Σφάλματα και στατιστική επεξεργασία πειραματικών μετρήσεων.
Γραφικές παραστάσεις, κλίση καμπύλης, μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων.

ΑΝΤΙ ΠΡΟΛΟΓΟΥ

ΟΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ

Ή

ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΠΟΛΛΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΓΙΑ ΝΑ ΛΥΘΕΙ ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ο Καθ. E. Rutherford (1871 - 1937) πρόεδρος της Βασιλικής Ακαδημίας Επιστημών και κάτοχος του βραβείου Νόμπελ (1908) αφηγείται, σε πρώτο πρόσωπο, την ακόλουθη ενδιαφέρουσα ιστορία:

Πριν από καιρό δέχτηκα ένα τηλεφώνημα από συνάδελφο - καθηγητή. Επρόκειτο να βαθμολογήσει με μηδέν ένα σπουδαστή για την απάντησή του σε μια ερώτηση διαγωνίσματος Εργαστηριακής Φυσικής ενώ ταυτόχρονα ο σπουδαστής διαφωνούσε, διεκδικώντας ένα καλό βαθμό. Ο βαθμολογητής αλλά και ο σπουδαστής συμφώνησαν για ένα τρίτο, αμερόληπτο κριτή και έτσι εγώ βρέθηκα να έχω επιλεγεί για αυτόν τον σκοπό.

Η κρίσιμη ερώτηση του συγκεκριμένου διαγωνίσματος ήταν: « Δείξτε πως είναι δυνατόν να προσδιοριστεί το άγνωστο ύψος ενός ψηλού κτιρίου με την βοήθεια ενός βαρόμετρου». Ο σπουδαστής λοιπόν είχε απαντήσει: « Αφήνω σιγά - σιγά το βαρόμετρο από την ταράτσα του κτιρίου να προσεγγίσει την επιφάνεια του εδάφους αφού πρώτα το δέσω με την άκρη ενός λεπτού νήματος με μεγάλο μήκος. Στην συνέχεια τυλίγω το νήμα και από το μήκος του υπολογίζω ακριβώς το άγνωστο ύψος του κτιρίου».

Ο σπουδαστής είχε πράγματι σοβαρές αξιώσεις για μια καλή βαθμολόγηση καθώς - κατά την γνώμη του - είχε απαντήσει πλήρως και σωστά. Από την άλλη, εάν του είχε δοθεί ένας πολύ καλός βαθμός αυτός θα συνεισέφερε στην συνολική βαθμολογία του σπουδαστή για την Φυσική και θα επιβεβαίωνε έτσι την επάρκειά του σε αυτό το μάθημα. Όμως η απάντηση που είχε δώσει δεν εδραίωνε αλλά ούτε και δικαιολογούσε, σύμφωνα με τον καθηγητή του, ένα τέτοιο γεγονός.

Υποστήριξα πως ο σπουδαστής θα έπρεπε να έχει την δυνατότητα μιας ακόμη σχετικής προσπάθειας. Έδωσα στον σπουδαστή έξη λεπτά για να απαντήσει εκ νέου, στην ίδια ακριβώς ερώτηση, με την απαραίτητη υπενθύμιση ότι θα πρέπει η νέα απάντηση να υποδεικνύει απαραίτητα κάποιες γνώσεις του στη Φυσική. Μέχρι και το τέλος των πέντε πρώτων λεπτών δεν είχε γράψει τίποτε, τον ρώτησα εάν ήθελε να εγκαταλείψει την προσπάθεια και μου είπε ότι είχε ήδη πολλές απαντήσεις σε αυτό το πρόβλημα και απλά σκέπτεται ποια να επιλέξει ως την καλλίτερη δυνατή. Ζήτησα συγνώμη για την ενόχληση και τον παρακάλεσα να συνεχίσει την εργασία του. Η απάντηση ήρθε αστραπιαία το επόμενο ακριβώς λεπτό, σας την καταθέτω :

«Παίρνω το βαρόμετρο στην ταράτσα του κτιρίου και το τοποθετώ στην άκρη του στηθαίου, το αφήνω να πέσει στο έδαφος ενώ χρονομετρώ την διάρκεια t της πτώσης. Αξιοποιώντας την σχέση: $x = \frac{1}{2}gt^2$ υπολογίζω το άγνωστο ύψος του κτιρίου».

Σε αυτό το σημείο ρώτησα τον συνάδελφο - εξεταστή εάν εδώ μπορούσε να σταματήσει αυτή η διαδικασία. Αυτός συμφώνησε, βαθμολόγησε μάλιστα τον σπουδαστή με ένα αρκετά καλό βαθμό.

Ενώ εγκαταλείπαμε μαζί με τον σπουδαστή το γραφείο όπου έγινε η επαναληπτική εξέταση θυμήθηκα πως μου είχε αναφέρει πως είχε κατά νου και άλλες απαντήσεις στο ίδιο ακριβώς πρόβλημα, έτσι γεμάτος περιέργεια, τον ρώτησα ποιες μπορούσαν να είναι αυτές.

«Μάλιστα» είπε ο σπουδαστής «Υπάρχουν πολλοί τρόποι να μετρήσεις το άγνωστο ύψος ενός μεγάλου κτιρίου με την βοήθεια ενός βαρόμετρου. Για παράδειγμα μπορείς να βγεις με το βαρόμετρο έξω στον ήλιο και από το ύψος του κατακόρυφου σωλήνα του βαρόμετρου, το μήκος της σκιάς του και το μήκος της σκιάς του κτιρίου χρησιμοποιώντας απλές αναλογίες υπολογίζεις το ύψος του κτιρίου». «Μάλιστα, συνέχισε ακάθεκτος ο σπουδαστής, υπάρχει μια βασική πειραματική μέθοδος που βολεύει αρκετούς. Σε αυτή τη μέθοδο παίρνεις το βαρόμετρο και αρχίζεις να ανεβαίνεις ένα - ένα τα σκαλιά προς την ταράτσα. Καθώς τα ανεβαίνεις σημειώνεις το ίχνος του μήκους του βαρόμετρου καθ' ύψος στον κατακόρυφο τοίχο. Στη συνέχεια μετράς τον συνολικό αριθμό των ιχνών και αυτό θα σου δώσει το ακριβές ύψος του κτιρίου μετρημένο όμως σε μονάδες μήκους σωλήνα βαρόμετρου».

Είναι μια πολύ άμεση μέθοδος μέτρησης, απάντησα. «Φυσικά, εάν όμως θέλεις μια περισσότερο πολύπλοκη μέθοδο μπορείς να δέσεις το βαρόμετρο στην άκρη ενός κοντού σχετικά νήματος και να το χειριστείς σαν απλό εκκρεμές υπολογίζοντας την τιμή της επιτάχυνσης βαρύτητας στο επίπεδο του δρόμου αλλά και στην ταράτσα του κτιρίου. Από την αναμενόμενη διαφορά των δυο τιμών μπορεί επίσης να προσδιοριστεί το ζητούμενο άγνωστο ύψος. Εξάλλου μπορείς ακόμη αφού ανέβεις στην ταράτσα να δέσεις το βαρόμετρο με ένα μακρύ νήμα και αφού το κατεβάσεις έτσι ώστε μόλις να εφάπτεται στην επιφάνεια του δρόμου το κινείς σαν να ήταν ένα εκκρεμές. Έτσι προσδιορίζεις το ύψος του κτιρίου από την μέτρηση της περιόδου για αυτή την κίνηση». «Τελικά συμπέρανε, υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί τρόποι για να λύσεις ένα πρόβλημα. Ίσως βέβαια ο καλύτερος θα είναι να πάρεις το βαρόμετρο στο ισόγειο και αφού χτυπήσεις την πόρτα του διευθυντή - ιδιοκτήτη του κτιρίου, και εφ' όσον σου ανοίξει, να του πεις: Κύριε διευθυντά αυτό το πολύ ακριβό εργαστηριακό όργανο θα γίνει δικό σου εάν μου αποκαλύψεις ποιο είναι το ύψος αυτού του κτιρίου».

Σε αυτό το σημείο ήταν σειρά μου να ρωτήσω τον σπουδαστή εάν πραγματικά δεν γνώριζε την συμβατική απάντηση σε αυτή τη συγκεκριμένη ερώτηση. Την απάντηση δηλαδή που «εμπλέκει» την βαρομετρική σχέση: πίεση - ύψος, έτσι ώστε γνωρίζοντας την διαφορά της ατμοσφαιρικής πίεσης να υπολογίζεται το άγνωστο ύψος. Αμέσως παραδέχτηκε ότι και αυτή τη γνώριζε όμως ταυτόχρονα μου ομολόγησε ότι ήταν αρκετά ενοχλημένος από τον τρόπο μερικών εκπαιδευτικών που προσπαθούν να διδάξουν τους σπουδαστές τους πως ακριβώς πρέπει να σκέπτονται.

Η παραπάνω ιστορία είναι πέρα για πέρα αληθινή και το όνομα του «άγνωστου» σπουδαστή είναι Niels Bohr (1885-1962), πρόκειται για τον μετέπειτα παγκόσμια γνωστό, Δανό Φυσικό που μάλιστα βραβεύθηκε και με το Νόμπελ Φυσικής το 1922. Ο N. Bohr έγινε γνωστός για το ότι πρότεινε το μοντέλο του ατόμου που συνίσταται από τον πυρήνα πρωτονίων, νετρονίων ενώ σε διαφορετικές ενεργειακές στάθμες βρίσκονται τα περιφερόμενα ηλεκτρόνια. Πρόκειται για την πολύ γνωστή σε όλους εικόνα του μικροσκοπικού πυρήνα που περιβάλλεται από ένα μικρό αριθμό ελλειπτικών τροχιών. Ο Niels Bohr υπήρξε ένα φωτισμένο μυαλό, ένας πραγματικός καινοτόμος στην θεμελίωση της Κβαντικής Θεωρίας.

Απόδοση στα Ελληνικά

Α. Αραβαντινός

ΘΕ1 Σφάλματα και στατιστική επεξεργασία πειραματικών

1. Σκοπός

Πρόκειται για θεωρητική άσκηση που σκοπό έχει την περιληπτική αναφορά σε θεματολογίες όπως: σφάλματα, στατιστική επεξεργασία πειραματικών μετρήσεων και παρουσιάσεις αποτελεσμάτων. Είναι άσκηση εισαγωγικού χαρακτήρα της οποίας η κατανόηση θα βοηθήσει σημαντικά στη σωστή διεξαγωγή των εργαστηριακών ασκήσεων που ακολουθούν.

2. Θεωρία

Η παρακολούθηση της εξέλιξης ενός φαινομένου μπορεί να είναι είτε ποιοτική είτε και ποσοτική. Η γνώση που παρέχεται από την ποιοτική ερμηνεία του φαινομένου είναι μάλλον επιφανειακή ενώ η ποσοτική θεωρείται πιο θεμελιωμένη. Ποσοτικές σχέσεις όμως μεταξύ διαφόρων μεταβλητών προυποθέτουν απαραίτητα την μέτρησή τους.

2.1 Μετρήσεις φυσικών μεγεθών.

Μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους λέγεται η σύγκριση του με ένα άλλο ιδίου είδους και καθιερωμένης αριθμητικής τιμής που χρησιμοποιείται σαν πρότυπο (δηλαδή πρόκειται για μονάδα μετρήσεως). Μία μέτρηση λέγεται <u>άμεση</u> αν προκύπτει από την απευθείας σύγκριση προς το πρότυπο (π.χ. η μέτρηση ενός μήκους με τον κανόνα, η μέτρηση της έντασης ρεύματος με το αμπερόμετρο κλπ). Μία μέτρηση λέγεται <u>έμμεση</u> όταν προκύπτει από την άμεση μέτρηση άλλων φυσικών μεγεθών που συνδέονται με το ζητούμενο μέγεθος από μία μαθηματική σχέση (π.χ. η μέτρηση της αντίστασης ενός αγωγού μετρώντας την τάση στα άκρα του με ένα βολτόμετρο και την ένταση του ρεύματος που περνάει από τον αγωγό με ένα αμπερόμετρο.

Εν συνεχεία από τον νόμο του Ohm $R = \frac{V}{I}$ προκύπτει η τιμή της αντίστασης του αγωγού).

Σε όλες τις περιπτώσεις δεν είναι δυνατόν να γίνει μέτρηση κάποιας φυσικής ποσότητας που να είναι απαλλαγμένη από κάποιο σφάλμα. Αυτό οφείλεται στην έλλειψη τελειότητας των ανθρωπίνων αισθήσεων καθώς και στην έλλειψη τελειότητας των μετρητικών οργάνων. Επίσης η διαδικασία της μέτρησης συνεπάγεται διαταραχή της αρχικής κατάστασης του μετρούμενου μεγέθους. Δυο όροι που χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε σχέση με την εν γένει «ποιότητα» των πειραματικών δεδομένων είναι η ακρίβεια (accuracy) και η επαναληψιμότητα (precision) της κάθε μετρητικής διαδικασίας.

2.2 Ακρίβεια.

Η ακρίβεια (ή ορθότητα) περιγράφει την ορθότητα ενός πειραματικού αποτελέσματος. Βέβαια το μόνο είδος μέτρησης που μπορεί να είναι απόλυτα ακριβές είναι αυτό που περιλαμβάνει απαριθμούμενα αντικείμενα, οι υπόλοιπες μετρήσεις περιλαμβάνουν διάφορα σφάλματα και έτσι δίνουν μια προσέγγιση μόνο της αλήθειας. Η ακρίβεια εκφράζεται είτε ως απόλυτο σφάλμα ή ως σχετικό σφάλμα. Το απόλυτο σφάλμα E_α της μέσης τιμής ενός μικρού αριθμού επαναλαμβανόμενων μετρήσεων δίνεται από τη σχέση:

$$E_\alpha = \bar{x} - x_t$$

Όπου x_t είναι μια αποδεκτή τιμή της ποσότητας που μετρείται. Συχνά όμως είναι περισσότερο χρήσιμο η ακρίβεια να εκφράζεται με το αντίστοιχο σχετικό σφάλμα δηλαδή τη ποσότητα:

$$\left[\frac{(x - x_t)}{x_t}\right] \times 100\%$$

Είναι προφανές ότι το απόλυτο αλλά και το σχετικό σφάλμα διαθέτουν πρόσημο που υποδηλώνει ότι το μετρούμενο μέγεθος είναι μεγαλύτερο από το πραγματικό (θετικό πρόσημο) ή όταν ισχύει το αντίθετο (αρνητικό).

2.3 Επαναληψιμότητα.

Η επαναληψιμότητα (ή πιστότητα ή αξιοπιστία) είναι μια έννοια που περιγράφει τον βαθμό συγκέντρωσης των μετρήσεων γύρω από μια κεντρική τιμή, με άλλα λόγια τον βαθμό συμφωνίας μεταξύ των αριθμητικών τιμών για δυο ή και περισσότερες πανομοιότυπα επαναλαμβανόμενες μετρήσεις που έχουν όμως ληφθεί υπό τις ίδιες ακριβώς πειραματιστικές συνθήκες.

Τρεις επί μέρους όροι χρησιμοποιούνται προκειμένου να περιγράψουν την επαναληψιμότητα μιας ομάδας πειραματικών δεδομένων και αυτοί είναι: η τυπική απόκλιση (standard deviation), η μεταβλητότητα ή διακύμανση (variance) καθώς και ο συντελεστής μεταβλητότητας ή διακύμανσης (coefficient of variation).

Κατά την στατιστική επεξεργασία δεδομένων υποτίθεται ότι τα λιγοστά αποτελέσματα που προκύπτουν από τις πειραματικές μετρήσεις συνιστούν ένα πολύ μικρό κλάσμα του άπειρου αριθμού των αποτελεσμάτων που θα μπορούσαν να ληφθούν εάν υπήρχε άπειρος χρόνος αλλά και διάθεση για μετρήσεις. Τα λιγοστά αυτά δεδομένα είναι το πειραματικό «δείγμα» και φυσικά πρόκειται για υποσύνολο όλων των δεδομένων που υπάρχουν στη πραγματικότητα. Οι νόμοι της στατιστικής ισχύουν αυστηρά και μόνο σε άπειρο πλήθος δεδομένων και για αυτό όταν εφαρμόζονται σε δείγματα εργαστηριακών μετρήσεων υποθέτουμε καταχρηστικά, ότι το δείγμα αυτό είναι πραγματικά αντιπροσωπευτικό του άπειρου πληθυσμού. Βέβαια επειδή δεν υπάρχει εγγύηση ότι η υπόθεση αυτή ισχύει οι εκφράσεις για τυχαία σφάλματα είναι εκ των πραγμάτων αβέβαιες και πρέπει να διατυπώνονται αποκλειστικά με όρους πιθανοτήτων.

Στην συνέχεια θα υπάρξει διεξοδική αναφορά σε δυο ξεχωριστές κατηγορίες σφαλμάτων τα συστηματικά και τα τυχαία.

2.4 Συστηματικά σφάλματα

Τα συστηματικά σφάλματα έχουν καθορισμένη τιμή, προσδιορίσιμη αιτία και είναι ίδιου πρόσημου και μεγέθους για επαναλαμβανόμενες μετρήσεις πανομοιότυπου χαρακτήρα. Μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε τρία κυρίως είδη : οργανολογίας, προσωπικά και μεθοδολογικά.

Οργανολογικά σφάλματα

Τυπικά σφάλματα αυτής της κατηγορίας είναι : φαινόμενα ολίσθησης των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων, οι μικρές διαρροές σε συστήματα κενού, οι επιδράσεις της θερμοκρασίας σε ανιχνευτές, οι νεκροί χρόνοι ανιχνευτικών διατάξεων, τα επαγόμενα ρεύματα στα κυκλώματα, οι μειώσεις στις τάσεις των μπαταριών κατά την συνεχή χρήσης τους και άλλα. Τα συστηματικά σφάλματα των μετρητικών συσκευών συχνά ανακαλύπτονται και διορθώνονται μέσω βαθμονομήσεων με κατάλληλες πρότυπες διατάξεις.

Προσωπικά σφάλματα

Τα προσωπικά σφάλματα προέρχονται από τις εκτιμήσεις που πρέπει να κάνει ο εκτελών το πείραμα. Σχετικά παραδείγματα είναι: ο προσδιορισμός της θέσης μιας κινούμενης βελόνας οργάνου μεταξύ δυο διαδοχικών υποδιαιρέσεων κλίμακας, η εκτίμηση της σχετικής έντασης του φωτός από δυο διαφορετικές φωτεινές δέσμες, η ταχύτητα αντίδρασης - ενεργοποίησης στο πάτημα ενός χρονομέτρου για τις μετρήσεις άγνωστου χρονικού διαστήματος κ. α.

Είναι προφανές ότι τα προσωπικά σφάλματα διαφέρουν σημαντικά από άτομο σε άτομο μάλιστα μια σχεδόν γενικευμένη αιτία προσωπικών σφαλμάτων είναι και η προκατάληψη. Οι περισσότεροι πειραματιστές έχουν μια φυσική τάση να εκτιμούν τις αναγνώσεις κλιμάκων προς την κατεύθυνση εκείνη που βελτιώνει την επαναληψιμότητα σε μια σειρά δεδομένων ή οδηγεί τα αποτελέσματα πλησιέστερα προς την επιθυμητή τιμή. Τα περισσότερα προσωπικά σφάλματα μπορούν να ελαχιστοποιηθούν μόνο με την απαραίτητη προσοχή αλλά και αυτοπεποίθηση κατά την εκτέλεση των πειραματικών μετρήσεων.

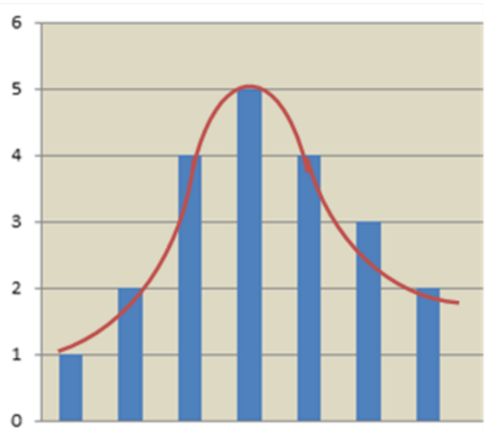
Μεθοδολογικά σφάλματα

Πρόκειται για σφάλματα που προέρχονται από την μη ιδανική συμπεριφορά των μερών μιας σύνθετης πειραματικής διαδικασίας. Για παράδειγμα η μη ολοκλήρωση της μελετούμενης διαδικασίας (π.χ. ατελής αποκατάσταση θερμικής ισορροπίας σε μικτά διαλύματα), η ύπαρξη κρούσεων υποβάθρου που λανθασμένα θεωρούνται πραγματικές και αποδίδονται στο καταμετρούμενο ραδιενεργό δείγμα, η μη αμελητέα τριβή στην άσκηση της αεροτροχιάς που εσφαλμένα θεωρεί την κίνηση χωρίς τριβή, είναι σφάλματα αυτής της κατηγορίας. Τα συστηματικά μεθοδολογικά σφάλματα είναι συχνά δύσκολο να ανιχνευτούν και έτσι να διορθωθούν. Ένας καλός τρόπος είναι η επιβεβαίωση της μεθόδου αξιοποιώντας (για παράδειγμα) πρότυπα δείγματα ή και σχετικές διατάξεις αναφοράς.

2.5 Τυχαία σφάλματα

Αυτά οφείλονται σε ακανόνιστα αίτια και κύρια εμφανίζονται όταν απαιτηθεί ορισμένη ακρίβεια στις μετρήσεις. Τα τυχαία σφάλματα αποτελούν την κύρια αιτία ανακρίβειας όταν τα συστηματικά σφάλματα έχουν απαλειφθεί ή και ελαττωθεί στο ελάχιστο δυνατό. Όταν οι μετρήσεις επαναλαμβάνονται τότε τα δεδομένα που λαμβάνονται είναι διάσπαρτα λόγω ύπαρξης τυχαίων αλλά και συστηματικών σφαλμάτων. Η ύπαρξη τυχαίων σφαλμάτων αντανακλά στην σχετική έλλειψη επαναληψιμότητας (μικρή ή μεγάλη) των αποτελεσμάτων.

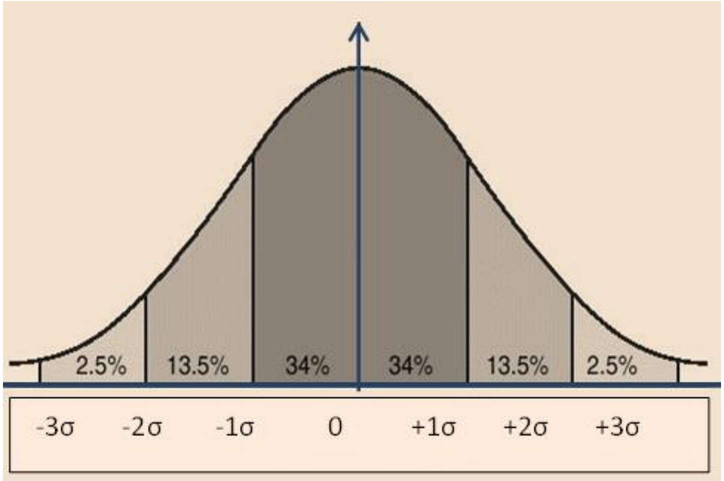
Ένα αποτέλεσμα θα θεωρείται <u>ορθό</u> όταν τα συστηματικά σφάλματα παραμέ3νουν κατά το δυνατόν μικρά και <u>ακριβές</u> όταν τα τυχαία σφάλματα παραμένουν μικρά. Η λέξη μικρό θα πρέπει να αναφέρεται σε σχέση με την τιμή του μετρούμενου φυσικού μεγέθους.



Σχήμα 1. Σχετική εμφάνιση δεδομένων με την μορφή ιστογραμμάτων

Η κατανομή των τυχαίων σφαλμάτων στα αποτελέσματα αυτά γίνεται καλύτερα κατανοητή εάν οργανωθούν σε ισάριθμες ομάδες δεδομένων (ή κυψελίδων). Η σχετική συχνότητα εμφάνισης των δεδομένων σε κάθε κυψελίδα παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 1 με την μορφή ιστογραμμάτων. Είναι λογικό να υποθέσει κανείς πως εάν ο αριθμός των πειραματικών προσπαθειών ήταν πολύ μεγαλύτερος και ότι εάν το μέγεθος των κυψελίδων ήταν πολύ μικρότερο τότε θα δημιουργείτο μια σχεδόν ομαλή συνεχής γραμμή όπως αυτή του σχήματος.

Μια ομαλή, συνεχής καμπύλη αυτού του είδους ονομάζεται καμπύλη Gauss (ή κανονική καμπύλη σφαλμάτων). Εμπειρικά βρίσκεται ότι τα αποτελέσματα επαναλαμβανομένων πειραματικών μετρήσεων κατανέμονται περίπου κατά μια κανονική ή Gaussian μορφή.



Σχήμα 2. Η κατανομή Gauss

Η κατανομή Gauss έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά :

- Το συχνότερο παρατηρούμενο αποτέλεσμα είναι η μέση τιμή μ σειράς δεδομένων.
- Τα πειραματικά αποτελέσματα συγκεντρώνονται συμμετρικά γύρω από την μέση τιμή.
- Μικρές αποκλίσεις από την μέση τιμή παρατηρούνται πολύ συχνότερα από ότι οι αντίστοιχες μεγάλες αποκλίσεις, και τέλος
- Εάν απουσιάζουν συστηματικά σφάλματα η μέση τιμή ενός μεγάλου αριθμού πειραματικών δεδομένων προσεγγίζει την πραγματική τιμή.

Το τυχαίο σφάλμα E_i της μέσης τιμής x ενός μικρού αριθμού πειραματικών προσπαθειών δίνεται από την σχέση: $E_i = x_i - \bar{x}$.

3. Μέθοδος

Στην συνέχεια θα διατυπωθούν μερικοί χρήσιμοι όροι που αξιοποιούνται στην στατιστική θεωρία των τυχαίων σφαλμάτων.

3.1 Στατιστική επεξεργασία τυχαίων σφαλμάτων

Α. Μέση τιμή $(\bar{x})$.

Μέση τιμή δείγματος $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή (ή ο μέσος όρος) ενός δεδομένου αριθμού πειραματικών αποτελεσμάτων:

$$\text{Μέση τιμή: } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_N)}{N}$$

Β. Τυπικό σφάλμα μέσης τιμής $(\delta\bar{x}_\tau)$.

Το τυπικό σφάλμα μέσης τιμής $(\delta\bar{x}_\tau)$ δείγματος με περιορισμένο μέγεθος δίνεται από τη σχέση:

$$\text{Τυπικό σφάλμα μέσης τιμής: } \delta\bar{x}_\tau = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

Στην περίπτωση του τυπικού σφάλματος τα $\frac{2}{3}(\approx 67\%)$ θα βρίσκονται μέσα στην περιοχή $\bar{x} - \delta\bar{x}_\tau \leq \bar{x} \leq \bar{x} + \delta\bar{x}_\tau$ και οι υπόλοιπες τιμές εκτός αυτής της περιοχής Αυτό σημαίνει ότι από τις 100 μετρήσεις ενός φυσικού μεγέθους οι 67 θα βρίσκονται μέσα στην περιοχή $\bar{x} - \delta\bar{x}_\tau \leq \bar{x} \leq \bar{x} + \delta\bar{x}_\tau$ και οι υπόλοιπες 33 μετρήσεις εκτός.

Γ. Σχετικό σφάλμα.

Το σχετικό σφάλμα είναι το πηλίκο του τυπικού σφάλματος της μέσης τιμής προς την μέση τιμή και εκφράζεται επί τοις εκατό ως εξής:

$$\text{Σχετικό σφάλμα:} = \frac{\delta\bar{x}_\tau}{\bar{x}} \times 100\%$$

Δ. Τελικό αποτέλεσμα.

Τα αποτελέσματα μίας σειράς μετρήσεων ενός φυσικού μεγέθους x θα πρέπει να διατυπώνονται με τις εξής δύο εκφράσεις:

$$x = \bar{x} \pm \delta\bar{x}_\tau \;\; \textit{και} \;\; x = \bar{x} \pm \frac{\delta\bar{x}_\tau}{\bar{x}} \times 100\%$$

3.2 Αριθμητική εφαρμογή.

Ας θεωρηθεί μία απλή μέτρηση π.χ. της μάζας ενός σώματος. Επαναλαμβάνεται η μέτρηση της άγνωστης μάζας δέκα φορές και καταρτίζεται ο παρακάτω πίνακας:

(i)	**m** (gr)	$\bar{\mathbf{m}}$ (gr)	$(\mathbf{m_i} - \bar{\mathbf{m}})$ (gr) $(\times 10^{-3})$	$(\mathbf{m_i} - \bar{\mathbf{m}})^2$ (gr^2) $(\times 10^{-6})$
1	5.07	5.086	-16	256
2	5.09		+4	16
3	5.06		-26	676
4	5.08		-6	36
5	5.12		+34	1136
6	5.08		-6	36
7	5.09		+4	16
8	5.08		-6	36
9	5.10		-14	196
10	5.09		+4	16
$\sum_{i=1}^{10} (m_i - \bar{m})^2 = 2420 \times 10^{-6}\,(gr^2)$				

Στην δεύτερη στήλη του πίνακα δίνονται οι δέκα μετρήσεις (τιμές) του πίνακα. Βρίσκεται η αριθμητική μέση τιμή $\bar{m}$ και εν συνεχεία η απόκλιση (διαφορά) της κάθε τιμής από την μέση τιμή$(m_i - \bar{m})$. Στην τελευταία στήλη σχηματίζονται τα τετράγωνα των διαφορών αυτών $(m_i - \bar{m})^2$και υπολογίζεται το άθροισμά τους.

Επομένως το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής για τον παραπάνω πίνακα μετρήσεων είναι:

$$\delta\bar{m}_\tau = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(m_i - \bar{m})^2}{N(N-1)}} = \pm\sqrt{\frac{2420 \times 10^{-6}(gr^2)}{10 \cdot 9}} \cong \pm 0.005\ (gr)$$

Το σχετικό σφάλμα θα είναι:

$$\frac{\delta\bar{x}_\tau}{\bar{m}} \times 100\% = \frac{0.005\ (gr)}{5.086\ (gr)} \times 100\% = 0.086\% \cong 0.1\%$$

Τελικά: $$m = \bar{m} \pm \delta\bar{m}_\tau = (5.086 \pm 0.005)(gr) \text{ και}$$

$$m = \bar{m} \pm \frac{\delta\bar{m}_\tau}{\bar{m}} \times 100\% = 5.086(gr) \pm 0.1\%$$

Παρατηρήσεις:

1. Στον υπολογισμό της μέσης τιμής κατά την συμπλήρωση του πίνακα θα γράφεται ένα σημαντικό ψηφίο περισσότερο από το πλήθος των σημαντικών ψηφίων των επί μέρους μετρήσεων της δεύτερης στήλης. Αυτό οφείλεται στο ευνόητο γεγονός ότι στην μέση τιμή αποδίδεται μεγαλύτερη εμπιστοσύνη από την κάθε επί μέρους μέτρηση.

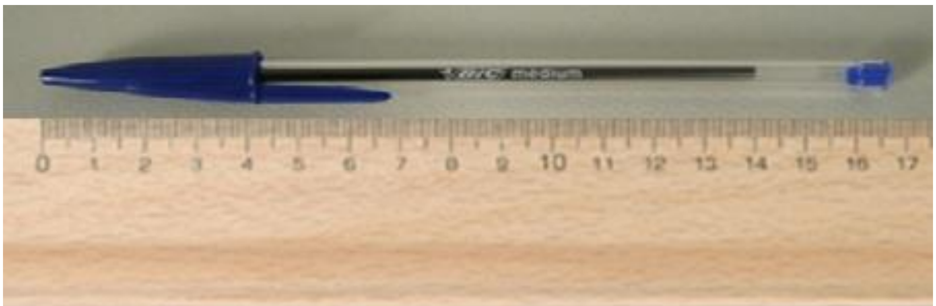
2. Όταν το πλήθος των μετρήσεων είναι μεταξύ του (4) και του (20) δηλαδή $4 \leq N \leq 20$ τότε η τυπική απόκλιση της μέσης τιμής στρογγυλοποιείται σε ένα μόνο σημαντικό ψηφίο. Εάν ο αριθμός των μετρήσεων είναι μεγαλύτερος του (20) δηλαδή $20 \leq N \leq 100$ τότε η τυπική απόκλιση στρογγυλοποιείται στα δύο σημαντικά ψηφία.

3. Στην τελική μορφή που δίνεται για το προς μέτρηση μέγεθος η μέση τιμή θα πρέπει να στρογγυλοποιείται στην θέση εκείνη που εμφανίζεται το σημαντικό ψηφίο της τυπικής απόκλισης της μέσης τιμής.

3.3 Σημαντικά ψηφία.

Η αριθμητική τιμή οποιουδήποτε φυσικού μεγέθους που προέρχεται από μέτρηση δεν μπορεί να είναι απόλυτα σωστή. Η ακρίβεια της οποιασδήποτε μέτρησης περιορίζεται από την αξιοπιστία των μετρητικών οργάνων η οποία ποτέ δεν είναι απόλυτη.

Ας υποτεθεί ότι μετριέται το μήκος ενός στυλό ως αποτέλεσμα της σύγκρισής του με ένα κανόνα. Η τιμή που προκύπτει είναι 16.7 cm. (Σχήμα 3) Αυτό σημαίνει ότι το άγνωστο μήκος μετρήθηκε με ακρίβεια ενός δεκάτου του cm. Στην μέτρηση αυτή τα δύο πρώτα ψηφία (1 και 6) είναι βέβαιον ότι είναι σωστά ενώ το τελευταίο (7) είναι κατ εκτίμηση και η επιλογή του καθορίζει την ακρίβεια της μέτρησης.



Σχήμα 3. Η μέτρηση του μήκους ενός στυλό ως αποτέλεσμα της σύγκρισής του με ένα κανόνα.

Σημαντικά ψηφία σε μία μέτρηση θεωρούνται εκείνα τα ψηφία που είναι βέβαιον ότι είναι αξιόπιστα συν ένα κατ εκτίμηση ψηφίο όχι με την έννοια ότι είναι αξιόπιστο αλλά με το ότι εξασφαλίζει την αξιοπιστία των προηγουμένων ψηφίων. Στην προηγούμενη μέτρηση ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων είναι (3) τρία εκ των οποίων τα δύο πρώτα (1 και 6) είναι σίγουρα σωστά και το τρίτο (7) είναι κατ εκτίμηση.

3.4 Τα μηδενικά ως σημαντικά ψηφία.

Μία μάζα είναι ίση με 64 gr και επομένως εκφράζεται με δύο σημαντικά ψηφία (6 και 4). Αν η ίδια μάζα γραφόταν 0.064 Kgr θα εκφραζόταν πάλι με δύο σημαντικά ψηφία. Δηλαδή τα μηδενικά πού υπάρχουν στην αρχή ενός αριθμού δεν λαμβάνονται ως σημαντικά ψηφία επειδή έχουν σκοπό να ορίσουν την ακριβή θέση της υποδιαστολής.

Η τιμή όμως 1.064 Kgr εκφράζεται με τέσσερα σημαντικά ψηφία (1, 0, 6 και 4) ενώ η τιμή 1.0640 με πέντε σημαντικά ψηφία (1, 0, 6, 4 και 0). Δηλαδή τα μηδενικά πού υπάρχουν στο «ε-σωτερικό» ενός αριθμού καθώς και στο τέλος μετά από υποδιαστολή θεωρούνται σημαντικά ψηφία.

Το γεγονός τώρα ότι ένα σώμα έχει βάρος 6400 Nt δεν δηλώνει αναμφισβήτητα και την ακρίβεια της μέτρησης ούτε κατ επέκταση και τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων. Τα δύο τελευταία ψηφία μπορεί να έχουν τοποθετηθεί για να δηλώσουν απλά την τάξη μεγέθους του βάρους.

Αν το σώμα έχει μετρηθεί με ακρίβεια εκατοντάδας του Nt τότε το βάρος του πρέπει να γραφεί με δύο μόνο σημαντικά και για τον λόγο αυτό γράφεται υπό μορφή δυνάμεως του δέκα ήτοι: 6.4×10^3Nt. Αν το σώμα έχει μετρηθεί με ακρίβεια δεκάδας του Nt τότε το βάρος του πρέπει να γραφεί με τρία σημαντικά και για τον λόγο αυτό γράφεται υπό μορφή δυνάμεως του δέκα ήτοι: 6.40×10^3Nt. Αν το σώμα έχει μετρηθεί με ακρίβεια μονάδας του Nt τότε το βάρος του πρέπει να γραφεί με τέσσερα σημαντικά και για τον λόγο αυτό γράφεται υπό μορφή δυνάμεως του δέκα ήτοι: 6.400×10^3Nt.

Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις τα μηδενικά έχουν τοποθετηθεί για να δηλώσουν θέσεις σημαντικών ψηφίων αφού η παρουσία τους δεν είναι απαραίτητη για να υποδηλώσουν κάποια θέση υποδιαστολής.

3.5 Πράξεις με αριθμούς διαφορετικών σημαντικών ψηφίων.

Συνήθως είναι πρόβλημα που εμφανίζεται κατά τον υπολογισμό σύνθετου σφάλματος δηλαδή στις έμμεσες μετρήσεις.

Α. Πρόσθεση ή αφαίρεση.

Στην περίπτωση πρόσθεσης ή αφαίρεσης οι αριθμοί στρογγυλοποιούνται έτσι ώστε το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων του αριθμού πού προκύπτει ως αποτέλεσμα να είναι ίσο με το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων του αριθμού με το μικρότερο πλήθος δεκαδικών.

Αριθμητικό παράδειγμα:

783.6+3.844=787.444 (εσφαλμένο).

783.6+3.844=787.4 (ορθό).

Β. Πολλαπλασιασμός ή διαίρεση.

Αν υποτεθεί ότι η ανακρίβεια ενός αριθμού εκφράζεται με μία μονάδα στο τελευταίο σημαντικό ψηφίο του τότε ως σχετική ορθότητα καλείται το πηλίκο της ανακρίβειας του αριθμού δια τού αριθμού αυτού. Για παράδειγμα η σχετική ορθότητα του αριθμού 9.98 θα είναι:

$$\frac{0.01}{9.98} \cong 0.001 \text{ ή } 0.1\%$$

Στην περίπτωση πολλαπλασιασμού , διαίρεσης, δυνάμεων και ριζών το αποτέλεσμα γράφεται με το ίδιο πλήθος σημαντικών ψηφίων ή ένα παραπάνω από το πλήθος των σημαντικών ψηφίων με την μικρότερη σχετική ορθότητα.

Αριθμητικό παράδειγμα:

Ποιό το γινόμενο των αριθμών 11.1 και 23.25; Πως γράφεται το αποτέλεσμα;

Η σχετική ορθότητα του αριθμού 11.1 είναι 1% ενώ του 23.25 είναι 0.04%. Άρα:

$23.25\times11.1 = 258.075$ (εσφαλμένο)

$23.25\times11.1 = 258.07$ (ορθό)

3.6 Στρογγυλοποίηση.

Η στρογγυλοποίηση ενός αριθμού γίνεται με απόρριψη ορισμένων σημαντικών ψηφίων πού βρίσκονται στα δεξιά. Όταν το πρώτο ψηφίο από δεξιά πού απορρίπτεται είναι μικρότερο του 5, τότε το προηγούμενο ψηφίο μένει αναλλοίωτο ενώ αν είναι μεγαλύτερο του 5, τότε θα προστίθεται μία μονάδα στο τελευταίο ψηφίο που μένει. Αν είναι ακριβώς 5, τότε προστίθεται μία μονάδα στο τελευταίο ψηφίο πού μένει εφ όσον αυτό είναι περιττός ενώ αυτό μένει ως έχει εφ όσον είναι άρτιος.

Αριθμητικό παράδειγμα

Να στρογγυλοποιηθούν με διαδοχική διαδικασία οι αριθμοί α) 3.14159 και β) 51.76 μέχρις ότου διαθέτουν ένα σημαντικό ψηφίο.

3.14159	51.76
3.1416	51.8
3.142	52
3.14	50 ή (5×10)
3.1	
3	

Συνήθως στρογγυλοποιήσεις απαιτούνται μετά από πράξεις μεταξύ διαφόρων αριθμών.

3.7 Νόμος κανονικής κατανομής σφάλματος

Στη στατιστική Gauss τα αποτελέσματα επαναλαμβανόμενων μετρήσεων που προκύπτουν από την ύπαρξη απροσδιόριστων (τυχαίων) σφαλμάτων θεωρούνται ότι κατανέμονται σύμφωνα με τον νόμο της κανονικής κατανομής σφάλματος. Ο νόμος αυτός δηλώνει ότι: Το κλάσμα εμφάνισης πληθυσμού μετρήσεων dN / N με τιμές που βρίσκονται στη περιοχή x έως x+dx δίνεται από την σχέση:

$$\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{N}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\chi-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{dx}$$

όπου μ και σ είναι αντίστοιχα η μέση τιμή του πληθυσμού και σ η τυπική απόκλιση ενώ N ο αριθμός των πειραματικών προσπαθειών.

4. Υπολογιστική διαδικασία

Προκειμένου να γίνουν περισσότερο κατανοητές οι έννοιες που διαπραγματεύεται η συγκεκριμένη θεωρητική άσκηση προτείνεται η πραγματοποίηση μερικών (ή και όλων) από τις παρακάτω υπολογιστικές διαδικασίες. Πρόκειται για ανεξάρτητες περιπτώσεις με «έτοιμες» πειραματικές μετρήσεις στις οποίες θα χρειαστεί να υπολογίσετε μέσες τιμές και σφάλματα, να προσδιορίσετε το πλήθος των σημαντικών ψηφίων, να πραγματοποιήσετε πράξεις αλλά και στρογγυλοποιήσεις αριθμών που είναι αποτέλεσμα πειραματικής μέτρησης κ. α.

1. Να σημειωθεί το πλήθος n των σημαντικών ψηφίων που έχει ο καθένας από τους παρακάτω αριθμούς και να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

Αριθμός	99.05	27.11	5280	0.0094	84000	100	400.0	967.23	101
n									

Αριθμός	4.00	4.0 x10^3	4.02 x10^2	2.007	3.010	20.12	0.005	0.30
n								

2. Να στρογγυλοποιηθούν οι παρακάτω αριθμοί σε αντίστοιχους με 2 ή και 3 σημαντικά ψηφία, να συμπληρωθεί ο πίνακας που ακολουθεί.

Αριθμός	4.451	1.750	2.045	9.999	1.024	1.2451	1.235
n = 2							
n = 3							

Αριθμός	4.6675	0.02567	3.9067	4.042 x10^2	8.005	5.9021	5.9008
n = 2							
n = 3							

3. Να επιλεγεί το κατάλληλο αποτέλεσμα σε κάθε μια από τις παρακάτω πράξεις και να εξηγηθεί αναλυτικά το γιατί έγινε η συγκεκριμένη επιλογή.

10.0 - 9.13846 = 0.9 ή 1 ή 0.86	10 - 9.13846 = 1 ή 0.86 ή 0.862
0.029 x 12 = 0.35 ή 0.4 ή 0.0348	132.7 x 0.061 = 8.095 ή 8.0947 ή 8.1
21.1+ 2.035 + 6.12 = 29.255 ή 29.3 ή 29.26	132.700 + 0.061 = 132.761 ή 132.8 ή 132.76

4. Άγνωστη αντίσταση R μετρήθηκε πειραματικά με σκοπό να υπολογιστεί η μέση τιμή της $\overline{\mathrm{R}}$ καθώς και το αντίστοιχο σφάλμα $\delta\overline{\mathrm{R}}_\tau$. Εάν ο αριθμός των προσπαθειών που έγιναν ήταν δέκα (10) να χαρακτηριστούν οι παρακάτω εκφράσεις του τελικού αποτελέσματος:

$\overline{\mathrm{R}} \pm \delta\overline{\mathrm{R}}_\tau =$	(252.34+2.93) Ω
	(252.3 +2.93) Ω
	(252.3 +2.9) Ω
	(252.3 +3) Ω
	(252 +3) Ω
	(252 +2.9) Ω

Ποια από τις παραπάνω εκφράσεις είναι η σωστή εάν ο αριθμός των προσπαθειών τριπλασιαστεί ενώ η μέση τιμή έστω ότι παραμείνει ακριβώς η ίδια ;

5. Από τις έξι (6) επαναληπτικές μετρήσεις μιας άγνωστης αντίστασης R προέκυψαν οι εξής τιμές (σε Ω): 40.62, 40.82, 40.78, 40.70, 40.85 και 40.81.

Να δημιουργηθεί ο κατάλληλος πίνακας μετρήσεων – υπολογισμών και να υπολογιστούν: η μέση τιμή $\overline{\mathrm{R}}$, το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής καθώς και το αντίστοιχο σχετικό σφάλμα. Να γραφούν οι τελικές εκφράσεις: $\overline{\mathrm{R}} \pm \delta\overline{\mathrm{R}}_\tau$ καθώς και $\overline{\mathrm{R}} \pm \sigma_{\sigma\chi}$.

4.1 Θεματολογικές ερωτήσεις κατανόησης

1. Σε ποια κατηγορία σφαλμάτων θα τοποθετούσατε τη χρήση της προσεγγιστικής σχέσης για τον υπολογισμό ενός φυσικού μεγέθους;

5. Απαραίτητες γνώσεις

Μονάδες φυσικών μεγεθών, αλγεβρικές πράξεις, εκθέτες, δυνάμεις αριθμών, συναρτήσεις.

ΘΕ2 Γραφικές παραστάσεις, κλίση καμπύλης, μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων.

1. Σκοπός

Πρόκειται για θεωρητική άσκηση που σκοπό έχει την περιληπτική αναφορά σε θεματολογίες που αφορούν την δημιουργία γραφικών παραστάσεων καθώς και προσεγγίσεις αυτών με μαθηματικές συναρτήσεις (Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων). Είναι άσκηση εισαγωγικού χαρακτήρα της οποίας η κατανόηση θα βοηθήσει σημαντικά στην σωστή διεξαγωγή των εργαστηριακών ασκήσεων που ακολουθούν.

2. Θεωρία

Στα φυσικά φαινόμενα υπάρχει συνήθως μια θεωρητική ή ακόμη και εμπειρική σχέση η οποία συνδέει το αποτέλεσμα μιας μέτρησης π.χ. το φυσικό μέγεθος y με μια ή και περισσότερες αιτίες π.χ. τα μεγέθη $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ δηλαδή υπάρχει η σχέση: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_\nu)$.

Στην προηγούμενη σχέση τα μεγέθη $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ ονομάζονται ανεξάρτητες μεταβλητές ενώ το μέγεθος y εξαρτημένη μεταβλητή. Είναι προφανές ότι το μέγεθος y μεταβάλλεται κάθε φορά ανάλογα με τις τιμές των επί μέρους ανεξάρτητων μεταβλητών του x_i από i = 1 έως ν.

Συνήθως σε μια πειραματική μέτρηση ο παρατηρητής ελέγχει μια μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή (έστω την $x = x_1$) ενώ τις υπόλοιπες μεταβλητές τις θεωρεί ως σταθερές. Στην περίπτωση αυτή η εξάρτηση της μεταβλητής y από την ανεξάρτητη μεταβλητή δίνεται από την σχέση: y = f (x) με $x_2, x_3, \dots, x_\nu$ σταθερές.

Εάν τώρα είναι γνωστή η σχέση που συνδέει τα μεγέθη y και x_1 (ή x) τότε προσδιορίζονται θεωρητικά όλοι εκείνοι οι κανόνες και οι νόμοι που χαρακτηρίζουν το φυσικό φαινόμενο από το οποίο προκύπτει η σχέση: y = f (x). Αντίθετα εάν δεν είναι γνωστή η αναλυτική αυτή σχέση ενώ είναι δυνατόν να μετρηθούν τα μεγέθη x και y τότε με την απεικόνιση των ζευγών (x, y) σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων μπορεί να προσδιοριστεί αφ' ενός η άγνωστη (τις περισσότερες φορές) σχέση: y = f (x) αφ' ετέρου οι νόμοι που προσδιορίζουν το προς μελέτη φυσικό αυτό φαινόμενο (διαδικασία δημιουργίας μαθηματικού μοντέλου). Η απεικόνιση αυτή χαρακτηρίζει τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως y = f (x).

Είναι φανερό λοιπόν ότι η γραφική παράσταση αποτελεί κάθε φορά την οπτική παρουσίαση του τρόπου εξάρτησης ενός αποτελέσματος από την αντίστοιχη του αιτία, στο μελετούμενο φυσικό φαινόμενο.

Αρκετές φορές τα πειραματικά δεδομένα πρέπει να απεικονίζονται υπό μορφή γραφικών παραστάσεων σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων καρτεσιανών συντεταγμένων. Με τις γραφικές παραστάσεις επιτυγχάνονται κυρίως τα εξής :

- Δημιουργία ενιαίας εικόνας για την συνολική πορεία της συμπεριφοράς του φαινόμενου και της αλληλεξάρτησης των μεταβλητών του.
- Γίνεται άμεση εκτίμηση της κλίμακας των αριθμητικών τιμών για τα μεγέθη που συμμετέχουν και τέλος
- Διερευνάται η ύπαρξη κάποιας ένδειξης για τη μαθηματική σχέση που μπορεί να συνδέει τις μεταβλητές αυτές.

3. Μέθοδος

3.1 Η Τεχνική της Δημιουργίας των Γραφικών Παραστάσεων.

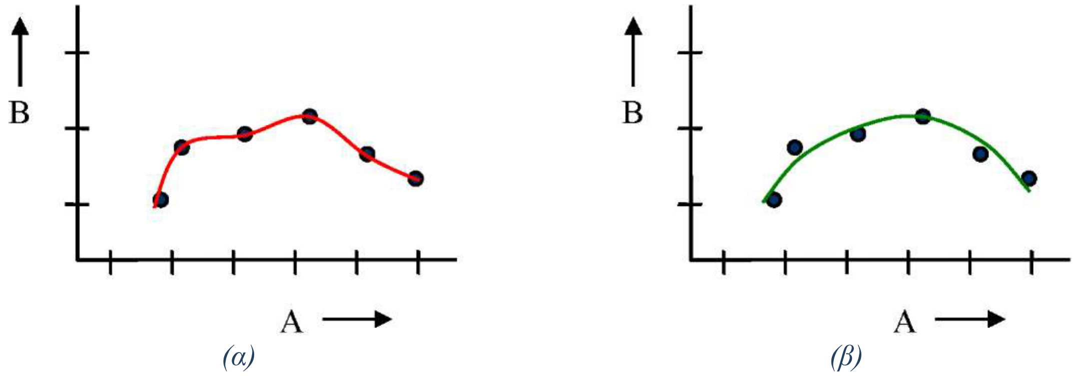
Το πρώτο πράγμα στη δημιουργία μιας γραφικής παράστασης - σε χιλιοστομετρικό χαρτί - είναι η κατάλληλη επιλογή της κλίμακας και για τους δυο άξονες. Σημειώνεται ότι δεν είναι αναγκαίο η κλίμακα αυτή να είναι η ίδια για τον οριζόντιο και τον κατακόρυφο άξονα. Απεναντίας πολύ σπάνια είναι η περίπτωση όπου η ίδια κλίμακα και στους δυο άξονες δημιουργεί μια ικανοποιητική γραφική παράσταση. Ουσιαστικό κριτήριο για την επιλογή της κλίμακας σε κάθε άξονα είναι αφ' ενός μεν η συνολική διάσταση που επιθυμούμε να έχει το χιλιοστομετρικό χαρτί (π.χ. 14 x 10 cm) και αφ' ετέρου η μεταβολή του μεγέθους που απεικονίζεται στον συγκεκριμένο άξονα. Θα πρέπει η κλίμακα που επιλέγεται για κάθε υποδιαίρεση του χιλιοστομετρικού χαρτιού να είναι ίση ή ακέραιο πολλαπλάσιο των αριθμών 2, 5 ή και 10. Έτσι γίνεται περισσότερο εύκολος ο προσδιορισμός σημείων που αντιστοιχούν σε ενδιάμεσες τιμές όχι μόνο κατά την δημιουργία της γραφικής παράστασης αλλά και κατά το στάδιο της μετέπειτα αξιοποίησής της. Κάθε ζεύγος των μεγεθών (x, y) αποτυπώνεται στο επίπεδο σε σημείο στο κέντρο ενός μικρού κύκλου (ή τετραγώνου) ή και από μια τομή δυο μικρών ευθύγραμμων τμημάτων.

Θα πρέπει ακόμη και οι δυο άξονες να συμβολίζονται με το φυσικό μέγεθος που απεικονίζουν όπως επίσης και με την αντίστοιχη μονάδα μέτρησης. Τέλος, η κάθε γραφική παράσταση θα πρέπει να συμβολίζεται αξιοποιώντας τα διεθνώς καθιερωμένα σύμβολα των φυσικών μεγεθών και για τους δυο άξονες π.χ. $v = f(t)$ ή $s = f(t)$.

3.2 Χάραξη της Πειραματικής Καμπύλης.

Με δεδομένη την διασπορά των πειραματικών σημείων στη γραφική παράσταση η πειραματική καμπύλη που τελικά θα χαραχθεί οφείλει να είναι όσο το δυνατόν πιο ομαλή. Σε περιπτώσεις όπου δεν επιδιώκεται απόλυτη μαθηματική ακρίβεια, η εκτίμηση για την καλύτερη καμπύλη καθορίζεται προσεγγιστικά με το μάτι έτσι ώστε τα πειραματικά σημεία να κατανέμονται ισόρροπα γύρω από την χαραχθείσα ομαλή καμπύλη. Δηλαδή, το ίδιο περίπου πλήθος πειραματικών σημείων θα πρέπει να βρίσκονται αριστερά ή και δεξιά της συγκεκριμένης πειραματικής καμπύλης. Εάν τα πειραματικά σημεία φαίνεται να ανήκουν σε ευθεία γραμμή χαράσσουμε ευθεία με τον χάρακα, ενώ εάν η κατανομή τους συμφωνεί με κάποια μορφή καμπύλης, τότε χαράσσουμε την καμπύλη αυτή με καμπυλόγραμμο ή και με ελεύθερο χέρι.

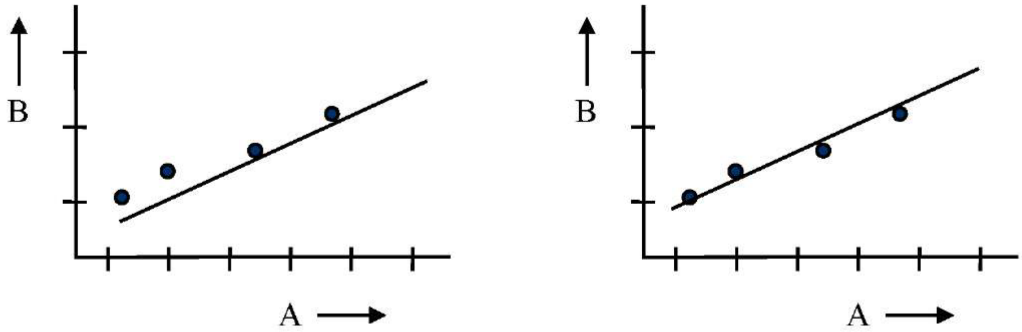
Κατά την σχεδίαση δεν θα πρέπει να ενώσουμε στην τύχη ή και διαδοχικά όλα τα πειραματικά σημεία. Καμπύλες όπως του σχήματος 4(α) που ακολουθεί (κάτω αριστερά) δεν δίνουν σωστή πληροφορία για τα μεταβαλλόμενα μεγέθη, ενώ η ομαλοποιημένη καμπύλη του δίπλα ακριβώς σχήματος 4(β), αν και δεν διέρχεται από όλα τα πειραματικά σημεία, εν τούτοις θεωρείται ότι περιγράφει ικανοποιητικότερα το φαινόμενο.



(α) (β)

Σχήμα 4. Σχεδίαση γραφικών παραστάσεων από πλήθος πειραματικών σημείων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα προηγούμενα σχήματα αντιστοιχούν στην ίδια ακριβώς χωρική κατανομή πειραματικών σημείων με διαφορετική όμως χάραξη της αντίστοιχης πειραματικής καμπύλης.



(α) *(β)*

Σχήμα 5. Χάραξη ευθείας διά μέσου πειραματικών σημείων.

Όμοια το αριστερά σχήμα 5(α) ακριβώς επάνω χαρακτηρίζεται λάθος διότι η «προτεινόμενη» πειραματική ευθεία «υποχρεώθηκε» να περάσει από την αρχή των αξόνων χωρίς αυτό να είναι υποχρεωτικά αναγκαίο όπως φαίνεται στο σχήμα 5(β).

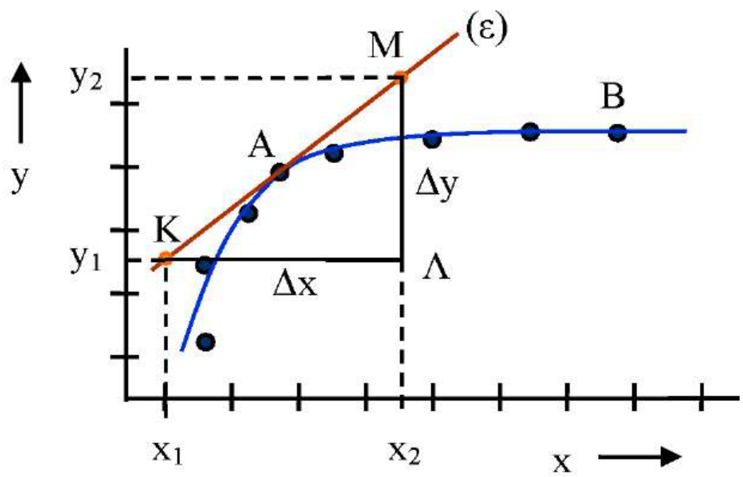
3.3 Υπολογισμός της Κλίσης σε Γραφική Παράσταση.

Η κλίση αποτελεί ένα ιδιαίτερα σημαντικό φυσικό μέγεθος το οποίο προκύπτει από την γραφική παράσταση των μεταβλητών παραμέτρων ενός φυσικού φαινόμενου. Από πλευρά ορισμού η κλίση εκφράζει τον τρόπο μεταβολής της εξαρτημένης μεταβλητής y σε μια δεδομένη μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής x και αναφέρεται σε συγκεκριμένο σημείο μικρής περιοχής της καμπύλης κάθε γραφικής παράστασης.

Η κλίση m λοιπόν μιας πειραματικής καμπύλης σε ένα σημείο $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ ορίζεται ως το πηλίκο:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η ευθεία (ε) είναι η εφαπτομένη ευθεία της πειραματικής καμπύλης στο σημείο $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ και με την χάραξή της δημιουργείται το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΜ. (Σχήμα 6)



Σχήμα 6. Υπολογισμός κλίσης καμπύλης γραμμής.

Το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΜ έχει ως υποτείνουσα την εφαπτομένη ευθεία (ε) ενώ το σημείο Α βρίσκεται περί το μέσον της υποτείνουσας ΚΜ.

Οι όροι του κλάσματος $(y_2 - y_1)$ και $(x_2 - x_1)$ δεν αφορούν τα «γεωμετρικά μήκη» των πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου αλλά είναι οι αντίστοιχες διαφορές των συντεταγμένων στους δυο άξονες. Η κλίση λοιπόν είναι το πηλίκο της κατακόρυφης μεταβολής Δy προς την αντίστοιχη οριζόντια Δx και μάλιστα η τιμή της είναι ανεξάρτητη της επιλογής των κορυφών Κ και Μ του ορθογώνιου τριγώνου ΚΛΜ.

Σημειώνεται ότι η τιμή της κλίσης για την συγκεκριμένη καμπύλη δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται κάθε φορά από την επιλογή της περιοχής του σημείου Α. Δηλαδή, η κλίση της ίδιας καμπύλης σε άλλο σημείο θα είναι διαφορετική. Για παράδειγμα στο προηγούμενο σχήμα η κλίση της καμπύλης στη περιοχή του σημείου Β είναι μηδέν. Βέβαια σε περίπτωση όπου η πειραματική καμπύλη ταυτίζεται με ευθεία - και η γραφική αναπαράσταση γίνεται σε χιλιοστομετρικό χαρτί - τότε η κλίση παραμένει σταθερή για οποιοδήποτε σημείο της πειραματικής αυτής ευθείας.

Στις γραφικές παραστάσεις που συνοδεύουν μια πειραματική διαδικασία οι όροι Δy και Δx αντιπροσωπεύουν φυσικά μεγέθη με συγκεκριμένες μονάδες μέτρησης. Έτσι η κλίση της καμπύλης δεν μπορεί να είναι καθαρός αριθμός αλλά διαθέτει μονάδες που προέρχονται απλά από το πηλίκο των επί μέρους μονάδων στους δυο άξονες. Για παράδειγμα σε προβλήματα κινηματικής η κλίση της καμπύλης ταχύτητα - χρόνου: $\upsilon = f(\tau)$ έχει μονάδες m/s^2, πρόκειται δηλαδή για το γνωστό φυσικό μέγεθος της επιτάχυνσης $\gamma = \Delta\upsilon/\Delta t$.

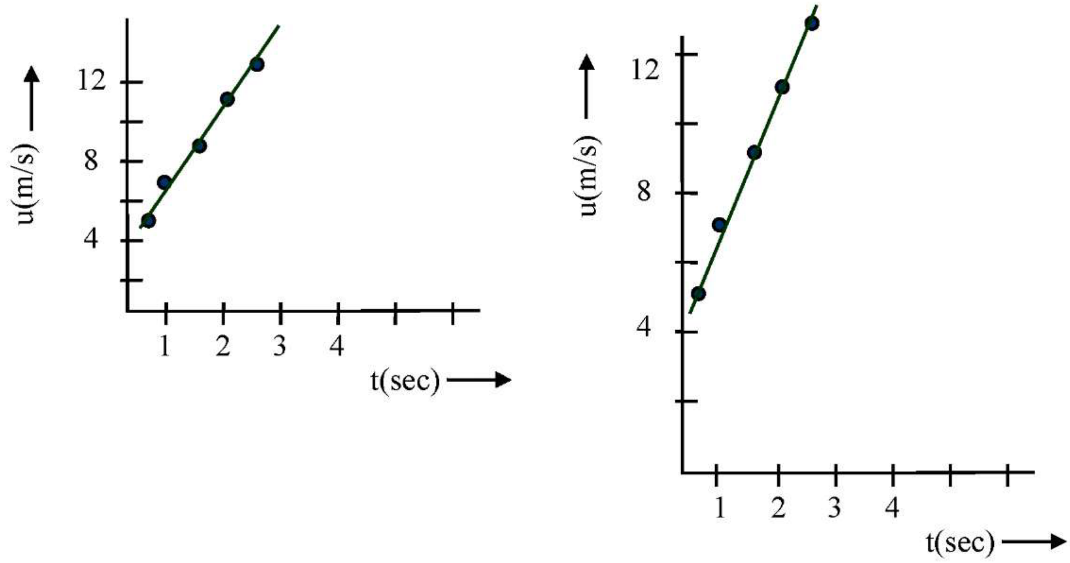
Γίνεται λοιπόν κατανοητό ότι εν προκειμένω η κλίση δεν μπορεί, και δεν πρέπει, να ταυτίζεται με την εφαπτομένη μιας γωνίας. Η ταύτιση αυτή συμβαίνει μόνο στη (πολύ σπάνια) περίπτωση που και οι δυο άξονες αντιστοιχούν στα ίδια ακριβώς φυσικά μεγέθη και μάλιστα οι άξονες αυτοί έχουν μοιραστεί με την ίδια κλίμακα.

Για επιπλέον επιβεβαίωση των ανωτέρω θα πρέπει να αναφερθεί ότι η κλίση είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της κλίμακας των επί μέρους αξόνων για την χάραξη της καμπύλης. Στην συνέχεια παρουσιάζεται ένας πίνακας πέντε (5) μετρήσεων χρόνου - ταχύτητας που αντιστοιχεί σε ένα τυπικό πρόβλημα κινηματικής.

α/α	**t** (sec)	**υ** ($^{m}/_{sec}$)
1	0.5	5
2	1.0	7
3	1.5	9
4	2.0	11
5	2.5	13

Στα σχήματα που ακολουθούν γίνεται η ταυτόχρονη γραφική παράσταση $\upsilon = f(\tau)$ του προηγούμενου πίνακα με διαφορετική όμως επιλογή της κλίμακας του κατακόρυφου άξονα της ταχύτητας.

Εύκολα λοιπόν διαπιστώνει κανείς ότι αν και οι δυο προκύπτουσες πειραματικές ευθείες δεν είναι παράλληλες (διαφορετική η «γεωμετρική» κλίση), εν τούτοις η κλίση που κάθε φορά ανεξάρτητα υπολογίζεται είναι η ίδια και ίση με 4 m/s^2. Πρόκειται δηλαδή για την απεικόνιση της περιγραφής μιας ευθύγραμμης κίνησης ομαλά επιταχυνόμενης.



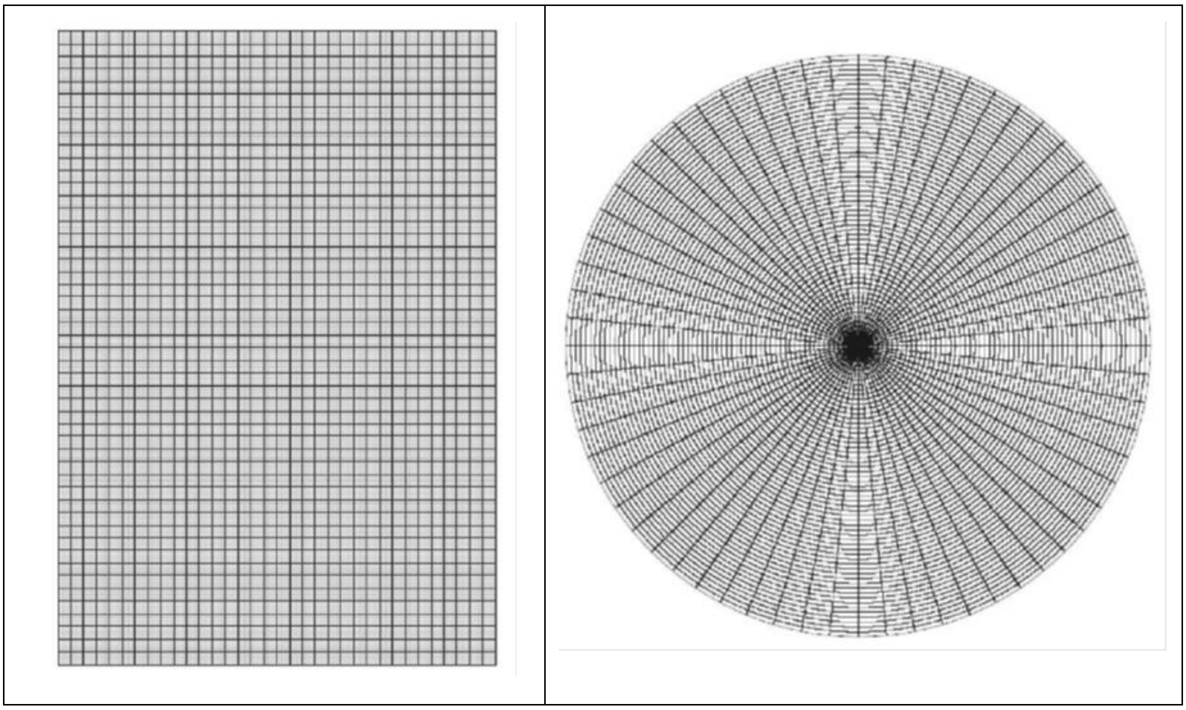
(α) *(β)*

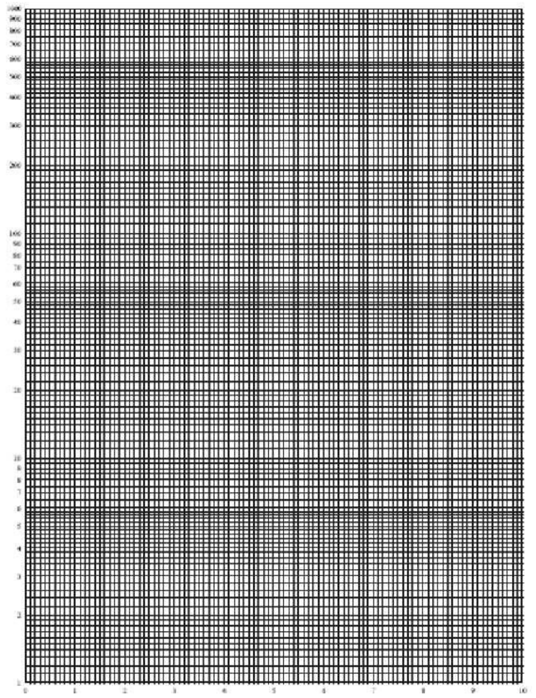
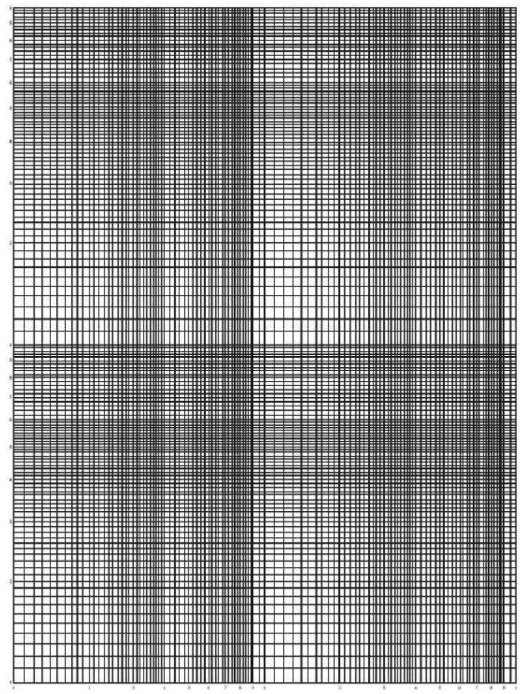
Σχήμα 7 Χάραξη ευθείας με διαφορετικές επιλογές κλίμακας κατακόρυφου άξονα.

Παρατηρείται επίσης ότι οι προεκτάσεις των πειραματικών ευθειών - και στις δυο περιπτώσεις- διέρχονται από το ίδιο σημείο των 4 m/s^2 στον κατακόρυφο άξονα, πρόκειται για τιμή που αντιστοιχεί στην αρχική ταχύτητα (t = 0 sec) του κινητού για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

3.4 Κατηγορίες γραφικών παραστάσεων

Προφανώς γραφικές παραστάσεις δεν γίνονται μόνο σε χιλιοστομετρικά χαρτιά. Υπάρχουν χαρτιά ειδικής χρήσης με μη γραμμική χάραξη των αξόνων των συντεταγμένων τους. Τέτοια χαρτιά είναι τα ημιλογαριθμικά, τα (πλήρη) λογαριθμικά, τα πολικά κ.α. Η δημιουργία γραφικών παραστάσεων σε τέτοιου είδους χαρτιά με ιδιαίτερη χάραξη πραγματοποιείται σε σχετικά μικρό αριθμό πειραματικών μετρήσεων. Τα χαρτιά λογαριθμικής χάραξης αξιοποιούνται ιδιαίτερα στις περιπτώσεις όπου οι τιμές των πειραματικών δεδομένων εκτείνονται σε ένα πολύ μεγάλο εύρος (για παράδειγμα δυο, τριών ή και τεσσάρων τάξεων μεγέθους). Η απεικόνιση των συγκεκριμένων τιμών σε συνηθισμένο χιλιοστομετρικό χαρτί θα είχε δυσμενείς επιπτώσεις στην ευκρίνεια του διαγράμματος αλλά και στην ακρίβεια της γραφικής παράστασης.



Στα ανωτέρω σχήματα παρουσιάζονται ενδεικτικά τα χαρτιά της σχεδίασης που συνήθως χρησιμοποιούνται σε εργαστηριακές ασκήσεις Φυσικής. Συγκεκριμένα παρουσιάζονται κατά σειρά: χιλιοστομετρικό, πολικό, ημιλογαριθμικό και πλήρες λογαριθμικό χαρτί.

Το χαρτί με γραμμική χάραξη στους άξονες των συντεταγμένων είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για γραφικές παραστάσεις γραμμικών ή ακόμη και μη γραμμικών συναρτήσεων χωρίς κανένα μαθηματικό μετασχηματισμό. Στο ημιλογαριθμικό χαρτί ο οριζόντιος άξονας έχει γραμμική χάραξη ενώ ο κατακόρυφος είναι χαραγμένος λογαριθμικά. Σε αυτό το χαρτί γίνονται γραφικές παραστάσεις της γενικής μορφής: $y = a \cdot b^x$ οι οποίες - αν και είναι καμπύλες σε γραμμική αναπαράσταση - εδώ «μετατρέπονται» γραφικά σε ευθείες.

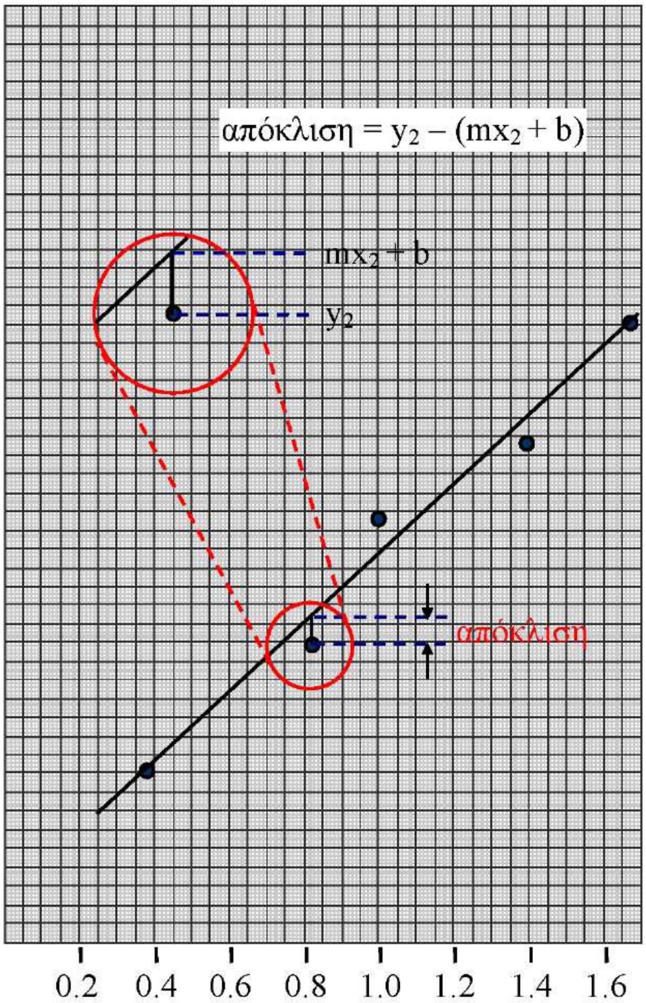
Ημιλογαριθμικά χαρτιά υπάρχουν στο εμπόριο σε ποικιλίες ενός, δυο, τριών ή και ακόμη περισσότερων κύκλων. Το πλήρες λογαριθμικό χαρτί έχει και τους δυο άξονες χαραγμένους λογαριθμικά, είναι πολύ χρήσιμο για γραφικές παραστάσεις τις μορφής: $y = a \cdot x^b$ (πρόκειται για καμπύλες) τις οποίες και πάλι «μετατρέπει» απεικονιστικά σε ευθείες.

4. Μέθοδος των ελάχιστων τετραγώνων (Least squares method)

Πρόκειται για την μέθοδο που εφαρμόζει την γενική μαθηματική αρχή των ελαχίστων τετραγώνων του Legendre. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται στην περίπτωση όπου χρειάζεται να σχεδιαστεί η καλλίτερη δυνατή ευθεία που διέρχεται από συγκεκριμένη κατανομή πειραματικών σημείων.

Στο σχήμα (8) που ακολουθεί παρουσιάζεται η περίπτωση ευθείας με χαρακτηριστική εξίσωση: $y = mx + b$ και η οποία προσδιορίζεται από τις συγκεκριμένες θέσεις των πειραματικών σημείων.

Η ευθεία αυτή είναι έτσι ιδανικά χαραγμένη ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων των πειραματικών τιμών από αυτή να είναι το ελάχιστο δυνατό.



Σχήμα 8. Χάραξη ευθείας με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Ο προσδιορισμός των άγνωστων παραμέτρων m και b της ζητούμενης ευθείας γίνεται αποκλειστικά και μόνο από τις τιμές x_i και y_i των πειραματικών μετρήσεων. Με σκοπό τον αναλυτικό προσδιορισμό θα πρέπει πρώτα να δημιουργηθεί ο πίνακας των πέντε (5) στηλών που ακολουθεί. Η τελευταία γραμμή του συγκεκριμένου πίνακα αντιστοιχεί στο σχετικό άθροισμα του περιεχομένου της υπερκείμενης στήλης.

i	$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{y_i}$	$\mathbf{x_i^2}$	$\mathbf{y_i^2}$	$\mathbf{x_i y_i}$
1					
2					
3					
4					
5					
	$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_i^2$	$\sum y_i^2$	$\sum x_i y_i$

Σύμφωνα με την μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων αποδεικνύεται ότι οι άγνωστοι παράμετροι m και b δίνονται από τις σχέσεις: $m = \dfrac{\sum x_i y_i - Nxy}{\sum x_i - Nx^2}$ και $b = \dfrac{y \sum x_i^2 - x \sum x_i y_i}{\sum x_i - Nx^2}$

$$\text{με: } x = \frac{\sum x_i}{N} \text{ και } y = \frac{\sum y_i}{N}$$

Τα αντίστοιχα σφάλματα δm και δb των παραμέτρων m και b υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$(\delta m)^2 = \frac{S_x S_y - S_{xy}^2}{(N-2)S_x^2} \quad \text{και} \quad (\delta b)^2 = \frac{\left(S_x S_y - S_{xy}^2\right)(S_x + Nx^2)}{N(N-2)S_x^2}$$

$$\textit{όπου}: S_x = \sum x_i^2 - Nx^2, \qquad S_y = \sum y_i^2 - Ny^2 \quad \textit{και} \quad S_{xy} = \sum x_i y_i - Nxy$$

5. Υπολογιστική διαδικασία

Προκειμένου να γίνουν περισσότερο κατανοητές οι έννοιες που διαπραγματεύεται η συγκεκριμένη θεωρητική άσκηση προτείνεται η πραγματοποίηση μερικών (ή και όλων) από τις παρακάτω υπολογιστικές διαδικασίες. Πρόκειται για ανεξάρτητες περιπτώσεις με «έτοιμες» πειραματικές μετρήσεις στις οποίες θα χρειαστεί να γίνουν οι γραφικές τους παραστάσεις, ο υπολογισμός της κλίσης σε κάποιες καμπύλες κ.τ.λ.

1. Οι πειραματικές τιμές που προέκυψαν για μια μεταβλητή τάση V, σε σχέση με τον χρόνο t, δίνονται από τον πίνακα που ακολουθεί. Να γίνει η γραφική παράσταση V = f (t) και να βρεθεί η κλίση m της καμπύλης στο σημείο που αντιστοιχεί σε τιμή τάσης V_o /4 όπου V_o η τιμή της τάσης την χρονική στιγμή t = 0.

α/α	**t** (sec)	**V** (V0lts)
1	0	200.0
2	30	74.0
3	60	26.7
4	90	10.5
5	120	3.8
6	150	1.5
7	180	0.5

2. Κινητό εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση και το διανυόμενο διάστημα S σε σχέση με τον αντίστοιχο χρόνο t δίνεται από τον πίνακα μετρήσεων που ακολουθεί. Να γίνουν τα διαγράμματα $s = f(t)$, $\upsilon = f(t)$ και $\gamma = f(t)$. Σημειώνεται ότι η ταχύτητα υ καθώς και η επιτάχυνση γ ικανοποιούν (από ορισμού) τις σχέσεις: $\upsilon = \Delta s/\Delta t$ και $\gamma = \Delta\upsilon/\Delta t$. Τι ακριβώς κίνηση εκτελεί το συγκεκριμένο κινητό; Μπορείτε να την χαρακτηρίσετε και να δικαιολογήσετε τον χαρακτηρισμό σας;

α/α	**t** (sec)	**S**(m)
1	0	0
2	1	3
3	2	8
4	3	15
5	4	24
6	5	35
7	6	48
8	7	63
9	8	80
10	9	99

3. Σύστημα δυο μεταβλητών πυκνωτών συνδέεται σε σειρά έτσι ώστε η συνολική χωρητικότητα του συστήματος να διατηρείται σταθερή. Στο πίνακα που ακολουθεί δίδονται τα διάφορα ζευγάρια τιμών για τις χωρητικότητες c_1 και c_2. Να συμπληρωθούν οι στήλες του συγκεκριμένου πίνακα, να γίνει η γραφική παράσταση $1/c_2 = f(1/c_1)$ και να υπολογιστεί γραφικά η άγνωστη συνολική χωρητικότητα.

Σημειώνεται ότι η σύνδεση δυο πυκνωτών σε σειρά ικανοποιεί την σχέση: $\frac{1}{c_{ολ}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$

Επιβεβαιώνεται η προηγούμενη σχέση υπολογισμού της $c_{ολ}$ από την γραφική παράσταση $1/c_2 = f(1/c_1)$;

α/α	$\mathbf{c_1}$ (μF)	$\mathbf{c_2}$ (μF)	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c_1}}(\mu F)^{-1}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c_2}}(\mu F)^{-1}$
1	32	115		
2	41	66		
3	55	46		
4	70	39		
5	93	34		

4. Σε άσκηση υπολογισμού της επιτάχυνσης βαρύτητας g με μαθηματικό εκκρεμές δημιουργήθηκε ο πίνακας μετρήσεων που ακολουθεί. Να συμπληρωθεί ο πίνακας μετρήσεων - υπολογισμών και να γίνει η γραφική παράσταση $T^2 = f(l)$. Πόση είναι η επιτάχυνση βαρύτητας στον τόπο που έγινε το πείραμα; Σημειώνεται ότι τα l , T συμβολίζουν το μήκος και την περίοδο του μαθηματικού εκκρεμούς αντίστοιχα. Τα μεγέθη αυτά ικανοποιούν τη μαθηματική σχέση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

α/α	**l** (m)	**T** (sec)	$\mathbf{T^2}(\mathrm{sec})^2$
1	0.2	0.89	
2	0.4	1.26	
3	0.6	1.55	
4	0.8	1.79	
5	1.0	2.00	

5. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $y = (0.5)2^x$ (με τη μεταβλητή x να μεταβάλλεται στο διάστημα $(0 < x < 8)$ σε χιλιοστομετρικό αλλά και ημιλογαριθμικό χαρτί τριών κύκλων. Τι παρατηρείτε; Γιατί διαφέρουν οι καμπύλες στις δυο παραστάσεις; Να υπολογίσετε (γραφικά) και στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις την κλίση στα σημεία x = 2 και x = 5. Τι ακριβώς παρατηρείτε; Γνωρίζοντας ότι η κλίση ταυτίζεται με την μαθηματική παράγωγο (dy/dx) μπορείτε να υπολογίσετε θεωρητικά την τιμή της κλίσης στις δυο προηγούμενες περιοχές των σημείων 2 και 5;

6. Ο πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει τις τιμές του δείκτη διάθλασης n γυαλιού για διάφορα μήκη κύματος (στο κενό) λ προσπίπτοντος σε αυτό φωτός. Να γίνει προσεκτικά η γραφική παράσταση $n = f(\lambda)$, να υπολογιστεί γραφικά η κλίση της καμπύλης στις περιοχές των 400 nm και 700 nm αντίστοιχα. Σε ποια περιοχή του ορατού φάσματος (από τις δυο προηγούμενες) ο δείκτης διάθλασης μεταβάλλεται πιο γρήγορα;

λ (nm)	**n**
400	1.80
500	1.75
600	1.72
700	1.71
800	1.70

7. Η γραφική παράσταση του σχήματος που προηγήθηκε στη Μέθοδο των Ελαχίστων τετραγώνων προήλθε από μια κατανομή πέντε (5) πειραματικών σημείων που χαρακτηρίζονται από τις συντεταγμένες (x, y) του πίνακα που ακολουθεί. Να συμπληρωθεί ο προηγούμενος πίνακας μετρήσεων - υπολογισμών και αφού αξιοποιηθούν οι σχέσεις για τις παραμέτρους m και b να αποδειχθεί ότι η ζητούμενη πειραματική ευθεία είναι η: $y = 2.117x + 0.206$.

i	$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{y_i}$	$\mathbf{x_i^2}$	$\mathbf{y_i^2}$	$\mathbf{x_i y_i}$
1	0.38	1.1			
2	0.83	1.8			
3	1.08	2.6			
4	1.38	3.0			
5	1.75	4.0			
	$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_i^2$	$\sum y_i^2$	$\sum x_i y_i$

6. Θεματολογικές ερωτήσεις κατανόησης.

1. Ποια είναι η κλίση μιας ευθείας που όλα της τα πειραματικά σημεία κατανέμονται οριζόντια στην γραφική της παράσταση;

2. «Οι κατακόρυφες ευθείες σε γραφικές παραστάσεις δεν έχουν κλίση» να δικαιολογήσετε τον προηγούμενο ισχυρισμό.

3. Να αποδειχθεί ότι σε δυο ευθείες κάθετες μεταξύ τους το γινόμενο των κλίσεων τους ισούται με -1, δηλαδή ισχύει: $m_1 m_2 = -1$.

4. Να αποδειχθεί ότι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει κλίση m ικανοποιεί την εξίσωση: $y = m(x - x_0) + y_0$.

5. «Το πρόβλημα εύρεσης της εφαπτομένης σε μια καμπύλη είναι το γενικότερο αλλά και χρησιμότερο πρόβλημα που θέλω όσο τίποτε άλλο να λύσω». Πρόκειται για μια δήλωση - επιθυμία του φημισμένου μαθηματικού Rene Descartes. Περιγράφει την σημαντική δυσκολία που υπάρχει στην ακριβή χάραξη της εφαπτομένης σε μια τυχαία καμπύλη. Θεωρείτε υπερβολική μια τέτοια διατύπωση ή όχι ; δικαιολογήστε τους όποιους ισχυρισμούς σας.

7. Απαραίτητες Γνώσεις

Συναρτήσεις, όρια και συνέχεια συναρτήσεων, παράγωγος συνάρτησης, λογάριθμος.