

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΙΙ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2013 ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ

1^ο

- i. Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = e^{-x} + x \cos 2y.$$

Να υπολογιστούν η κλίση $\vec{\nabla} f$ και η παράγωγος f_{xy} στο σημείο $P(-1, \pi/4)$.

- ii. Να μελετηθεί ως προς την ύπαρξη ακρότατων η συνάρτηση $g(x, y) = xy$.

2^ο

- i. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \int_D (x^2 - y) dx dy, \quad \text{όταν } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x\}.$$

- ii. Αν $y = y(x)$, να υπολογιστεί η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' + y = e^{-2x}.$$

Υπόδειξη: Η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης $y' + ay = r(x)$ όπου a σταθερά έχει μερική λύση την

$$y_p = e^{-ax} \left[\int e^{ax} r(x) dx \right].$$

3^ο

- i. Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση

$$f(t) = t \quad \text{αν } 0 \leq t < \pi \quad \text{και} \quad f(t + \pi) = f(t) \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Να εξεταστεί και να αιτιολογηθεί αν στην προσέγγιση της f με τη σειρά, παρουσιάζεται το φαινόμενο Gibbs.

- ii. Να υπολογιστεί η παράγωγος df/dt , όταν

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad \text{όπου } x = \cos t, \quad y = \sin t \quad \text{και } z = t.$$

Αθήνα 12 Σεπτεμβρίου 2013