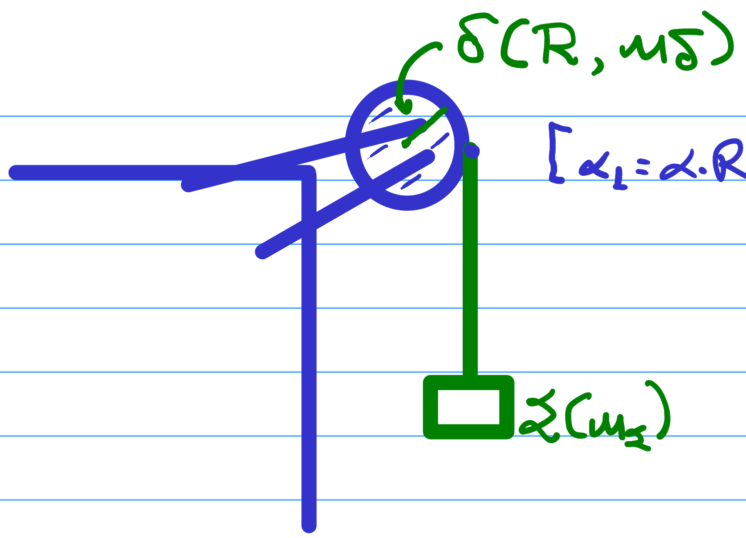
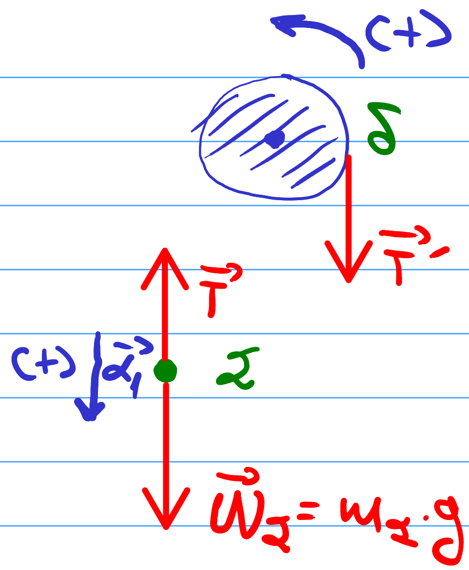


$[\alpha_1 = \alpha \cdot R]$



$T = T'$ (Δρ. – ΑντΔρ.)

$\Sigma: \ \Sigma \vec{F} = m_\Sigma \vec{\alpha}_1 \Rightarrow W_\Sigma - T = m_\Sigma \alpha_1$ (1)

$\delta: \ \left. \begin{array}{l} \tau = -I \cdot \alpha \\ \tau = -T' \cdot R \end{array} \right\} \Rightarrow T' R = I \cdot \alpha \Rightarrow$

$T \cdot \cancel{R} = \frac{1}{2} m_\delta R^{\cancel{2}} \cdot \alpha \Rightarrow$

Δίσκου: $I_{cm} = \frac{1}{2} M R^2$

$T = \frac{1}{2} m_\delta \cdot \underbrace{R \cdot \alpha}_{\alpha_1} \Rightarrow$

$T = \frac{1}{2} m_\delta \cdot \alpha_1$ (2)

(1) $\xRightarrow{(2)}$ $W_\Sigma - \frac{1}{2} m_\delta \cdot \alpha_1 = m_\Sigma \alpha_1 \Rightarrow$

$2 m_\Sigma \cdot g - 2 \frac{1}{2} m_\delta \alpha_1 = 2 m_\Sigma \cdot \alpha_1 \Rightarrow$

$\alpha_1 (2 m_\Sigma + m_\delta) = 2 m_\Sigma g \Rightarrow$

$$\alpha_1 = \frac{2 m_\Sigma g}{2 m_\Sigma + m_\delta}$$

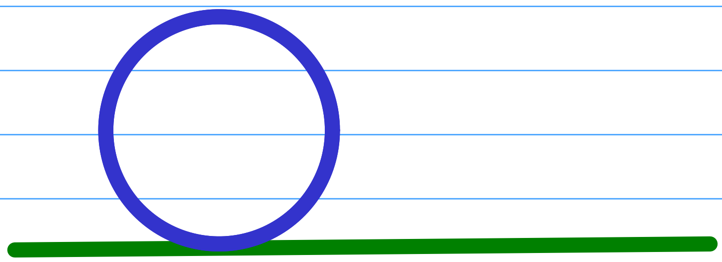
Εφαρμογή : έστω $m_\delta = 2{,}5\ kg$ $R = 20\ cm$

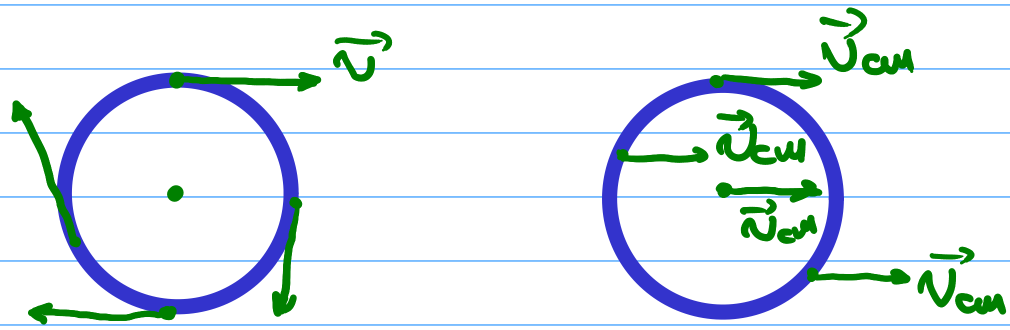
$m_2 = 1{,}2\ kg$ $g = 10\ m/s^2$

$$\alpha_1 = \frac{2 \cdot 1{,}2 \cdot 10}{2 \cdot 1{,}2 + 2{,}5} = \frac{24}{4{,}9}\ m/s^2$$

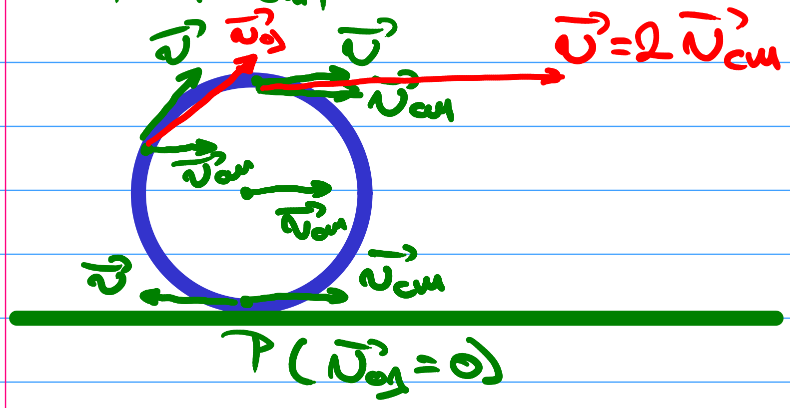
$$\alpha = \frac{\alpha_1}{R} \Rightarrow \alpha = \frac{\frac{24}{4{,}9}}{20 \cdot 10^{-2}}\ rad/s^2$$

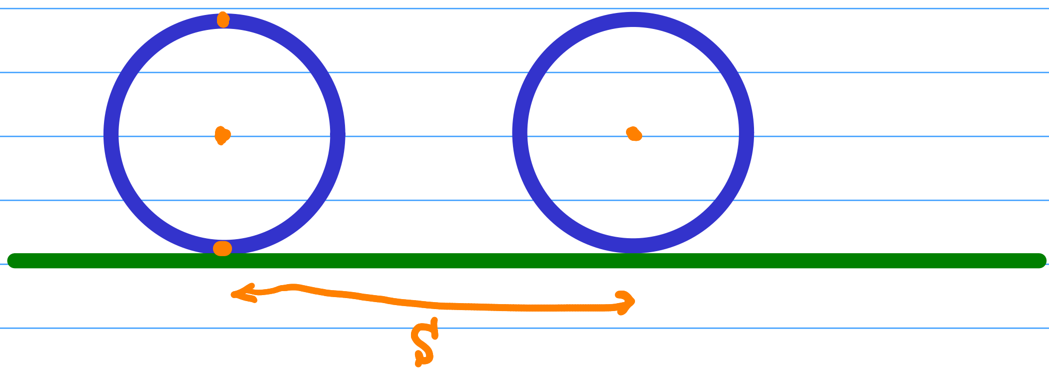
Κύλιση (μεταφορά κ' περιστροφή)





$|\vec{v}| = |\vec{v}_{cm}|$





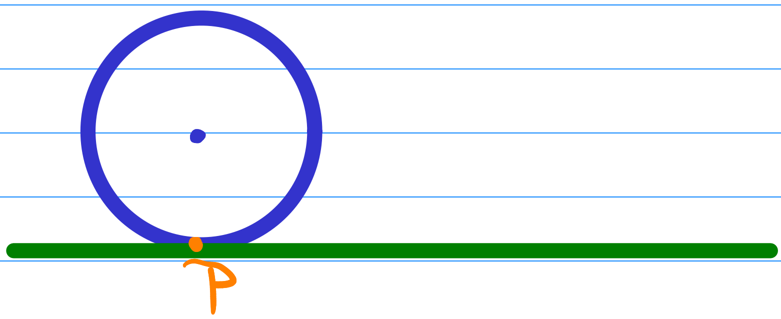
$s = \theta \cdot r$ (θ ακτίνια)

$$v_{cm} = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v_{cm} = \frac{d}{dt}(\theta \cdot r) \Rightarrow$$

$$v_{cm} = r \cdot \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v_{cm} = \omega \cdot r \quad (1)$$

όση γραμμική

Κινητική ενέργεια της κύλισης



Θεωρώ την κύλιση σαν αμιγή περιστροφή γύρω από άξονα διερχόμενο από το P.

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} I_P \omega^2 \\ I_P &= I_{cm} + M \cdot h^2 \Rightarrow I_P = I_{cm} + MR^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{2}\left(I_{cm} + MR^2\right) \cdot \omega^2 \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{2} I_{cm} \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M (\omega R)^2 \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$K = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

$$K = K_{περιστροφής} + K_{μεταφοράς}$$

Τριβή και κύλιση

→ Αν ο τροχός κυλάει με ταχύτητα σταθερού μέτρου δεν έχει την τάση να ολισθήσει στο σημείο επαφής P, γι αυτό το λόγο δεν ασκούνται στο P δυνάμεις τριβής.

→ Αν στον κυλιόμενο τροχό ασκείται συνισταμένη δύναμη για να τον επιταχύνει ή να τον επιβραδύνει, τότε προκαλεί επιτάχυνση α_{cm} του κέντρου μάζας κατά την κατεύθυνση της κίνησης.
Αυτό κάνει τον τροχό να περιστρέφεται πιο γρήγορα ή πιο αργά, που σημαίνει ότι προκαλεί γωνιακή επιτάχυνση α. Αυτές οι επιταχύνσεις τείνουν να κάνουν τον τροχό να ολισθήσει στο P. Επομένως μια δύναμη τριβής πρέπει να ασκείται στο P για να εναντιωθεί στην ολίσθηση.

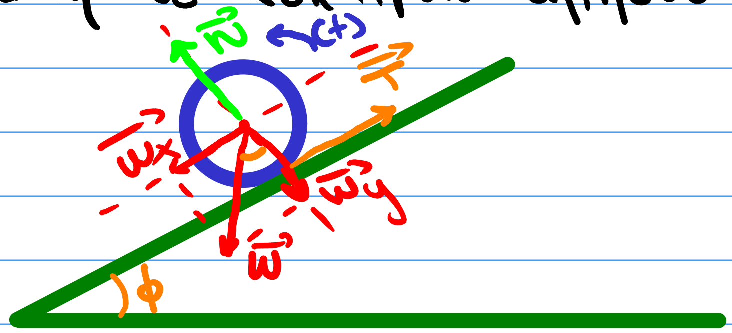
→ Αν ο τροχός δεν ολισθαίνει, πρόκειται για στατική δύναμη τριβής $\vec{T}$, και η κίνηση είναι ομαλή κίνηση.

$$s=\theta\cdot r \Rightarrow \frac{ds}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\cdot r \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d^2\theta}{dt^2}\cdot r \Rightarrow$$

$$\alpha_{cm}=\alpha\cdot R$$

→ Αν ο τροχός ολισθαίνει είναι δύναμη κινητικής τριβής, οπότε δεν ισχύουν τα παραπάνω.

Κύλιση σε κεκλιμένο επίπεδο (χωρίς ολίσθηση)



$w_x = w \cdot \sin\phi$

$w_y = w \cdot \cos\phi$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$

$N - w_y = 0 \Rightarrow$
$N = w_y$

$\Sigma F_x = m \cdot a_{cm}$ (1)
$\Sigma \tau = I_{cm} \cdot \alpha \Rightarrow T \cdot R = I_{cm} \cdot \alpha \quad \Big\} \Rightarrow T \cdot R = I_{cm} \cdot \frac{\alpha_{cm}}{R}$
$\alpha_{cm} = \alpha \cdot R$

$$T = I_{cm} \frac{\alpha_{cm}}{R^2} \quad (2)$$

(1) $w_x - T = m a_{cm} \Rightarrow$
$mg \sin\phi - T = m \alpha_{cm} \overset{(2)}{\Rightarrow}$

$mg \sin\phi = m \alpha_{cm} + I_{cm} \frac{\alpha_{cm}}{R^2} \Rightarrow$

$g \sin\phi = \left(1 + \frac{I_{cm}}{mR^2}\right) \alpha_{cm} \Rightarrow$

$$\alpha_{cm} = \frac{g \cdot \sin\phi}{1 + \frac{I_{cm}}{mR^2}}$$

Προσοχή

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \vec{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$\tau = r \cdot F \sin\theta$

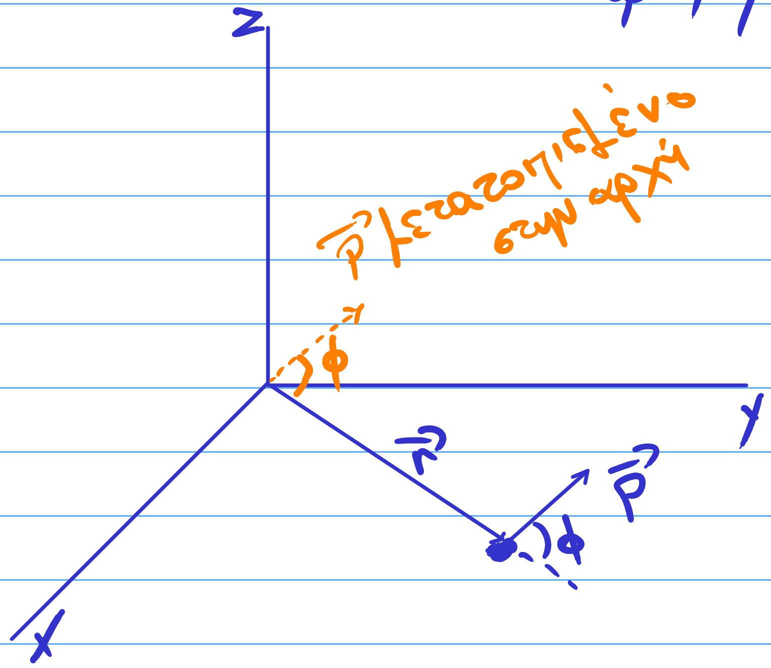
$$\tau = r\,(F \cdot \sin\theta) \Rightarrow \tau = r \cdot F_{\perp}$$

$$\tau = (r \cdot \sin\theta)\,F \Rightarrow \tau = r_{\perp} \cdot F$$

Π.χ. $\vec{F} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ $\qquad \vec{\tau};\ ,\ |\vec{\tau}|;$

$\vec{r} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

Στροφορμή



$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow$$

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times (m\vec{v}) \Rightarrow$$

$$\vec{\ell} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

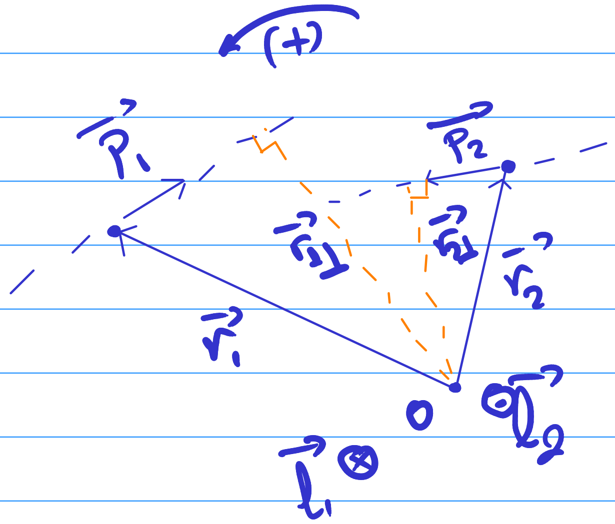
$$\ell \rightarrow kg \cdot \frac{m^2}{s}$$

$$\ell = m \cdot r \cdot v \cdot \sin\phi$$

$$\ell = m\, r_\perp \cdot v \quad \text{ή} \quad \ell = m\, r\, v_\perp$$

→ Η ροπή και η στροφορμή έχουν νόημα μόνο σε σχέση με κάποιο καθορισμένο σημείο.

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow \vec{\ell} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & k \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}$$



Δίνονται

$P_1 = 5{,}0\ kg\ m/s$

$r_{1\perp} = 2{,}0 m$

$P_2 = 2{,}0\ kg\ m/s$

$r_{2\perp} = 4{,}0\ m$

$L_1 = ;$ $\quad L_1 = P_1 \cdot r_{1\perp} \Rightarrow L_1 = 10\ kg\ m^2/s$

$L_2 = ;$ $\quad L_2 = P_2 \cdot r_{2\perp} \Rightarrow L_2 = 8{,}0\ kg\ m^2/s$

$L_{o\lambda} = -L_1 + L_2 \Rightarrow L_{o\lambda} = -2{,}0\ kg\ m^2/s$

Β΄ Νόμος του Νεύτωνα

$$\vec{F}_{εξ} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad , \quad \vec{\tau}_{εξ} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$ (μεμονωμένο σωματίδιο)

Προσοχή: έχει νόημα μόνο αν οι ροπές $\vec{\tau}$ και η στροφορμή $\vec{\ell}$ ορίζονται ως προς την ίδια αρχή

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{P} \Rightarrow \vec{\ell} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

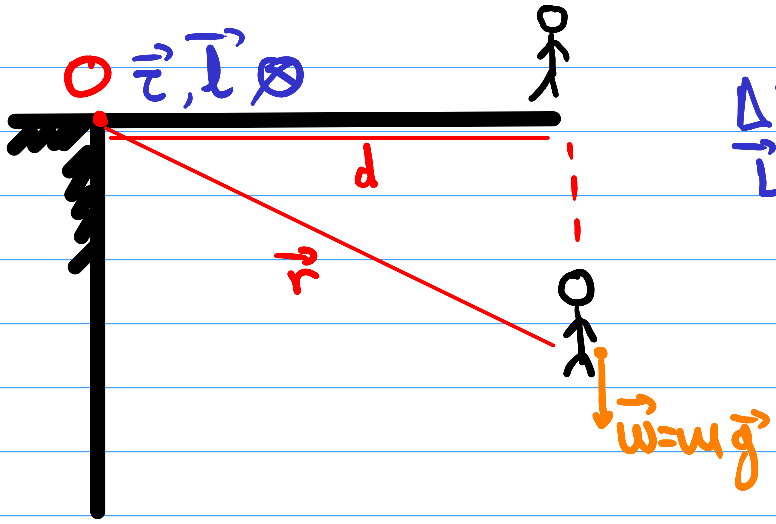
$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d[m(\vec{r} \times \vec{v})]}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m \cdot (\underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{0} + \vec{r} \times \vec{\alpha}) \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{\alpha}) \Rightarrow \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times m\vec{\alpha} \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{εξ} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{\tau}_{εξ}}.$$



Δίνονται: m, g, d

$\vec{L}=;\ \vec{\tau}=;$ ως προς το O.

$$l = r_{\perp} \cdot P \Rightarrow l = d \cdot P$$

$$\Rightarrow l = d \cdot m \cdot v$$

$$\Rightarrow l = dmgt$$

$$\tau = r_{\perp} \cdot F \Rightarrow \tau = r_{\perp} \cdot w \Rightarrow \tau = dmg$$

ή $$\tau = \frac{dl}{dt} \Rightarrow \tau = \frac{d}{dt}(dmgt) \Rightarrow \tau = dmg$$

Στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \dots \vec{l}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{l}_i$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{l}_i}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i \Rightarrow$$

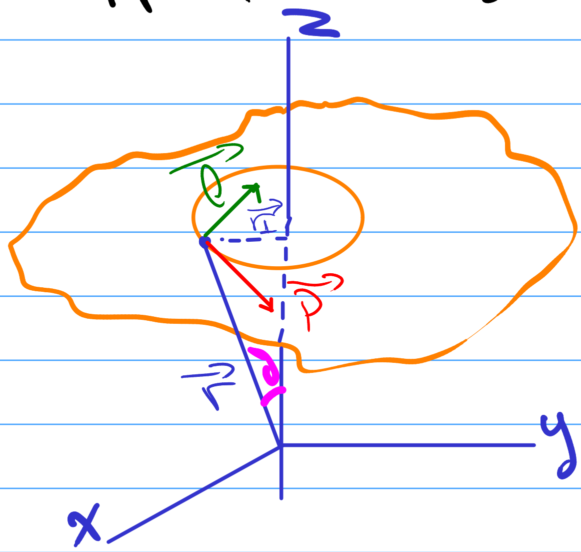
$$\vec{\tau}_{\varepsilon\xi} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$ (Δεύτερος νόμος του Newton σε γωνιακή μορφή)

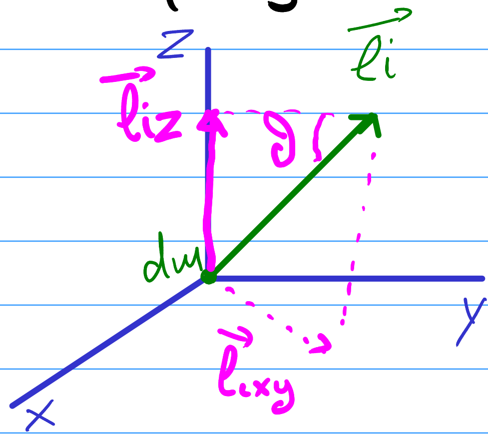
→ Οι ροπές και η στροφορμή του συστήματος πρέπει να μετρώνται ως προς την ίδια αρχή των αξόνων

→ Αν το κέντρο μάζας του συστήματος δεν επιταχύνεται ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, αυτή η αρχή μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο

→ Αν το κέντρο μάζας του συστήματος επιταχύνεται, η αρχή μπορεί να είναι μόνο στο κέντρο μάζας.

Στροφορμή ενός Άκαμπτου Σώματος (στερεού) που περιστρέφεται γύρω από σταθερό Άξονα.





$$l_i = r_i p_i \cdot \sin 90^\circ = r_i p_i$$

$$l_i = dm \cdot r_i v_i$$

Θέτουμε $l_{iz} = l_i \sin\theta$

$$l_{iz} = dm \cdot \underbrace{r_i \cdot v_i \sin\theta}$$

$$l_{iz} = r_{i\perp} \cdot dm\, v_i \qquad (v_i = \omega r_{i\perp})$$

$$l_{iz} = r_{i\perp} \cdot dm \cdot \omega \cdot r_{i\perp} \Rightarrow$$

$$l_{iz} = \omega\, dm\, r_{i\perp}^2$$

$$L_z = \Sigma l_{iz} = \omega\, \Sigma dm\, r_{i\perp}^2 \Rightarrow$$

$$L_z = I \cdot \omega$$

(I: ροπή αδράνειας ως προς τον ίδιο άξονα)

Διατήρηση της στροφορμής

Αν $\vec{\tau}_{εξ} = 0 \rightarrow \vec{L} = σταθερό$.