$$\vec{r} \xrightarrow{\frac{d\vec{r}}{dt}} \vec{v} \xrightarrow{\frac{d\vec{v}}{dt}} \vec{\alpha}$$

$$\vec{r} \xleftarrow[t_0,\vec{r}_0,\vec{v}_0]{\int_{r_0} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,dt} \vec{v} \xrightarrow{\frac{d\vec{v}}{dt}} \vec{\alpha}$$

$$\vec{r} \xleftarrow[t_0,\vec{r}_0,\vec{v}_0]{\int_{r_0}^{r} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,dt} \vec{v} \xleftarrow{\int_{v_0}^{v} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \alpha\,dt} \vec{\alpha}$$

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow \Sigma\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{ή} \quad \Sigma\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \ldots$$

$$\tau = |\vec{F}||\vec{r}| \cdot \sin\phi$$

$$\tau = I \cdot a_{\text{γωνιακό}}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \text{ή} \quad \vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

$\vec{P} = m\vec{v}$

$\epsilon = \frac{1}{2} k \cdot (\Delta \ell)^2$

$K = \frac{1}{2} m v^2$ $\qquad$ $U = mgh$

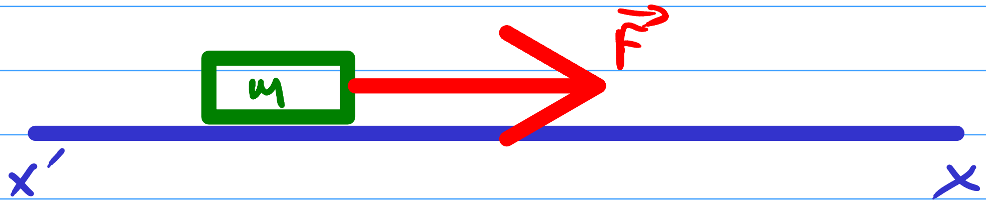
$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \rightarrow \vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k} \right)$

$W = \Delta K$

$\alpha_K = \frac{v^2}{r}$ $\qquad$ $\alpha_T = \alpha_{\text{γων.}} R$

$v^2 = \omega \cdot R$ $\qquad$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 2\pi f$

Σώμα $m=3kg$ κινείται στον άξονα x υπό την επίδραση οριζόντιας δύναμης $F=50t+10$ (N).
Αν $t=0s$, $x_0=5m$ και $\upsilon_0=3m/s$
να βρεθεί η θέση μετά από 3 s.



$$F=m\cdot\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{F}{m} \Rightarrow \alpha=\frac{1}{m}(50t+10) \quad m/s^2$$

$x(t)$

$$\alpha=\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon=\int_{t_0}^{t}\alpha\,dt \Rightarrow$$

$$\upsilon-\upsilon_0=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}(50t+10)\,dt \Rightarrow$$

$$\upsilon-\upsilon_0=\frac{1}{m}\left[50\frac{t^2}{2}+10t\right]_{t_0}^{t} \Rightarrow$$

$$\upsilon=\frac{1}{3}(25t^2+10t)+3 \quad (m/s)$$

$$\upsilon=\frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x}dx=\int_{t_0}^{t}\upsilon\,dt \Rightarrow x-x_0=\int_{t_0}^{t}\left[\frac{1}{3}(25t^2+10t)+3\right]dt$$

$$x-5=\frac{25}{3}\int_0^t t^2dt+\frac{10}{3}\int_0^t t\,dt+3\int_0^t dt$$

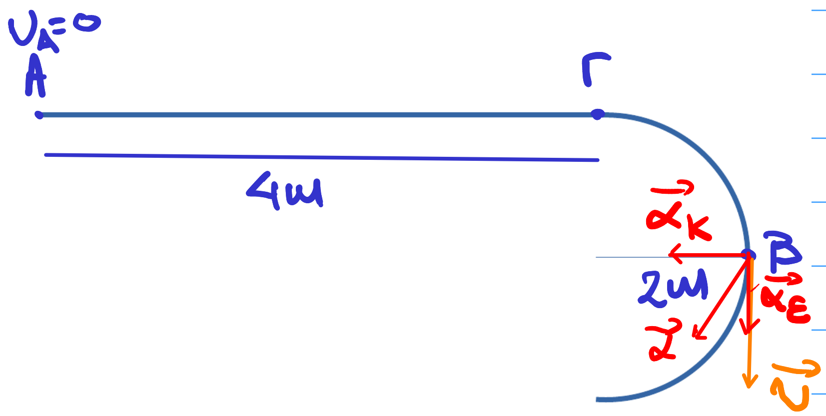
$$x=\frac{25}{3}\cdot\frac{t^3}{3}+\frac{10}{3}\frac{t^2}{2}+3t+5 \quad (m)$$

Για $t = 3s$ $\quad x = \frac{25}{9} 27 + \frac{10}{6} 9 + 3 \cdot 3 + 5$

$x = 75 + 15 + 9 + 5$

$x = 104 \quad (m)$

Κινητό ξεκινά από το Α ακολουθεί τη διαδρομή ΑΒ. Κατά τη διάρκεια της κίνησης ο ρυθμός αύξησης της ταχύτητας $\alpha_\varepsilon = 0{,}30 \cdot t \ (m/s^2)$



Να υπολογιστεί το μέτρο της ταχύτητας στο Β, και το μέτρο της επιτάχυνσης.

Λύση

$\alpha = \sqrt{\alpha_\kappa^2 + \alpha_\varepsilon^2}$ $\qquad \alpha_\varepsilon = \frac{du}{dt}$, $\alpha_\kappa = \frac{u^2}{r}$

$$\alpha_\varepsilon = \frac{du}{dt} \Rightarrow 0{,}30t = \frac{du}{dt} \Rightarrow \int_0^u du = \int_0^t 0{,}30t \, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = 0{,}30 \cdot \frac{t^2}{2} \Rightarrow u = 0{,}15\,t^2 \quad (m/s)$$

$$AB = S = A\Gamma + \Gamma B = 4 + \frac{1}{4} 2\pi r \Rightarrow$$

$$S = 4 + \frac{1}{4} 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \Rightarrow S = 7{,}14 \quad (m)$$

$$u = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \int_0^{7{,}14} ds = \int_0^{t_B} u\,dt \Rightarrow$$

$$s\Big|_0^{7{,}14} = \int_0^{t_B} 0{,}15t^2 dt \Rightarrow$$

$$7{,}14 = 0{,}15 \frac{t^3}{3}\Big|_0^{t_B}$$

$7,14 = 0,05 \cdot t_B^3 \Rightarrow t_B = \sqrt[3]{\frac{7,14}{0,05}} \Rightarrow t_B = 5,23 \ s$

Άρα για $t = t_B = 5,23 \ s$

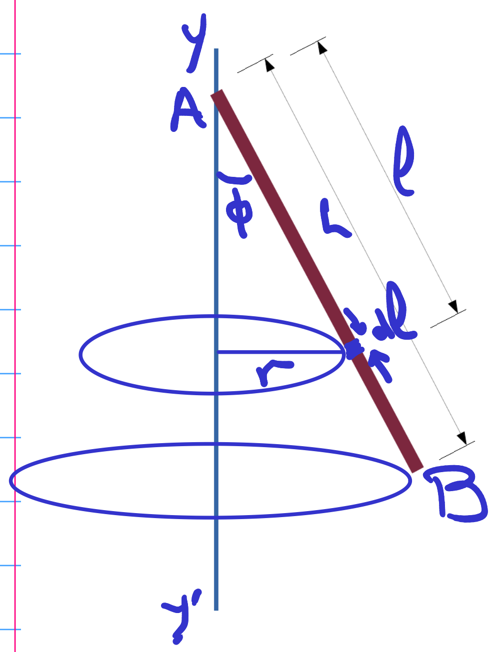
Έχω $\alpha_\varepsilon = 0,30 \cdot 5,23 = 1,57 \ m/s^2$

$U_B = 0,15 \cdot t_B^2 = 0,15 \cdot 5,23^2 = 4,10 \ m/s$

$\alpha_K = \frac{U_B^2}{r} = \frac{4,10^2}{2} = 8,41 \ m/s^2$

$\alpha_B = \sqrt{\alpha_\varepsilon^2 + \alpha_K^2} \Rightarrow \alpha_B = \sqrt{(1,57)^2 + (8,41)^2}$

$\Rightarrow 8,56 \ m/s^2$



Λεπτή ράβδος AB μήκους L, μάζα m περιστρέφεται με το A στερεωμένο στον άξονα y. Το B είναι ελεύθερο. Όταν περιστρέφεται η ράβδος σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα y διαγράφοντας επιφάνεια κώνου.
Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια της ράβδου.

$I=\int r^2 dm$

ράβδος : σταθερή διατομή A και μήκος L

$dm=\rho\, dV \Rightarrow dm=\rho \cdot A \cdot dl$

$\rho=\frac{m}{V} \Rightarrow \rho=\frac{m}{A \cdot L}$

$I=\int r^2 dm \Rightarrow I=\int r^2 \rho A\, dl$

$r=l \cdot \sin\phi$

Άρα $I=\int (l \cdot \sin\phi)^2 \rho A\, dl$

$I=\rho A \sin^2\phi \int_0^L l^2 \cdot dl \Rightarrow I=\frac{m}{A \cdot L} A \cdot \sin^2\phi \cdot \frac{L^3}{3}$

$I=\frac{1}{3} m L^2 \sin^2\phi$

$$k = \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow k = \frac{1}{6} m L^2 \sin^2\phi \, \omega^2$$

Σώμα μάζας 100g με θέση $\vec{r}=(t^2+2)\hat{i}+t^3\hat{j}-\hat{k}$.
Να υπολογιστεί η στροφορμή του σώματος ως προς την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή $t=2s$

Λύση

$\vec{L}=;$

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p} \Rightarrow \vec{L}=m\vec{r}\times\vec{U} \quad (1)$$

Είναι $\vec{U}=\frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \quad \vec{U}=\frac{d}{dt}\left[(t^2+2)\hat{i}+t^3\hat{j}-\hat{k}\right] \Rightarrow$

$$\vec{U}=2t\hat{i}+3t^2\hat{j}$$

Άρα $\vec{L}=m\vec{r}\times\vec{U} \Rightarrow$

$$\vec{L}=m\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ t^2+2 & t^3 & -1 \\ 2t & 3t^2 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{L}=m\Big[\left(t^3\cdot 0-(-1)3t^2\right)\hat{i}$$

$$-\left((t^2+2)\cdot 0-(-1)2t\right)\hat{j}$$

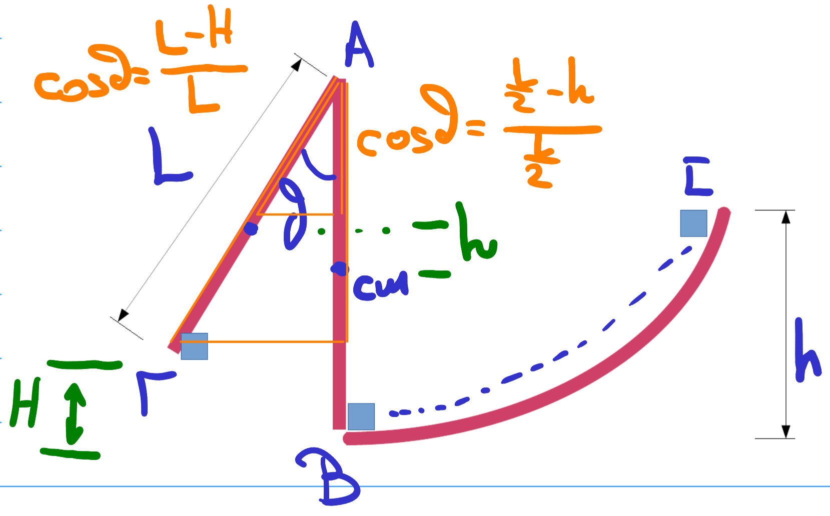
$$+\left((t^2+2)\cdot 3t^2-t^3\cdot 2t\right)\hat{k}\Big] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{L} = m \cdot \left(3t^2 \hat{i} - 2t \hat{j} + (t^4 + 6t^2)\hat{k}\right)$$

Για $t = 2\,s$ έχω $m = 0,1\,kg$

$$\vec{L} = 0,1 \cdot (12\hat{i} - 4\hat{j} + 40\hat{k})$$

$$\vec{L} = 1,2\hat{i} - 0,4\hat{j} + 4,0\hat{k} \quad (SI)$$



Μικρός κύβος
$m_κ = 50g$
Ομογενής ράβδος
$m_ρ = 100g$
$L = 40$ cm
$h = 20$ cm
Να βρεθεί η θ_{max}.

κύβος : ΑΔΜΕ Ε → Β

$$U_E = K_B \Rightarrow$$

$$\cancel{m_κ} g \cdot h = \frac{1}{2} \cancel{m_κ} υ_B^2 \Rightarrow$$

$$υ_B = \sqrt{2gh}$$

(Δίνεται $I_{cm\,δοκού} = \frac{1}{12} M L^2$)

Αρχή διατήρησης της στροφορμής

$L = I\omega$ $\quad L_{πριν} = L_{μετά}$ (ως προς Α)

$$L_κ = L_{συσ}$$

$$I_κ \cdot \omega = I_{ολ} \cdot \omega'$$

$I_\kappa = m_\kappa \cdot L^2$

$v = \omega \cdot r$

$v = \omega \cdot L \Rightarrow$

$\omega = \frac{v}{L}$

$L_{\sigma\upsilon\sigma} = L_{(\delta+\kappa)} = I_{o\lambda}\,\omega'$

$I_{o\lambda} = I_\delta + I_\kappa$

$I_\delta = I_{cm\delta} + m_\delta \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2$

$I_\delta = \frac{1}{12} m_\delta L^2 + \frac{1}{4} m_\delta L^2$

$I_\delta = \frac{1}{3} m_\delta L^2$

$I_\kappa = m_\kappa L^2$

$L_{\pi\rho\iota\nu} = L_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$

$I_\kappa \cdot \omega = I_{o\lambda}\,\omega' \Rightarrow$

$m_\kappa L^2 \cdot \frac{v}{L} = \left(\frac{1}{3} m_\delta L^2 + m_\kappa L^2\right) \cdot \omega'$

Άρα

$$\omega' = \frac{m_\kappa L v}{\frac{1}{3} m_\delta L^2 + m_\kappa L^2}$$

ΑΔΜΕ: Β → Γ

$E_{\mu\eta\chi B} = \frac{1}{2} I_{o\lambda}\,\omega'^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m_\delta L^2 + m_\kappa L^2\right) \cdot \omega'^2$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m_\delta L^2 + m_\kappa L^2\right)\left(\frac{m_\kappa L v}{\frac{1}{3} m_\delta L^2 + m_\kappa L^2}\right)^2$

$$E_{\mu\eta\chi\Gamma} = m_{\kappa} H g + m_{\sigma} \cdot g \cdot h$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{L}{2} - h}{\frac{L}{2}} = \frac{L - H}{L} \Rightarrow$$

$$\frac{L - 2h}{L} = \frac{L - H}{L} \Rightarrow H = 2h$$

$$h = \frac{H}{2}$$

$$E_{\mu\eta\chi B} = E_{\mu\eta\chi\Gamma} \Rightarrow H = \dots\dots$$

$$\cos\theta = \frac{L - H}{L} \Rightarrow \theta = \dots$$