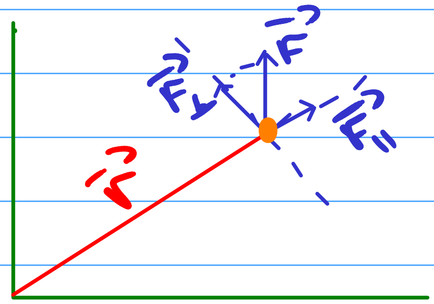
$r_{\perp}$ μοχλοβραχίονας της F

Ροπή: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ μονάδες N·m

$\tau > 0$ αν στρέφει δεξιόστροφα

$\tau < 0$ αν στρέφει αριστερόστροφα

Δεύτερος Νόμος για την Περιστροφή



μόνο ένα σωμάτιο που περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά

$F_{\perp} = m\alpha_t$ ← επιτρόχια επιτάχυνση

$\alpha_{\perp} = \alpha \cdot r$

$\tau = F_{\perp} \cdot r \Rightarrow \tau = m\alpha_{\perp} \cdot r \Rightarrow \tau = m(\alpha \cdot r) \cdot r \Rightarrow$

$\tau = m\alpha r^2 \Rightarrow \tau = (mr^2) \cdot \alpha \Rightarrow$

$\tau = I \cdot \alpha$