ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

Παναγιώτα Λάλου, Αλέξανδρος Γρυπάρης

Έλεγχος υπόθεσης

- Η γενική διαδικασία που χρησιμοποιείται στη Στατιστική για να αποφασίσουμε αν μια υπόθεση ισχύει ή όχι σε ένα συγκεκριμένο πληθυσμό ονομάζεται **έλεγχος υπόθεσης**

- Ο **έλεγχος υπόθεσης** είναι μια διαδικασία βάση της οποίας συνάγουμε συμπεράσματα για μια παράμετρο του <u>πληθυσμού</u> (π.χ. τη μέση τιμή), χρησιμοποιώντας πληροφορίες που προέρχονται από το <u>δείγμα</u> μας

Έλεγχος υπόθεσης

- Σε όλες τις στατιστικές δοκιμασίες θα έχουμε **δύο υποθέσεις**, για να αποφασίσουμε ποια από τις 2 φαίνεται να είναι πιο πιθανή για τον πληθυσμό αναφοράς

- Η μια υπόθεση λέγεται μηδενική (H_0) και η άλλη εναλλακτική (H_A ή H_1)

Πώς αποφασίζουμε;

- Πώς καταλαβαίνουμε αν το δείγμα μας είναι περισσότερο συνεπές με τη μηδενική υπόθεση ή με την εναλλακτική υπόθεση;

- Υπάρχουν 2 τρόποι για να το κάνουμε αυτό
  - Από την τιμή του στατιστικού κριτηρίου και τους κατάλληλους Πίνακες
  - Ή από την p-value

- Τονίζουμε ότι και οι 2 τρόποι καταλήγουν στο ίδιο συμπέρασμα!

Παράδειγμα 1

- Μετρήσαμε την αρτηριακή πίεση σε 10 παιδιά πριν και μετά τη σωματική άσκηση: Στην 1η ομάδα έχουμε τις μετρήσεις της πίεσης των παιδιών πριν την άσκηση, ενώ στη 2η ομάδα έχουμε τις μετρήσεις της πίεσης στα ίδια παιδιά μετά τη σωματική άσκηση.

- Ο Πίνακας στην επόμενη διαφάνεια παρουσιάζει τα δεδομένα μας.

- Σχετίζεται η αρτηριακή πίεση με τη σωματική άσκηση; (α=0,05)

	Πριν τη σωματική άσκηση	Μετά τη σωματική άσκηση
1	11	12
2	12	12
3	12	13
4	12	12
5	11	12
6	11	13
7	10	11
8	12	11
9	12	12
10	11	12

(συν.)

- Ποιος είναι ο κατάλληλος έλεγχος για αυτή την περίπτωση;

- Ποιους ελέγχους έχουμε μάθει, και πότε χρησιμοποιείται ο καθένας;

Έλεγχοι υποθέσεων και δ.ε. για παρατηρήσεις κατά ζεύγη:

$H_0: \mu_1=\mu_2$ $H_1: \mu_1>\mu_2$	$H_0: \mu_1=\mu_2$ $H_1: \mu_1<\mu_2$	$H_0: \mu_1=\mu_2$ $H_1: \mu_1\neq\mu_2$
$R=\{\frac{\bar{z}}{s_z}\sqrt{n}>t_{n-1;a}\}$	$R=\{\frac{\bar{z}}{s_z}\sqrt{n}<-t_{n-1;a}\}$	$R=\{\left\lvert\frac{\bar{z}}{s_z}\sqrt{n}\right\rvert>t_{n-1;\frac{a}{2}}\}$

Για τον υπολογισμό του Δ.Ε. της διαφοράς των μέσων τιμών, έχουμε:

$$(\bar{z}-\frac{s_z}{\sqrt{n}}t_{n-1;\frac{a}{2}}, \bar{z}+\frac{s_z}{\sqrt{n}}t_{n-1;\frac{a}{2}}), \text{όπου } z=x_i-y_i\,.$$

(συν.)

- Επειδή οι παρατηρήσεις εμφανίζουν κατά ζεύγη αντιστοιχία (σε κάθε παιδί αντιστοιχεί μια μέτρηση πριν και μια μέτρηση μετά τη σωματική άσκηση), θα χρησιμοποιήσουμε τον έλεγχο t-test κατά ζεύγη.

- Ο έλεγχος αυτός χρειάζεται τις διαφορές των 2 μεταβλητών, οπότε προσθέτουμε μια ακόμη στήλη στον πίνακα με τις διαφορές αυτές.

	Πριν τη σωματική άσκηση (X)	Μετά τη σωματική άσκηση (Y)	Διαφορά (Z)	(Z^2)
1	11	12	-1	1
2	12	12	0	0
3	12	13	-1	1
4	12	12	0	0
5	11	12	-1	1
6	11	13	-2	4
7	10	11	-1	1
8	12	11	1	1
9	12	12	0	0
10	11	12	-1	1

Μηδενική και εναλλακτική υπόθεση

- Η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση στο t-test κατά ζεύγη που θα δουλέψουμε είναι:

- H_0: $\mu_1 = \mu_2$ (μηδενική υπόθεση)
- H_A: $\mu_1 \neq \mu_2$ (εναλλακτική υπόθεση)

- Όπου μ_1 και μ_2 ο μέσος όρος της πίεσης πριν και μετά την άσκηση, αντίστοιχα.

(συν.)

- Έχουμε: $\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{10} z_i}{n} = \frac{-1+0-1+\cdots 11}{10} = \frac{-6}{10} = -0{,}6$

- $\sum_{i=1}^{10} z_i^2 = (-1)^2 + 0^2 + (-1)^2 + \cdots + (-1)^2 = 10$

- Η διασπορά είναι:

$$s_z^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} z_i\right)^2}{n}\right) = \frac{1}{10-1}\left(10 - \frac{(-6)^2}{10}\right) = 0{,}71$$

- Άρα, η τυπική απόκλιση είναι: $s_z = \sqrt{0{,}71} = 0{,}84$

(συν.)

- Το στατιστικό κριτήριο είναι: $\left|\frac{\bar{z}}{s_z}\sqrt{n}\right| = \left|\frac{-0,6}{0,84}\sqrt{10}\right|$ =2,259
- Η κρίσιμη τιμή είναι η: $t_{n-1;\frac{a}{2}} = t_{9;0,025}$
- Την τιμή αυτή θα την βρούμε από τον Πίνακα της κατανομής t, που δίνεται στην επόμενη διαφάνεια.
- Βλέπουμε ότι $t_{9;0,025}$=2,262

DF	A = 0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
∞	ta = 1.282	1.645	1.96	2.326	2.576	3.091	3.291
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289	636.578
2	1.886	2.92	4.303	6.965	9.925	22.328	31.6
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.61
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894	6.869
6	1.44	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.86	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.25	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.93	4.318
13	1.35	1.771	2.16	2.65	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.12	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.74	2.11	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.33	1.734	2.101	2.552	2.878	3.61	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.85
21	1.323	1.721	2.08	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.5	2.807	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.06	2.485	2.787	3.45	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.689
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.66
30	1.31	1.697	2.042	2.457	2.75	3.385	3.646
60	1.296	1.671	2	2.39	2.66	3.232	3.46
120	1.289	1.658	1.98	2.358	2.617	3.16	3.373
1000	1.282	1.646	1.962	2.33	2.581	3.098	3.3

Υπολογισμοί (συν.)

- Η κρίσιμη περιοχή είναι η:
- R= $\left\{\left|\frac{\bar{z}}{s_z}\sqrt{n}\right| > t_{n-1;\frac{a}{2}}\right\}$.
- Προφανώς 2,259 = $\left|\frac{\bar{z}}{s_z}\sqrt{n}\right| < t_{n-1\,;\,\frac{a}{2}}$ =2,262
- Άρα, βρισκόμαστε στην κρίσιμη περιοχή R.
- <u>Οπότε, δεν μπορούμε να απορρίψουμε την H_0 .</u>

- Άρα συμπεραίνουμε ότι ο μέσος όρος της αρτηριακής πίεσης πριν τη σωματική άσκηση δεν διαφέρει στατιστικά σημαντικά από το μέσο όρο της πίεσης μετά την άσκηση, στον πληθυσμό αναφοράς.

Υπολογισμοί για το 95% Δ.Ε.

- Για το 95% Δ.Ε. γνωρίζουμε ότι δίνεται από την σχέση:

$$\left(\bar{z} - \frac{s_z}{\sqrt{n}} t_{n-1\,;\,\frac{a}{2}}\,,\ \bar{z} + \frac{s_z}{\sqrt{n}} t_{n-1\,;\,\frac{a}{2}}\ \right)$$

- Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση παίρνουμε:

$$\left(-0{,}6 - \frac{0{,}84}{\sqrt{10}} * 2{,}262\ \ ,\ -0{,}6 + \frac{0{,}84}{\sqrt{10}} * 2{,}262\right)$$

- Κάνοντας τις πράξεις έχουμε ότι το 95% Δ.Ε. για τη διαφορά των 2 μέσων τιμών στον πληθυσμό αναφοράς είναι το: (-1,2009 , 0,0009)
- Άρα, είμαστε 95% σίγουροι ότι στον πληθυσμό αναφοράς η διαφορά του μέσου όρου της αρτηριακής πίεσης πριν και μετά την σωματική άσκηση βρίσκεται στο παραπάνω διάστημα.
  - Παρατηρείστε ότι το 95% Δ.Ε. <u>περιέχει</u> το 0.

Παράδειγμα

- Μια νόσος χαρακτηρίζεται από υψηλό πυρετό. Για να δοκιμαστεί ένα νέο φάρμακο, πραγματοποιήθηκε μια έρευνα. Σε αυτή, οι ασθενείς που συμμετείχαν χωρίστηκαν σε 2 ομάδες. Η μια ομάδα έλαβε το νέο φάρμακο και η άλλη ομάδα έλαβε το κλασικό φάρμακο που δίνονταν για τη νόσο αυτή. Έτσι, τελικά δόθηκε το νέο φάρμακο σε 20 ασθενείς και το κλασικό σε 18 ασθενείς. Μετά από ημέρες, οι μετρήσεις της θερμοκρασίας των 38 ασθενών δίνονται στην επόμενη διαφάνεια.

- Να διερευνηθεί αν οι μέσες τιμές θερμοκρασίας στις δύο ομάδες διαφέρουν, ή όχι.
- Το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας είναι το 0,05.

Μετρήσεις θερμοκρασίας

Νέο φάρμακο:									
38.4	36.8	40.0	39.8	38.6	39.1	38.9	36.8	40.4	39.4
38.0	38.6	40.1	38.1	37.2	39.5	37.3	39.1	39.9	37.8
Κλασσικό φάρμακο:									
40.9	39.5	39.4	38.2	39.7	38.9	38.6	39.9	41.3	38.1
39.6	37.1	39.5	40.3	41.5	39.3	37.6	40.6		

(συν.)

- Ποιος είναι ο κατάλληλος έλεγχος για αυτή την περίπτωση;

- Γιατί;

Έλεγχοι υποθέσεων και δ.ε. για διαφορά μέσων τιμών σε ανεξάρτητους πληθυσμούς σε μικρά δείγματα και με ισότητα διασπορών ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$):

$H_0: \mu_1=\mu_2$ $H_1: \mu1>\mu2$	$H_0: \mu_1=\mu_2$ $H_1: \mu1<\mu2$	$H_0: \mu_1=\mu_2$ $H_1: \mu1\neq\mu2$
$R=\{t>t_{n_1+n_2-2;a}\}$	$R=\{t<-t_{n_1+n_2-2;a}\}$	$R=\{\lvert t\rvert>t_{n_1+n_2-2;\frac{a}{2}}\}$

Για τον υπολογισμό του Δ.Ε. έχουμε:

$$(\overline{x}_1-\overline{x}_2-s\sqrt{\tfrac{1}{n_1}+\tfrac{1}{n_2}}\,t_{n_1+n_2-2;\frac{a}{2}}\ ,\ \overline{x}_1-\overline{x}_2+s\sqrt{\tfrac{1}{n_1}+\tfrac{1}{n_2}}\,t_{n_1+n_2-2;\frac{a}{2}}),\ \text{όπου}\ s^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}.$$

Το στατιστικό κριτήριο t δίνεται από τον τύπο:

$$t=\frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

Υπολογισμοί

- Έχουμε: H_0: $\mu_1=\mu_2$, έναντι της υπόθεσης:
- H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

- Αρχικά πρέπει να υπολογίσουμε τα $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, s_1, s_2.
- $\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{n_1} = \frac{38,4+36,8+\cdots+37,8}{20} = \frac{773,8}{20} = 38,69$
- $\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{18} x_i}{n_1} = \frac{40,9+39,5+\cdots+40,6}{18} = \frac{710,0}{18} = 39,44$

- Επίσης: $\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 38,4^2 + 36,8^2 + \cdots + 37,8^2 = 29.962,2$
- $\sum_{i=1}^{18} x_i^2 = 40,9^2 + 39,5^2 + \cdots + 40,6^2 = 28.031,0$

Υπολογισμοί (συν.)

- Υπενθυμίζουμε ότι για τον υπολογισμό της διασποράς, ο τύπος που χρησιμοποιούμε είναι ο:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right\}$$

- Αυτόν τον τύπο θα τον χρησιμοποιήσουμε 2 φορές: την 1η φορά για τον υπολογισμό της διασποράς s_1 της 1ης ομάδας, και άλλη μια φορά για τον υπολογισμό της διασποράς s_2 της 2ης ομάδας
- Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση:

$$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-1}$$

Υπολογισμοί (συν.)

- $s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\left(\sum_{i=1}^{20} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{20} x_i\right)^2}{n_1}\right) = \frac{1}{19}\left(29962{,}2 - \frac{773{,}8^2}{20}\right) = 1{,}257$
- $s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\left(\sum_{i=1}^{18} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{18} x_i\right)^2}{n_2}\right) = \frac{1}{17}\left(28031 - \frac{710^2}{18}\right) = 1{,}497$

- Οπότε η συνολική διασπορά s^2 είναι:
- $s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(20-1)*1{,}257 + (18-1)*1{,}497}{20+18-2} = \frac{19*1{,}58+17*2{,}24}{36} = 1{,}37$
- Άρα, $s = \sqrt{1{,}37} = 1{,}17$

Υπολογισμοί

- Η τιμή του στατιστικού κριτηρίου είναι:
- $t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{s * \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{38,69 - 39,44}{\sqrt{1,37} * \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{18}}} = \frac{-0,75}{1,36 * 0,32} = -2,00$
- Από τον πίνακα βρίσκουμε ότι η κρίσιμη τιμή είναι $t_{n_1+n_2-2;\frac{a}{2}} = t_{36;0,025}$ =2,339
- Προφανώς |t|=|-2,00|=2,00 < $t_{n_1+n_2-2;\frac{a}{2}}$ =2,339
- Άρα, δεν μπορούμε να <u>απορρίψουμε την H_0</u>
- Οπότε, συμπεραίνουμε ότι οι μέσες τιμές θερμοκρασίας στις δύο ομάδες είναι ίσες, στον πληθυσμό αναφοράς.

Υπολογισμοί για το 95% Δ.Ε.

- Για το 95% Δ.Ε. γνωρίζουμε ότι δίνεται από την σχέση:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\, t_{n_1+n_2-1\,;\,\frac{a}{2}} \quad , \quad \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\, t_{n_1+n_2-1\,;\,\frac{a}{2}}\,,)$$

- Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση παίρνουμε:

$$(38{,}69 - 39{,}44 - 1{,}17 * \sqrt{\frac{1}{20}+\frac{1}{18} * 2{,}339}\;, 38{,}69 - 39{,}44 + 1{,}17 * \sqrt{\frac{1}{20}+\frac{1}{18} * 2{,}339})$$

- Κάνοντας τις πράξεις έχουμε ότι το 95% Δ.Ε. για τη διαφορά των 2 μέσων τιμών στον πληθυσμό αναφοράς είναι το: (-1,639, 0,139)
- Άρα, είμαστε 95% σίγουροι ότι στον πληθυσμό αναφοράς η διαφορά του μέσου όρου της θερμοκρασίας στις 2 ομάδες βρίσκεται στο διάστημα (-1,639, 0,139)

- Παρατηρείστε ότι το 95% Δ.Ε. <u>περιέχει</u> το 0.

Παράδειγμα 3

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα από μία έρευνα που μελετά τη σχέση της νόσου Αλτσχάιμερ με τη σωματική άσκηση.

	Επίπεδο σωματικής άσκησης		
Νόσος	**Αυξημένο**	**Μέτριο**	**Χαμηλό**
Ασθενείς	85	105	110
Υγιείς	125	120	100

Σχετίζεται η σωματική άσκηση (A) με την νόσο Αλτσχάιμερ (B);

(συν.)

- Ποιος είναι ο κατάλληλος έλεγχος για αυτή την περίπτωση;

- Γιατί;

ΕΛΕΓΧΟΣ X^2

H_0: Οι μεταβλητές Α και Β είναι ανεξάρτητες

H_1: Οι μεταβλητές Α και Β δεν είναι ανεξάρτητες

Κρίσιμη περιοχή: $R = \{X^2 > X^2{}_{(r-1)*(s-1);a}\}$

Στατιστικό κριτήριο: $\boldsymbol{X^2 = \sum \frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}}$

όπου: $\boldsymbol{O_{ij} = n_{ij}}$ οι παρατηρούμενες τιμές ($Observed$)

$\boldsymbol{E_{ij} = \frac{n_{i.}\ n_{.j}}{n}}$ οι αναμενόμενες τιμές ($Expected$)

Ή αλλιώς:

$$\boldsymbol{E_{ij} = \frac{Aθροισμα\ i\ γραμμης \times Άθροισμα\ \ j\ στηλης}{n}}$$

Στην **κρίσιμη τιμή** $X^2{}_{(r-1)*(s-1);a}$ **r: αριθμός γραμμών**

s: αριθμός στηλών

- Για τον έλεγχο αυτό έχουμε ότι:

H_0: Οι μεταβλητές Α και Β είναι ανεξάρτητες

H_1: Οι μεταβλητές Α και Β δεν είναι ανεξάρτητες

	Επίπεδο σωματικής άσκησης			
Νόσος	Αυξημένο	Μέτριο	Χαμηλό	ΣΥΝΟΛΟ
Ασθενείς	85	105	110	300
Υγιείς	125	120	100	345
ΣΥΝΟΛΟ	210	225	220	645

- $E_{11} = \frac{n_{1.} \times n_{.1}}{n} = \frac{300 \cdot 210}{645} = 97{,}674$

- $E_{12} = \frac{n_{1.} \times n_{.2}}{n} = \frac{300 \cdot 225}{645} = 104{,}651$

- $E_{13} = \frac{n_{1.} \times n_{.3}}{n} = \frac{300 \cdot 220}{645} = 102{,}326$

- $E_{21} = \frac{n_{2.} \times n_{.1}}{n} = \frac{345 \cdot 210}{645} = 112{,}326$

- $E_{22} = \frac{n_{2.} \times n_{.2}}{n} = \frac{345 \cdot 225}{645} = 120{,}349$

- $E_{23} = \frac{n_{2.} \times n_{.3}}{n} = \frac{345 \cdot 220}{645} = 117{,}674$

$$X^2 = \sum \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} =$$

$$\frac{(85-97{,}674)^2}{97{,}674} + \frac{(105-104{,}651)^2}{104{,}651} + \frac{(110-102{,}326)^2}{102{,}326} + \frac{(125-112{,}326)^2}{112{,}326} +$$

$$\frac{(120-120{,}349)^2}{120{,}349} + \frac{(100-117{,}674)^2}{117{,}674} = 4{,}991$$

Η κρίσιμη τιμή, απο πίνακες είναι:

$$X^2{}_{(r-1)*(s-1);a} = X^2{}_{(2-1)*(3-1);0.05} = X^2{}_{2;0.05} = 5{,}99$$

Percentage Points of the Chi-Square Distribution

Degrees of Freedom	Probability of a larger value of x^2								
	0.99	0.95	0.90	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	0.01
1	0.000	0.004	0.016	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	6.63
2	0.020	0.103	0.211	0.575	1.386	2.77	4.61	5.99	9.21
3	0.115	0.352	0.584	1.212	2.366	4.11	6.25	7.81	11.34
4	0.297	0.711	1.064	1.923	3.357	5.39	7.78	9.49	13.28
5	0.554	1.145	1.610	2.675	4.351	6.63	9.24	11.07	15.09
6	0.872	1.635	2.204	3.455	5.348	7.84	10.64	12.59	16.81
7	1.239	2.167	2.833	4.255	6.346	9.04	12.02	14.07	18.48
8	1.647	2.733	3.490	5.071	7.344	10.22	13.36	15.51	20.09
9	2.088	3.325	4.168	5.899	8.343	11.39	14.68	16.92	21.67
10	2.558	3.940	4.865	6.737	9.342	12.55	15.99	18.31	23.21
11	3.053	4.575	5.578	7.584	10.341	13.70	17.28	19.68	24.72
12	3.571	5.226	6.304	8.438	11.340	14.85	18.55	21.03	26.22
13	4.107	5.892	7.042	9.299	12.340	15.98	19.81	22.36	27.69
14	4.660	6.571	7.790	10.165	13.339	17.12	21.06	23.68	29.14
15	5.229	7.261	8.547	11.037	14.339	18.25	22.31	25.00	30.58
16	5.812	7.962	9.312	11.912	15.338	19.37	23.54	26.30	32.00
17	6.408	8.672	10.085	12.792	16.338	20.49	24.77	27.59	33.41
18	7.015	9.390	10.865	13.675	17.338	21.60	25.99	28.87	34.80
19	7.633	10.117	11.651	14.562	18.338	22.72	27.20	30.14	36.19
20	8.260	10.851	12.443	15.452	19.337	23.83	28.41	31.41	37.57
22	9.542	12.338	14.041	17.240	21.337	26.04	30.81	33.92	40.29
24	10.856	13.848	15.659	19.037	23.337	28.24	33.20	36.42	42.98
26	12.198	15.379	17.292	20.843	25.336	30.43	35.56	38.89	45.64
28	13.565	16.928	18.939	22.657	27.336	32.62	37.92	41.34	48.28
30	14.953	18.493	20.599	24.478	29.336	34.80	40.26	43.77	50.89
40	22.164	26.509	29.051	33.660	39.335	45.62	51.80	55.76	63.69
50	27.707	34.764	37.689	42.942	49.335	56.33	63.17	67.50	76.15
60	37.485	43.188	46.459	52.294	59.335	66.98	74.40	79.08	88.38

Η κρίσιμη περιοχή: $R = \{X^2 > X^2{}_{(r-1)(s-1);a}\}$

Άρα, ΔΕΝ είμαστε στην κρίσιμη περιοχή, αφού
X^2=4,991 και $X^2{}_{2;0.05} = 5{,}99$

Επομένως δεν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση, δηλαδή η σωματική άσκηση δεν σχετίζεται με τη νόσο Αλτσχάιμερ

Παράδειγμα 4

- Σε μια μελέτη ελέγχθηκε αν το βάρος της μητέρας σχετίζεται με το βάρος του νεογνού. Τα δεδομένα σε 30 γυναίκες και τα νεογνά τους παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

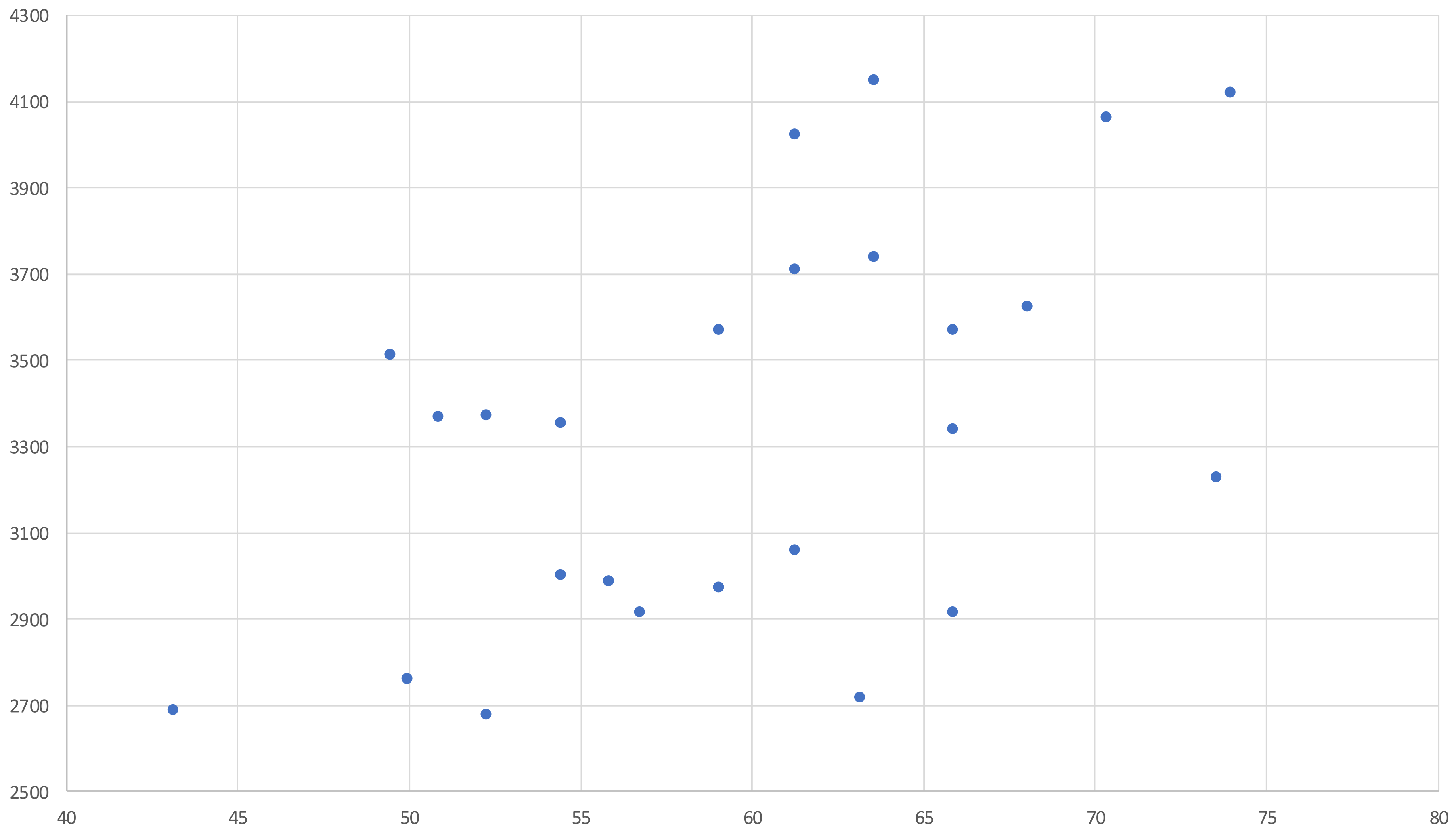
- Σχετίζεται το βάρος της μητέρας με το βάρος του νεογνού;

	Βάρος μητέρας (Kgr)	Βάρος νεογνού (gr)
1	49.4	3515
2	63.5	3742
3	68	3629
4	52.2	2680
5	54.4	3006
6	70.3	4068
7	50.8	3373
8	73.9	4124
9	65.8	3572
10	54.4	3359
11	73.5	3230
12	59	3572
13	61.2	3062
14	52.2	3374
15	63.1	2722
16	65.8	3345
17	61.2	3714
18	55.8	2991
19	61.2	4026
20	56.7	2920
21	63.5	4152
22	59	2977
23	49.9	2764
24	65.8	2920
25	43.1	2693

(συν.)

- Ποιος είναι ο κατάλληλος έλεγχος για αυτή την περίπτωση;
- Γιατί;

Γράφημα (στικτόγραμμα)



	Βάρος μητέρας (Kgr) X	Βάρος νεογνού (gr) Y	XY	X^2	Y^2
1	49.4	3515	173641	2440.36	12355225
2	63.5	3742	237617	4032.25	14002564
3	68	3629	246772	4624	13169641
4	52.2	2680	139896	2724.84	7182400
5	54.4	3006	163526.4	2959.36	9036036
6	70.3	4068	285980.4	4942.09	16548624
7	50.8	3373	171348.4	2580.64	11377129
8	73.9	4124	304763.6	5461.21	17007376
9	65.8	3572	235037.6	4329.64	12759184
10	54.4	3359	182729.6	2959.36	11282881
11	73.5	3230	237405	5402.25	10432900
12	59	3572	210748	3481	12759184
13	61.2	3062	187394.4	3745.44	9375844
14	52.2	3374	176122.8	2724.84	11383876
15	63.1	2722	171758.2	3981.61	7409284
16	65.8	3345	220101	4329.64	11189025
17	61.2	3714	227296.8	3745.44	13793796
18	55.8	2991	166897.8	3113.64	8946081
19	61.2	4026	246391.2	3745.44	16208676
20	56.7	2920	165564	3214.89	8526400
21	63.5	4152	263652	4032.25	17239104
22	59	2977	175643	3481	8862529
23	49.9	2764	137923.6	2490.01	7639696
24	65.8	2920	192136	4329.64	8526400
25	43.1	2693	116068.3	1857.61	7252249
ΣΥΝΟΛΟ	1493.7	83530	5036414	90728.45	284266104

$$\bar{x} = \frac{1493.7}{25} = 59.75$$

$$\bar{y} = \frac{83530}{25} = 3341.2$$

Θέλουμε να ελέγξουμε αν:

— H_0: Το βάρος της μητέρας δεν σχετίζεται γραμμικά με το βάρος του νεογνού

— H_1: Το βάρος της μητέρας σχετίζεται γραμμικά με το βάρος του νεογνού

Ο συντελεστής συσχέτισης r του Pearson δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right) * \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}}$$

$$= \frac{5036414 - 25 * 59{,}75 * 3341{,}2}{\sqrt{(90728{,}45 - 25 * 59{,}75^2)(284266104 - 25 * 3341{,}2^2)}} =$$

$$= 0{,}521$$

Το στατιστικό κριτήριο δίνεται από τη σχέση:

$$t = r * \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = 0{,}521 * \sqrt{\frac{25-2}{1-0{,}521^2}} = 2{,}927$$

Η κρίσιμη τιμή είναι η $t_{n-2;\alpha} = t_{23;0,05}$=1,714

Η κρίσιμη περιοχή είναι η: $R = \left\{t > \ t_{n-2;\,\alpha}\right\}$

Έχουμε 2,927=t > $t_{n-2;\,\alpha}$ =1,714. Άρα βρισκόμαστε στην κρίσιμη περιοχή.

Οπότε απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση και αποδεχόμαστε την εναλακτική.

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι το βάρος της μητέρας και το βάρος του νεογνού σχετίζονται γραμμικά, στον πληθυσμό αναφοράς.

DF	A = 0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
∞	ta = 1.282	1.645	1.96	2.326	2.576	3.091	3.291
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289	636.578
2	1.886	2.92	4.303	6.965	9.925	22.328	31.6
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.61
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894	6.869
6	1.44	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.86	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.25	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.93	4.318
13	1.35	1.771	2.16	2.65	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.12	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.74	2.11	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.33	1.734	2.101	2.552	2.878	3.61	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.85
21	1.323	1.721	2.08	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.5	2.807	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.06	2.485	2.787	3.45	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.689
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.66
30	1.31	1.697	2.042	2.457	2.75	3.385	3.646
60	1.296	1.671	2	2.39	2.66	3.232	3.46
120	1.289	1.658	1.98	2.358	2.617	3.16	3.373
1000	1.282	1.646	1.962	2.33	2.581	3.098	3.3