III. ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ (ΙΣΟΖΥΓΙΟ) ΡΟΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΟΡΜΗΣ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ

Έστω ένα υδραυλικό σύστημα το οποίο περιέχεται σε έναν όγκο ελέγχου CV, συνολικού όγκου V, και το οποίο ανταλλάσει μάζα με το περιβάλλον με ρυθμούς (παροχές μάζας) $\dot{m}_i$, (i=1,…, N), όπου $\dot{m}_i = \rho_i Q_i = \rho_i A_i U_i$ και ρ_i είναι η πυκνότητα του ρευστού που διαπερνά τη διατομή A_i με μέση ταχύτητα U_i. Όπως είναι γνωστό, η ογκομετρική παροχή του ρευστού από τη διατομή i είναι $Q_i = A_i U_i$.

Επίσης, εκτός από μάζα, διαμέσου των N διατομών το σύστημα ανταλλάσει και γραμμική ορμή με το περιβάλλον.

Η **παροχή γραμμικής ορμής** ορίζεται ως η ποσότητα γραμμικής ορμής [{μικρή μάζα}×{ταχύτητα της} = Δm·U] που περνά από μια επιφάνεια στη μονάδα του χρόνου, η οποία έχει διαστάσεις

$$\frac{U\Delta m}{\Delta t} = U\dot{m} = U\rho UA[=]\frac{L}{T}\frac{M}{L^3}\frac{L}{T}L^2 = M \cdot LT^{-2}$$ και μονάδες στο SI, kgm/s^2 ή N.

Η παροχή γραμμικής ορμής μπορεί είτε να είναι εκροή γραμμικής ορμής από το σύστημα είτε να είναι εισροή γραμμικής ορμής προς το σύστημα.

Η συνολική γραμμική ορμή που περιέχεται στο σύστημα (εντός αμετάβλητου όγκου ελέγχου) πρέπει να παραμένει σταθερή, και ισχύει

Ο νόμος διατήρησης της γραμμικής ορμής (Ισοζύγιο γραμμικής ορμής):

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Ρυθμός αλλαγής}\\ \text{της γραμμικής ορμής}\\ \text{που περιέχεται στον όγκο ελέγχου}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{Ρυθμός εκροής}\\ \text{γραμμικής ορμής}\\ \text{μέσω της επιφάνειας ελέγχου}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{Συνισταμένη}\\ \text{σωματικών δυνάμεων}\\ \text{στον όγκο ελέγχου}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{Συνισταμένη}\\ \text{επιφανειακών δυνάμεων}\\ \text{στην επιφάνεια ελέγχου}\end{array}\right\} \quad (1)$$

Το ισοζύγιο γραμμικής ορμής διατυπώνεται συμβολικά με την παρακάτω διανυσματική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{V_{CV}} \mathbf{u}\rho dV\right) + \int_{A_{CV}} \mathbf{u}\rho\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}}dA = \int_{V_{CV}} \mathbf{f}\rho dV + \int_{A_{CV}} \left[\left(p\tilde{I} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}\right)\cdot\hat{\mathbf{n}}\right]dA$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{U_{CM}}\rho V_{CV}\right) + \sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{U}_i\rho\mathbf{U}_i\cdot\hat{\mathbf{n}}_i A_i\right) = \mathbf{F}_B + \sum_{i=1}^{N}\left[\left(p\hat{\mathbf{n}}_i - \tilde{\boldsymbol{\tau}}\cdot\hat{\mathbf{n}}_i\right)A_i\right]$$

όπου $\mathbf{U_{CM}}$ είναι το διάνυσμα της ταχύτητας του κέντρου μάζας του όγκου ελέγχου.

Στις περιπτώσεις που στον όγκο ελέγχου δεν αλλάζει η γραμμική ορμή (π.χ. όγκος ελέγχου ακίνητος ή κινούμενος με σταθερή ταχύτητα και ασυμπίεστη ροή) τότε, η ποσότητα στην πρώτη αγκύλη του αριστερού σκέλους του ισοζυγίου μηδενίζεται και το ισοζύγιο γραμμικής ορμής γίνεται:

Ισοζύγιο γραμμικής ορμής – Ασυμπίεστη ροή – σταθερός όγκος ελέγχου:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Ρυθμός εκροής}\\ \text{γραμμικής ορμής}\\ \text{μέσω της επιφάνειας ελέγχου}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{συνισταμένη}\\ \text{σωματικών δυνάμεων}\\ \text{στον όγκο ελέγχου}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{συνισταμένη}\\ \text{επιφανειακών δυνάμεων}\\ \text{στην επιφάνεια ελέγχου}\end{array}\right\} \quad (2)$$

που διατυπώνεται συμβολικά στην παρακάτω διανυσματική εξίσωση

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{U}_i\rho\mathbf{U}_i\cdot\hat{\mathbf{n}}_i A_i\right) = \mathbf{F}_B + \sum_{i=1}^{N}\left[\left(p\hat{\mathbf{n}}_i - \boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\mathbf{n}}_i\right)A_i\right] \quad (3)$$

Αναλυτικές διατυπώσεις του Ισοζυγίου Γραμμικής Ορμής

Θεωρούμε έναν όγκο ελέγχου CV που καθορίζεται από τις επιφάνειες ελέγχου A_i, i=1,N. Θεωρούμε την ‘απλή’ περίπτωση όπου όλες οι επιφάνειες είναι κάθετες στο επίπεδο του σκαριφήματος (πρόβλημα 2 διαστάσεων).

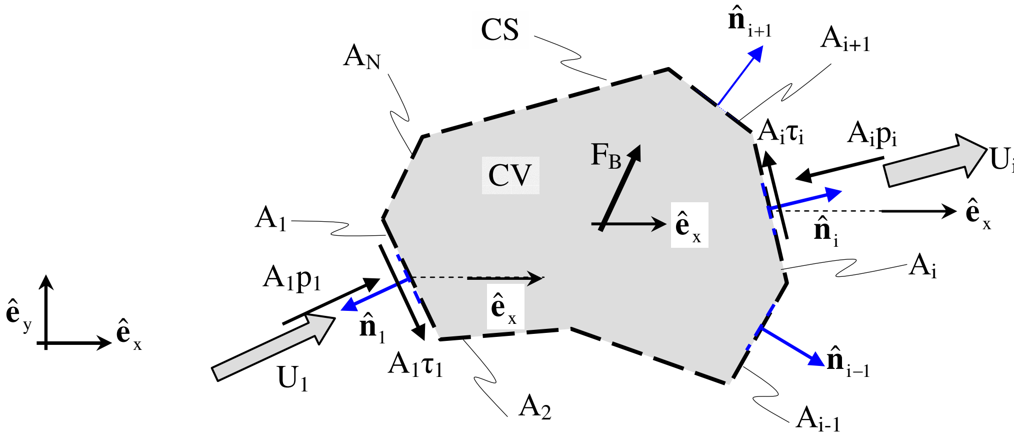
Σε κάθε επιφάνεια A_i ορίζεται ένα *μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα*, $\hat{\mathbf{n}}_i$, κάθετο σε αυτήν, που έχει μήκος $\left|\hat{\mathbf{n}}_i\right| = 1$ και φορά από τον όγκο ελέγχου “προς τα έξω”.

Ορίζουμε τους άξονες ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy με τη βοήθεια δύο άλλων μοναδιαίων διανυσμάτων, $\hat{\mathbf{e}}_x$ & $\hat{\mathbf{e}}_y$, που καθένα έχει φορά τη φορά των αξόνων. Ισχύει $\left|\hat{\mathbf{e}}_x\right| = \left|\hat{\mathbf{e}}_y\right| = 1$ & $\hat{\mathbf{e}}_x \perp \hat{\mathbf{e}}_y$ άρα

$$\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_y = \cos\left\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y \right\rangle = 0$$

Σε κάθε επιφάνεια A_i, θεωρούμε μια ενιαία (σταθερή σε όλη την επιφάνεια) ταχύτητα, U_i. Για το διάνυσμα της ταχύτητεας ισχύει $\mathbf{U}_i = \hat{\mathbf{n}}_i U_i$. Οι μέσες ταχύτητες U_i θεωρούνται πάντα κάθετες στις διατομές A_i.

Επίσης, σε κάθε επιφάνεια A_i, θεωρούμε επιφανειακή δύναμη, $\mathbf{t}_i\left(\hat{\mathbf{n}}_i\right)$. Αυτή αποτελείται από δύο συνιστώσες, μια δύναμη πίεσης p_iA_i και μια διατμητική δύναμη τ_iA_i. Οι συνιστώσες της δύναμης προκύπτουν από την εφαρμογή μιας μέσης ενιαίας πίεσης (ορθής τάσης), p_i, και μιας μέσης ενιαίας διατμητικής τάσης, τ_i, σε κάθε επιφάνεια εμβαδού A_i. Η (p_iA_i) είναι πάντα κάθετη προς την επιφάνεια (ορθή) και κατά σύμβαση με φορά αντίθετη του $\hat{\mathbf{n}}_i$, ενώ η (τ_iA_i) είναι παράλληλη στην επιφάνεια (διατμητική) και θεωρείται ότι έχει ως θετική φορά τη φορά του αντίστοιχου που θα πάρει το $\hat{\mathbf{n}}_i$ της επιφάνειας εάν αυτό περιστραφεί ανθωρολογιακά ( ) κατά 90^o.



Η αρχή διατήρησης της παροχής γραμμικής ορμής σε έναν όγκο ελέγχου (το ισοζύγιο γραμμικής ορμής) αποτελεί μια διανυσματική εξίσωση (ενώ το ισοζύγιο μάζας ή το ισοζύγιο όγκου σε ασυμπίεστη ροή αποτελεί μια βαθμωτή εξίσωση). Η συμβολική διατύπωση αυτού του ισοζυγίου απαιτεί ανώτερες γνώσεις διανυσματικού λογισμού.

Εάν αναλύσουμε τη διανυσματική εξίσωση του ισοζυγίου γραμμικής ορμής για ασυμπίεστη ροή και σταθερό όγκο ελέγχου, δηλαδή την εξίσωση (2), στις συνιστώσες της σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θα πάρουμε 2 βαθμωτές εξίσώσεις, 1 στη διεύθυνση Ox και 1 στη διεύθυνση Oy:

Διεύθυνση Ox

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\rho U_i A_i U_i \cos\left\langle \hat{\mathbf{n}}_i, \mathbf{U}_i\right\rangle \cos\left\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \mathbf{U}_i\right\rangle\right) = F_B \cos\left\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \mathbf{F}_B\right\rangle + \sum_{i=1}^{N}\left[\left(-p_iA_i\cos\left\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\right\rangle - \tau_iA_i\sin\left\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\right\rangle\right)\right] \quad (4)$$

Διεύθυνση Oy

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\rho U_i A_i U_i \cos\left\langle \hat{\mathbf{n}}_i, \mathbf{U}_i\right\rangle \cos\left\langle \hat{\mathbf{e}}_y, \mathbf{U}_i\right\rangle\right) = F_B \cos\left\langle \hat{\mathbf{e}}_y, \mathbf{F}_B\right\rangle + \sum_{i=1}^{N}\left[\left(-p_iA_i\cos\left\langle \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{n}}_i\right\rangle - \tau_iA_i\cos\left\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\right\rangle\right)\right] \quad (5)$$

όπου

$\left\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\right\rangle$ είναι η γωνία του τόξου που διαγράφει με ανθωρολογιακή φορά το πρώτο διάνυσμα (**a**) (γύρω από την αρχή του) μέχρι να γίνει ομόρροπο με το δεύτερο διάνυσμα (**b**).

F_B είναι η σωματική δύναμη (body force) που δρα στη μάζα που περιέχεται στον όγκο ελέγχου εξ αιτίας κάποιου εξωτερικού πεδίου π.χ. επιτάχυνσης, βαρύτητας, ηλεκτρομαγνητικού πεδίου κλπ