



Προσδιορισμός της σταθεράς ενός ελατηρίου

1. Σκοπός

Στην άσκηση αυτή θα προσδιορίσουμε τη σταθερά ενός ελατηρίου χρησιμοποιώντας ως μέθοδο το νόμο του Hooke και τη σχέση της περιόδου της αρμονικής ταλάντωσης.

2. Θεωρία

2.1 Νόμος του Hooke για ελατήρια

Μια δύναμη μπορεί να κινήσει ή να παραμορφώσει ένα σώμα. Στην περίπτωση της παραμόρφωσης, αυτή θεωρείται μόνιμη όταν εξακολουθεί να υφίσταται και μετά την άσκηση της συγκεκριμένης δύναμης στο σώμα. Αντίθετα, εάν το σώμα επανέλθει στο αρχικό του σχήμα τότε η παραμόρφωση ονομάζεται ελαστική. Ένα ελατήριο έχει την ικανότητα, όταν δέχεται μικρές εξωτερικές δυνάμεις να εμφανίζει σχετικά μεγάλες ελαστικές παραμορφώσεις. Στην περίπτωση αυτή ισχύει ο εμπειρικός νόμος του Hooke :

$$F = -Dy$$

Όπου F είναι η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου, y η επιμήκυνση (ή συμπίεση) αυτού σε σχέση με το φυσικό του μήκος ενώ D μια σταθερά. Η σταθερά D εξαρτάται από τη φύση του υλικού που είναι κατασκευασμένο το ελατήριο καθώς επίσης και από τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά, δηλαδή μήκος, διάμετρος, διατομή σύρματος, συνολικός αριθμός σπειρών. Η σταθερά αυτή συχνά καλείται και κατευθύνουσα δύναμη ελατηρίου.

Με την βοήθεια διαφόρων βαρών είναι δυνατόν να επαναληφθεί ο νόμος του Hooke και να προσδιοριστεί η σταθερά D ενός ελατηρίου. Τα βάρη τοποθετούνται στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου και προσδιορίζεται η αντίστοιχη επιμήκυνση y αυτού.

Η σχέση $B = f(y)$ θα είναι ευθεία που μάλιστα διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Από την κλίση $\Delta B/\Delta y$ υπολογίζεται η σταθερά D του ελατηρίου (στο μέτρο που ισχύει : $D = \Delta B/\Delta y$).

Σημείωση : Τα βάρη των σωμάτων δίνονται σε Kp και επομένως η κλίση την οποία θα υπολογίσουμε θα είναι εκφρασμένη σε Kp / cm . Το Kp είναι, από ορισμού, η ελκτική δύναμη (βάρος) που ασκεί η γη σε σώμα με μάζα $1Kgr$ σε γεωγραφικό πλάτος 45° . Άρα ισχύει $1Kp = 1 Kgr \cdot 9.81 m/sec^2 = 9.81Nt$

2.2 Αρμονική ταλάντωση ελατηρίου

Ένα σώμα μάζας m είναι στερεωμένο στην ελεύθερη άκρη κατακόρυφου ελατηρίου και βρίσκεται σε ισορροπία. Εάν απομακρυνθεί από την θέση ισορροπίας του και αφεθεί ελεύθερο τότε θα κάνει γραμμική αρμονική ταλάντωση (η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα).

Η περίοδος της αρμονικής ταλάντωσης για ένα ιδανικό ελατήριο είναι :

$$T = 2\pi [m / D]^{1/2}$$

Εάν η μάζα m' του ελατηρίου θεωρηθεί συγκρίσιμη με την μάζα του σώματος τότε η αντίστοιχη σχέση της περιόδου γίνεται :

$$T = 2\pi [(m + m'/3)/D]^{1/2}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει :

$$T^2 = (4\pi^2 / D) m + (4\pi^2 / 3) m' / D$$

Πρόκειται δηλαδή για την σχέση $T^2 = f(m)$ που συνδέει τα T^2 και m , είναι πρώτου βαθμού και παρίσταται γραφικά από μια ευθεία που έχει κλίση την $4\pi^2 / D$ ενώ τέμνει τον κατακόρυφο άξονα T^2 στο σημείο $4\pi^2 m' / 3D$. Από την κλίση υπολογίζεται η σταθερά του ελατηρίου ενώ από την τομή της ευθείας με τον άξονα T^2 υπολογίζεται και η άγνωστη μάζα m' του ελατηρίου.

3. Πειραματική διαδικασία

3.1 Εργασίες

A. Υπολογισμός της σταθεράς D του ελατηρίου με την βοήθεια του νόμου του Hooke

1. Προσδιορίζουμε το φυσικό μήκος y_0 του ελατηρίου.
2. Αναρτούμε (ανά 0.1Kp) βάρη από 0.1Kp έως 1.0Kp. Για κάθε ένα από αυτά προσδιορίζουμε το αντίστοιχο μήκος y_i του ελατηρίου.
3. Υπολογίζουμε την παραμόρφωση $y = y_i - y_0$ του ελατηρίου για κάθε ένα διαφορετικό βάρος. Έτσι, συμπληρώνουμε τον πίνακα που ακολουθεί.

α.α.	y_0 (cm)	B (Kp)	y_i (cm)	y (cm)
1		0.1		
2		0.2		
3		0.3		
4		0.4		
5		0.5		
6		0.6		
7		0.7		

8		0.8		
9		0.9		
10		1.0		

4. Κατασκευάζουμε το διάγραμμα $B = f(y)$ και από την κλίση της πειραματικής ευθείας υπολογίζουμε την σταθερά D του ελατηρίου πρώτα σε Kp/cm και στη συνέχεια σε Nt/m .

B. Υπολογισμός της σταθεράς D του ελατηρίου από την σχέση της περιόδου της αρμονικής ταλάντωσης

1. Από το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου κρεμούμε γνωστά βάρη από $0.1Kp$ έως $0.6Kp$ αυξάνοντας κάθε φορά το συγκεκριμένο βάρος ανά $0.1Kp$.
2. Σε κάθε ένα από τα βάρη αυτά αφήνουμε το σύστημα να εκτελέσει ταλάντωση μικρού πλάτους και μετράμε το χρόνο δέκα (10) περιόδων.
3. Δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα μετρήσεων στον οποίο και καταχωρούμε την μάζα του σώματος, τον χρόνο των δέκα περιόδων (10T), την περίοδο T καθώς και το τετράγωνό της T^2 .

α.α.	m (Kgr)	10T (sec)	T (sec)	T^2 (sec ²)
1	0.1			
2	0.2			
3	0.3			
4	0.4			
5	0.5			
6	0.6			

4. Σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων δημιουργούμε την γραφική παράσταση $T^2 = f(m)$. Από την κλίση της πειραματικής ευθείας υπολογίζεται η σταθερά D καθώς και η μάζα m' του ελατηρίου.

Παρατήρηση: Απαραίτητη είναι η γνώση της θεωρίας που αναπτύσσεται στην ενότητα M1 (Θεωρία Ταλαντώσεων)