ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι

Αθανάσιος Μπράτσος
Καθηγητής

Περιεχόμενα

Μάθημα 1

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1.1 Εισαγωγικές έννοιες

Στο μάθημα αυτό θα δοθούν τα κυριότερα στοιχεία των διανυσμάτων, που είναι απαραίτητα για την κατανόηση των επόμενων μαθημάτων. Ο αναγνώστης, για μια πληρέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4] στο τέλος του μαθήματος.

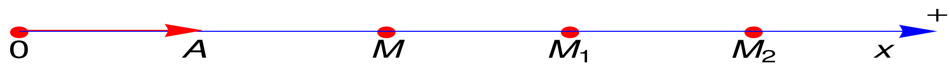
1.1.1 Βασικοί ορισμοί

Ορισμός 1.1.1 - 1. *Λέγεται* **προσανατολισμένη ευθεία** *ή* **άξονας** *μια ευθεία, έστω ε, στην οποία έχει οριστεί ένα σταθερό σημείο O, ένα ευθύγραμμο τμήμα OA που το μήκος του θεωρείται ως μονάδα μέτρησης, δηλαδή $|OA| = 1$ και θετική η φορά από το O προς το A (Σχ. 1.1.1 - 1).*

Τότε προφανώς η φορά από το A προς το O θα είναι αρνητική.

Αν τώρα M είναι ένα άλλο τυχόν σημείο της ε, θα πρέπει για το μέτρο της απόστασής του από το O να ισχύει:

$$|OM| = x|OA| = x.$$



Σχήμα 1.1.1 - 1: προσανατολισμένη ευθεία ή άξονας.

Ο αριθμός x ορίζει τότε την **τετμημένη** του σημείου M. Είναι προφανές ότι η τετμημένη είναι θετική, όταν το σημείο είναι δεξιά του O. Αντίστροφα τώρα, αν είναι γνωστή η τετμημένη ενός σημείου, τότε θα είναι γνωστή κατά μονοσήμαντο τρόπο και η θέση του στον άξονα. Σύμφωνα με τα παραπάνω, επειδή σε κάθε σημείο του άξονα αντιστοιχεί ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός και αντίστροφα (αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία), η ευθεία ε ταυτίζεται με το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

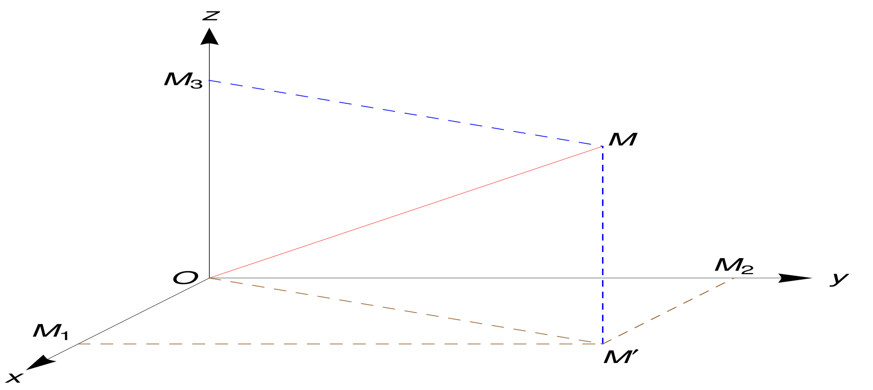
Ορισμός 1.1.1 - 2. *Έστω M_1, M_2 δύο τυχόντα σημεία της ε. Τότε το* ***μέτρο*** *ή η* ***αλγεβρική τιμή*** *του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2 θα ισούται με*

$$|M_1M_2| = |OM_2| - |OM_1| = x_2|OA| - x_1|OA| = x_2 - x_1. \qquad (1.1.1 - 1)$$

1.2 Συστήματα συντεταγμένων

1.2.1 Ορθογώνιο σύστημα

Έστω επίπεδο Π και δύο κάθετες ευθείες του με κοινή αρχή το σημείο τομής των, έστω O. Αν η μία από αυτές συμβολίζει τον άξονα των x, που λέγεται επίσης και άξονας τετμημένων και η άλλη των y, που λέγεται άξονας τεταγμένων, τότε το σύστημα αυτό ορίζει ένα **ορθογώνιο** ή **καρτεσιανό σύστημα αξόνων** στο επίπεδο, που συμβολίζεται με Oxy. Αντίστοιχα στον χώρο θεωρούνται τρεις κάθετες ευθείες Ox, Oy και Oz, όπου η Oz λέγεται και άξονας των

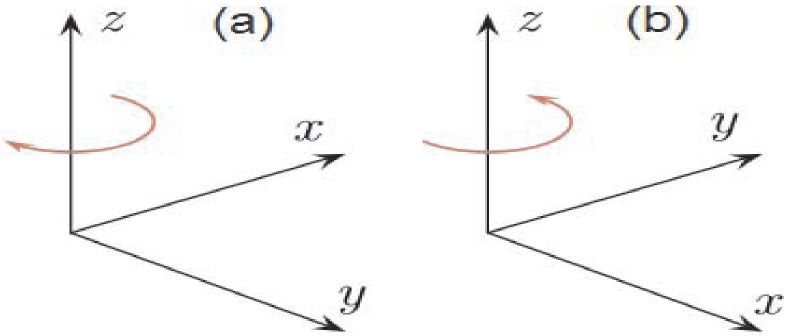


Σχήμα 1.2.1 - 2: καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

κατηγμένων. Το σύστημα αυτό συμβολίζεται με $Oxyz$ (Σχ. 1.2.1 - 2) και ορίζει το αντίστοιχο ορθογώνιο σύστημα στον χώρο.

Ένα ορθογώνιο σύστημα στον χώρο θα λέγεται δεξιόστροφο, όταν η θετική φορά του άξονα Oz συμπίπτει με την κατεύθυνση κίνησης ενός κοχλία, που στρέφεται στο επίπεδο Oxy κατά την αντίθετη φορά των δεικτών του ρολογιού, δηλαδή από τον άξονα Ox προς τον Oy. Αντίστοιχα στο επίπεδο ως δεξιόστροφο σύστημα ορίζεται εκείνο για το οποίο, η θετική φορά του άξονα Ox συμπίπτει με τη θετική φορά του άξονα Oy, όταν η κίνηση γίνεται με την αντίθετη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού, διαφορετικά λέγεται αριστερόστροφο (Σχ. 1.2.1 - 3).

Αν $Oxyz$ είναι ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων του χώρου και M τυχόν σημείο, τότε η παράλληλη από το M προς τον άξονα Oz τέμνει το επίπεδο Oxy στο σημείο M'. Από το M' φέρνοντας παράλληλες προς τους άξονες Oy και Ox ορίζονται τα $x_1 = |OM_1|$ και $y_1 = |OM_2|$ αντίστοιχα. Τέλος από το M φέρνοντας παράλληλη προς την OM' ορίζεται το σημείο $z_1 = |OM_3|$. Η τριάδα των αριθμών (x_1, y_1, z_1) ορίζει τότε τις καρτεσιανές συντεταγμένες ή απλά συντεταγμένες του M στον χώρο. Όμοια το ζεύγος των αριθμών (x_1, y_1) ορίζει τις καρτεσιανές συντεταγμένες ή απλά συντεταγμένες του M στο επίπεδο. Σύμφωνα με αυτά σε κάθε σημείο του χώρου αντίστοιχα του επιπέδου αντιστοιχούν οι συντεταγμένες του και αντίστροφα, όταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες, τότε καθορίζεται ακριβώς η θέση του στον χώρο αντίστοιχα



Σχήμα 1.2.1 - 3: (a) αριστερόστροφο και (b) δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων.

στο επίπεδο.

Ένα όμοιο με το καρτεσιανό σύστημα είναι το πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο οι άξονες τέμνονται πλάγια. Το σύστημα αυτό έχει περιορισμένες εφαρμογές. Στο εξής ο όρος συντεταγμένες θα σημαίνει καρτεσιανές συντεταγμένες, εκτός αν διαφορετικά ορίζεται.

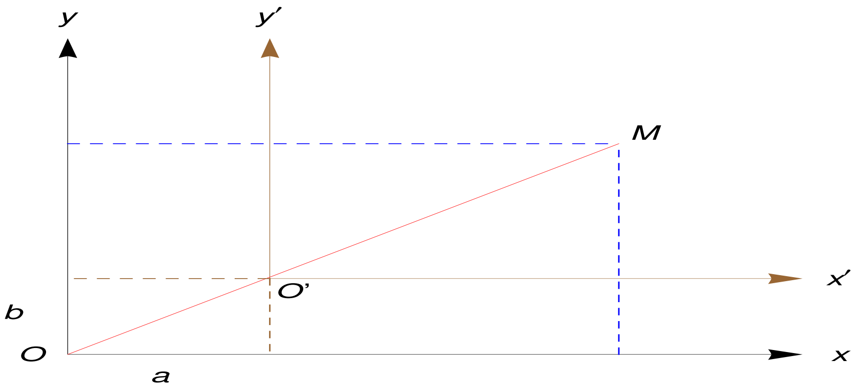
1.2.2 Αλλαγές ορθογώνιου συστήματος

Εξετάζεται στη συνέχεια το πρόβλημα της αλλαγής των συντεταγμένων στο επίπεδο. Διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

i) **Παράλληλη μετατόπιση αξόνων**

Έστω ότι οι νέοι άξονες $O'x'y'$ είναι παράλληλοι προς τους αρχικούς Oxy (Σχ. 1.2.2 - 1). Η παράλληλη μετατόπιση του συστήματος χαρακτηρίζεται από δύο θετικά ή αρνητικά μεγέθη a και b, που παριστάνουν τις παράλληλες προς τους άξονες Oy και Ox μετατοπίσεις των νέων αξόνων $O'y'$ και $O'x'$ αντίστοιχα. Τότε, αν M είναι ένα σημείο με συντεταγμένες (x, y) στο σύστημα Oxy, οι συντεταγμένες του (x', y') στο $O'x'y'$ θα είναι:

$$\begin{aligned} x' &= x - a, \\ y' &= y - b \end{aligned} \tag{1.2.2 - 1}$$



Σχήμα 1.2.2 - 1: παράλληλη μετατόπιση αξόνων.

και αντίστροφα:

$$\begin{aligned} x &= x' + a, \\ y &= y' + b. \end{aligned} \tag{1.2.2 - 2}$$

ii) **Στροφή των αξόνων κατά ορισμένη γωνία**

Έστω ότι το σύστημα Oxy στρέφεται κατά τη δεξιόστροφη φορά περί την αρχή O κατά γωνία θ με $\theta \in [0, 2\pi)$ (Σχ. 1.2.2 - 2). Τότε, αν $O'x'y'$ είναι οι νέοι άξονες συντεταγμένων και M τυχόν σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y) στο αρχικό και (x', y') στο νέο σύστημα συντεταγμένων, έχουμε:

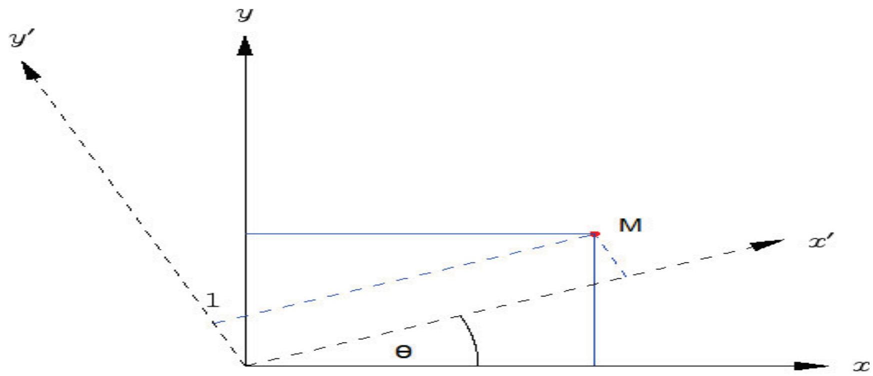
$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned} \tag{1.2.2 - 3}$$

και αντίστροφα:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y &= -x'\sin\theta + y'\cos\theta. \end{aligned} \tag{1.2.2 - 4}$$

iii) **Παράλληλη μετατόπιση και στροφή των αξόνων**

Η περίπτωση αυτή προκύπτει ως συνδυασμός των δύο προηγούμενων



Σχήμα 1.2.2 - 2: στροφή των αξόνων κατά ορισμένη γωνία.

περιπτώσεων. Έστω ότι το σύστημα Oxy μετατοπίζεται παράλληλα προς την αρχική του θέση, έτσι ώστε το O να μετατοπιστεί στο $O'(a, b)$ και στη συνέχεια στρέφεται δεξιόστροφα περί τη νέα του αρχή O' κατά γωνία θ. Τότε, αν M τυχόν σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y) στο αρχικό και (x', y') στο νέο σύστημα συντεταγμένων, έχουμε:

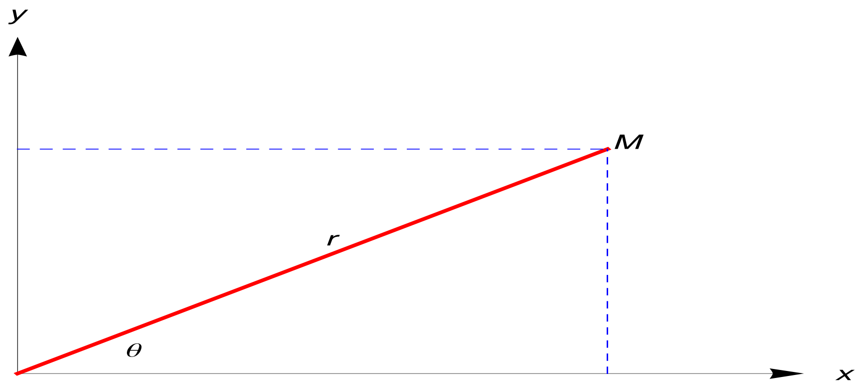
$$\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\theta + (y-b)\sin\theta \\ y' &= -(x-a)\sin\theta + (y-b)\cos\theta \end{aligned} \tag{1.2.2 - 5}$$

και αντίστροφα:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta + a \\ y &= -x'\sin\theta + y'\cos\theta + b. \end{aligned} \tag{1.2.2 - 6}$$

Άλλα συστήματα συντεταγμένων

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες είναι οι πρώτες που χρησιμοποιήθηκαν συστηματικά στις περισσότερες εφαρμογές, επειδή είναι οι πλέον εύχρηστες, αφού η εφαρμογή τους στηρίζεται στην έννοια της παράλληλης ευθείας προς τους άξονες συντεταγμένων.



Σχήμα 1.2.3 - 1: πολικές συντεταγμένες του σημείου $M(r, \theta)$.

Γενικότερα αποδεικνύεται ότι κάθε μονοσήμαντη αντιστοιχία σημείων του επιπέδου ή του χώρου και ενός συνόλου αριθμών, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ως σύστημα συντεταγμένων. Τα κυριότερα από αυτά, που συνήθως χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές, δίνονται παρακάτω.

1.2.3 Πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο

Στο σύστημα αυτό η θέση ενός σημείου M στο επίπεδο προσδιορίζεται με τη βοήθεια δύο αριθμών ως εξής:[1]
Έστω σημείο O του επιπέδου, που λέγεται πόλος και μία προσανατολισμένη ευθεία ε, που λέγεται πολικός άξονας και η οποία διέρχεται από το O, δηλαδή μία ευθεία στην οποία έχει καθοριστεί μία αρχή μέτρησης και μία θετική φορά διαγραφής. Αν $r = |OM|$ είναι η λεγόμενη πολική απόσταση και θ με $0 \leq \theta < 2\pi$ είναι η πολική γωνία, που ορίζεται με αρχική πλευρά τον πολικό άξονα και τελική την OM με δεξιόστροφη φορά διαγραφής, τότε το ζεύγος $(r,\ \theta)$ ορίζει κατά μονοσήμαντο τρόπο τη θέση του σημείου M και αντίστροφα. Το ζεύγος $(r,\ \theta)$ ορίζει τότε τις **πολικές συντεταγμένες** του M στο επίπεδο (Σχ. 1.2.3 - 1).

Ο μετασχηματισμός από τις πολικές $(r,\ \theta)$ στις καρτεσιανές συντεταγμένες

[1] Βλέπε: *http://en.wikipedia.org/wiki/Polar_coordinate_system*

$(x,\, y)$ γίνεται με τις σχέσεις:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \tag{1.2.3 - 1}$$

ενώ από τις καρτεσιανές στις πολικές $(r,\, \theta)$ με τις:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos\theta &= \frac{x}{r} \quad \text{και} \quad \sin\theta = \frac{y}{r}\,; \quad 0 \le \theta < 2\pi, \end{aligned} \tag{1.2.3 - 2}$$

όταν $(x, y) \neq (0, 0)$.

1.2.4 Κυλινδρικές συντεταγμένες

Η θέση ενός σημείου M στον χώρο προσδιορίζεται με τις λεγόμενες κυλινδρικές συντεταγμένες ως εξής:[2]
Έστω μία αρχή (πόλος) O, ένα επίπεδο Π που διέρχεται από το O και ένας άξονας Ox που βρίσκεται στο επίπεδο αυτό και διέρχεται από το O (Σχ. 1.2.4 - 1) και έστω M' η προβολή του M στο επίπεδο Π. Τότε η θέση του σημείου M είναι δυνατόν να καθοριστεί από τα παρακάτω στοιχεία:

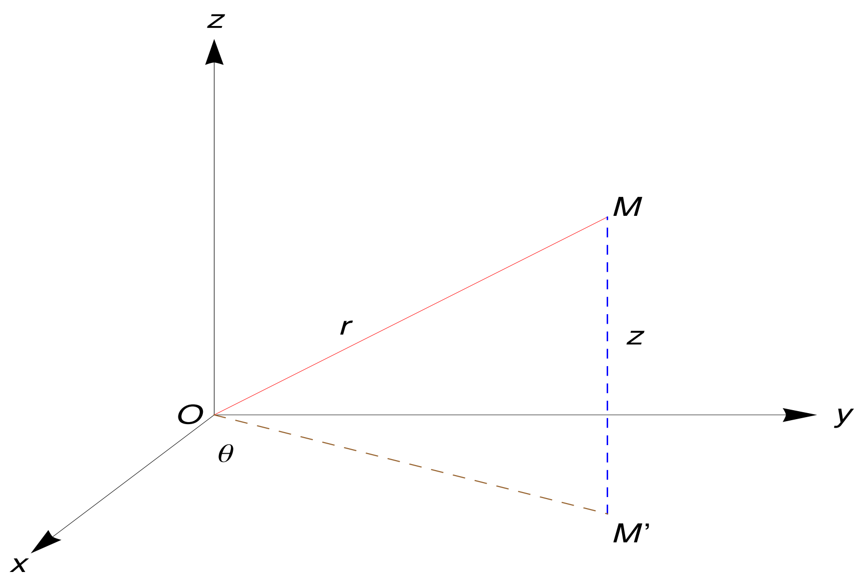
- της απόστασης $r = |OM'|$ του σημείου M' από τον πόλο,
- της γωνίας θ με $0 \le \theta < 2\pi$ που ορίζεται με αρχική πλευρά τον άξονα Ox και τελική την OM',
- της απόστασης $z = |MM'|$ του σημείου M από το επίπεδο Π.

Οι αριθμοί $(r,\, \theta,\, z)$ ορίζουν τότε τις **κυλινδρικές συντεταγμένες** του σημείου M.

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες $(x,\, y,\, z)$ προκύπτουν από τις αντίστοιχες κυλινδρικές με τις σχέσεις

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z, \tag{1.2.4 - 1}$$

[2]Βλέπε: *http://en.wikipedia.org/wiki/Cylindrical_coordinate_system*



Σχήμα 1.2.4 - 1: κυλινδρικές συντεταγμένες του σημείου $M(r, \theta, z)$, όταν $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = (OM)$ με x, y να ορίζονται από $(1.2.4 - 1)$ και $(MM') = z$.

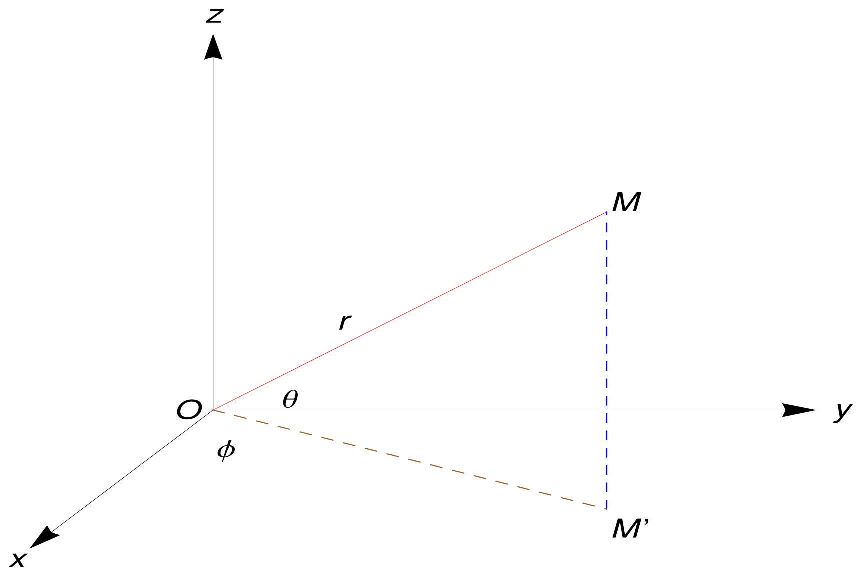
ενώ οι κυλινδρικές $(r,\ \theta,\ z)$ από τις αντίστοιχες καρτεσιανές με τις

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \cos\theta &= \frac{x}{r} \quad \text{και} \quad \sin\theta = \frac{y}{r}; \quad 0 \le \theta < 2\pi, \\ z &= z, \quad \text{όταν} \quad (x,y) \neq (0,0). \end{aligned} \tag{1.2.4 - 2}$$

1.2.5 Σφαιρικές συντεταγμένες

Όμοια η θέση του σημείου M στον χώρο προσδιορίζεται με τις λεγόμενες σφαιρικές συντεταγμένες ως εξής:[3]
Έστω μία αρχή (πόλος) O, ένα επίπεδο Π που διέρχεται από το O και ένας άξονας Ox που βρίσκεται στο επίπεδο αυτό και διέρχεται από το O (Σχ. 1.2.5 - 1). Τότε η θέση του σημείου M είναι δυνατόν να καθοριστεί από τα παρακάτω στοιχεία:

[3] Βλέπε: *http://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_coordinate_system*



Σχήμα 1.2.5 - 1: σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου $M(r,\theta,\varphi)$, όταν $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=(OM)$ με x, y, z να ορίζονται από $(1.2.5-1)$.

- της απόστασης $r=|OM|$ του σημείου M από τον πόλο,

- της γωνίας φ με $0\leq\varphi<2\pi$ που ορίζεται με αρχική πλευρά τον άξονα Ox και τελική την OM', όταν M' η προβολή του M στο επίπεδο OM',

- της γωνίας θ (αζιμούθιο - azimuth) με $-\pi/2\leq\theta<\pi/2$ που ορίζεται με αρχική πλευρά την OM' και τελική την OM.

Τα $(r,\ \varphi,\ \theta)$ ορίζουν τότε τις **σφαιρικές συντεταγμένες** του σημείου M.

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες $(x,\ y,\ z)$ συνδέονται με τις αντίστοιχες σφαιρικές με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\cos\phi, \\ y &= r\cos\theta\sin\phi\,, \\ z &= r\sin\theta, \end{aligned} \tag{1.2.5 - 1}$$

ενώ οι σφαιρικές $(r,\, \varphi,\, \theta)$ με τις αντίστοιχες καρτεσιανές με τις:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \sin\theta &= \frac{z}{r}, \\ \cos\phi &= \frac{x}{r\cos\theta} \quad \text{και} \quad \sin\phi = \frac{y}{r\cos\theta} \end{aligned} \qquad (1.2.5 - 2)$$

όπου οι γωνίες θ και φ πρέπει να επαληθεύουν στην (1.2.5−2) τις εξισώσεις από τις οποίες προσδιορίζονται με $-\pi/2 \leq \theta < \pi/2$ και $0 \leq \varphi < 2\pi$ αντίστοιχα, όταν $(x,\, y,\, z) \neq (0,\, 0,\, 0)$.

Οι εντολές ορισμού και αλλαγής συντεταγμένων με το MATHEMATICA είναι:

Πρόγραμμα 1.2.5 - 1 (συστήματα συντεταγμένων)

```
<<VectorAnalysis'                                    κλήση πακέτου
SetCoordinates[Cartesian[x,y,z]]          καθορισμός συστήματος
SetCoordinates[Cylindrical[r,θ,z]]
SetCoordinates[Spherical[r,θ,φ]]
CoordinatesToCartesian[{r,θ,φ},Spherical]            τύποι αλλαγής
CoordinatesFromCartesian[{x,y,z},Spherical]
```

1.3 Ορισμός και Άλγεβρα διανυσμάτων

1.3.1 Ορισμός διανύσματος

Σύμφωνα και με τον Ορισμό 1.1.1 - 1 το διάνυσμα (vector) ορίζεται ως εξής:

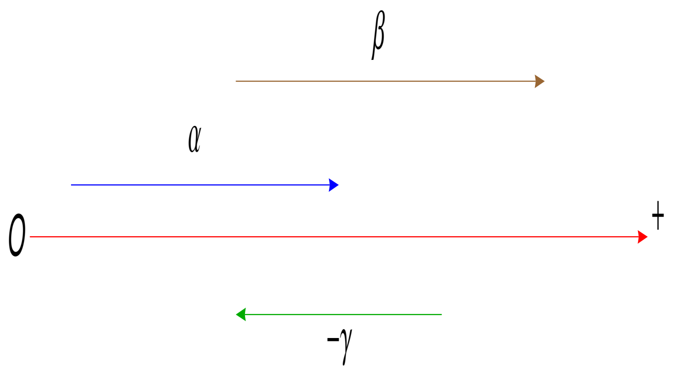
Ορισμός 1.3.1 - 1 (διανύσματος). *Ορίζεται ως διάνυσμα κάθε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα επί του προσανατολισμένου άξονα ε ή παράλληλου προς αυτόν.*

Τα διανύσματα θα συμβολίζονται στο εξής με $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ (Σχ. 1.3.1 - 1) κ.λπ.[4]

Ορισμός 1.3.1 - 2. *Ορίζεται ως* **μηδενικό** *το διάνυσμα που η αρχή και το τέλος του συμπίπτουν.*

Τα μηδενικά διανύσματα θα συμβολίζονται με $\mathbf{0}$.

[4] Συνηθίζεται στα βιβλία ο συμβολισμός με έντονα γράμματα, όπως $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ κ.λπ., αλλά στην πράξη χρησιμοποιείται επίσης και ο συμβολισμός $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ κ.λπ.



Σχήμα 1.3.1 - 1: συμβολισμός διανυσμάτων.

Στοιχεία διανύσματος

Έστω το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha} = \overrightarrow{AB}$. Τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 1.3.1 - 1 το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}$ χαρακτηρίζεται από τα εξής στοιχεία:

i) **διεύθυνση** που είναι η [5]ευθεία ϵ από τα σημεία A και B,

ii) **φορά** αυτή που ορίζεται με αρχή το A και τέλος το B τέλος,

iii **μέτρο** $|\boldsymbol{\alpha}|$ ή $\|\boldsymbol{\alpha}\|$ που ισούται με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB, δηλαδή

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \|\boldsymbol{\alpha}\| = |AB|.$$

Άρα ένα διάνυσμα θα είναι θετικό ή αρνητικό, όταν η φορά του συμπίπτει με τη θετική ή αντίστοιχα αρνητική φορά του άξονα.

Ορισμός 1.3.1 - 3. *Διανύσματα που έχουν την ίδια διεύθυνση θα λέγονται* **συγγραμμικά**.

1.3.2 Είδη διανυσμάτων

Τα διανύσματα, ανάλογα με τις ιδιότητες των διαφόρων διανυσματικών μεγεθών που παριστάνουν, διακρίνονται στις παρακάτω κατηγορίες:

[5]Η ευθεία ϵ λέγεται και **φορέας** του διανύσματος.

i) **ελεύθερα**, όταν είναι δυνατόν να μετατοπιστούν στον φορέα τους ή παράλληλα προς αυτόν (π.χ. η ροπή ενός ζεύγους),

ii) **ολισθαίνοντα**, όταν μετατοπίζονται στον φορέα τους αλλά όχι παράλληλα προς αυτόν (π.χ. η δύναμη που ασκείται σε σώμα),

iii) **εφαρμοστά**, όταν έχουν ορισμένο σημείο εφαρμογής και συνεπώς δεν μετατοπίζονται στον φορέα τους ή παράλληλα προς αυτόν (π.χ. η ταχύτητα υλικού σημείου).

1.3.3 Ισότητα

Ορισμός 1.3.3 - 1. *Δύο διανύσματα* $\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\boldsymbol{\beta}$ *θα είναι* **ίσα**, *όταν έχουν το ίδιο μέτρο, διεύθυνση και φορά.*

Τότε γράφεται $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$, ενώ σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση τα διανύσματα θα είναι διαφορετικά, δηλαδή $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η ισότητα ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας.

1.3.4 Πρόσθεση

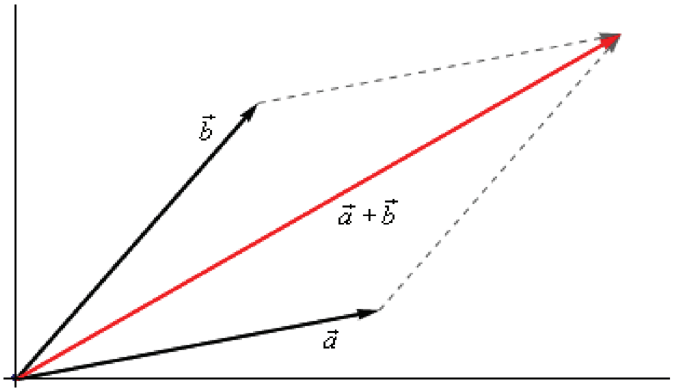
Ορισμός 1.3.4 - 1. *Το* **άθροισμα** $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ *των διανυσμάτων* $\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\boldsymbol{\beta}$ *ορίζεται ότι είναι το διάνυσμα που προκύπτει, όταν το* $\boldsymbol{\beta}$ *γίνει διαδοχικό του* $\boldsymbol{\alpha}$, *δηλαδή η αρχή του* $\boldsymbol{\beta}$ *συμπέσει με το τέλος του* $\boldsymbol{\alpha}$.

Τότε το $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ έχει ως αρχή την αρχή του $\boldsymbol{\alpha}$ και τέλος το τέλος του $\boldsymbol{\beta}$. Ο τρόπος αυτός της πρόσθεσης είναι γνωστός και ως **κανόνας του παραλληλογράμμου** (Σχ. 1.3.4 - 1).

1.3.5 Πολλαπλασιασμός με πραγματικό αριθμό

Ορισμός 1.3.5 - 1. *Ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος* $\boldsymbol{\alpha}$ *με τον πραγματικό αριθμό* λ *(scalar multiplication) ορίζεται ότι είναι το διάνυσμα* $\lambda\boldsymbol{\alpha}$, *που έχει μέτρο* $|\lambda|$ *φορές το μέτρο του* $\boldsymbol{\alpha}$, *ίδια διεύθυνση με το* $\boldsymbol{\alpha}$ *και φορά: (Σχ. 1.3.5 - 1)*

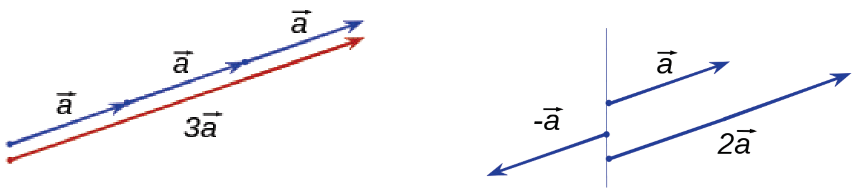
- *ίδια με του* $\boldsymbol{\alpha}$, *όταν* $\lambda > 0$,



Σχήμα 1.3.4 - 1: πρόσθεση διανυσμάτων.

- *αντίθετη με του* $\boldsymbol{\alpha}$, *όταν* $\lambda < 0$,

- *είναι το μηδενικό διάνυσμα, όταν* $\lambda = 0$.



Σχήμα 1.3.5 - 1: Πολλαπλασιασμός διανύσματος με πραγματικό αριθμό.

1.3.6 Μοναδιαίο διάνυσμα

Ορισμός 1.3.6 - 1. *Ορίζεται ως* **μοναδιαίο** *το διάνυσμα που το μέτρο του ισούται με τη μονάδα μέτρησης.*

Παραδείγματα τέτοιων διανυσμάτων είναι σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ στους άξονες Ox, Oy και Oz. Υπενθυμίζεται ότι ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο οποίο έχουν οριστεί τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων του θα λέγεται **ορθοκανονικό**.

Στη συνέχεια ορίζεται το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση του τυχόντος διανύσματος $\boldsymbol{\alpha}$.

Ορισμός 1.3.6 - 2. *Έστω $\boldsymbol{\alpha}$ τυχαίο διάνυσμα με $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$. Τότε ορίζεται ως μοναδιαίο διάνυσμα ή ως διανυσματική μονάδα κατά τη διεύθυνση του $\boldsymbol{\alpha}$ και συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha}_0$ το διάνυσμα*

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}\,. \qquad (1.3.6 - 1)$$

Έχοντας υπόψη τον Ορισμό 1.3.6 - 1, από την $(1.3.6-1)$ διαδοχικά προκύπτει:

$$|\boldsymbol{\alpha}_0| = \left|\frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\,\boldsymbol{\alpha}\right| = \frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\,|\boldsymbol{\alpha}| = 1, \quad \text{δηλαδή} \quad |\boldsymbol{\alpha}_0| = 1.$$

1.4 Συντεταγμένες διανύσματος

Έστω ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$. Διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

1.4.1 Διάνυσμα θέσης

Ορισμός 1.4.1 - 1. *Έστω $Oxyz$ ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων. Αν η αρχή του διανύσματος συμπίπτει με την αρχή των συντεταγμένων O (Σχ. 1.4.1 - 1), τότε το διάνυσμα λέγεται* **διάνυσμα θέσης** *ή* **ακτινικό διάνυσμα** *(position ή location ή και radius vector) και συμβολίζεται με $\mathbf{r}$.*

Αν x, y και z είναι οι προβολές του $\mathbf{r}$ στους άξονες συντεταγμένων, δηλαδή αν το τέλος M του διανύσματος έχει συντεταγμένες $M(x, y, z)$, τότε

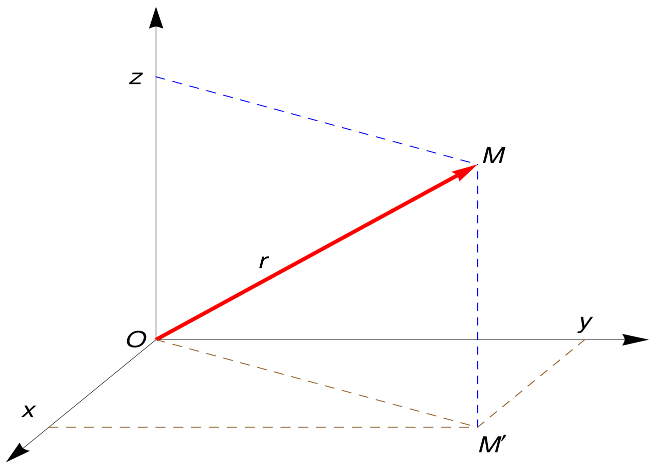
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\,\langle x, y, z\rangle \qquad (1.4.1 - 1)$$

ή απλά

$$\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle\,. \qquad (1.4.1 - 2)$$

Επομένως στην περίπτωση αυτή το άθροισμα των συνιστωσών διανυσμάτων $x\,\mathbf{i}$, $y\,\mathbf{j}$ και $z\,\mathbf{k}$ ορίζει το διάνυσμα $\mathbf{r}$, οπότε η $(1.4.1-5)$ αναλυτικά γράφεται:

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}. \qquad (1.4.1 - 3)$$



Σχήμα 1.4.1 - 1: το **διάνυσμα θέσης** ή **ακτινικό διάνυσμα** $\mathbf{r}$.

Τότε το μέτρο του διανύσματος $\mathbf{r} = \mathbf{r}\langle x, y, z\rangle$ συναρτήσει των συντεταγμένων ισούται με

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (1.4.1 - 4)$$

Παρατήρηση 1.4.1 - 1

Ανάλογοι τύποι ισχύουν και στην περίπτωση των επίπεδων διανυσμάτων θέσης, δηλαδή

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} \qquad (1.4.1 - 5)$$

και

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1.4.1 - 6)$$

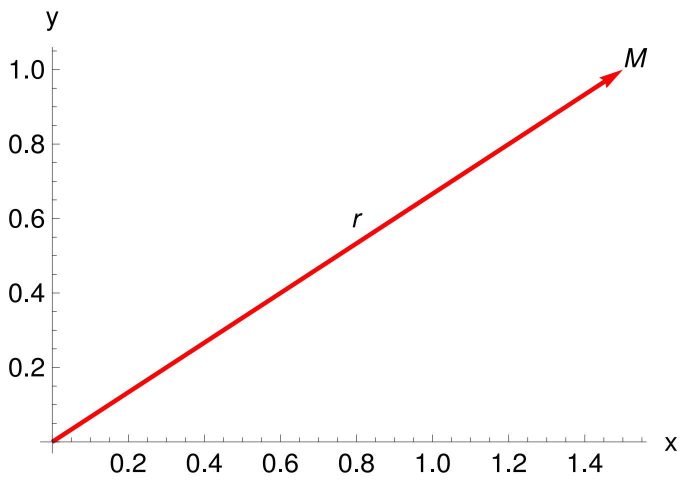
Παράδειγμα 1.4.1 - 1

Αν $M(1.5, 1)$, να υπολογιστεί το διάνυσμα θέσης που αντιστοιχεί στο σημείο αυτό.

Λύση. Επειδή $z = 0$, από την $(1.4.1 - 3)$ έχουμε ότι (Σχ. 1.4.1 - 2)

$$\mathbf{r} = 1.5\,\mathbf{i} + \mathbf{j} = \langle 1.5, 1\rangle.$$

■



Σχήμα 1.4.1 - 2: Παράδειγμα 1.4.1 - 1: το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r} =< 1.5, 1 >$ του σημείου M.

1.4.2 Γενική μορφή

Γενικά, όταν το $\boldsymbol{\alpha}$ είναι ένα τυχόν διάνυσμα του 3-διάστατου χώρου με αρχή το σημείο $A\left(x_1, y_1, z_1\right)$ και τέλος το $B\left(x_2, y_2, z_2\right)$, οι συντεταγμένες του θα ορίζονται από τις προβολές του στους άξονες συντεταγμένων και θα είναι οι πραγματικοί αριθμοί

$$\alpha_1 = x_2 - x_1, \quad \alpha_2 = y_2 - y_1 \quad \text{και} \quad \alpha_3 = z_2 - z_1.$$

Τότε όμοια με την περίπτωση (i) θα είναι στην περίπτωση αυτή

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\left\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \right\rangle = \boldsymbol{\alpha}\left\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \right\rangle \tag{1.4.2 - 1}$$

ή απλά

$$\boldsymbol{\alpha} = \left\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \right\rangle = \left\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \right\rangle \tag{1.4.2 - 2}$$

ενώ η αναλυτική έκφρασή του θα είναι

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k} \\ &= \left(x_2 - x_1\right) \mathbf{i} + \left(y_2 - y_1\right) \mathbf{j} + \left(z_2 - z_1\right) \mathbf{k}. \end{aligned} \tag{1.4.2 - 3}$$

Το μέτρο του διανύσματος $\boldsymbol{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ συναρτήσει των συντεταγμένων θα ισούται στην περίπτωση αυτή με

$$\begin{aligned} \alpha = |\boldsymbol{\alpha}| &= \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1.4.2 - 4) \end{aligned}$$

Παρατήρηση 1.4.2 - 1

Όμοια με την Παρατήρηση 1.4.1 - 1, ανάλογοι τύποι ισχύουν και στην περίπτωση αυτή για τα επίπεδα διανύσματα.

Παράδειγμα 1.4.2 - 1

Για τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ στους άξονες Ox, Oy και Oz ενός ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$ που έχουν συντεταγμένες

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \quad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

προκύπτει προφανώς από τον τύπο $(1.4.1 - 4)$ ότι

$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1.$$

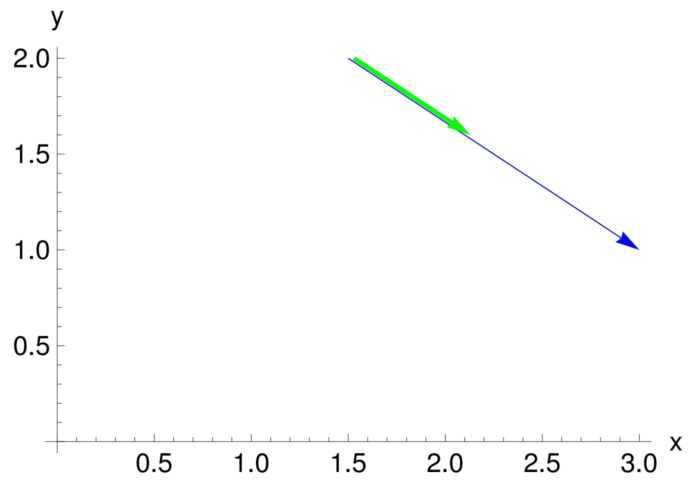
Παράδειγμα 1.4.2 - 2

Έστω το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\langle 1.5, -1 \rangle$. Τότε από τον τύπο $(1.4.1 - 4)$ προκύπτει ότι

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{1.5^2 + (-1)^2} = \sqrt{3.25} \approx 1.802776.$$

Άρα το μοναδιαίο διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}_0$ κατά τη διεύθυνση του $\boldsymbol{\alpha}$ σύμφωνα με τη σχέση $(1.3.6 - 1)$ θα είναι (Σχ. 1.4.2 - 1)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_0 &= \frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|} = \frac{1}{\sqrt{3.25}} \, (1.5\,\mathbf{i} - \mathbf{j}) = \frac{1}{\sqrt{3.25}} \, \langle 1.5, -1 \rangle \\ &\approx \langle 0.83205, -0.55470 \rangle \, . \end{aligned}$$



Σχήμα 1.4.2 - 1: Παράδειγμα 1.4.2 - 2: το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha} =< 1.5, -1 >$ με μπλε και το αντίστοιχο μοναδιαίο $\boldsymbol{\alpha}_0$ με πράσινη γραμμή.

Παράδειγμα 1.4.2 - 3

Έστω το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\langle 1, -2, 3\rangle$. Τότε όμοια από τον τύπο $(1.4.1-4)$ προκύπτει ότι

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

Άρα το μοναδιαίο διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}_0$ κατά τη διεύθυνση του $\boldsymbol{\alpha}$ σύμφωνα με τη σχέση $(1.3.6-1)$ θα είναι

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\,(\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{14}}\,\langle 1, -2, 3\rangle\,.$$

Παρατήρηση 1.4.2 - 2

Μετά από τον ορισμό των συντεταγμένων ενός διανύσματος οι παραπάνω Ορισμοί 1.3.3 - 1 - 1.3.5 - 1, δηλαδή της ισότητας και των πράξεων των διανυσμάτων γράφονται ισοδύναμα ως εξής: αν

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha} &= \alpha_1\,\mathbf{i} + \alpha_2\,\mathbf{j} + \alpha_3\,\mathbf{k} = \boldsymbol{\alpha}\,\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle\,, \quad \text{και} \\ \boldsymbol{\beta} &= \beta_1\,\mathbf{i} + \beta_2\,\mathbf{j} + \beta_3\,\mathbf{k} = \boldsymbol{\beta}\,\langle \beta_1, \beta_2, \beta_3\rangle\,,\end{aligned}$$

τότε

- **ισότητα**

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}, \quad \text{όταν} \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \alpha_3 = \beta_3,$$

- **πρόσθεση**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} &= (a_1 + \beta_1)\,\mathbf{i} + (\alpha_2 + \beta_2)\,\mathbf{j} + (\alpha_3 + \beta_3)\,\mathbf{k} \\ &= \langle a_1 + \beta_1,\, \alpha_2 + \beta_2,\, \alpha_3 + \beta_3 \rangle\,, \end{aligned}$$

- **αφαίρεση**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} &= (a_1 - \beta_1)\,\mathbf{i} + (\alpha_2 - \beta_2)\,\mathbf{j} + (\alpha_3 - \beta_3)\,\mathbf{k} \\ &= \langle a_1 - \beta_1,\, \alpha_2 - \beta_2,\, \alpha_3 - \beta_3 \rangle\,, \end{aligned}$$

- **πολλαπλασιασμός με αριθμό**

$$\lambda\boldsymbol{\alpha} = \lambda a_1\,\mathbf{i} + \lambda\alpha_2\,\mathbf{j} + \lambda\alpha_3\,\mathbf{k} = \langle \lambda a_1,\, \lambda\alpha_2,\, \lambda\alpha_3 \rangle\,.$$

Αντίστοιχοι τύποι ισχύουν για την περίπτωση του 2-διάστατου χώρου.

Παράδειγμα 1.4.2 - 4

Έστω τα διανύσματα

$$\boldsymbol{\alpha} = \langle 4, -2, 3 \rangle \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\beta} = \langle 3, 2, -1 \rangle.$$

Τότε

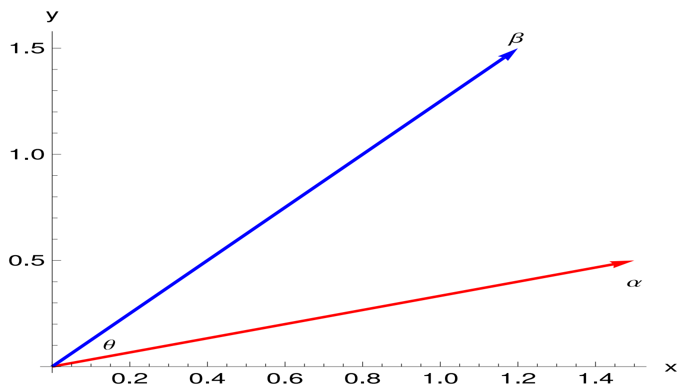
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} + 2\boldsymbol{\beta} &= \langle 4 + 2 \cdot 3, -2 + 2 \cdot 2, 3 + 2 \cdot (-1) \rangle = \langle 10, 2, 1 \rangle \\ &= 10\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Αν $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + 2\boldsymbol{\beta}$, τότε σύμφωνα με τον τύπο $(1.4.1 - 4)$ έχουμε ότι

$$\gamma = |\boldsymbol{\gamma}| = |\boldsymbol{\alpha} + 2\boldsymbol{\beta}| = \sqrt{10^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{105},$$

οπότε από τη σχέση $(1.3.6 - 1)$ προκύπτει ότι το μοναδιαίο κατά τη διεύθυνση του $\boldsymbol{\alpha} + 2\boldsymbol{\beta}$ θα είναι το διάνυσμα

$$\boldsymbol{\gamma}_0 = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{|\boldsymbol{\gamma}|} = \frac{1}{\sqrt{105}}\,(10\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{105}}\langle 10, 2, 1 \rangle\,.$$



Σχήμα 1.5.1 - 1: το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$.

1.5 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

1.5.1 Ορισμός και ιδιότητες

Ορισμός 1.5.1 - 1. *Έστω τα διανύσματα* $\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\boldsymbol{\beta}$ *με* $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$. *Τότε ορίζεται ως* **εσωτερικό γινόμενο** *(dot - scalar - inner product)*[6] *και συμβολίζεται με* $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}$ *ή* $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$, *ο πραγματικός αριθμός που ισούται με το γινόμενο των μέτρων των διανυσμάτων επί το συνημίτονο της γωνίας* θ, *που σχηματίζουν τα δύο αυτά διανύσματα (Σχ. 1.5.1 - 1), δηλαδή*

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}| \cos\theta \quad \text{με} \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \qquad (1.5.1 - 1)$$

Ειδικά, όταν ένα ή και τα δύο διανύσματα ισούνται με το μηδενικό διάνυσμα, τότε το εσωτερικό τους γινόμενο ορίζεται ίσο με το μηδέν.

Ιδιότητες

i) $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\alpha}$ αντιμεταθετική,

ii) $\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma}$ επιμεριστική,

iii) $(\lambda \boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\beta} = \lambda (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\lambda \boldsymbol{\beta})$, όταν $\lambda \in \mathbb{R}$.

[6] Βλέπε επίσης: *http://en.wikipedia.org/wiki/Dot_product*

1.5.2 Συνθήκη καθετότητας

Όταν $\theta = \pi/2$, από την $(1.5.1-1)$ προκύπτει ότι, αν τα διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους, τότε είναι

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0 \tag{1.5.2 - 1}$$

και αντίστροφα. Άρα η $(1.5.2-1)$, που εκφράζει τη **συνθήκη καθετότητας** δύο διανυσμάτων, είναι μια αναγκαία και ικανή συνθήκη.

Επίσης, αν $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \pm|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|$, τότε ή $\theta = 0$ ή $\theta = \pi$, οπότε τα διανύσματα είναι **συγγραμμικά** (collinear).

1.5.3 Υπολογισμός συναρτήσει των συντεταγμένων

Αν $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$ και $\boldsymbol{\beta} = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα, τότε, επειδή τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i} = \langle 1,0,0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0,1,0\rangle$ και $\mathbf{k} = \langle 0,0,1\rangle$ είναι ανά δύο κάθετα μεταξύ τους, ενώ το μέτρο τους ισούται[7] με 1, σύμφωνα και με την $(1.5.2-1)$ εύκολα προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} &= \langle \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}\rangle \cdot \langle \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}\rangle = \beta_1\left(\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}\right)\cdot\mathbf{i} \\
&\quad + \beta_2\left(\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}\right)\cdot\mathbf{j} + \beta_3\left(\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}\right)\cdot\mathbf{k} \\
&= \beta_1\left(\alpha_1\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + \alpha_2\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + \alpha_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}\right) + \beta_2\left(\alpha_1\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + \alpha_2\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}\right) \\
&\quad + \beta_3\left(\alpha_1\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} + \alpha_2\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} + \alpha_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\right) = \cdots = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3. \tag{1.5.3 - 1}$$

Από την $(1.5.3-1)$ προκύπτουν

- $$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} = |\boldsymbol{\alpha}|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2. \tag{1.5.3 - 2}$$

- Αν τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ είναι κάθετα, τότε σύμφωνα και με τη συνθήκη καθετότητας $(1.5.2-1)$ ισχύει

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0. \tag{1.5.3 - 3}$$

[7] Από την $(1.5.2-1)$ προκύπτει ότι $|\,\mathbf{i}\,| = \sqrt{1^2+0+0} = 1$, $|\,\mathbf{j}\,| = 1$ και $|\,\mathbf{k}\,| = 1$, ενώ σύμφωνα με τον Ορισμό $(1.5.1-1)$ είναι $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = |\,\mathbf{i}\,|\,|\,\mathbf{j}\,|\cos\frac{\pi}{2} = 1\cdot 1\cdot 0 = 0$. Όμοια $\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$, κ.λπ.

Παράδειγμα 1.5.3 - 1

Έστω τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(1, 2, -3)$ και $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(-1, 4, 2)$. Τότε σύμφωνα με την $(1.5.3 - 1)$ είναι

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 2 = 1.$$

1.5.4 Γωνία δύο διανυσμάτων

Ορισμός 1.5.4 - 1. *Έστω ότι τα διανύσματα* $\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\boldsymbol{\beta}$ *έχουν κοινή αρχή* O *και είναι διάφορα του μηδενικού διανύσματος. Τότε ορίζεται ως γωνία των* $\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\boldsymbol{\beta}$ *κατά την τάξη που έχουν γραφεί, η γωνία (Σχ. 1.5.1 - 1) που διαγράφει το διάνυσμα* $\boldsymbol{\alpha}$*, όταν στρέφεται κατά τη δεξιόστροφη φορά μέχρις ότου συμπέσει με το διάνυσμα* $\boldsymbol{\beta}$.

Αν $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ και $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα, τότε από τους τύπους $(1.5.1 - 1)$ και $(1.5.2 - 1)$ προκύπτει ότι η γωνία τους, έστω θ, δίνεται από τη σχέση

$$\cos\theta = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\,\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}\,. \qquad (1.5.4 - 1)$$

1.6 Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

1.6.1 Ορισμός

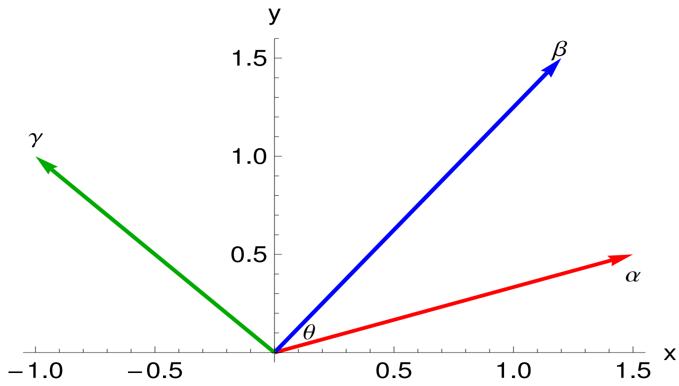
Ορισμός 1.6.1 - 1. *Ορίζεται ως* **εξωτερικό γινόμενο** *(cross - vector product)*[8] *των διανυσμάτων* $\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\boldsymbol{\beta}$*, όταν* $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$ *και συμβολίζεται με* $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$ *το διάνυσμα* $\boldsymbol{\gamma}$*, όπου*

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = (|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\,\sin\theta)\,\boldsymbol{\eta}, \qquad (1.6.1 - 1)$$

όταν θ *η γωνία των* $\boldsymbol{\alpha}$*,* $\boldsymbol{\beta}$ *στο επίπεδο που περιέχει τα εν λόγω διανύσματα με* $0 \leq \theta \leq \pi$ *και* $\boldsymbol{\eta}$ *το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα* $\boldsymbol{\alpha}$*,* $\boldsymbol{\beta}$ *και που έχει διεύθυνση εκείνη που ορίζει ο* κανόνας του δεξιού χεριού[9] *(Σχ. 1.6.1 - 1).*

[8] Βλέπε επίσης: *http://en.wikipedia.org/wiki/Cross_product*

[9] Υπενθυμίζεται ότι στον κανόνα του δεξιού χεριού το μεσαίο δάχτυλο υποδηλώνει τον φορέα και τη διεύθυνση του $\boldsymbol{\beta}$, ο δείκτης υποδηλώνει τον φορέα και τη διεύθυνση του $\boldsymbol{\alpha}$, ενώ ο αντίχειρας υποδηλώνει τον φορέα και τη διεύθυνση του $\boldsymbol{\eta}$.



Σχήμα 1.6.1 - 1: το εξωτερικό γινόμενο $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$ των διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$.

Στην περίπτωση που το ένα ή και τα δύο διανύσματα ισούνται με το μηδενικό διάνυσμα ή επίσης τα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *είναι συγγραμμικά* $(\theta = 0\,,\pi)$, *τότε το εξωτερικό γινόμενό τους ορίζεται να είναι το μηδενικό διάνυσμα.*

1.6.2 Ιδιότητες

Αλγεβρικές ιδιότητες

i) $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\alpha}$ μη αντιμεταθετική (anticommutative),

ii) $\boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\gamma}$ και $(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) \times \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\alpha}$
επιμεριστική (distributive) ως προς την πρόσθεση,

iii) $\lambda\,(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) = (\lambda\boldsymbol{\alpha}) \times \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \times (\lambda\boldsymbol{\beta})$ με $\lambda \in \mathbb{R}$,

iv $\boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\beta} \times (\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}$ (ταυτότητα του Jacobi).

Παρατήρηση 1.6.2 - 1

Στο εξωτερικό γινόμενο **δεν** ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα και ο νόμος της διαγραφής.

Γεωμετρικές ιδιότητες

i) Αν τα διανύσματα είναι συγγραμμικά, τότε το εξωτερικό τους γινόμενο ισούται με το μηδενικό διάνυσμα και αντίστροφα - βλέπε και Ορισμό 1.6.1 - 1.

ii) Αν τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ έχουν κοινή αρχή, τότε το μέτρο του εξωτερικού γινομένου τους ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου, που ορίζουν τα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$.

1.6.3 Υπολογισμός συναρτήσει των συντεταγμένων

Αν $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$ και $\boldsymbol{\beta} = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα, τότε, επειδή τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ είναι ανά δύο κάθετα μεταξύ τους και σύμφωνα με τον Ορισμό 1.6.1 - 1 είναι:

$$\begin{array}{lllllllll} \mathbf{i}\times\mathbf{j} & = & \mathbf{k} & \mathbf{j}\times\mathbf{k} & = & \mathbf{i} & \mathbf{k}\times\mathbf{i} & = & \mathbf{j} \\ \mathbf{j}\times\mathbf{i} & = & -\mathbf{k} & \mathbf{k}\times\mathbf{j} & = & -\mathbf{i} & \mathbf{i}\times\mathbf{k} & = & -\mathbf{j} \\ \mathbf{i}\times\mathbf{i} & = & \mathbf{0} & \mathbf{j}\times\mathbf{j} & = & \mathbf{0} & \mathbf{k}\times\mathbf{k} & = & \mathbf{0}, \end{array} \qquad (1.6.3 - 1)$$

προκύπτει με ανάλογους με το εσωτερικό γινόμενο υπολογισμούς ότι

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} &= (\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k})\times(\beta_1\mathbf{i}+\beta_2\mathbf{j}+\beta_3\mathbf{k}) = \beta_1(\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k})\times\mathbf{i} \\ &\quad +\beta_2(\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k})\times\mathbf{j}+\beta_3(\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k})\times\mathbf{k} \\ &= \beta_1(\alpha_1\,\mathbf{i}\times\mathbf{i}+\alpha_2\,\mathbf{j}\times\mathbf{i}+\alpha_3\,\mathbf{k}\times\mathbf{i})+\beta_2(\alpha_1\,\mathbf{i}\times\mathbf{j}+\alpha_2\,\mathbf{j}\times\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k}\times\mathbf{j}) \\ &\quad +\beta_3(\alpha_1\,\mathbf{i}\times\mathbf{k}+\alpha_2\,\mathbf{j}\times\mathbf{k}+\alpha_3\,\mathbf{k}\times\mathbf{k}), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} = (\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\,\mathbf{i}-(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)\,\mathbf{j}+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\,\mathbf{k}. \qquad (1.6.3 - 2)$$

Η $(1.6.3-2)$ γράφεται με μορφή ορίζουσας 3ης τάξης ως εξής:[10]

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}. \qquad (1.6.3 - 3)$$

[10] Για ορίζουσες βλέπε Μάθημα *Γραμμική Άλγεβρα*.

Υπενθυμίζεται ότι το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας 2ης τάξης είναι

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \tag{1.6.3 - 4}$$

ενώ η $(1.6.3-3)$, όταν αναπτυχθεί ως προς τα στοιχεία της 1ης γραμμής διαγράφοντας κάθε φορά τη γραμμή και τη στήλη του στοιχείου που θεωρείται και ορίζοντας την ορίζουσα 2ης τάξης που προκύπτει από τα αριστερά προς τα δεξιά, γράφεται

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \qquad (1.6.3 - 5) \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\,\mathbf{i} - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\,\mathbf{j} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\,\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Σημειώσεις 1.6.3 - 1

i) Η ορίζουσα υπολογισμού του εξωτερικού γινομένου είναι πάντοτε 3ης τάξης, δηλαδή της μορφής $(1.6.3-3)$.

ii) Όταν τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ είναι συνεπίπεδα, δηλαδή

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\beta} = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j},$$

τότε σύμφωνα με την $(1.6.3-3)$ είναι

$$\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \end{vmatrix} = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\,\mathbf{k}, \tag{1.6.3 - 6}$$

δηλαδή ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ - περίπτωση (ii) του Ορισμού 1.6.1 - 1.

Παράδειγμα 1.6.3 - 1

Έστω τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ και $\boldsymbol{\beta} = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Ζητείται να υπολογιστεί το μέτρο του $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$.

Λύση. Σύμφωνα με την (1.6.3 − 5) είναι

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (-2-1)\,\mathbf{i} - (1-2)\,\mathbf{j} + (1+4)\,\mathbf{k} = -3\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Άρα

$$|\,\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}\,| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{35} \approx 5.91608.$$

Ο υπολογισμός του εσωτερικού και του εξωτερικού γινομένου με το MATHEMATICA γίνεται ως εξής: αν $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ και $\mathbf{y} = \langle y_1, y_2, y_3 \rangle$, τότε

```
Dot[{x_1,x_2,x_3},{y_1,y_2,y_3}]          εσωτερικό
Cross[{x_1,x_2,x_3},{y_1,y_2,y_3}]        εξωτερικό
```

1.7 Μεικτό γινόμενο διανυσμάτων

1.7.1 Ορισμός και τύπος υπολογισμού

Ορισμός 1.7.1 - 1. *Έστω $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ και $\boldsymbol{\gamma}$ μη συνεπίπεδα και μη μηδενικά διανύσματα. Τότε το* **μεικτό** *ή* **τριπλό** *(triple product)*[11] *γινόμενό τους ορίζεται ως ο αριθμός*

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma})\,. \qquad (1.7.1 - 1)$$

[11] Βλέπε επίσης: *http://en.wikipedia.org/wiki/Triple_product*

Τύπος υπολογισμού

Πρόταση 1.7.1 - 1 *Αν* $\boldsymbol{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$, $\boldsymbol{\beta} = \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ *και* $\boldsymbol{\gamma} = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle$, *τότε*

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}) = \det(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \tag{1.7.1 - 1}$$

Η απόδειξη της πρότασης προκύπτει άμεσα από τους τύπους $(1.5.3 - 1)$ και $(1.6.3 - 2)$ σε συνδυασμό με τον τύπο $(1.6.3 - 5)$.

Η ορίζουσα του δεξιού μέλους στην $(1.7.1 - 1)$ σύμφωνα με την $(1.6.3 - 5)$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}) &= \det(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \\ &= \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \\ &= \alpha_1 (\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) - \alpha_2 (\beta_1 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_1) \\ &\quad + \alpha_3 (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1). \end{aligned} \tag{1.7.1 - 2}$$

Παράδειγμα 1.7.1 - 1

Αν $\boldsymbol{\alpha} = \langle -2, 3, 1 \rangle$, $\boldsymbol{\beta} = \langle 0, 4, 0 \rangle$ και $\boldsymbol{\gamma} = \langle -1, 3, 3 \rangle$, να υπολογιστεί το μεικτό γινόμενο $\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma})$.

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(1.7.1-2)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}) &= \det(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -2(4\cdot 3-0)-3\cdot 0+1\,[0-4(-1)] \\ &= -24+4=-20.\end{aligned}$$

■

1.7.2 Γεωμετρική ερμηνεία

Πρόταση 1.7.2 - 1. *Γεωμετρικά η απόλυτη τιμή του μεικτού γινομένου των διανυσμάτων των μη συνεπίπεδων και μη μηδενικών διανυσμάτων* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *και* $\boldsymbol{\gamma}$ *ισούται με τον όγκο, έστω* V, *του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα παραπάνω διανύσματα (Σχ. 1.7.2 - 1), δηλαδή*

$$V=|\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})|\,. \qquad (1.7.2\text{ - }1)$$

Το συμπέρασμα της πρότασης ορίζει και τη γεωμετρική ερμηνεία του μεικτού γινομένου.

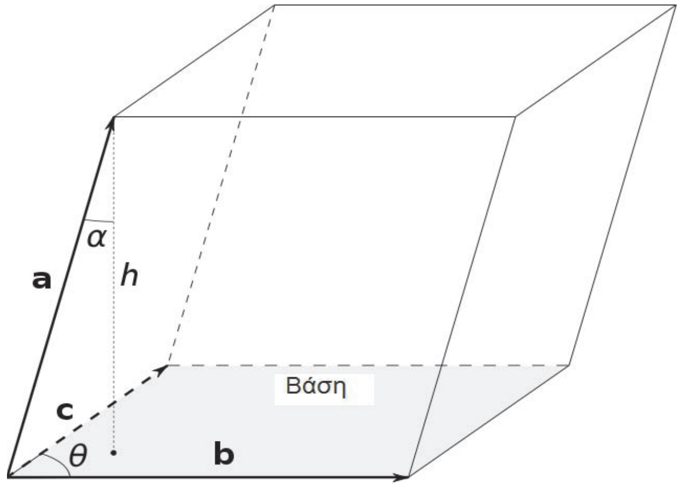
Παράδειγμα 1.7.2 - 1

Σύμφωνα με τον τύπο $(1.7.2-1)$ ο όγκος V του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν τα διανύσματα του Παραδείγματος 1.7.1 - 1 είναι

$$V=|-20|=20.$$

1.7.3 Ιδιότητες

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:



Σχήμα 1.7.2 - 1: το παραλληλεπίπεδο που σχηματίζεται από τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ και $\boldsymbol{\gamma}$.

- Το μεικτό γινόμενο είναι αμετάβλητο σε μια κυκλική εναλλαγή των διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ και $\boldsymbol{\gamma}$, δηλαδή

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\beta} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\gamma} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) . \qquad (1.7.3 - 1)$$

- Η εναλλαγή του εσωτερικού γινομένου στα άκρα διανύσματα δεν μεταβάλλει την τιμή του, δηλαδή

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\gamma} \qquad (1.7.3 - 2)$$

- Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}) &= -\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\beta}) \\
\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}) &= -\boldsymbol{\beta} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\gamma}) \\
\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}) &= -\boldsymbol{\gamma} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\alpha}) . \qquad (1.7.3 - 3)
\end{aligned}$$

- Επίσης συμβολικά ότι

$$[\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma})] \, \boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) \times (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\gamma}) . \qquad (1.7.3 - 4)$$

- Το μεικτό γινόμενο ισούται με το μηδέν, όταν τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ και $\boldsymbol{\gamma}$ είναι **συνεπίπεδα**.

- Αν δύο από τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ και $\boldsymbol{\gamma}$ είναι ίσα, τότε το μεικτό γινόμενο είναι μηδέν, δηλαδή

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\gamma}) &= \boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}) \\ &= \boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}) = 0. \end{aligned} \tag{1.7.3 - 5}$$

1.8 Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων

1.8.1 Ορισμός

Ορισμός 1.8.1 - 1. *Τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_\nu$ θα είναι* **γραμμικά ανεξάρτητα**, *όταν κάθε γραμμικός συνδυασμός των της μορφής*

$$\lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \ldots + \lambda_\nu \boldsymbol{\alpha}_\nu = \mathbf{0} \tag{1.8.1 - 1}$$

με $\lambda \in \mathbb{R}$; $i = 1, 2, \ldots, \nu$ ισχύει τότε και μόνον, όταν

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\nu = 0. \tag{1.8.1 - 2}$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση τα διανύσματα θα λέγονται γραμμικά εξαρτημένα. Η $(1.8.1 - 2)$ είναι γνωστή και ως η **συνθήκη γραμμικής ανεξαρτησίας**.

Παρατηρήσεις 1.8.1 - 1

- Το μηδενικό διάνυσμα είναι γραμμικά εξαρτημένο.

- Αν κάποιο από τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_\nu$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα.

- Αν τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε και τα $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, …, $\boldsymbol{\alpha}_\nu$ με $k < \nu$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

1.8.2 Σχετικές προτάσεις

Πρόταση 1.8.2 - 1. *Αν τα διανύσματα* $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}\langle \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ *με* $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$ *είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε* $\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\beta}$ *με* $\lambda \in \mathbb{R}$ *και αντίστροφα.*

Απόδειξη. *Ευθύ.* Επειδή τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ με $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, θα πρέπει για κάθε γραμμικό συνδυασμό της μορφής $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ να είναι $\lambda_1 \neq 0$, δηλαδή $\boldsymbol{\alpha} = -(\lambda_2/\lambda_1)\,\boldsymbol{\beta}$, οπότε $\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\beta}$.
Αντίστροφο. Επειδή $\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\beta}$, θα πρέπει $1\boldsymbol{\alpha} - \lambda\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, δηλαδή τα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. ■

Από την Πρόταση 1.8.2 - 1 προκύπτει τότε ότι, αν τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ και $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}\langle \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ με $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε ισχύει η παρακάτω **συνθήκη παραλληλίας**:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3}. \qquad (1.8.2 - 3)$$

Πρόταση 1.8.2 - 2. *Τα διανύσματα* $\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\boldsymbol{\beta}$ *με* $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$ *είναι γραμμικά εξαρτημένα τότε και μόνον, όταν είναι παράλληλα.*

Παρατήρηση 1.8.2 - 1

Οι Προτάσεις 1.8.2 - 1 και 1.8.2 - 2 ισχύουν ανάλογα και για τα επίπεδα διανύσματα.

Ορισμός 1.8.2 - 2. *Δύο ή περισσότερα διανύσματα είναι συνεπίπεδα, όταν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο ή είναι παράλληλα προς αυτό.*

Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.8.1 - 1 και τις Προτάσεις 1.8.2 - 1 και 1.8.2 - 2 εύκολα αποδεικνύονται οι παρακάτω προτάσεις:

Πρόταση 1.8.2 - 3. *Αν τα διανύσματα* $\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\boldsymbol{\beta}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε κάθε διάνυσμα της μορφής*

$$\boldsymbol{\gamma} = k\boldsymbol{\alpha} + \mu\boldsymbol{\beta} \quad \text{με} \quad k,\, \mu \in \mathbb{R} \qquad (1.8.2 - 4)$$

ανήκει στο επίπεδο Π*, που ορίζουν τα* $\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\boldsymbol{\beta}$ *και αντίστροφα κάθε διάνυσμα του επιπέδου* Π*, που ορίζεται από τα* $\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\boldsymbol{\beta}$*, αναλύεται στη μορφή* $(1.8.2-4)$.

Πρόταση 1.8.2 - 4. *Αν τα διανύσματα* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *και* $\boldsymbol{\gamma}$ *είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε θα είναι συνεπίπεδα και αντίστροφα.*

Πρόταση 1.8.2 - 5. *Αν τα διανύσματα* $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *και* $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ *είναι συνεπίπεδα, τότε*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.8.2 - 5}$$

Προφανώς, αν $\Delta \neq 0$, τα διανύσματα δεν είναι συνεπίπεδα.

Ασκήσεις

1. Έστω τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} = \langle 2, -1, 4\rangle$, $\boldsymbol{\beta} = \langle 1, -2, 5\rangle$ και $\boldsymbol{\gamma} = \langle 1, 2, -1\rangle$. Να υπολογιστούν:

i) τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} + 2\boldsymbol{\beta} - 3\boldsymbol{\gamma}$, $2\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}$ και τα αντίστοιχα μοναδιαία τους,

ii) τα γινόμενα $(\boldsymbol{\alpha} + 3\boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{\alpha} + 3\boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\gamma}$ και $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το μοναδιαίο διάνυσμα κατά διεύθυνση $\boldsymbol{\delta}$.

2. Έστω τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} = \langle 1, 2, 3\rangle$, $\boldsymbol{\beta} = \langle 2, -2, 3\rangle$ και $\boldsymbol{\gamma} = \langle k, l, m\rangle$. Να υπολογιστούν τα k, l και m, έτσι ώστε $5\boldsymbol{\alpha} + 3\boldsymbol{\beta} + 2\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$.

3. Έστω τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} = \langle 1, 1 - 2l, 4 + m\rangle$ και $\boldsymbol{\beta} = \langle -2, 5 + l, 8 - m\rangle$. Να υπολογιστούν τα l, m, έτσι ώστε τα διανύσματα να είναι παράλληλα.

4. Έστω τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ του χώρου $\mathbb{R}^3$ αντίστοιχα του $\mathbb{R}^2$. Να δειχθούν οι ταυτότητες

i) $|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}|^2 - |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}|^2 = 4\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}$,

ii) $|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}|^2 + |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}|^2 = 2\,|\boldsymbol{\alpha}|^2 + 2\,|\boldsymbol{\beta}|^2$.

5. Δείξτε ότι τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} = \langle 1,2,3\rangle$, $\boldsymbol{\beta} = \langle 1,-1,4\rangle$ και $\boldsymbol{\gamma} = \langle 2,4,1\rangle$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Στη συνέχεια αναλύστε το διάνυσμα $\boldsymbol{\delta} = \langle 1,1,1\rangle$ ως προς τα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ και $\boldsymbol{\gamma}$.

6. Δείξτε ότι, αν $AB\Gamma\Delta$ είναι ένα τετράεδρο[12] με κορυφή A όπου $A\,(x_1,y_1,z_1)$, $B\,(x_2,y_2,z_2)$, $\Gamma\,(x_3,y_3,z_3)$ και $\Delta\,(x_4,y_4,z_4)$, τότε ο όγκος του τετραέδρου ισούται με

$$V = \frac{1}{6}\,|A|, \quad \text{όταν} \quad A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Απαντήσεις

1. i) $\alpha + 2\beta - 3\gamma = \langle 1,-11,17\rangle$, $2\alpha - \beta + \gamma = \langle 4,2,2\rangle$ κ.λπ. ii) $(\alpha + 3\beta)\cdot\gamma = -28$, $\delta = (\alpha+3\beta)\times\gamma = \langle -31,14,17\rangle$ και $(\alpha,\beta,\gamma) =$ κ.λπ.

2. Από $(1.8.2-3)$ προκύπτει ότι: $k = -11/2$, $l = -2$ και $m = -12$.

3. Όμοια $l = 7/3$ και $m = -16$. **4.** Εφαρμογή των $(1.5.3-1)$ και $(1.5.3-2)$.

5. Από τον Ορισμό 1.8.1 - 1 προκύπτει ότι αν

$$\lambda_1\langle 1,2,3\rangle + \lambda_2\langle 1,-1,4\rangle + \lambda_3\langle 2,4,1\rangle = \langle 0,0,0\rangle,$$

τότε το ομογενές σύστημα

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \quad 2\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0, \quad 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

έχει μοναδική λύση την $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, επειδή η ορίζουσα των συντελεστών του

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Στη συνέχεια αναζητούνται συντελεστές x, y, z, έτσι ώστε: $\boldsymbol{\delta} = x\boldsymbol{\alpha} + y\boldsymbol{\beta} + z\boldsymbol{\gamma}$, οπότε τελικά

$$x = -\frac{18}{17}, \quad y = \frac{1}{17} \quad \text{και} \quad z = \frac{7}{17}.$$

6. Βλέπε αντίστοιχη απόδειξη θεωρίας, τύπο $(1.6.3-3)$ κ.λπ.

[12] Συμβολίζεται επίσης και $A.B\Gamma\Delta$, όταν A η κορυφή.

1.9 Βιβλιογραφία

[1] Καδιανάκης, Ν. & Καρανάσιος, Σ. (2008). *Γραμμική Άλγεβρα, Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές*. ISBN: 960–917–250–4.

[2] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Αθήνα: Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Ξένος, Θ. (2004), *Αναλυτική Γεωμετρία*. Εκδόσεις Ζήτη. ISBN 960–431–915–9.

[4] Φούντας, Γρ. (2009). *Αναλυτική* & *Διανυσματική Γεωμετρία*. Εκδόσεις Γρηγ. Φούντα. ISBN 960–330–517–0.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 2

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Στο Μάθημα αυτό θα δοθούν οι κυριότερες έννοιες της Αναλυτικής Γεωμετρίας, που θεωρούνται απαραίτητες για τα επόμενα. Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4].

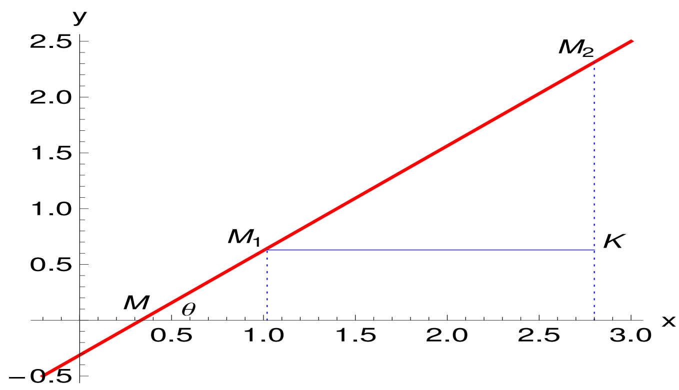
2.1 Ευθεία

2.1.1 Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Ορισμός 2.1.1 - 1. *Έστω το ορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxy και μία ευθεία ε. Αν θ είναι η γωνία που διαγράφει ο άξονας Ox, όταν περιστραφεί γύρω από το σημείο M κατά τη δεξιόστροφη φορά, έως ότου συμπέσει με την ε, τότε η εφαπτομένη της γωνίας θ ορίζει τον* **συντελεστή διεύθυνσης** *της ε, έστω λ, δηλαδή $\lambda = \tan\theta$ (Σχ. 2.1.1 - 1).*

Πρόταση 2.1.1 - 1. *Αν $M_1\left(x_1, y_1\right)$, $M_2\left(x_2, y_2\right)$ είναι δύο τυχόντα σημεία μιας μη παράλληλης προς τους άξονες ευθείας, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας ισούται με*

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,. \tag{2.1.1 - 1}$$



Σχήμα 2.1.1 - 1: ο συντελεστής διεύθυνσης $\lambda = \tan\theta$ της ευθείας M_1M_2.

Απόδειξη. Από το ορθογώνιο τρίγωνο KM_1M_2 (Σχ. 2.1.1 - 1) έχουμε

$$\lambda = \tan\theta = \frac{|KM_2|}{|M_1K|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,,$$

δηλαδή η αποδεικτέα. ■

Παρατήρηση 2.1.1 - 1

Αν η ευθεία είναι παράλληλη προς τον

i) x-άξονα, τότε

$$\lambda = 0, \tag{2.1.1 - 2}$$

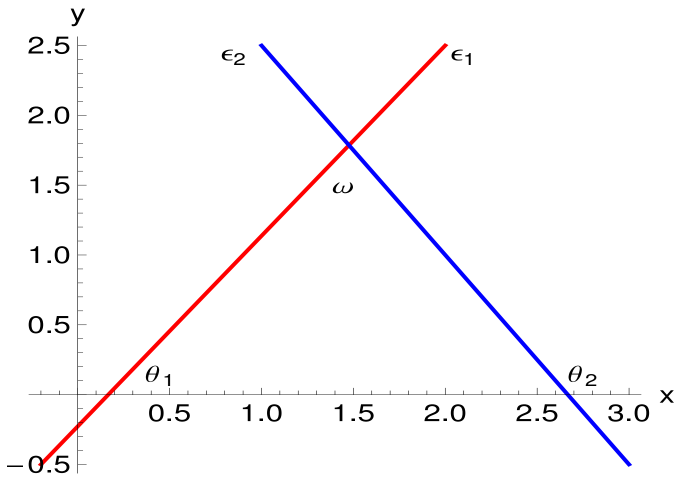
ii) y-άξονα, είναι

$$\lambda = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \tan\theta = \infty. \tag{2.1.1 - 3}$$

2.1.2 Γωνία δύο ευθειών

Πρόταση 2.1.2 - 1. *Έστω οι ευθείες ε_1, ε_2 με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα. Τότε, αν ω είναι η κυρτή γωνία των, ισχύει ότι (Σχ. 2.1.2 - 1)*

$$\tan\omega = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\lambda_2}\,. \tag{2.1.2 - 1}$$



Σχήμα 2.1.2 - 1: η γωνία ω των ευθειών ε_1 και ε_2.

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση αποδεικνύεται ότι:

Πόρισμα 2.1.2 - 1. *Έστω ε_1 και ε_2 δύο ευθείες με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα. Τότε ικανή και αναγκαία συνθήκη, έτσι ώστε οι ευθείες αυτές να είναι*

- *παράλληλες είναι*

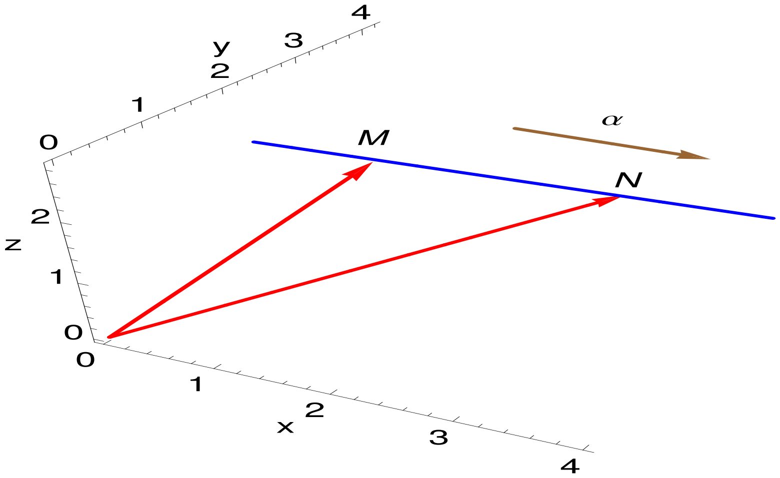
$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad (\textbf{συνθήκη παραλληλίας}) \tag{2.1.2 - 2}$$

- *κάθετες είναι*

$$\lambda_1 \, \lambda_2 = -1. \quad (\textbf{συνθήκη καθετότητας}) \tag{2.1.2 - 3}$$

Ορισμός 2.1.2 - 1. *Ορίζεται ως* **συντελεστής διεύθυνσης** *ενός διανύσματος ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που ορίζει.*

Δίνονται στη συνέχεια οι κυριότερες μορφές της εξίσωσης μίας ευθείας στο επίπεδο, αντίστοιχα στον χώρο. Σημειώνεται ότι στο εξής οι όροι διανυσματική, αντίστοιχα παραμετρική εξίσωση, όταν χρησιμοποιούνται, είναι ισοδύναμοι.



Σχήμα 2.1.3 - 1: η ευθεία MN που διέρχεται από σημείο M και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}$ όπου $\mathbf{r} = \mathbf{ON}$ και $\mathbf{r}_1 = \mathbf{OM}$.

2.1.3 Ευθεία από σημείο παράλληλη προς διάνυσμα

Διανυσματική εξίσωση

Έστω ότι ζητείται η εξίσωση μιας ευθείας, που διέρχεται από ένα σημείο, έστω M και είναι παράλληλη προς ένα διάνυσμα, έστω $\boldsymbol{\alpha}$ (Σχ. 2.1.3 - 1). Αν $\mathbf{r}_1$ το ακτινικό διάνυσμα του σημείου M και N ένα άλλο τυχόν σημείο της ευθείας με ακτινικό διάνυσμα $\mathbf{r}$, τότε, επειδή τα διανύσματα $\mathbf{MN}$ και $\boldsymbol{\alpha}$ είναι παράλληλα, θα πρέπει σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.1 - 1 να υπάρχει πραγματικός αριθμός t (παράμετρος), έτσι ώστε $\mathbf{MN} = t\boldsymbol{\alpha}$. Αλλά $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{MN}$, οπότε έχουμε την παρακάτω **διανυσματική εξίσωση** της ευθείας στην περίπτωση αυτή

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\boldsymbol{\alpha}, \qquad (2.1.3 - 1)$$

όταν η παράμετρος $t \in \mathbb{R}$.

Αναλυτική εξίσωση στον χώρο

Έστω $\boldsymbol{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ και $M(x_1, y_1, z_1)$. Τότε η $(2.1.3-1)$ γράφεται

$$\begin{aligned}(x-x_1)\,\mathbf{i} \;&+\; (y-y_1)\,\mathbf{j} + (z-z_1)\,\mathbf{k} \\ = t\alpha_1\mathbf{i} \;&+\; t\alpha_2\mathbf{j} + t\alpha_3\mathbf{k},\end{aligned}$$

οπότε εξισώνοντας τους συντελεστές των $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ και στη συνέχεια απαλείφοντας το t, τελικά προκύπτει ότι η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της ευθείας στον χώρο είναι η

$$\frac{x-x_1}{\alpha_1} = \frac{y-y_1}{\alpha_2} = \frac{z-z_1}{\alpha_3}\,. \tag{2.1.3 - 2}$$

Αναλυτική εξίσωση στο επίπεδο

Η $(2.1.3-1)$ στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$(x-x_1)\,\mathbf{i} + (y-y_1)\,\mathbf{j} = t\alpha_1\mathbf{i} + t\alpha_2\mathbf{j},$$

οπότε όμοια τελικά αποδεικνύεται ότι η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της ευθείας στην περίπτωση αυτή είναι η

$$\frac{x-x_1}{\alpha_1} = \frac{y-y_1}{\alpha_2} \quad \text{ή} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.1.3 - 3}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 2.1.3 - 1. *Αν ένα διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha} = \langle a_1, a_2 \rangle$ είναι παράλληλο προς μία ευθεία ε, που δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα Oy, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι*

$$\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\,.$$

Με το MATHEMATICA η γραφική παράσταση της παραπάνω ευθείας γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 2.1.3 - 1 (ευθείας παράλληλης σε διάνυσμα)

```
L1 = Arrow[{{0.0, 0, 0}, {1.5, 1.5, 2.5}}];
f1 = Graphics3D[{Red, Thick, L1}];
L2 = Arrow[{{0.0, 0, 0}, {2.5, 3.7, 0.95}}];
f2 = Graphics3D[{Red, Thick, L2}];
L3 = Line[{{0.5, 1.5, 2.5}, {4, 3, 1.5}}];
f3 = Graphics3D[{Blue, Thick, L3}];
L4 = Arrow[{{2, 2.7, 2.5}, {3, 4.2, 1.45}}];
f4 = Graphics3D[{Brown, Thick, L4}];
f5 = Show[{Graphics3D[Text[\[Alpha], {2.75, 2.75, 2.85}]],
    Graphics3D[Text[M, {1.5, 1.5, 2.85}]],
    Graphics3D[Text[N, {2.5, 3.7, 1.2}]]}];
fgr = Show[f1, f2, f3, f4, f5, Boxed -> False,
  Axes -> {True, True, True}, AxesLabel -> {"x", "y", "z"},
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 14}]
```

2.1.4 Ευθεία από δύο σημεία

Διανυσματική εξίσωση

Έστω M_1, M_2 δύο τυχόντα σημεία της ευθείας με διανυσματικές ακτίνες $\mathbf{r}_1 = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$, $\mathbf{r}_2 = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle$ αντίστοιχα και M τυχόν άλλο σημείο της με ακτινικό διάνυσμα, έστω $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$. Τότε η περίπτωση αυτή ανάγεται στην αντίστοιχη της Παραγράφου 2.1.3 θέτοντας $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, οπότε η **διανυσματική εξίσωση** θα είναι

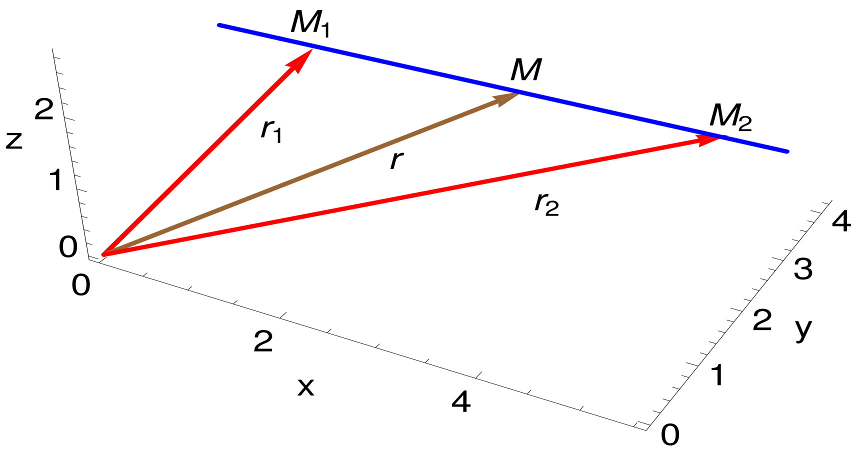
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\,(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\,, \qquad (2.1.4 - 1)$$

όταν η παράμετρος $t \in \mathbb{R}$.

Η $(2.1.4-1)$ χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές εκφράσεις $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ και $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$, τελικά γράφεται

$$\begin{aligned} x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} &= [tx_2 + (1-t)x_1]\,\mathbf{i} + [ty_2 + (1-t)y_1]\,\mathbf{j} \\ &\quad + [tz_2 + (1-t)z_1]\,\mathbf{k}, \qquad (2.1.4 - 2) \end{aligned}$$

όταν η παράμετρος $t \in \mathbb{R}$. Η $(2.1.4-2)$ είναι γνωστή και ως η **παραμετρική εξίσωση της ευθείας** στον χώρο.



Σχήμα 2.1.4 - 1: παραμετρική παράσταση ευθείας από δύο σημεία M_1 και M_2.

Σημείωση 2.1.4 - 1

- Όταν $\mathbf{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, η $(2.1.4-2)$ ορίζει την **παραμετρική εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος** M_1M_2 (Σχ. 2.1.4 - 1).
- Η $(2.1.4-2)$ στο επίπεδο γράφεται

$$\begin{aligned} x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} &= [tx_2 + (1-t)x_1]\,\mathbf{i} \\ &\quad + [ty_2 + (1-t)y_1]\,\mathbf{j}, \end{aligned} \tag{2.1.4 - 3}$$

όταν επίσης η παράμετρος $t \in \mathbb{R}$, που είναι γνωστή ως η **παραμετρική εξίσωση της ευθείας** στο επίπεδο.

Αναλυτική εξίσωση στον χώρο

Έστω $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$, $M_2\,(x_2, y_2, z_2)$. Τότε η $(2.1.4-2)$ γράφεται

$$\begin{aligned} (x-x_1)\,\mathbf{i} &+ (y-y_1)\,\mathbf{j} + (z-z_1)\,\mathbf{k} \\ = t\,(x_2-x_1)\,\mathbf{i} &+ t\,(y_2-y_1)\,\mathbf{j} + t\,(z-z_1)\,\mathbf{k}, \end{aligned}$$

οπότε εξισώνοντας τους συντελεστές των $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ και στη συνέχεια απαλείφοντας το t, τελικά προκύπτει ότι η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της ευθείας στον χώρο είναι η

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\,. \tag{2.1.4 - 4}$$

Αναλυτική εξίσωση στο επίπεδο

Όμοια από την $(2.1.4-3)$ προκύπτει ότι η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της ευθείας στο επίπεδο είναι η

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad \text{ή} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{2.1.4 - 5}$$

Όμοια σύμφωνα με τα παραπάνω αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 2.1.4 - 1 *Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M\,(x_0,y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ δίνεται από την εξίσωση*

$$y-y_0=\lambda\,(x-x_0)\,. \tag{2.1.4 - 6}$$

Με το MATHEMATICA η γραφική παράσταση της παραπάνω ευθείας γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 2.1.4 - 1 (ευθείας από 2 σημεία)

```
L1 = Arrow[{{0.0, 0, 0}, {1.5, 1.5, 2.5}}];
f1 = Graphics3D[{Red, Thick, L1}];
L2 = Arrow[{{0.0, 0, 0}, {2.5, 3.7, 0.9}}];
f2 = Graphics3D[{Brown, Thick, L2}];
L3 = Line[{{0.5, 1.5, 2.5}, {5.5, 3, 1.5}}];
f3 = Graphics3D[{Blue, Thick, L3}];
L4 = Arrow[{{0, 0, 0}, {4.5, 4.2, 0.6}}];
f4 = Graphics3D[{Red, Thick, L4}];
f5 = Show[{Graphics3D[Text[Subscript[r, 1], {1.2, 1.2, 1.5}]],
    Graphics3D[Text[Subscript[r, 2], {4.0, 1.2, 1.5}]],
    Graphics3D[Text[r, {2.5, 1.2, 1.5}]],
    Graphics3D[Text[Subscript[M, 1], {1.5, 1.5, 2.85}]],
    Graphics3D[Text[M, {2.5, 3.7, 1.2}]],
```

```
   Graphics3D[Text[Subscript[M, 2], {4.5, 4.2, 0.9}]]}];
fgr = Show[f1, f2, f3, f4, f5, Boxed -> False,
  Axes -> {True, True, True}, AxesLabel -> {"x", "y", "z"},
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 14}]
```

2.1.5 Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας στο επίπεδο

Αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 2.1.5 - 1. *Η γενική μορφή της αναλυτικής εξίσωσης της ευθείας στο επίπεδο είναι*

$$Ax + By + \Gamma = 0, \tag{2.1.5 - 1}$$

όταν $|A| + |B| \neq 0$ *και αντίστροφα.*

Απόδειξη. *Ευθύ.* Από την $(2.1.4-5)$ - όμοια αποδεικνύεται από την $(2.1.3-3)$ - αναπτύσσοντας την ορίζουσα προκύπτει ότι η εξίσωση της ευθείας διαδοχικά γράφεται

$$x \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

ή

$$x\left(y_1 - y_2\right) - y\left(x_1 - x_2\right) + \left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right) = 0,$$

δηλαδή η αποδεικτέα με

$$A = y_1 - y_2, \quad B = x_2 - x_1 \quad \text{και} \quad \Gamma = x_1 y_2 - x_2 y_1. \tag{2.1.5 - 2}$$

Το *αντίστροφο* είναι προφανές. ▪

Από τις $(2.1.5-2)$ και $(2.1.1-1)$ προκύπτει ότι:

Πόρισμα 2.1.5 - 1. *Ο συντελεστής διεύθυνσης* λ *της ευθείας* $Ax+By+\Gamma = 0$ *ισούται με*

$$\lambda = -\frac{A}{B}. \tag{2.1.5 - 3}$$

Διερεύνηση της εξίσωσης $Ax + By + \Gamma = 0$, όταν $|A| + |B| \neq 0$

Διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

i) $A \neq 0, \quad B = 0$

Τότε από την $(2.1.5-1)$ προκύπτει ότι $x = -\Gamma/A$, που παριστάνει ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο $(-\Gamma/A,\, y)$ και είναι παράλληλη προς τον άξονα Oy. Αν και $\Gamma = 0$, τότε η ευθεία συμπίπτει με τον άξονα Oy.

ii) $A = 0, \quad B \neq 0$

Τότε από την $(2.1.5-1)$ προκύπτει ότι $y = -\Gamma/B$, που παριστάνει ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο $(x,\, -\Gamma/B)$ και είναι παράλληλη προς τον άξονα Ox. Αν και $\Gamma = 0$, τότε η ευθεία συμπίπτει με τον άξονα Ox.

iii) $\Gamma = 0$

Η $(2.1.5-1)$ παριστάνει ευθεία, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iv) $A,\, B,\, \Gamma \neq 0$

Η $(2.1.5-1)$ γράφεται

$$-\frac{x}{\Gamma/A} - \frac{y}{\Gamma/B} = 1,$$

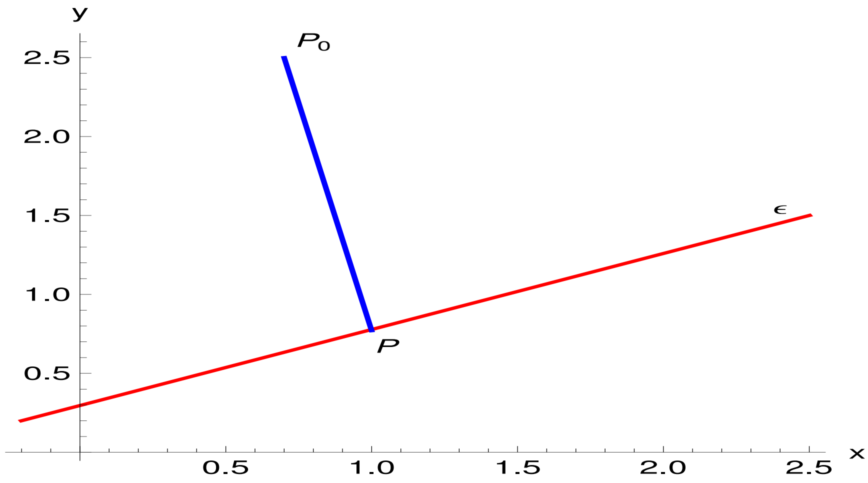
δηλαδή

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (2.1.5\text{ - }4)$$

όπου τα $a = -\Gamma/A$ και $b = -\Gamma/B$ λέγονται και **συντεταγμένες επί την αρχή** της $(2.1.5-1)$.

Πρόταση 2.1.5 - 2. *Έστω οι ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3 με αντίστοιχες εξισώσεις*

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0, \;\; A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \;\; \textit{και} \;\; A_3x + B_3y + \Gamma_3 = 0.$$



Σχήμα 2.1.6 - 1: η απόσταση $d(P_0, \varepsilon) = P_0P$ του σημείου $P_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία $\varepsilon: \; Ax + By + \Gamma = 0$.

Τότε ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε οι ευθείες να διέρχονται από το ίδιο σημείο, είναι

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.1.5 - 5}$$

2.1.6 Απόσταση σημείου από ευθεία

Έστω η ευθεία ε με εξίσωση

$$\varepsilon: \quad Ax + By + \Gamma = 0$$

και τυχόν σημείο της $P_0(x_0, y_0)$. Τότε αποδεικνύεται ότι η απόσταση P_0P του σημείου P_0 από την ε δίνεται από τον τύπο (Σχ. 2.1.6 - 1)

$$d(P_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{2.1.6 - 1}$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η εξίσωση της ευθείας στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) έχει συντεταγμένες επί την αρχή 3 και -5,

ii) έχει τετμημένη επί την αρχή 4 και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\mathbf{a} = (1, -3)$,

iii) διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $x - y = 7$, $x + 2y = 5$ και είναι κάθετη στην ευθεία $2x - 5y + 3 = 0$,

iv) διέρχεται από το σημείο $(1, 1)$ και σχηματίζει γωνία $\pi/4$ με την ευθεία $x - 7y + 5 = 0$.

2. Να υπολογιστεί η γωνία των ευθειών $2x - y = 4$ και $3x + y = 1$.

3. Έστω το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1, 2)$, $(3, 4)$ και $(-2, -3)$. Να υπολογιστούν:

i) οι εξισώσεις των διαγωνίων, των υψών και των διχοτόμων του,

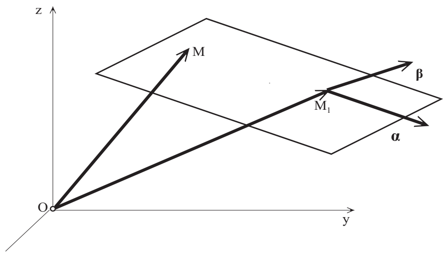
ii) οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους.

4. Να υπολογιστεί η τιμή της παραμέτρου λ, έτσι ώστε η ευθεία $\lambda x + y + 1 = 0$ να διέρχεται από το κοινό σημείο τομής των ευθειών $2x - y + 1 = 0$ και $x - y + 5 = 0$.

Απαντήσεις

1. (i) Τύπος $(2.1.5-4)$ όπου $a = 3$ και $b = -5$. (ii) Όμοια με (i).
(iii) Από τη λύση του συστήματος $x - y = 7$, $x + 2y = 5$ προκύπτει ότι το κοινό σημείο των ευθειών είναι το $P_0\,(x_0, y_0) = (19/3, -2/3)$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της $2x - 5y + 3 = 0$ είναι $\lambda = 5/2$, οπότε σύμφωνα με τη συνθήκη καθετότητας $(2.1.2-3)$ ο συντελεστής διεύθυνσης της ζητούμενης ευθείας θα είναι $\lambda_1 = -5/2$. Άρα από την $(2.1.4-6)$ προκύπτει τελικά ότι η εξίσωση είναι η $6y + 15x = 91$.
(iv) Έστω λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ζητούμενης ευθείας, λ_1 της ευθείας $x - 7y + 5 = 0$ και ω η κυρτή γωνία των. Τότε σύμφωνα με την $(2.1.5-3)$ είναι $\lambda_1 = \frac{1}{7}$, οπότε από την $(2.1.5-3)$ προκύπτει τότε ότι

$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\lambda - \frac{1}{7}}{1 + \frac{\lambda}{7}} \quad \text{δηλαδή} \quad \lambda = \frac{4}{3}\,.$$



Σχήμα 2.2.1 - 1: επίπεδο από σημείο M παράλληλο προς τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$.

Αν $(x_0, y_0) = (1, 1)$, τότε από την $(2.1.4-6)$ προκύπτει ότι η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι $4x - 3y - 1 = 0$.

2. Όμοια, αν ω η κυρτή γωνία των, τότε για τις ευθείες $2x - y = 4$ και $3x + y = 1$ σύμφωνα με την $(2.1.5-3)$ είναι $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = -3$, οπότε τελικά $\omega = \tan^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$. Όμοια και οι υπόλοιπες ασκήσεις.

2.2 Επίπεδο

2.2.1 Επίπεδο από σημείο και παράλληλο προς 2 διανύσματα

Έστω ένα επίπεδο που διέρχεται από το σημείο $M(x_1, y_1, z_1)$ και είναι παράλληλο προς τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ και $\boldsymbol{\beta} = \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$, όταν τα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ υποτίθεται ότι δεν είναι παράλληλα μεταξύ τους (Σχ. 2.2.1 - 1).

Διανυσματική εξίσωση

Επειδή τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ δεν είναι παράλληλα μεταξύ τους, θα πρέπει να τέμνονται σε ένα σημείο, έστω M_1. Τότε, επειδή τα διανύσματα $\mathbf{MM}_1$ και $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ είναι συνεπίπεδα, θα υπάρχουν παράμετροι u, $v \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε[1]

$$\mathbf{MM}_1 = u\,\boldsymbol{\alpha} + v\,\boldsymbol{\beta}. \tag{2.2.1 - 1}$$

Έστω $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ και $\mathbf{r}_1 = \mathbf{OM}_1$ οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων M και M_1 αντίστοιχα. Τότε προφανώς ισχύει ότι

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{MM}_1. \tag{2.2.1 - 2}$$

Από τις $(2.2.1 - 1)$ και $(2.2.1 - 2)$ προκύπτει τότε η παρακάτω **διανυσματική εξίσωση** του επιπέδου

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\,\boldsymbol{\alpha} + v\,\boldsymbol{\beta}, \tag{2.2.1 - 3}$$

όταν u, $v \in \mathbb{R}$.

Αναλυτική εξίσωση

Η $(2.2.1 - 3)$ γράφεται

$$\begin{aligned} x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} &= (x_1 + u\alpha_1 + v\beta_1)\,\mathbf{i} \\ &\quad + (y_1 + u\alpha_2 + v\beta_2)\,\mathbf{j} + (z_1 + u\alpha_3 + v\beta_3)\,\mathbf{k}, \end{aligned}$$

οπότε εξισώνοντας τις αντίστοιχες συντεταγμένες των $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ έχουμε

$$x = x_1 + u\alpha_1 + v\beta_1\,, \quad y = y_1 + u\alpha_2 + v\beta_2\,, \quad z = z_1 + u\alpha_3 + v\beta_3,$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \alpha_1\,u + \beta_1\,v &= x_1 - x \\ \alpha_2\,u + \beta_2\,v &= y_1 - y \\ \alpha_3\,u + \beta_3\,v &= z_1 - z, \end{aligned} \tag{2.2.1 - 4}$$

[1] Βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 1.

που ορίζει ένα σύστημα 3 εξισώσεων με 2 αγνώστους τα u, v. Είναι γνωστό ότι η λύση των συστημάτων στην περίπτωση αυτή απαιτεί η λύση των 2 εξισώσεων να επαληθεύει και την 3η εξίσωση ή όπως διαφορετικά λέγεται το σύστημα να είναι **συμβιβαστό**.[2] Παρατηρούμε ότι στην $(2.2.1-4)$, επειδή τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ έχει υποτεθεί ότι δεν είναι παράλληλα μεταξύ τους, θα πρέπει για να είναι το σύστημα συμβιβαστό, μια τουλάχιστον από τις ποσότητες

$$\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1, \quad \alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2, \quad \alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3$$

να είναι διάφορη του μηδενός.

Επομένως το σύστημα $(2.2.1-4)$ θα είναι συμβιβαστό, τότε και μόνον όταν:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.2.1 \text{ - } 5)$$

που ορίζει τελικά και την **αναλυτική εξίσωση** του επιπέδου στην περίπτωση αυτή.

2.2.2 Επίπεδο από δύο σημεία και παράλληλο προς διάνυσμα

Έστω ένα επίπεδο που διέρχεται από τα σημεία $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$, $M_2\left(x_2,y_2,z_2\right)$ και είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}=\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$.

Διανυσματική εξίσωση

Η περίπτωση αυτή ανάγεται στην αντίστοιχη της Παραγράφου 2.2.1 θέτοντας

$$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,$$

όταν $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων M_1 και M_2 αντίστοιχα. Άρα η **διανυσματική εξίσωση** του επιπέδου είναι

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+u\left(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1\right)+v\boldsymbol{\alpha}, \qquad (2.2.2 \text{ - } 1)$$

όταν u, $v\in\mathbb{R}$.

[2] Όμοια βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 3.

Αναλυτική εξίσωση

Όμοια από την (2.2.2 − 1) για τις συντεταγμένες του τυχόντος σημείου $M(x, y, z)$ του επιπέδου Π έχουμε:

$$\begin{aligned} u\,(x_2 - x_1) + v\,\alpha_1 &= x_1 - x, \\ u\,(y_2 - y_1) + v\,\alpha_2 &= y_1 - y, \\ u\,(z_2 - z_1) + v\,\alpha_3 &= z_1 - z \end{aligned}$$

που τελικά δίνει ως **αναλυτική εξίσωση** την

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.2.2 - 2)$$

2.2.3 Επίπεδο από τρία σημεία

Έστω ένα επίπεδο που διέρχεται από τρία μη συνευθειακά σημεία $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$, $M_2\,(x_2, y_2, z_2)$ και $M_3\,(x_3, y_3, z_3)$.

Διανυσματική εξίσωση

Όμοια η περίπτωση αυτή ανάγεται στην αντίστοιχη της Παραγράφου 2.2.1 θέτοντας

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M_1 M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{M_1 M_3} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1,$$

όταν $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ και $\mathbf{r}_3$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων M_1, M_2 και M_3 αντίστοιχα. Άρα η **διανυσματική εξίσωση** στην περίπτωση αυτή είναι

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\,(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + v\,(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)\,. \qquad (2.2.3 - 1)$$

Αναλυτική εξίσωση

Όμοια για τις συντεταγμένες του τυχόντος σημείου $M(x, y, z)$ του επιπέδου έχουμε

$$\begin{aligned} x &= x_1 + u\,(x_2 - x_1) + v\,(x_3 - x_1)\,, \\ y &= y_1 + u\,(y_2 - y_1) + v\,(y_3 - y_1)\,, \\ z &= z_1 + u\,(z_2 - z_1) + v\,(z_3 - z_1) \end{aligned}$$

που τελικά δίνει ως **αναλυτική εξίσωση** την

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.2.3 - 2)$$

2.2.4 Γενική μορφή εξίσωσης επιπέδου

Αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 2.2.4 - 1. *Η γενική μορφή της αναλυτικής εξίσωσης του επιπέδου είναι*

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0 \qquad (2.2.4 - 1)$$

και αντίστροφα.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(1, 1)$ και τέμνει κάθετα την τομή των επιπέδων $3x - 5y + 2 = 0$ και $2x + 3z + 1 = 0$.
2. Έστω τα επίπεδα $2x + 3y + 4z - 6 = 0$ και $4x + 6y + 8z + 24 = 0$. Ζητείται

i) να δειχθεί ότι είναι παράλληλα,

ii) να υπολογιστεί η εξίσωση του επιπέδου που τέμνει τα επίπεδα αυτά κάθετα.

2.3 Κωνικές τομές

2.3.1 Κύκλος

Ορισμός 2.3.1 - 1. *Ορίζεται ως* **περιφέρεια κύκλου** *(circle) ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, που απέχουν ίση απόσταση, έστω R, από ένα σημείο του επιπέδου, έστω K.*

Η απόσταση R λέγεται **ακτίνα**, ενώ το σημείο O **κέντρο** του κύκλου.

Σχετικά με τις θέσεις του κέντρου K ως προς την αρχή των συντεταγμένων ενός ορθογωνίου συστήματος Oxy διακρίνονται οι παρακάτω δύο περιπτώσεις:

- το K συμπίπτει με το O. Τότε, αν $M(x, y)$ είναι τυχόν σημείο της περιφέρειας, η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της περιφέρειας είναι

$$x^2 + y^2 = R^2, \tag{2.3.1 - 1}$$

ενώ, όταν

- το κέντρο είναι στο σημείο (α, β), τότε

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2. \tag{2.3.1 - 2}$$

Εξίσωση εφαπτομένης

Η εξίσωση της εφαπτομένης της περιφέρειας σε ένα σημείο της, έστω $M(x_0, y_0)$, αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση:

$$(x - x_0)(x - \alpha) + (y - y_0)(y - \beta) = R^2. \tag{2.3.1 - 3}$$

Από τις $(2.3.1 - 1)$ και $(2.3.1 - 2)$ προκύπτει ότι η γενική μορφή της αναλυτικής εξίσωσης των σημείων της περιφέρειας του κύκλου είναι

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \mathit{\Gamma} = 0 \tag{2.3.1 - 4}$$

όπου το κέντρο ορίζεται στην περίπτωση αυτή από τις συντεταγμένες:

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

και η ακτίνα από τη σχέση

$$R = \left(A^2 + B^2 - 4\varGamma\right)^{1/2}.$$

Αντίστροφα, κάθε εξίσωση της μορφής $(2.3.1 - 4)$ παριστάνει περιφέρεια κύκλου. Πράγματι η $(2.3.1 - 4)$ γράφεται

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}. \qquad (2.3.1 - 5)$$

Τότε η $(2.3.1 - 5)$:

- αν $\quad A^2 + B^2 - 4\varGamma \geq 0$, παριστάνει εξίσωση κύκλου με κέντρο, έστω $K\left(-A/2, -B/2\right)$ και ακτίνα $R = \sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}/2$. Ειδικά, όταν ισχύει η ισότητα, η ακτίνα του κύκλου είναι μηδέν (σημείο).
- Αν $\quad A^2 + B^2 - 4\varGamma < 0$, τότε δεν υπάρχουν $x,\, y \in \mathbb{R}$ που να την επαληθεύουν, οπότε στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει περιφέρεια κύκλου.

Επομένως έχει αποδειχθεί η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 2.3.1 - 1. *Η $x^2 + y^2 + Ax + By + \varGamma = 0$ παριστάνει εξίσωση περιφέρειας κύκλου τότε και μόνον, όταν $A^2 + B^2 - 4\varGamma > 0$.*

Διανυσματική εξίσωση

Έστω ότι το O συμπίπτει με την αρχή ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων. Τότε, αν $M(x, y)$ είναι τυχόν σημείο της περιφέρειας, η διανυσματική εξίσωση είναι της μορφής

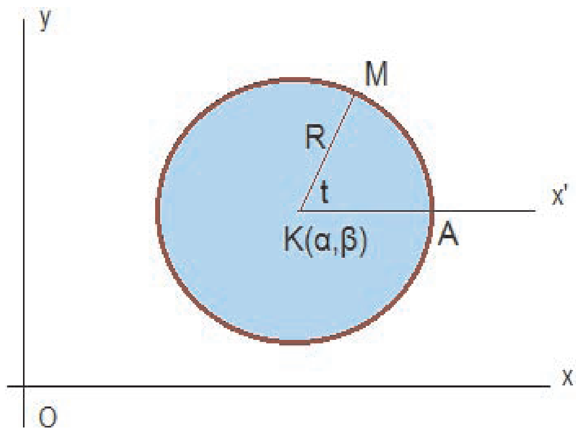
$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} = \langle x, y\rangle \qquad (2.3.1 - 6)$$

όπου

$$\begin{aligned} x = x(t) &= R\cos t, \\ y = y(t) &= R\sin t, \qquad \text{όταν} \quad t \in [0, 2\pi), \end{aligned} \qquad (2.3.1 - 7)$$

ενώ στην περίπτωση που το κέντρο του είναι το σημείο $K(\alpha, \beta)$ έχουμε (Σχ. 2.3.1 - 1)

$$\begin{aligned} x = x(t) &= \alpha + R\cos t, \\ y = y(t) &= \beta + R\sin t, \qquad \text{όταν} \quad t \in [0, 2\pi). \end{aligned} \qquad (2.3.1 - 8)$$



Σχήμα 2.3.1 - 1: παραμετρική παράσταση κύκλου με κέντρο το σημείο $K(\alpha, \beta)$ και ακτίνα R.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η ακτίνα και το κέντρο των παρακάτω περιφερειών:

i) $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 9 = 0$,

ii) $x^2 + y^2 - 6x + 10y = 0$.

2. Να υπολογιστεί η εξίσωση της περιφέρειας κύκλου, όταν

i) έχει κέντρο το σημείο $(1, -2)$ και εφάπτεται στην ευθεία $x - 2y + 5 = 0$,

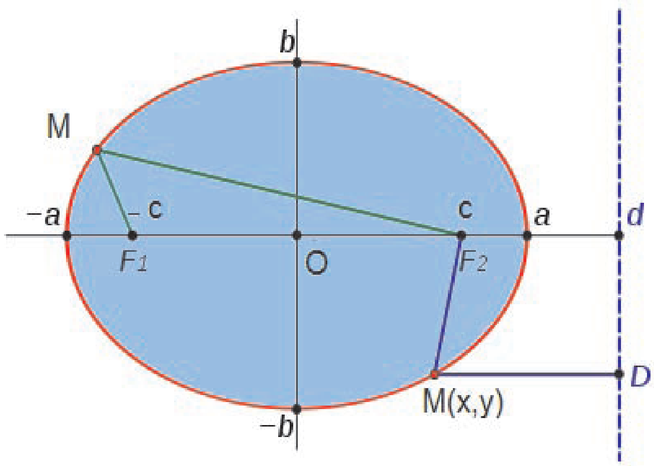
ii) διέρχεται από τα σημεία $(3, -2)$, $(1, 2)$ και $(-1, -2)$,

iii) διέρχεται από τα σημεία $(3, 1)$, $(-1, 3)$ και έχει κέντρο στην ευθεία $3x - 2y - 2 = 0$,

iv) είναι εγγεγραμμένη στο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1, -2)$, $(2, 3)$ και $(4, 1)$.

2.3.2 Έλλειψη

Ορισμός 2.3.2 - 1. *Ορίζεται ως* ***έλλειψη*** *(ellipse) ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων τυχόντος*



Σχήμα 2.3.2 - 1: η έλλειψη με εστίες στα σημεία $F_1(-c, 0)$ και $F_2(c, 0)$.

σημείου της, έστω M, από δύο σταθερά σημεία F_1 και F_2 είναι σταθερό (Σχ. 2.3.2 - 1).

Τα σημεία $F_1(-c, 0)$ και $F_2(c, 0)$ λέγονται **εστίες** (focus).

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.3.2 - 1 είναι $F_1M + F_2M = 2a$ σταθερά. Τότε για να προσδιοριστεί η εξίσωση των σημείων της έλλειψης, θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy στο οποίο η αρχή O διχοτομεί την απόσταση F_1F_2, ως άξονα των x την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία F_1 και F_2 και ως άξονα των y την κάθετη στην F_1F_2 που διέρχεται από το O.

Έστω $|F_1F_2| = 2c$. Η βασική ιδιότητα των σημείων της έλλειψης εκφράζεται για τις συντεταγμένες του τυχόντος σημείου $M(x, y)$ με τη σχέση $|MF_1|+ |MF_2| = 2a$, δηλαδή

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (2.3.2 - 1)$$

Από τη σχέση αυτή με τετραγωνισμό και των δύο μελών προκύπτει τελικά ότι η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της έλλειψης είναι

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{όταν} \quad b^2 = a^2 - c^2. \qquad (2.3.2 - 2)$$

Ιδιότητες

i) Η (2.3.2−2) δεν μεταβάλλεται, όταν τεθεί στη θέση του (x, y) το $(-x, y)$ ή το $(x, -y)$ ή το $(-x, -y)$, δηλαδή η έλλειψη είναι συμμετρική ως προς τους άξονες Ox, Oy και την αρχή των αξόνων O.

ii) Από την (2.3.2 − 2) προκύπτει ότι $y^2/b^2 = 1 - x^2/a^2 \geq 0$, δηλαδή $-a \leq x \leq a$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $-b \leq y \leq b$. Άρα η έλλειψη περιλαμβάνεται στο ορθογώνιο με πλευρές $x = \pm a$ και $y = \pm b$.

Βασικά στοιχεία

- Η ευθεία που ενώνει τις εστίες της έλλειψης, λέγεται **κύριος άξονας**. Ο κύριος άξονας τέμνει την έλλειψη στα σημεία $A(a, 0)$ και $A'(-a, 0)$, που ορίζουν τις κύριες κορυφές της. Τότε το ευθύγραμμο τμήμα AA' ορίζει τον **μεγάλο άξονα** (major axis) της έλλειψης, που έχει μήκος $2a$. Ο άξονας των συντεταγμένων Ox έχει τη διεύθυνση AA', ενώ το σημείο O είναι στο μέσον του AA'. Ο άξονας Oy τέμνει την έλλειψη στα σημεία $B(0, b)$ και $B'(0, -b)$, που λέγονται και δευτερεύουσες κορυφές της έλλειψης. Το ευθύγραμμο τμήμα BB' ορίζει τον **μικρό άξονα** (minor axis) της έλλειψης με μήκος $2b$. Τότε τα $|OA| = a$ και $|OB| = b$ ορίζουν τα μήκη του μεγάλου αντίστοιχα του μικρού ημιάξονα της έλλειψης.

- **Εκκεντρότητα** (eccentricity) της έλλειψης ορίζεται ο λόγος $e = c/a$ και προφανώς είναι $e < 1$.

Εξίσωση εφαπτομένης

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο της $M\,(x_0, y_0)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1\,. \qquad (2.3.2\text{ - }3)$$

Διανυσματική εξίσωση

Όμοια είναι της μορφής $(2.3.1-6)$, δηλαδή

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} = \langle x, y\rangle$$

όπου

$$\begin{aligned} x = x(t) &= a\cos t, \\ y = y(t) &= b\sin t, \qquad \text{όταν} \quad t \in [0, 2\pi). \end{aligned} \qquad (2.3.2 - 4)$$

Η εντολή που σχηματίζει μία έλλειψη με το MATHEMATICA είναι

```
Show[Graphics[Circle[{x_0,y_0},r]]]
```

όπου (x_0, y_0) το κέντρο και r η ακτίνα, ενώ για την έλλειψη

```
Show[Graphics[Circle[{x_0,y_0},{a,b}]]]
```

όπου a ο μεγάλος και b ο μικρός ημιάξονάς της.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η εξίσωση της έλλειψης στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) η εστιακή απόσταση είναι ίση με 6 και η εκκεντρότητα $\varepsilon = 3/5$,

ii) ο μικρός άξονας είναι ίσος με 6 και η εκκεντρότητα $\varepsilon = 4/5$.

2. Να υπολογιστούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων από το σημείο $(2, -1)$ στην έλλειψη $x^2 + 9y^2 = 9$. Στη συνέχεια να προσδιοριστεί η γωνία των εφαπτόμενων και το μήκος της χορδής της έλλειψης, που διέρχεται από τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων.

3. Έστω η έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Τότε οι ευθείες με εξισώσεις [3]

$$d: \quad x = \pm\frac{a^2}{c}$$

ορίζουν τις **διευθετούσες** (directrices) της. Δείξτε ότι

[3] Βλέπε Σχ. 2.3.2 - 1 όπου η διευθετούσα d έχει εξίσωση $x = \frac{a^2}{c}$.

i) οι διευθετούσες είναι κάθετες στον μεγάλο άξονα της έλλειψης,

ii) ο λόγος των αποστάσεων τυχόντος σημείου της έλλειψης από την εστία και τη διευθετούσα είναι σταθερός και ισούται με την εκκεντρότητα της έλλειψης.[4]

Απαντήσεις

1. (i) Είναι $F_1F_2 = 2c = 6$, οπότε $c = 3$, ενώ $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$. Άρα $a = 5$, οπότε από τη σχέση $b^2 = a^2 - c^2$ προκύπτει ότι $b^2 = 16$. Επομένως η εξίσωση είναι:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

(ii) Είναι $2b = 6$, οπότε $b = 3$, ενώ $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$, δηλαδή $c = \frac{4a}{5}$. Αντικαθιστώντας στην $b^2 = a^2 - c^2$ έχουμε $9 = \alpha^2 - \frac{16a^2}{25}$, οπότε $a^2 = 25$. Άρα η εξίσωση είναι:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

2. Η εξίσωση της έλλειψης γράφεται

$$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1. \qquad (2.3.2 - 1)$$

Άρα $a^2 = 9$ και $b^2 = 1$. Τότε σύμφωνα με την $(2.3.2-3)$ η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο της (x_0, y_0) γράφεται

$$\frac{x\,x_0}{9} + y\,y_0 = 1. \qquad (2.3.2 - 2)$$

Επειδή η ευθεία $(2.3.2-2)$ διέρχεται από το σημείο $(x, y) = (2, -1)$, θα πρέπει οι συντεταγμένες του να την επαληθεύουν, δηλαδή $\frac{2\,x_0}{9} - y_0 = 1$, από την οποία τελικά προκύπτει ότι:

$$y_0 = \frac{2x_0}{9} - 1. \qquad (2.3.2 - 3)$$

Όμοια επειδή το σημείο (x_0, y_0) ανήκει στην έλλειψη, η $(2.3.2-1)$ γράφεται $\frac{x_0^2}{9} + y_0^2 = 1$, οπότε αντικαθιστώντας σε αυτή την $(2.3.2-3)$ τελικά προκύπτει ότι τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων ε_1 και ε_2 με την έλλειψη είναι:

$$P_1: \quad (x_1, y_1) = (0, -1) \quad \text{και} \quad P_2: \quad (x_2, y_2) = \left(\frac{36}{13}, \frac{59}{13}\right).$$

Τότε η απόσταση είναι: $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{36\sqrt{5}}{13} \approx 6.192\,188$, ενώ η γωνία ω υπολογίζεται σύμφωνα με την $(2.1.1-1)$ από τη σχέση $\tan\omega = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 + \lambda_1\lambda_2}$ όπου

$$\lambda_1 = \frac{y - y_1}{x - x_1} = 0 \quad \text{και} \quad \lambda_1 = \frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{36}{5}.$$

[4] Όμοια βλέπε Σχ. 2.3.2 - 1 όπου $|MF_2| = |MD|$.

Άρα $\tan\omega = -\frac{36}{5}$, οπότε $\omega \approx --1.432\,79\,\mathrm{rad}$.

3. (i) Προφανής, επειδή κάθε εξίσωση της μορφής $x = x_0$ παριστάνει εξίσωση ευθείας κάθετης στον x-άξονα στο σημείο x_0.

(ii) Θα δειχθεί ότι

$$\frac{|MF_2|}{|MD|} = \varepsilon. \qquad (2.3.2 - 4)$$

Σύμφωνα με το Σχ. 2.3.2 - 1 και τις $(2.3.2-1)$ - $(2.3.2-2)$ έχουμε ότι η απόσταση $|MF_2|$ είναι

$$|MF_2|^2 = (x-c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \qquad (2.3.2 - 5)$$

ενώ από τον τύπο προκύπτει ότι η απόσταση $|MD|$ από τη διευθετούσα με εξίσωση $x - \frac{a^2}{c} = 0$ είναι

$$|MD| = \left|x - \frac{a^2}{c}\right|. \qquad (2.3.2 - 6)$$

Αντικαθιστώντας τις $(2.3.2-5)$ και $(2.3.2-6)$ στην $(2.3.2-4)$ μετά από τετραγωνισμό και των δύο μελών προκύπτει τελικά η αποδεικτέα.

2.3.3 Υπερβολή

Ορισμός 2.3.3 - 1. *Ορίζεται ως* **υπερβολή** *(hyperbola) ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η διαφορά των αποστάσεων τυχόντος σημείου της, έστω M, από δύο σταθερά σημεία F_1 και F_2, που λέγονται εστίες, είναι σταθερή (Σχ. 2.3.3 - 1).*

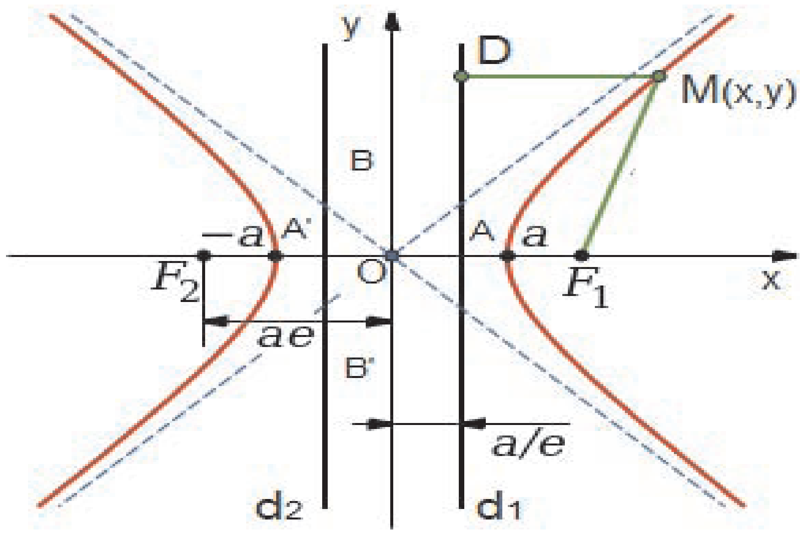
Τα σημεία F_1 και F_2 λέγονται **εστίες** (focus).

Έστω ότι $F_2M - F_1M = 2a$ σταθερά. Όμοια, όπως στην έλλειψη, θεωρώντας ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy στο οποίο το O διχοτομεί την απόσταση F_1F_2, ως άξονα των x την ευθεία που διέρχεται από τις εστίες, σύμφωνα και με τη βασική ιδιότητα των σημείων της υπερβολής έχουμε για τις συντεταγμένες του τυχόντος σημείου $M(x,y)$ τη σχέση

$$\sqrt{(c+x)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Τότε με τετραγωνισμό και των δύο μελών προκύπτει τελικά, ότι η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της υπερβολής είναι

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{όταν} \quad b^2 = c^2 - a^2. \qquad (2.3.3 - 1)$$



Σχήμα 2.3.3 - 1: η υπερβολή με εστίες στα σημεία $F_1(c, 0)$ και $F_2(-c, 0)$.

Ιδιότητες

i) Η $(2.3.3 - 1)$ δεν μεταβάλλεται, όταν θέσουμε στη θέση του το $(-x, y)$ ή το $(x, -y)$ ή το $(-x, -y)$, δηλαδή η υπερβολή είναι συμμετρική (congruent) ως προς τους άξονες Ox, Oy και την αρχή των αξόνων.

ii) Από την $(2.3.3 - 1)$ προκύπτει ότι

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \geq 0, \quad \text{δηλαδή} \quad |x| \geq a.$$

Άρα η υπερβολή βρίσκεται στα δεξιά της ευθείας με εξίσωση $x = a$ και αριστερά της ευθείας με εξίσωση $x = -a$. Είναι προφανές ότι μεταξύ των ευθειών $x = a$ και $x = -a$ δεν υπάρχουν σημεία της υπερβολής.

Βασικά στοιχεία

- Ο άξονας Ox λέγεται **πρωτεύων άξονας** (major axis). Ο πρωτεύων άξονας τέμνει την υπερβολή στα σημεία A και A'. Τότε η (AA') ορίζει το μήκος του πρωτεύοντα άξονα. Ο άξονας Oy λέγεται δευτερεύων άξονας (minor axis), ενώ το O ορίζει το **κέντρο** της υπερβολής. Αν επί του άξονα Oy θεωρήσουμε τα σημεία $B(0, b)$ και $B'(0, -b)$, τότε η (BB') ορίζει το μήκος του **δευτερεύοντα άξονα**.

- **Εκκεντρότητα** της υπερβολής ορίζεται ο λόγος $e = c/a$, όπου προφανώς $e > 1$.

Εξίσωση εφαπτομένης

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής στο σημείο της $M\,(x_0, y_0)$ δίνεται από τη σχέση

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1\,. \tag{2.3.3 - 2}$$

Συζυγείς υπερβολές

Έστω η υπερβολή με πρωτεύοντα άξονα τον Ox και εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.3.3 - 3}$$

Αν στην $(2.3.3 - 3)$ θεωρηθεί ως πρωτεύων άξονας ο Oy έχουμε (Σχ. 2.3.3 - 2)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1. \tag{2.3.3 - 4}$$

Οι υπερβολές $(2.3.3-3)$ και $(2.3.3-4)$, που ο πρωτεύων άξονας της μιας είναι δευτερεύων άξονας της άλλης, λέγονται **συζυγείς** (conjugate hyperbolae).

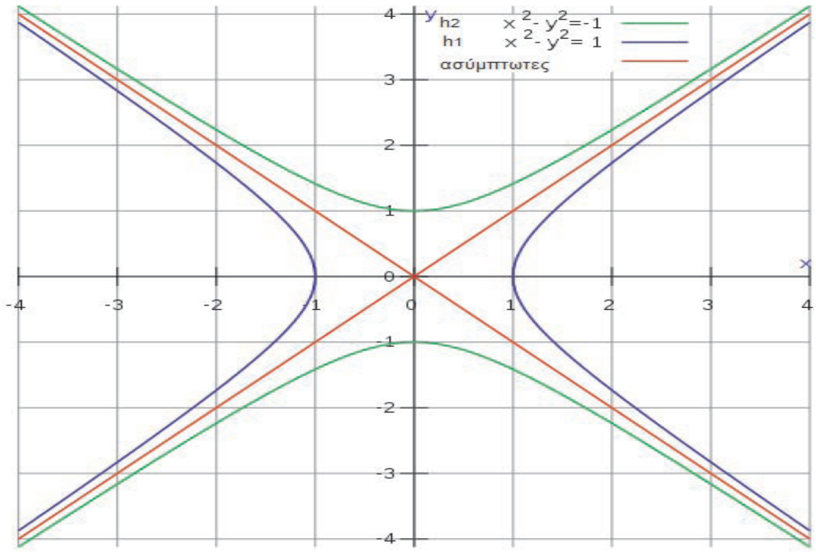
Ασύμπτωτες υπερβολής

Από την $(2.3.3 - 1)$ προκύπτει

$$y = \pm\frac{b}{a}\,x\,\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Άρα, όταν το x τείνει στο άπειρο κατά απόλυτη τιμή, το y τείνει επίσης στο άπειρο, ενώ ο λόγος y/x είναι πεπερασμένος αριθμός και συγκεκριμένα ισούται με

$$y = \frac{b}{a}\,x \quad \text{και} \quad y = -\frac{b}{a}\,x\,. \tag{2.3.3 - 5}$$



Σχήμα 2.3.3 - 2: η υπερβολή h_1 με εξίσωση $x^2 - y^2 = 1$ και η συζυγής της h_2 με εξίσωση $x^2 - y^2 = -1$.

Η $(2.3.3 - 5)$ παριστάνει τότε δύο ευθείες προς τις οποίες, σύμφωνα με τα παραπάνω, τείνει η υπερβολή όταν το $x \to \pm\infty$. Οι ευθείες αυτές λέγονται **ασύμπτωτες** (asymptotes)της υπερβολής.[5]

Ισοσκελής υπερβολή

Ορισμός 2.3.3 - 2. *Αν σε μία υπερβολή το μήκος του πρωτεύοντα και του δευτερεύοντα άξονα είναι ίσα, τότε η υπερβολή λέγεται ισοσκελής και η εξίσωσή της γράφεται*

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{2.3.3 - 6}$$

Στην περίπτωση αυτή οι ασύμπτωτες είναι οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι άξονες.

[5] Βλέπε διακεκομμένες ευθείες στο Σχ. 2.3.3 - 1 και κόκκινες ευθείες στο Σχ. 2.3.3 - 2.

Διανυσματική εξίσωση

Αποδεικνύεται ότι είναι της μορφής $(2.3.1-6)$, δηλαδή

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} = \langle x, y\rangle$$

όπου

$$\begin{aligned} x = x(t) &= a\cosh t, \\ y = y(t) &= b\sinh t \end{aligned} \qquad (2.3.3 - 7)$$

όπου η παράμετρος $t \in \mathbb{R}$.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η εξίσωση της υπερβολής στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) η εστιακή απόσταση είναι ίση με 8 και η εκκεντρότητα $\varepsilon = 5/4$,

ii) οι εξισώσεις των ασύμπτωτων είναι $y = \pm 4x/3$ και η εστιακή απόσταση είναι ίση με 20.

2. Να υπολογιστεί η γωνία των ασύμπτωτων της υπερβολής που έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = 1.5$.

3. Έστω η υπερβολή $9x^2 - 4y^2 = 36$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου, που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτές της και την ευθεία $9x + 2y - 24 = 0$.

4. Να δειχθεί ότι κάθε εφαπτομένη υπερβολής σχηματίζει με τις ασύμπτωτές της τρίγωνο σταθερού εμβαδού.

5. Έστω η υπερβολή

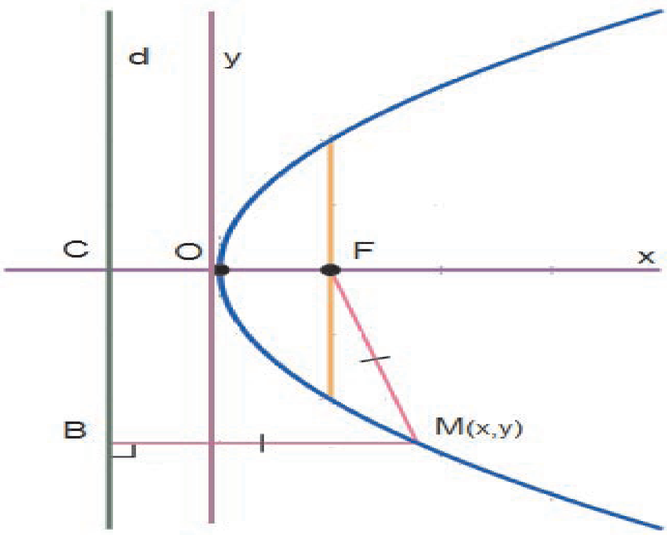
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Τότε οι ευθείες

$$x = \pm\frac{a^2}{c}$$

λέγονται **διευθετούσες** της υπερβολής. Δείξτε ότι:

i) οι διευθετούσες είναι κάθετες στον μεγάλο άξονα της υπερβολής,



Σχήμα 2.3.4 - 1: η παραβολή με εστία στο σημείο F και διευθετούσα την ευθεία $d: \ BC$.

ii) οι διευθετούσες δεν τέμνουν την υπερβολή,

iii) ο λόγος των αποστάσεων τυχόντος σημείου της υπερβολής από την εστία και τη διευθετούσα είναι σταθερός και ισούται με την εκκεντρότητα της υπερβολής.

2.3.4 Παραβολή

Ορισμός 2.3.4 - 1. *Ορίζεται ως* **παραβολή** *(parabola) ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόσταση από σταθερό σημείο, έστω F και σταθερή ευθεία d είναι σταθερή (Σχ. 2.3.4 - 1).*

Το σημείο F λέγεται **εστία** (focus), ενώ η ευθεία d **διευθετούσα** (directrix).

Για να προσδιοριστεί η αναλυτική εξίσωση των σημείων της παραβολής, θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy στο οποίο το O είναι επί της κάθετης ευθείας, που φέρεται από την εστία, έστω F, στη διευθετούσα d και στο μέσο της, ενώ ως άξονας των x ορίζεται η κάθετη αυτή ευθεία.

Τότε, σύμφωνα με τη βασική ιδιότητα των σημείων της παραβολής, για το τυχόν σημείο $M(x,y)$ είναι $|MB| = |MF|$, οπότε, αν $p = |CF|$, έχουμε

$$x + \frac{1}{2}p = |MF|. \tag{1}$$

Αλλά

$$|MF|^2 = y^2 + \left(x - \frac{1}{2}p\right)^2. \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας τη (2) στην (1) προκύπτει τελικά ότι η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της παραβολής είναι

$$y^2 = 2px. \tag{2.3.4 - 1}$$

Ιδιότητες

i) Η $(2.3.4-1)$ δεν μεταβάλλεται, όταν θέσουμε στη θέση του (x,y) το $(x,-y)$, δηλαδή η παραβολή είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Ox.

ii) Από την $(2.3.4-1)$ προκύπτει ότι $y^2 = 2px \geq 0$, δηλαδή $x \geq 0$. Άρα η παραβολή βρίσκεται στο δεξιό μέρος του άξονα Oy.

Βασικά στοιχεία

Ο άξονας Ox τέμνει την παραβολή στο σημείο O, που λέγεται **κορυφή**, ενώ το p λέγεται **ημιπαράμετρος**.

Εξίσωση εφαπτομένης

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της $M\left(x_0, y_0\right)$ δίνεται από τη σχέση

$$-yy_0 = p\left(x + x_0\right). \tag{2.3.4 - 2}$$

Διανυσματική εξίσωση

Όμοια αποδεικνύεται ότι είναι της μορφής $(2.3.1-6)$, δηλαδή

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} = \langle x, y\rangle$$

όπου

$$\begin{aligned} x(t) &= t, \\ y^2(t) &= 2\,p\,t \end{aligned} \qquad (2.3.4 - 3)$$

όπου η παράμετρος $t \in \mathbb{R}$.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η εξίσωση της παραβολής στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) έχει εστία στο σημείο και διευθετούσα $y+3=0$,

ii) διέρχεται από το σημείο $(5,7)$, είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y και έχει κορυφή το σημείο $(0,0)$.

2. Να υπολογιστούν οι εφαπτόμενες της παραβολής $y^2 = 2x$, που διέρχονται από το σημείο $(-4,-1)$.

3. Έστω η παραβολή $y^2 = 2px$. Να προσδιοριστεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη, έτσι ώστε η ευθεία $y = \kappa x + \lambda$ να εφάπτεται της παραβολής.

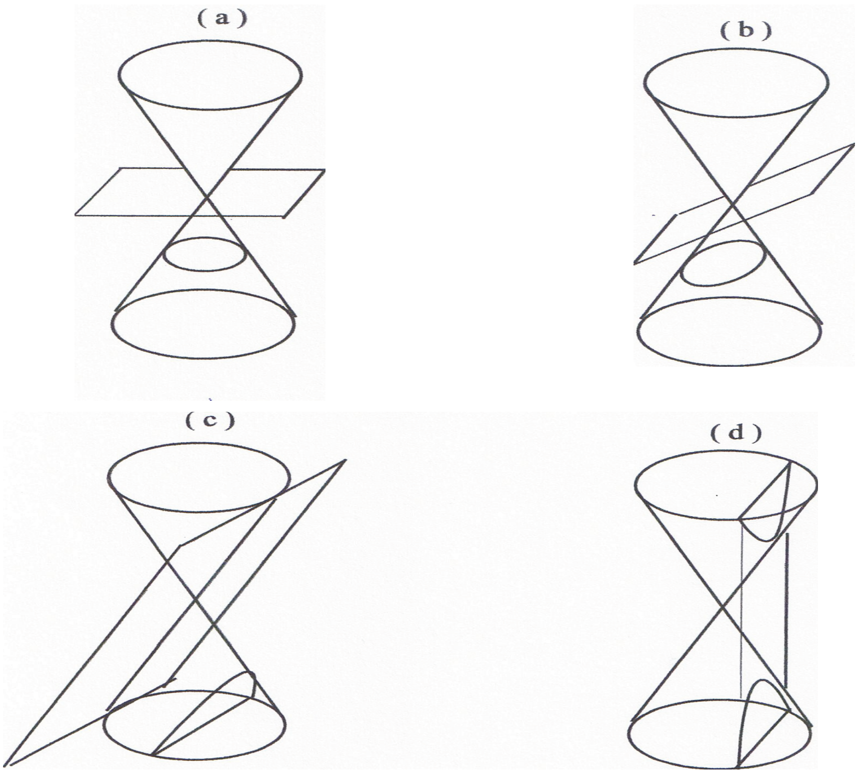
2.3.5 Γενικό πρόβλημα κωνικών τομών

Η έλλειψη, η υπερβολή και η παραβολή λέγονται και **κωνικές τομές** (conic sections), επειδή είναι δυνατόν να προκύψουν από την τομή ενός κυκλικού κώνου εκ περιστροφής, έστω K, με ένα επίπεδο (Σχ. 2.3.5 - 1). Ειδικότερα έχουμε:

i) αν το επίπεδο, έστω Π, δεν είναι παράλληλο προς καμιά από τις γενέτειρες του κώνου, τότε η τομή του επιπέδου με τον κώνο θα δώσει μία έλλειψη (Σχ. 2.3.5 - 1 b), ενώ στην ειδική περίπτωση που είναι κάθετο στον άξονα του κώνου, η τομή είναι **κύκλος** (Σχ. 2.3.5 - 1 a),

ii) αν το επίπεδο είναι παράλληλο προς δύο γενέτειρες, η τομή είναι **υπερβολή** (Σχ. 2.3.5 - 1 c) και,

iii) αν είναι παράλληλο προς ένα εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας του κώνου, η τομή είναι **παραβολή** (Σχ. 2.3.5 - 1 d).



Σχήμα 2.3.5 - 1: γενικό πρόβλημα κωνικών τομών.

Ειδικά όταν το επίπεδο διέρχεται από το σημείο O, η τομή συμπίπτει με μία ή δύο γενέτειρες του κώνου ή περιορίζεται στο σημείο O.

Πρόταση 2.3.5 - 1. *Η γενική εξίσωση των κωνικών τομών, όταν το σύστημα των συντεταγμένων δεν έχει μετατοπιστεί παράλληλα ή στραφεί, είναι της μορφής*

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, \quad \textit{όταν} \quad |A| + |B| \neq 0 \tag{2.3.5 - 1}$$

και αντίστροφα.

Απόδειξη. Επειδή το ευθύ προκύπτει άμεσα μετά τις πράξεις στις $(2.3.2-2)$, $(2.3.3-1)$ και $(2.3.4-1)$, αρκεί να δειχθεί το αντίστροφο.

Διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

1. $AB \neq 0$. Τότε η $(2.3.5-1)$ γράφεται

$$A\left(x^2 + \frac{C}{A}x\right) + B\left(y^2 + \frac{D}{B}y\right) + E = 0$$

και τελικά μετά τις πράξεις

$$\begin{aligned} &\frac{1}{B}\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + \frac{1}{A}\left(y + \frac{D}{2B}\right)^2 \\ &= \frac{BC^2 + AD^2 - 4ABE}{4A^2B^2} = k, \end{aligned} \tag{2.3.5 - 2}$$

όπου k σταθερά. Τότε:

1-I. Αν $k \neq 0$, η $(2.3.5-2)$ γράφεται

$$\frac{1}{kB}\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + \frac{1}{kA}\left(y + \frac{D}{2B}\right)^2 = 1. \tag{2.3.5 - 3}$$

1-Ia. Αν $AB > 0$, από την $(2.3.5-3)$ έχουμε

1-Ia.i. αν k ομόσημο προς τα A και B, η $(2.3.5-3)$ και κατά συνέπεια η $(2.3.5-1)$ παριστάνει **έλλειψη**, ενώ στην ειδική περίπτωση όπου $A = B > 0$ **κύκλο**.

1-Ia.ii. Αν k ετερόσημο προς τα A και B, η $(2.3.5-3)$ είναι **αδύνατη**.

1-Ib. Αν $AB < 0$, η $(2.3.5 - 3)$ και κατά συνέπεια η $(2.3.5 - 1)$ παριστάνει **υπερβολή**.

1-II. Αν $k = 0$, η $(2.3.5 - 3)$ γράφεται

$$A\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2 + B\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2 = 0. \qquad (2.3.5 - 4)$$

1-IIa. Αν $AB > 0$, η $(2.3.5 - 4)$ επαληθεύεται για

$$x = -\frac{C}{2A} \quad \text{και} \quad y = -\frac{D}{2B}\,.$$

1-IIb. Αν $AB < 0$, το πρώτο μέλος της $(2.3.5 - 4)$ αναλύεται σε γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων όρων ως προς x και y, οπότε η $(2.3.5 - 4)$ παριστάνει **δύο ευθείες**.

2. Αν $AB = 0$. Τότε:

2-I. Αν $A = 0$ και $B \neq 0$, η $(2.3.5 - 1)$ γράφεται

$$B\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2 = -Cx - E + \frac{D^2}{4B}. \qquad (2.3.5 - 5)$$

Τότε

2-Ia. Αν $C \neq 0$, η $(2.3.5 - 5)$ τελικά γράφεται

$$\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2 = -\frac{C}{B}\left(x+\frac{D^2-4BE}{4BC}\right), \qquad (2.3.5 - 6)$$

δηλαδή παριστάνει **παραβολή**.

2-Ib. Αν $C = 0$, η $(2.3.5 - 6)$ γράφεται

$$\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2 = \frac{D^2-4BE}{4B}\,, \qquad (2.3.5 - 7)$$

οπότε, αν

2-Ib.i. $D^2 - 4BE > 0$, η $(2.3.5-7)$ και κατά συνέπεια η $(2.3.5-1)$ παριστάνει δύο **ευθείες παράλληλες** προς τον x-άξονα,

2-Ib.ii. $D^2 - 4BE = 0$, η $(2.3.5-7)$ παριστάνει μια **ευθεία παράλληλη** στον x-άξονα, και

2-Ib.iii. $D^2 - 4BE < 0$, η $(2.3.5-7)$ είναι **αδύνατη**.

2-II. Αν $A \neq 0$ και $B = 0$, τότε η $(2.3.5-1)$ γράφεται

$$A\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 = -Dy - E + \frac{C^2}{4A}. \qquad (2.3.5 - 8)$$

Όμοια τότε η $(2.3.5-8)$, αν

- $D \neq 0$ παριστάνει **παραβολή**, ενώ όταν
- $D = 0$, παριστάνει δύο ή μία ευθείες παράλληλες προς τον y-άξονα ή τελικά είναι **αδύνατη**.

■

Αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 2.3.5 - 2. *Η γενικότερη μορφή των κωνικών τομών, όταν το σύστημα συντεταγμένων έχει μετατοπιστεί ή έχει στραφεί ή και τα δύο, είναι*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + K = 0 \qquad (2.3.5 - 9)$$

και αντίστροφα κάθε εξίσωση της μορφής $(2.3.5-9)$, δεν δύναται να παριστάνει πέραν των κωνικών τομών, τίποτε άλλο εκτός από φανταστικές ευθείες και ελλείψεις.

Η $(2.3.5-9)$ χαρακτηρίζει τότε τη γενική εξίσωση των καμπυλών 2ου βαθμού.

Το πρόβλημα που προκύπτει τώρα είναι ο τρόπος προσδιορισμού του είδους της κωνικής τομής από την $(2.3.5-9)$. Αρχικά εξετάζεται το πρόσημο της παράστασης

$$\Delta = B^2 - 4AC.$$

Τότε, αν:

i) $\Delta > 0$ η καμπύλη είναι **υπερβολή**, ενώ, αν $\Delta < 0$ **έλλειψη**.

Στη συνέχεια, θέτουμε στην $(2.3.5-9)$ τους τύπους $(1.2.2-2)$ αλλαγής συντεταγμένων με παράλληλη μετατόπιση στο σημείο (a, b), δηλαδή τους

$$x = x' + a \quad \text{και} \quad y = y' + b$$

και προσδιορίζουμε τα a, b.

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας τις τιμές των a και b στην (2.3.5−9) προκύπτει μία εξίσωση της μορφής

$$A\left(x'\right)^2 + Bx'y' + C\left(y'\right)^2 + D = 0, \tag{2.3.5 - 10}$$

οπότε από τον τύπο

$$\tan\theta = \frac{B}{A-C} \tag{2.3.5 - 11}$$

προσδιορίζεται η γωνία στροφής των αξόνων.

ii) $\Delta = 0$ η καμπύλη είναι **παραβολή**. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται μόνον ο τύπος $(2.3.5 - 11)$.

Παράδειγμα 2.3.5 - 1

Να προσδιοριστεί το είδος της καμπύλης

$$xy - 2y - 4x = 0. \tag{1}$$

Λύση. Είναι

$$B^2 - 4AC = 1 > 0,$$

οπότε πρόκειται για υπερβολή.

Θέτοντας στην (1) τους τύπους

$$x = x' + a \quad \text{και} \quad y = y' + b$$

έχουμε

$$x'y' + (b-4)x' + (a-2)y' + ab - 2b - 4a = 0$$

από την οποία προκύπτει ότι $b - 4 = 0$ και $a - 2 = 0$.

Άρα

$$b = 4 \quad \text{και} \quad a = 2,$$

οπότε οι αρχικοί άξονες έχουν μετατοπιστεί στο σημείο $(2, 4)$.

Τότε η (1) γράφεται

$$x'y' = 8, \tag{2}$$

οπότε η υπερβολή έχει ασύμπτωτες τους άξονες $O'x'$ και $O'y'$.

Από την $(2.3.5-11)$ προκύπτει τότε ότι

$$\tan 2\theta \rightarrow +\infty, \quad \text{δηλαδή} \quad \theta = \frac{\pi}{4}\,.$$

Θέτοντας την τιμή αυτή στους τύπους $(1.2.2-4)$ της στροφής των αξόνων κατά ορισμένη γωνία, δηλαδή στους

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y &= -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{aligned}$$

προκύπτει ότι

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'' - y''\right) \quad \text{και} \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'' + y''\right), \tag{3}$$

όπου $O'x''y''$ οι άξονες συντεταγμένων μετά τη μετατόπιση και τη στροφή.

Τότε η (2) σύμφωνα με την (3) γράφεται

$$\left(x''\right)^2 - \left(y''\right)^2 = 16$$

δηλαδή πρόκειται για ισοσκελή υπερβολή.

Παράδειγμα 2.3.5 - 2

Όμοια το είδος της καμπύλης

$$x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 10y + 5 = 0. \tag{4}$$

Λύση. Είναι

$$B^2 - 4AC = 0,$$

οπότε πρόκειται για παραβολή.

Τότε από την $(2.3.5-11)$ προκύπτει ότι

$$\tan 2\theta \rightarrow +\infty, \quad \text{οπότε} \quad \theta = \frac{\pi}{4}\,.$$

Όμοια θέτοντας την τιμή αυτή στους τύπους $(1.2.2-4)$ της στροφής των αξόνων κατά ορισμένη γωνία, δηλαδή στους

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y &= -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{aligned}$$

προκύπτει ότι

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'-y'\right) \quad \text{και} \quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'+y'\right),$$

όπου $Ox'y'$ οι άξονες συντεταγμένων μετά τη στροφή.

Άρα η (4) γράφεται

$$\left(x'-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{7}{\sqrt{2}}\left(y'-\frac{11}{28\sqrt{2}}\right),$$

δηλαδή πρόκειται για παραβολή με κορυφή το σημείο $\left(3/2\sqrt{2},\, 11/28\sqrt{2}\right)$ και παράλληλη στον άξονα Oy'.

Ασκήσεις

1. Να προσδιοριστεί το είδος των παρακάτω κωνικών τομών:

i) $y^2+3x-4y+9=0$,

ii) $y^2+4xy+4x^2+2y+4x-36=0$,

iii) $8y^2+4xy+5x^2+16y+4x-28=0$,

iv) $3xy+5x+10y=0$.

2. Δίνεται η καμπύλη $4x^2-4xy+y^2+6x+1=0$. Ζητείται να προσδιοριστεί η θέση της ευθείας $y=\lambda x$ ως προς την καμπύλη για τις διάφορες τιμές του λ.

Απαντήσεις

1. i) $\Delta=0$ παραβολή, ii) $\Delta=16>0$ υπερβολή, iii) $\Delta=-144$ έλλειψη,
iv) $\Delta=9>0$ υπερβολή.

2.4 Βιβλιογραφία

[1] Καδιανάκης, Ν. & Καρανάσιος, Σ. (2008). *Γραμμική Άλγεβρα*. Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές. ISBN: 960–917–250–4.

[2] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά.* Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Ξένος, Θ. (2004), *Αναλυτική Γεωμετρία.* Εκδόσεις Ζήτη. ISBN 960–431–915–9.

[4] Φούντας, Γρ. (2009). *Αναλυτική & Διανυσματική Γεωμετρία.* Εκδόσεις Γρηγ. Φούντα. ISBN 960–330–517–0.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 3

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

3.1 Ορισμός και Άλγεβρα συναρτήσεων

3.1.1 Ορισμοί

Στο μάθημα αυτό θα δοθούν οι κυριότεροι ορισμοί και θεωρήματα για τις πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής, που θεωρούνται απαραίτητοι για τα επόμενα μαθήματα. Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4].

Ορισμός 3.1.1 - 1 (συνάρτησης). *Έστω D και T δύο τυχόντα μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Τότε λέγεται συνάρτηση, μία* **μονοσήμαντη** *απεικόνιση, έστω f, του συνόλου D στο T, δηλαδή*

$$f: \qquad D \ni x \longrightarrow f(x) = y \in T. \tag{3.1.1 - 1}$$

Παρατηρήσεις 3.1.1 - 1

- Υπενθυμίζεται ότι μονοσήμαντη είναι μια απεικόνιση, όταν στο x αντιστοιχεί **ένα ακριβώς** y.

- Το σύνολο D λέγεται **πεδίο ορισμού**, ενώ το T **πεδίο τιμών** της συνάρτησης f. Στο εξής μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το D θα συμβολίζεται με $f|D$ ή και $f(x)$, $x \in D$.

- Το x, που περιγράφει τις τιμές του D, λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το y, που ορίζει τις αντίστοιχες τιμές του x στο T, εξαρτημένη μεταβλητή.

- Ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η απεικόνιση f, περιγράφεται από τη σχέση $f(x)$, που λέγεται **τύπος** της συνάρτησης.

Παράδειγμα 3.1.1 - 1

Σύμφωνα με τον Ορισμό 7.1.1 - 1, αν $D = \{0, 2, 5\}$, τότε ο τύπος

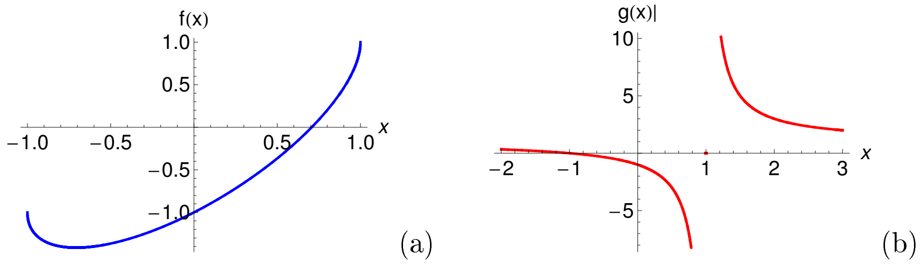
- $f(x) = x^2$ ορίζει συνάρτηση, επειδή κάθε στοιχείο του D μέσω της f απεικονίζεται σε ένα στοιχείο (μονοσήμαντη απεικόνιση), δηλαδή: $f(0) \to 0$, $f(2) \to 4$ και $f(5) \to 25$, οπότε $T = \{0, 4, 25\}$, ενώ ο

- $g(x) = \pm\sqrt{x}$ δεν ορίζει, επειδή τα στοιχεία του D απεικονίζονται σε δύο στοιχεία, όπως $f(2) \to \pm\sqrt{2}$, κ.λπ.

Η συνάρτηση είναι δυνατόν να παρασταθεί γραφικά στο καρτεσιανό επίπεδο $D \times T \subseteq \mathbb{R}^2$ από το διάγραμμα ή τη **γραφική παράστασή** της G_f (Σχ. 3.1.1 - 1), όπου

$$G_f = \{\, (x, f(x)) : \quad \text{για κάθε } x \in D\} \subseteq D \times T. \qquad (3.1.1 - 2)$$

Αν η συνάρτηση εκφράζεται με τον τύπο $y = f(x)$, τότε θα λέγεται ότι η σχέση που συνδέει τη μεταβλητή y με τη μεταβλητή x είναι **λυμένη** (explicit) ως προς τη μεταβλητή y. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις που η y δεν είναι



Σχήμα 3.1.1 - 1: (a) Συνάρτηση $f(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$ με $D = [-1, 1]$ και (b) $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ με $D = \mathbb{R} - \{1\}$.

δυνατόν να εκφραστεί στη μορφή $y = f(x)$. Στις περιπτώσεις αυτές είναι γνωστή μόνον η σχέση που συνδέει τα x και y, δηλαδή επαληθεύεται μία σχέση της μορφής $f(x, y) = 0$. Τότε λέγεται ότι η συνάρτηση y δίνεται με **πεπλεγμένη** (implicit) μορφή.

Παράδειγμα 3.1.1 - 2

Αν $y = y(x)$, τότε η συνάρτηση

$$y = x^2 + 3x + 2$$

εκφράζεται με λυμένη μορφή, ενώ η

$$e^y - x - y = 0$$

με πεπλεγμένη, επειδή η σχέση αυτή δεν λύνεται ως προς y.

Προσδιορισμός του πεδίου ορισμού

Στην περίπτωση που ζητείται να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, όταν είναι γνωστός ο τύπος της, πρέπει να ληφθούν υπόψη τα εξής:

- οι περιορισμοί που υπάρχουν από την ίδια τη συνάρτηση όπως ρίζα, λογάριθμος κ.λπ., έτσι ώστε ο τύπος της να ορίζεται, και

- οι πράξεις που είναι σημειωμένες στον τύπο της συνάρτησης να έχουν έννοια - επιτρεπτές πράξεις - στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Υπενθυμίζεται ότι οι **μη επιτρεπτές πράξεις** στο σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι οι:

$$\frac{a}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\,\infty\,, \quad \infty\,0\,, \quad \infty-\infty\,, \quad 0^0\,, \quad 1^\infty\,, \quad \infty^0. \qquad (3.1.1 - 3)$$

Παράδειγμα 3.1.1 - 3

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 5x + 1.$$

Τότε προφανώς είναι $D = \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 3.1.1 - 4

Όμοια η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{x+1}{(x-3)\left(x^2+4\right)}.$$

Τότε θα πρέπει $(x-3)\left(x^2+4\right) \neq 0$. Επειδή $x^2+4 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αρκεί $x \neq 3$, δηλαδή $D = \mathbb{R} - \{3\}$.

Παράδειγμα 3.1.1 - 5

Όμοια η

$$h(x) = \sqrt{\frac{x}{x+2}}.$$

Πρέπει

$$\frac{x}{x+2} \geq 0 \quad \text{και} \quad x+2 \neq 0$$

ή ισοδύναμα

$$x(x+2) \geq 0 \quad \text{και} \quad x+2 \neq 0.$$

Τότε σύμφωνα με τον Πίνακα 3.1.1 - 1 προκύπτει ότι $x < -2$ ή $x \geq 0$. Άρα $D = (-\infty, -2) \cup [0, +\infty)$.

Πίνακας 3.1.1 - 1: Παράδειγμα 3.1.1 - 5.

Συνάρτηση	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		-		-		+	
$x+2$		-		+		+	
$x(x+2)$		+		-		+	

Αντίστροφη συνάρτηση

Ορισμός 3.1.1 - 2 (αντίστροφης συνάρτησης). *Έστω μία συνάρτηση*

$$f: \qquad D \ni x \longrightarrow f(x) = y \in T$$

και $T^* \subseteq T$. *Αν η απεικόνιση* f^* *με*

$$f^*: \qquad T \ni y \longrightarrow f^*(y) = x \in D \qquad (3.1.1 - 4)$$

είναι επίσης μονοσήμαντη, τότε ορίζει την **αντίστροφη συνάρτηση** *της* f, *που συμβολίζεται με* f^{-1}.

Σημειώσεις 3.1.1 - 1

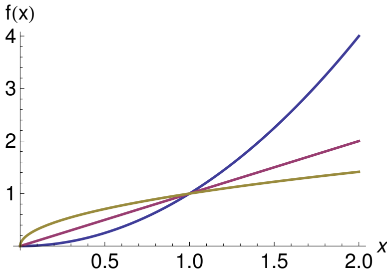
i) Το f^{-1} είναι συμβολισμός και δεν πρέπει να συγχέεται με το $1/f$.

ii) Ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης υπολογίζεται, όταν η εξίσωση $f(x) = y$ λυθεί ως προς x (Παράδειγμα 3.1.1 - 6). Επειδή όμως τις περισσότερες φορές η λύση της εξίσωσης είναι αδύνατη (Παράδειγμα 3.1.1 - 7), ο τύπος της και όταν ακόμα είναι γνωστό ότι υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση, δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστεί.

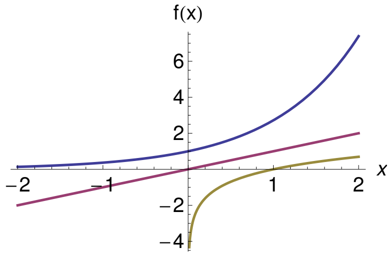
iii) Το διάγραμμα της f και της f^{-1} εφόσον υπάρχει, είναι **συμμετρικό** ως προς την ευθεία $y = x$ (Σχ. 3.1.1 - 2).

iv) Στην περίπτωση που ισχύει ο Ορισμός 3.1.1 - 2, δηλαδή ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση, λέγεται ότι η f ορίζει μια **αμφιμονοσήμαντη** ή **ένα προς ένα** απεικόνιση. Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση αυτή ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.1.1 - 1. *Η συνάρτηση f έχει αντίστροφη συνάρτηση τότε και μόνον, όταν η f είναι αμφιμονοσήμαντη.*



(a)



(b)

Σχήμα 3.1.1 - 2: Ευθεία $y = x$ κόκκινη γραμμή. (a) Συνάρτηση $f(x) = x^2$ μπλε, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ πράσινη καμπύλη, όταν $x > 0$ και (b) e^x μπλε, $\ln x$ πράσινη καμπύλη.

Στα παραδείγματα που δίνονται στη συνέχεια υποτίθεται ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση.

Παράδειγμα 3.1.1 - 6

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \quad \text{με πεδίο ορισμού} \quad D = \mathbb{R} - \{1\}.$$

Να υπολογιστεί ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης.

Λύση. Έστω

$$\frac{2x+1}{x-1} = y, \quad \text{οπότε} \quad x = \frac{y+1}{y-2} \quad \text{με} \quad T^* = \mathbb{R} - \{2\}.$$

Άρα

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}.$$

Παράδειγμα 3.1.1 - 7

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = e^x - x, \quad \text{όταν το πεδίο ορισμού είναι} \quad D = [, +\infty).$$

Τότε, επειδή η εξίσωση $e^x - x = y$ δεν λύνεται ως προς x, είναι αδύνατος ο υπολογισμός του τύπου της αντίστροφης συνάρτησης.

Σύνθετη συνάρτηση

Ορισμός 3.1.1 - 3 (σύνθετης συνάρτησης). *Έστω A, B, Γ τρία τυχόντα σύνολα διάφορα του κενού και $g|A$ μία συνάρτηση με πεδίο τιμών το B και $f|B$ μία συνάρτηση με πεδίο τιμών το Γ. Τότε ορίζεται μία συνάρτηση $h|A$ με πεδίο τιμών το Γ, που συμβολίζεται με $f \circ g$, από τον τύπο*

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A \tag{3.1.1 - 5}$$

και λέγεται σύνθετη συνάρτηση των f, g.

Είναι προφανές ότι η σύνθεση συναρτήσεων πληροί την επιμεριστική ιδιότητα, δηλαδή

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

Παράδειγμα 3.1.1 - 8

Έστω οι συναρτήσεις

$$g(x) = 3x - 1 \quad \text{και} \quad f(x) = \sin x.$$

Τότε ορίζεται η σύνθετη συνάρτηση $f \circ g$ και είναι

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(3x - 1),$$

όπου για τα πεδία ορισμού είναι $D(f) = D(g) = D(f \circ g) = \mathbb{R}$, ενώ για τα πεδία τιμών $T(g) = \mathbb{R}$ και $T(f) = T(f \circ g) = [-1,\, 1]$.

Παράδειγμα 3.1.1 - 9

Όμοια η σύνθεση των συναρτήσεων

$$g(x) = -x^2 \quad \text{και} \quad f(x) = e^x$$

δίνει

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{-x^2},$$

[1]όπου $D(f) = D(g) = D(f \circ g) = \mathbb{R}$, ενώ $T(f) = \mathbb{R}$ και $T(g) = T(f \circ g) = (0, +\infty)$.

---

[1]Βλέπε Παράγραφο 3.3.6.

3.1.2 Ισότητα

Ορισμός 3.1.2 - 1. *Οι συναρτήσεις f, $g|D$ λέγονται* **ίσες** *και συμβολίζεται αυτό με $f = g$ στο D τότε και μόνον, όταν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in D$.*

Προφανώς η ισότητα είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική, οπότε ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού D.

3.1.3 Διάταξη

Ορισμός 3.1.3 - 1. *Έστω οι συναρτήσεις f, $g|D$. Τότε θα είναι $f \leq g$ τότε και μόνον, όταν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in D$.*

Η σχέση αυτή είναι αυτοπαθής, αντισυμμετρική και μεταβατική, οπότε ορίζει μία **σχέση διάταξης** στο σύνολο των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού D, η οποία όμως δεν είναι γραμμική. Αντίστοιχα ορίζεται η δυϊκή της σχέση $f \geq g$.

3.1.4 Πρόσθεση

Ορισμός 3.1.4 - 1. *Έστω οι συναρτήσεις f, $g|D$. Τότε ορίζεται ως άθροισμά τους η συνάρτηση $h = f + g|D$, όπου*

$$h(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{για κάθε } x \in D. \tag{3.1.4 - 1}$$

Το άθροισμα γενικεύεται για ν το πλήθος συναρτήσεις.

Ιδιότητες

i) αντιμεταθετική $f + g = g + f$ για κάθε f, $g|D$,

ii) προσεταιριστική $f + (g + h) = (f + g) + h$ για κάθε f, g, $h|D$,

iii) υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού D, που λέγεται **μηδενική** συνάρτηση και συμβολίζεται με $\tilde{O}$, τέτοια ώστε $\tilde{O}(x) = 0$ για κάθε $x \in D$ και για την οποία ισχύει $f + \tilde{O} = \tilde{O} + f = f$ για κάθε $f|D$,

iv) για κάθε $f|D$ υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση η $-f|D$, που λέγεται **αντίθετη** συνάρτηση της f στο D, τέτοια ώστε $f + (-f) = \tilde{O}$,

v) στο D ισχύει η ισοδυναμία: αν $f + h = g + h$, τότε $f = g$ για κάθε $f,\ g,\ h|D$ (νόμος της διαγραφής στην πρόσθεση),

v) για κάθε $f,\ g,\ X|D$ η εξίσωση $f + X = g|D$ έχει μοναδική λύση την $X = g + (-f)$.

Η μοναδική λύση της εξίσωσης αυτής λέγεται διαφορά της f από την g και συμβολίζεται με $g - f$, ενώ η πράξη με την οποία υπολογίζεται η διαφορά των δύο συναρτήσεων λέγεται **αφαίρεση**.

3.1.5 Πολλαπλασιασμός

Ορισμός 3.1.5 - 1. *Έστω οι συναρτήσεις $f,\ g|\,D$. Τότε ορίζεται ως γινόμενό τους η συνάρτηση $h = f \cdot g = f\,g|\,D$, όταν*

$$h(x) = (fg)(x) = f(x)g(x) \quad \text{για κάθε } x \in D. \tag{3.1.5 - 1}$$

Όμοια ο πολλαπλασιασμός γενικεύεται για ν το πλήθος συναρτήσεις.

Ιδιότητες

i) αντιμεταθετική $fg = gf$ για κάθε $f,\ g|D$,

ii) προσεταιριστική $f(gh) = (fg)h$ για κάθε $f,\ g,\ h|D$,

iii) επιμεριστική ως προς την πρόσθεση $f(g + h) = fg + fh$ για κάθε $f,\ g,\ h|D$,

iv) υπάρχει στο D ακριβώς μία συνάρτηση, που λέγεται **μοναδιαία** συνάρτηση και συμβολίζεται με e, τέτοια ώστε $e(x) = 1$ για κάθε $x \in D$ και για την οποία ισχύει ότι $fe = ef = f$ για κάθε $f|D$,

v) αν $f|D$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in D$, τότε υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f^* = 1/f\,|D$, τέτοια ώστε $ff^* = e$,

vi) στο D ισχύει η ισοδυναμία: αν $fh = gh$ και $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in D$, τότε $f = g$ (νόμος της διαγραφής στον πολλαπλασιασμό),

vii) για κάθε f, g, $X|D$ η εξίσωση $fX = g|D$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in D$ έχει μοναδική λύση την $X = g/f$.

Η μοναδική λύση της εξίσωσης αυτής λέγεται πηλίκο της g προς την f και συμβολίζεται με g/f. Η πράξη, με την οποία υπολογίζεται το πηλίκο δύο συναρτήσεων, λέγεται **διαίρεση**.

3.2 Είδη συναρτήσεων

3.2.1 Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Ορισμός 3.2.1 - 1. *Μία συνάρτηση $f|D$ λέγεται* **άρτια** *(even), όταν για κάθε x, $-x \in D$ ισχύει*

$$f(-x) = f(x). \tag{3.2.1 - 1}$$

Χαρακτηριστικό του διαγράμματος μιας άρτιας συνάρτησης είναι ότι παρουσιάζει συμμετρία ως προς τον άξονα Oy. Παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η $\cos x$, $\left(x^2+1\right)^{1/2}$ (Σχ. 3.2.1 - 1a), κ.λπ.

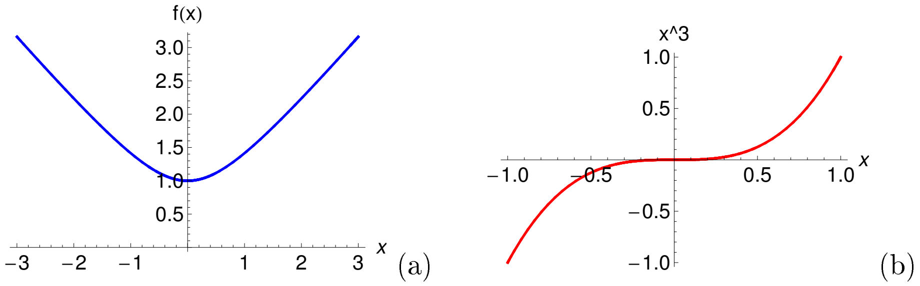
Ορισμός 3.2.1 - 2. *Μία συνάρτηση $f|D$ λέγεται* **περιττή** *(odd), όταν για κάθε x, $-x \in D$ ισχύει*

$$f(-x) = -f(x). \tag{3.2.1 - 2}$$

Χαρακτηριστικό του διαγράμματος μιας περιττής συνάρτησης είναι ότι παρουσιάζει συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων O. Όμοιο παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η x^3 (Σχ. 3.2.1 - 1b), $\sin x$, κ.λπ.

Άμεσα προκύπτει από τους παραπάνω ορισμούς ότι:

Πρόταση 3.2.1 - 1. *Αν η f είναι άρτια και η g περιττή συνάρτηση, τότε το γινόμενό τους είναι περιττή συνάρτηση, ενώ το γινόμενο δύο περιττών ή δύο άρτιων συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.*



Σχήμα 3.2.1 - 1: (a) Συνάρτηση $f(x) = \left(x^2+1\right)^{1/2}$ και (b) x^3.

3.2.2 Μονοτονία συνάρτησης

Ορισμός 3.2.2 - 1 (μονοτονίας). *Έστω η συνάρτηση $f|D$ και $x_1, x_2 \in D$, όπου χωρίς να περιορίζεται η γενικότητα υποτίθεται ότι $x_1 < x_2$. Τότε, αν:*

i) $f(x_1) \leq f(x_2)$ *η f θα λέγεται αύξουσα και θα συμβολίζεται με $\uparrow$.*

ii) $f(x_1) \geq f(x_2)$ *η f θα λέγεται φθίνουσα και θα συμβολίζεται με $\downarrow$.*

Και στις δύο περιπτώσεις η συνάρτηση θα λέγεται **μονότονη**.

iii) $f(x_1) < f(x_2)$ *η f θα λέγεται γνήσια αύξουσα και θα συμβολίζεται με $\Uparrow$.*

iv) $f(x_1) > f(x_2)$ *η f θα λέγεται γνήσια φθίνουσα και θα συμβολίζεται με $\Downarrow$.*

Στις περιπτώσεις (iii) και (iv) η συνάρτηση θα λέγεται **γνήσια μονότονη**.

Ο προσδιορισμός της μονοτονίας μιας συνάρτησης θα γίνει στο Μάθημα *Παράγωγος Συνάρτησης*.

Δίνονται στη συνέχεια χωρίς απόδειξη δύο σημαντικά για τα επόμενα μαθήματα θεωρήματα, που έχουν σχέση με τις μονότονες συναρτήσεις.

Θεώρημα 3.2.2 - 1. *Αν μία συνάρτηση $f|D$ είναι γνήσια μονότονη στο D, τότε υπάρχει πάντοτε η αντίστροφή της συνάρτηση $f^{-1}|T$, όπου $T = f(D)$ και είναι του ίδιου είδους μονοτονίας με αυτή.*

Θεώρημα 3.2.2 - 2. *Η σύνθεση δύο συναρτήσεων του ίδιου είδους μονοτονίας είναι αύξουσα συνάρτηση, ενώ διαφορετικού είδους μονοτονίας φθίνουσα συνάρτηση.*

3.2.3 Περιοδική συνάρτηση

Ορισμός 3.2.3 - 1. *Μία συνάρτηση* $f|\mathbb{R}$ *λέγεται* **περιοδική**, *αν υπάρχει* $\tau \in \mathbb{R}$ *με* $\tau \neq 0$, *έτσι ώστε να ισχύει*

$$f(x+\tau) = f(x) \quad \textit{για κάθε } x \in \Re. \tag{3.2.3 - 1}$$

Τότε ο τ λέγεται **περίοδος**, ενώ ο ελάχιστος θετικός αριθμός τ για τον οποίο ισχύει η $(3.2.3-1)$ λέγεται **θεμελιώδης περίοδος** και συμβολίζεται με T.

Στην περίπτωση που η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το D με $D \subset \mathbb{R}$, τότε ο Ορισμός 3.2.3 - 1 τροποποιείται ως εξής:

Ορισμός 3.2.3 - 2. *Μία συνάρτηση* $f|D$ *λέγεται* **περιοδική**, *αν υπάρχει* $\tau \in D$ *με* $\tau \neq 0$, *έτσι ώστε να ισχύει*

$$f(x+\tau) = f(x) \quad \textit{για κάθε } x,\, x+\tau \in D. \tag{3.2.3 - 2}$$

Σημείωση 3.2.3 - 1

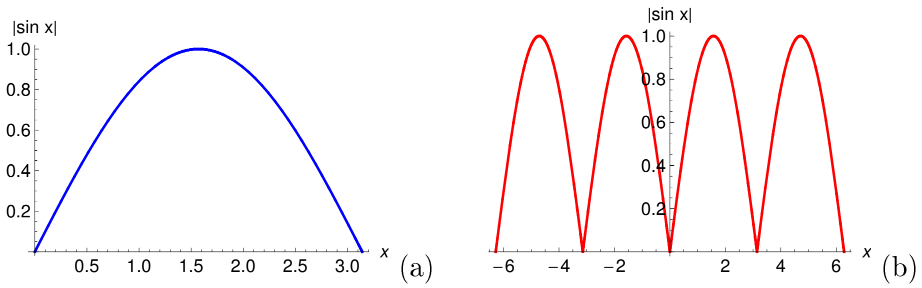
Άμεσα προκύπτει από τον ορισμό ότι οι ιδιότητες και το διάγραμμα μιας περιοδικής συνάρτησης θα είναι γνωστά, όταν μελετηθεί η συνάρτηση σε ένα διάστημα πλάτους T, δηλαδή όσο η θεμελιώδης περίοδος.

Οι περιοδικές συναρτήσεις συναντώνται συχνά στις εφαρμογές, όπου η μεταβλητή τους t συμβολίζει τον χρόνο και μεταβάλλεται σε διαστήματα όπως το $[0, +\infty)$, $[t_1, t_2]$ κ.λπ. Στις περιπτώσεις αυτές λέγεται ότι έχουμε τον **περιορισμό** της περιοδικής συνάρτησης στα διαστήματα αυτά.

Κατηγορίες περιοδικών συναρτήσεων

Οι περιοδικές συναρτήσεις χωρίζονται στις παρακάτω δύο κατηγορίες:

i) Εκείνες που από τον ορισμό τους είναι περιοδικές, δηλαδή οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις όπως: $\sin x$, $\cos 3x$, $\tan 5x$, $|\sin x|$ που είναι γνωστή ως [2]**πλήρης ανόρθωση** (Σχ. 3.2.3 - 2) με θεμελιώδη περίοδο $T = \pi$, κ.λπ.



Σχήμα 3.2.3 - 1: Συνάρτηση (a) $|\sin x|$, όταν $x \in [0, \pi]$ δηλαδή διάστημα πλάτους $T = \pi$ και (b) όταν $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

ii) Συναρτήσεις που ορίζονται με κάποια συνθήκη περιοδικότητας. Οι συναρτήσεις αυτές συναντώνται στις εφαρμογές και παραδείγματά τους δίνονται στη συνέχεια.

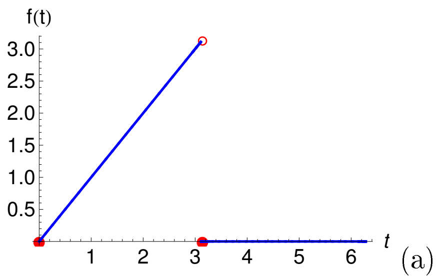
Παράδειγμα 3.2.3 - 1

Η συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{αν} \quad 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{αν} \quad \pi \leq t < 2\pi, \end{cases} \qquad \text{όταν} \quad \overbrace{f(t + \underbrace{2\pi}_{T}) = f(t) \ \text{ για κάθε } t \in \Re}^{\text{συνθήκη}}$$

είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$. Στο Σχ. 3.2.3 - 2a δίνεται το διάγραμμά της στο διάστημα $[0, T]$ πλάτους όσο η θεμελιώδης περίοδος, όπως αυτό παρουσιάζεται στα μαθηματικά, ενώ στο Σχ. 3.2.3 - 2b όπως στις εφαρμογές.

[2]Γενικότερα η συνάρτηση $|\sin \omega x|$ με $\omega > 0$ είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = \pi/\omega$.



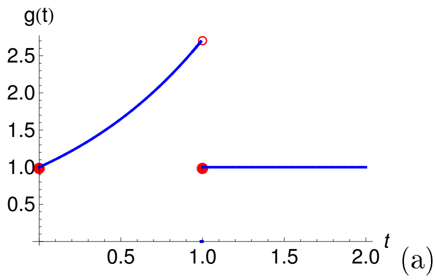
Σχήμα 3.2.3 - 2: Παράδειγμα 3.2.3 - 1.

Παράδειγμα 3.2.3 - 2

Όμοια η

$$g(t)=\begin{cases} e^t & \text{αν} \quad 0\le t<1 \\ 1 & \text{αν} \quad 1\le t<2, \end{cases} \quad \text{όταν} \quad \overbrace{f(t+\underbrace{2}_{T})=f(t) \ \text{ για κάθε } t\in\Re}^{\text{συνθήκη}}$$

είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T=2$ με διάγραμμα στο Σχ. 3.2.3 - 3a στα Μαθηματικά, αντίστοιχα Σχ. 3.2.3 - 3b στις εφαρμογές.



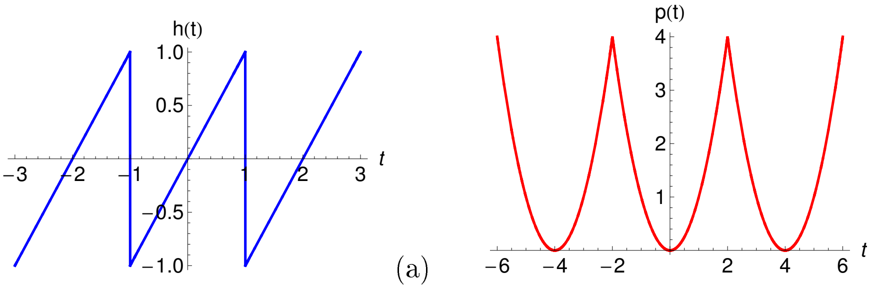
Σχήμα 3.2.3 - 3: Παράδειγμα 3.2.3 - 2.

Παράδειγμα 3.2.3 - 3

Όμοια οι

$$\begin{aligned} h(t) &= t, \quad \text{όταν} \quad -1\le t<1 \ \text{ και } \ h(t+\overbrace{2}^{T})=h(t), \ \text{ και} \\ p(t) &= t^2, \quad \text{όταν} \quad -2\le t<2 \ \text{ και } \ p(t+\overbrace{4}^{T})=p(t) \end{aligned}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$ είναι περιοδικές με θεμελιώδη περίοδο $T = 2$ (Σχ. 3.2.3 - 4a) και $T = 4$ (Σχ. 3.2.3 - 4b).



Σχήμα 3.2.3 - 4: Παράδειγμα 3.2.3 - 3.

Ιδιότητες

Σχετικά με τις περιοδικές συναρτήσεις ισχύουν:

i) το διάγραμμα μιας περιοδικής συνάρτησης σε μία περίοδο λέγεται **κύμα**,

ii) αν η μεταβλητή μιας περιοδικής συνάρτησης συμβολίζει το διάστημα, τότε η περίοδός της λέγεται **μήκος κύματος** και συμβολίζεται με λ,

iii) κάθε περιοδική συνάρτηση $f(t)$ με θεμελιώδη περίοδο T γίνεται περιοδική με θεμελιώδη περίοδο 2π, θέτοντας

$$t = \frac{2\pi}{T} x \,, \tag{3.2.3 - 3}$$

iv) αν T είναι η θεμελιώδης περίοδος, τότε ορίζεται ως **συχνότητα** ν ο αριθμός

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{3.2.3 - 4}$$

και ως **κυκλική συχνότητα** ο

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \,, \tag{3.2.3 - 5}$$

v) ορίζεται ως **αρμονική** κάθε συνάρτηση της μορφής

$$f(t) = a\cos(\omega t + \theta) \quad \text{ή} \quad f(t) = a\sin(\omega t + \theta). \tag{3.2.3 - 6}$$

Πρόταση 3.2.3 - 1. *Το άθροισμα δύο ή περισσοτέρων αρμονικών συναρτήσεων με την ίδια κυκλική συχνότητα, έστω ω, είναι επίσης αρμονική συνάρτηση με την ίδια κυκλική συχνότητα.*

Απόδειξη. Έστω οι αρμονικές συναρτήσεις $f(t)=\alpha_1\cos(\omega t+\theta_1)$ και $g(t)=\alpha_2\cos(\omega t+\theta_2)$. Τότε, αν $h(t)=f(t)+g(t)$, είναι

$$\begin{aligned} h(t) &= \alpha_1\cos(\omega t+\theta_1)+\alpha_2\sin(\omega t+\theta_2)\\ &= (\alpha_1\cos\theta_1+\alpha_2\sin\theta_2)\cos\omega t+(-\alpha_1\sin\theta_1+\alpha_2\cos\theta_2)\sin\omega t\\ &= A\,\cos\omega t+B\,\sin\omega t=B\left(\frac{A}{B}\,\cos\omega t+\sin\omega t\right)\\ &= B\,(\tan\phi\,\cos\omega t+\sin\omega t)=C\sin(\omega t+\phi) \end{aligned}$$

δηλαδή

$$h(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t=C\sin(\omega t+\phi), \tag{3.2.3 - 7}$$

όπου $C=\sqrt{A^2+B^2}$ με $\tan\varphi=A/B$, όταν $B\neq 0$ και $-\pi\leq\varphi<\pi$. Από την $(3.2.3-7)$ προκύπτει ότι το άθροισμα είναι όμοια μία αρμονική συνάρτηση με την ίδια κυκλική συχνότητα ω. ∎

Παράδειγμα 3.2.3 - 4

Το άθροισμα των αρμονικών συναρτήσεων $f(t)=\sin t$ και $g(t)=\sqrt{3}\cos t$, όπου $\omega=1$, δίνει

$$h(t)=\sin t+\sqrt{3}\cos t=2\left(\frac{1}{2}\sin t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\right)=2\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right),$$

δηλαδή μία αρμονική συνάρτηση με την ίδια κυκλική συχνότητα ω.

Αποδεικνύεται επίσης ότι ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

Πρόταση 3.2.3 - 2. *Το άθροισμα δύο ή περισσότερων αρμονικών συναρτήσεων, που η καθεμιά έχει κυκλική συχνότητα ακέραιο πολλαπλάσιο μιας συχνότητας, έστω ω_0, είναι μία περιοδική - γενικά μη αρμονική - συνάρτηση με συχνότητα τη μικρότερη συχνότητα των αρμονικών συναρτήσεων.*

Πρόταση 3.2.3 - 3. *Το άθροισμα δύο ή περισσότερων αρμονικών συναρτήσεων, που οι συχνότητές τους έχουν ανά δύο πηλίκο ρητό αριθμό, είναι περιοδική - γενικά μη αρμονική - συνάρτηση.*

3.3 Κατηγορίες συναρτήσεων

Δίνονται στη συνέχεια οι κυριότερες κατηγορίες συναρτήσεων με τις πλέον βασικές ιδιότητές τους.

3.3.1 Πολυωνυμική

Ορισμός 3.3.1 - 1 *Κάθε συνάρτηση της μορφής*

$$P(x) = P_\nu(x) = a_\nu x^\nu + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad (3.3.1 - 1)$$

όταν $a_i \in \mathbb{R}$; $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, \nu$ *και* $\nu = 1,\, 2,\, \ldots$ *λέγεται* **πολυωνυμική** *βαθμού* ν.

Τότε είναι $D = \mathbb{R}$, ενώ το T προσδιορίζεται, εφόσον αυτό είναι δυνατόν.

Ορισμός 3.3.1 - 2 *Κάθε εξίσωση της μορφής*

$$a_\nu x^\nu + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (3.3.1 - 2)$$

όταν $a_i \in \mathbb{R}$; $i = 0, 1, \ldots, \nu$ *και* $\nu = 1, 2, \ldots$ *λέγεται* **πολυωνυμική εξίσωση** *βαθμού* ν*, ενώ κάθε τιμή, έστω* x^**, που την επαληθεύει* **ρίζα** *της εξίσωσης.*

3.3.2 Ρητή

Ορισμός 3.3.2 - 1 *Λέγεται* **ρητή** *κάθε συνάρτηση που είναι δυνατόν να παρασταθεί ως το πηλίκο δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων, δηλαδή*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_\nu \nu x^\nu + \ldots + a_1 x + a_0}{\beta_m x^m + \ldots + \beta_1 x + \beta_0} \qquad (3.3.2 - 1)$$

όπου $\nu,\, m = 1, 2, \ldots$ *με* $a_i,\, \beta_j \in \mathbb{R}$ *για κάθε* $i = 0, 1, \ldots, \nu$ *και* $j = 0, 1, \ldots, m$.

Τότε $D = \mathbb{R} - \{$πραγματικές ρίζες του παρονομαστή$\}$, ενώ όμοια το T προσδιορίζεται, εφόσον αυτό είναι δυνατόν. Οι ρίζες του παρονομαστή λέγονται και **πόλοι** της $R(x)$.

3.3.3 Πεπλεγμένη

Ορισμός 3.3.3 - 1 *Λέγεται* **πεπλεγμένη** *(implicit) κάθε συνάρτηση που ορίζεται από μία αλγεβρική σχέση μεταξύ των y και x και η οποία δεν είναι λυμένη ως προς y, δηλαδή μία σχέση της μορφής*

$$F(x, y(x)) = 0, \tag{3.3.3 - 1}$$

όπου η F είναι ένα πολυώνυμο τόσο ως προς y όσο και ως προς x, η οποία και όταν ακόμα λυθεί ως προς y, θα περιέχει στην αναλυτική της έκφραση και ριζικά.

Ενδεικτικά δίνονται οι συναρτήσεις $y^2 = ax^2 + bx + c$, $x^3 + y^3 - 3ax = 0$, $y = x + \left(1 + x^2\right)^{1/2}$ κ.λπ. Οι ρητές συναρτήσεις είναι μία ειδική κατηγορία των πεπλεγμένων συναρτήσεων.

3.3.4 Τριγωνομετρικές

Ημίτονο: $\sin x$

Πεδίο ορισμού $D = \mathbb{R}$ και τιμών $T = [-1,\, 1]$. Η συνάρτηση είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$, περιττή, γνήσια αύξουσα για κάθε $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, δηλαδή στο I και IV τεταρτημόριο και γνήσια φθίνουσα για κάθε $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$, δηλαδή στο II και III τεταρτημόριο (Σχ. 3.3.4 - 1a).

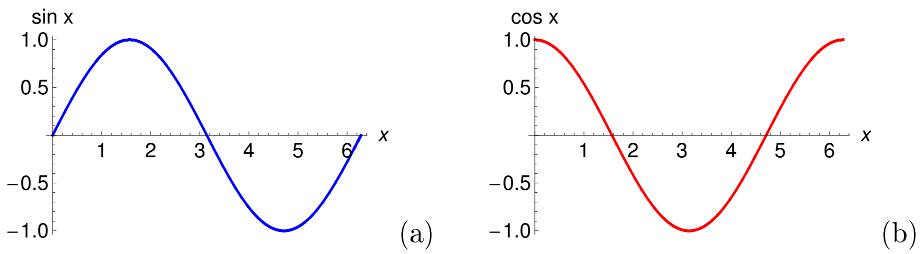
Βασική ταυτότητα: $\sin x = \sin a \iff \begin{cases} x = 2k\pi + a \\ x = 2k\pi + \pi - a \end{cases}$ με $k \in \mathbb{Z}$,

όταν $\mathbb{Z} = 0,\, \pm 1,\, \ldots,$.

Συνημίτονο: $\cos x$

Πεδίο ορισμού $D = \mathbb{R}$ και τιμών $T = [-1,\, 1]$. Η συνάρτηση είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$, άρτια, γνήσια φθίνουσα για κάθε $x \in [0, \pi]$, δηλαδή στο I και II τεταρτημόριο και γνήσια αύξουσα για κάθε $x \in [\pi, 2\pi]$, δηλαδή στο III και IV τεταρτημόριο (Σχ. 3.3.4 - 1b).

Βασική ταυτότητα: $\cos x = \cos a \iff x = 2k\pi \pm a$ με $k \in \mathbb{Z}$.



Σχήμα 3.3.4 - 1: (a) Συνάρτηση $\sin x$ και (b) $\cos x$, όταν $x \in [0, 2\pi]$.

Εφαπτομένη: $\tan x$

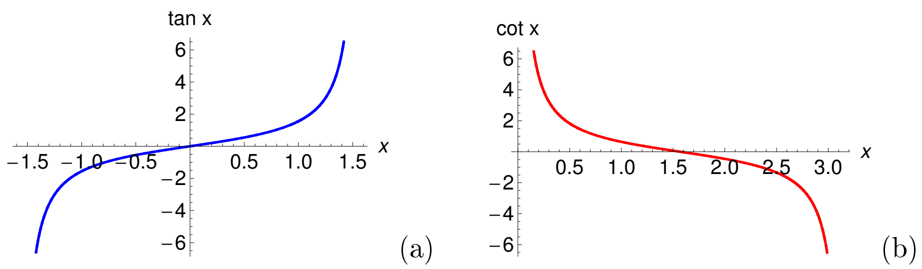
Πεδίο ορισμού $D = \mathbb{R} - \{\varkappa\pi + \pi/2\}\,;\ \varkappa \in \mathbb{Z}$ και τιμών $T = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = \pi$, περιττή και γνήσια αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της (Σχ. 3.3.4 - 2a).

Βασική ταυτότητα: $\tan x = \tan a \iff x = k\pi + a$ με $k \in \mathbb{Z}$.

Συνεφαπτομένη: $\cot x$

Πεδίο ορισμού $D = \mathbb{R} - \{\varkappa\pi\}\,;\ \varkappa \in \mathbb{Z}$ και τιμών $T = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = \pi$, περιττή και γνήσια φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της (Σχ. 3.3.4 - 2b).

Βασική ταυτότητα: $\cot x = \cot a \iff x = k\pi + a$ με $k \in \mathbb{Z}$.



Σχήμα 3.3.4 - 2: (a) Συνάρτηση $\tan x$, όταν $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ και (b) $\cot x$, όταν $x \in (0, \pi)$.

3.3.5 Αντίστροφες τριγωνομετρικές

Τόξο ημιτόνου: $\sin^{-1} x$ **ή** $\arcsin x$

Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, όταν έχει πεδίο ορισμού το $[-\pi/2, \pi/2]$, είναι γνήσια αύξουσα και έχει πεδίο τιμών το $[-1,\ 1]$, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2 - 1 αντιστρέφεται και ορίζει τη συνάρτηση (Σχ. 3.3.5 - 1a)

$$y = g(x) = f^{-1}(x) = \sin^{-1} x \iff \begin{cases} x = \sin y \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}\,. \end{cases} \tag{3.3.5 - 1}$$

Τόξο συνημιτόνου: $\cos^{-1} x$ **ή** $\arccos x$

Όμοια η συνάρτηση $f(x) = \cos x$ με πεδίο ορισμού το $[0, \pi]$ είναι γνήσια φθίνουσα και έχει πεδίο τιμών το $[-1,\ 1]$, οπότε αντιστρέφεται και ορίζει τη συνάρτηση

$$y = g(x) = f^{-1}(x) = \cos^{-1} x \iff \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \leq y \leq \pi. \end{cases} \tag{3.3.5 - 2}$$

Τόξο εφαπτομένης: $\tan^{-1} x$ **ή** $\arctan x$

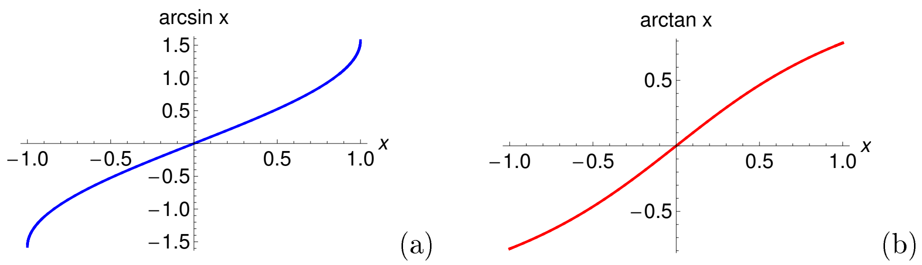
Η συνάρτηση $f(x) = \tan x$ όμοια με πεδίο ορισμού το $(-\pi/2, \pi/2)$ είναι γνήσια αύξουσα με πεδίο τιμών $\mathbb{R}$, οπότε αντιστρέφεται και ορίζει τη συνάρτηση (Σχ. 3.3.5 - 1b)

$$y = g(x) = f^{-1}(x) = \tan^{-1} x \iff \begin{cases} x = \tan y \\ -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\,. \end{cases} \tag{3.3.5 - 3}$$

Τόξο συνεφαπτομένης: $\cot^{-1} x$ **ή** $\mathrm{arccot} x$

Η συνάρτηση $f(x) = \cot x$ όμοια με πεδίο ορισμού το $(0, \pi)$ είναι γνήσια φθίνουσα με πεδίο τιμών $\mathbb{R}$, οπότε αντιστρέφεται και ορίζει τη συνάρτηση

$$y = g(x) = f^{-1}(x) = \cot^{-1} x \iff \begin{cases} x = \cos y \\ 0 < y < \pi. \end{cases} \tag{3.3.5 - 4}$$



Σχήμα 3.3.5 - 1: (a) Συνάρτηση $\sin^{-1} x$ και (b) $\tan^{-1} x$, όταν $x \in [-1, 1]$.

3.3.6 Εκθετική

Ορισμός 3.3.6 - 1. *Κάθε συνάρτηση της μορφής* $f(x) = a^x$ *όπου* $a > 0$ *και* $x \in \mathbb{R}$ *λέγεται* ***εκθετική***. *Ειδικά όταν* $a = 1$ *είναι* $f(x) = 1$.

Προφανώς είναι $D = \mathbb{R}$, ενώ $T = (0, +\infty)$, δηλαδή οι τιμές της εκθετικής συνάρτησης είναι πάντοτε θετικές.

Ιδιότητες

Έστω $a, b \in (0, +\infty)$ και $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$i)$ $a^x a^y = a^{x+y}$

$ii)$ $a^x : a^y = a^{x-y}$

$iii)$ $(ab)^x = a^x b^x$

$iv)$ $(a^x)^y = a^{xy}$

$v)$ $a^x = 1 \iff x = 0$ με $a \neq 1$,

$vi)$ $a > b \Longrightarrow \begin{cases} a^x > b^x & ; \quad x > 0 \\ a^x < b^x & ; \quad x < 0 \end{cases}$,

$vi)$ $a^x = a^y \iff x = y$ με $a \neq 1$,

$viii)$ $x > y \Longrightarrow \begin{cases} a^x > a^y & ; \quad a > 1 \\ a^x < a^y & ; \quad a < 1 \end{cases}$.

Μονοτονία

Αποδεικνύεται ότι, όταν:

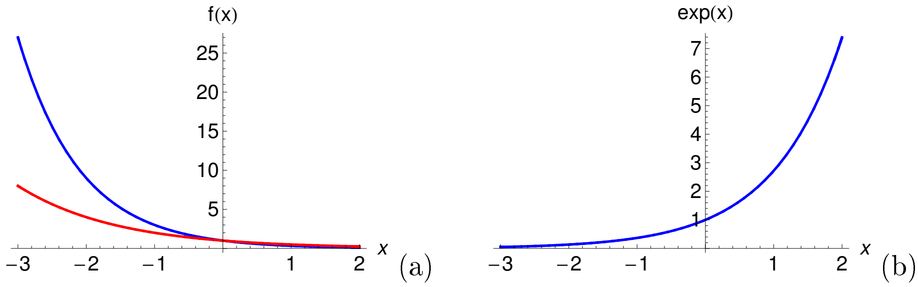
I) $0 < a < 1$, η συνάρτηση είναι **γνήσια φθίνουσα** (Σχ. 3.3.6 - 1 a),

II) $a > 1$, είναι **γνήσια αύξουσα**.

Ειδικά, όταν $a = e$, όπου e είναι ο γνωστός υπερβατικός αριθμός[3] έχουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = e^x, \tag{3.3.6 - 1}$$

που είναι μία γνήσια αύξουσα συνάρτηση (Σχ. 3.3.6 - 1 b).



Σχήμα 3.3.6 - 1: (a) Συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $a = \frac{1}{3}$ μπλε, $a = \frac{1}{2}$ κόκκινη καμπύλη και (b) η e^x, όταν $x \in [-3, 2]$.

Σημείωση 3.3.6 - 1

Η συνάρτηση e^x πολλές φορές στις εφαρμογές συμβολίζεται με $\exp(x)$.

3.3.7 Λογαριθμική

Αποδεικνύεται ότι ισχύει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 3.3.7 - 1. *Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό a με $a \neq 1$ και κάθε $y \in \mathbb{R}$ με $y > 0$, υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x, έτσι ώστε $a^x = y$.*

Ορισμός 3.3.7 - 1. *Ο μονοσήμαντα ορισμένος πραγματικός αριθμός y για τον οποίον ισχύει*

$$a^y = x \quad \textit{όπου} \quad a > 0 \quad \textit{με} \quad a \neq 1 \quad \textit{και} \quad x > 0$$

*λέγεται **λογάριθμος** του x με βάση a και συμβολίζεται με $\log_a x$.*

[3] Βλέπε Μάθημα *Σειρές - Ακολουθίες*.

Παρατηρήσεις 3.3.7 - 1

- Προφανώς $D = (0, +\infty)$, ενώ $T = \mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση $\log_a x$ είναι η αντίστροφη της a^x.
- Ειδικά, όταν $a = e$, ορίζεται ο **φυσικός** ή **νεπέριος** λογάριθμος, που συμβολίζεται συνήθως με $\ln x$ (Σχ. 3.3.7 - 1 b).

  Προφανώς τότε ισχύει η ταυτότητα

$$a^x = e^{x \ln a}. \tag{3.3.7 - 1}$$

  Όταν $a = 10$, ορίζεται ο **δεκαδικός λογάριθμος**, που συμβολίζεται με λογx ή $\log_{10} x$.

Ιδιότητες

Έστω $a > 0$ με $a \neq 1$ και x, $y > 0$. Τότε:

$i)$ $a^{\log_a x} = x$

$ii)$ $\log_a x = \log_a y \iff x = y$

$iii)$ $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$

$iv)$ $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$,

$v)$ $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$,

$vi)$ $\log_a x^b = b \log_a x;\ b \in \mathbb{R}$,

$vii)$ $\log_a x > \log_a y \iff \begin{cases} x > y & ; \quad a > 1 \\ x < y & ; \quad a < 1 \end{cases}.$

Άμεση συνέπεια των ιδιοτήτων iv, v και vi είναι ότι, αν $xy > 0$, τότε:

viii) $\log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y|$,

ix) $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a |x| - \log_a |y|$,

x) $\log_a x^\nu = \nu \log_a x$, όταν $x > 0$ $\nu = 1, 2, \dots$,

xi) Ισχύει ο παρακάτω **τύπος αλλαγής βάσης**:

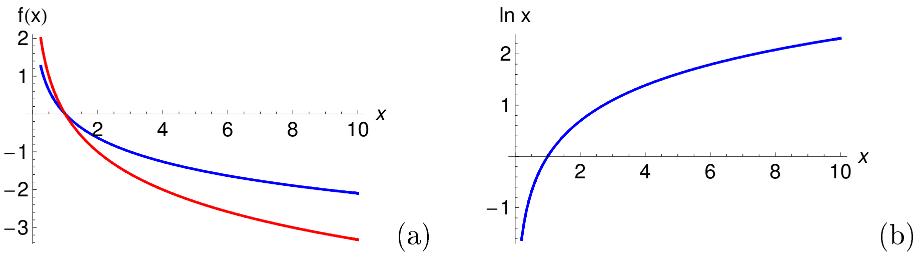
$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}. \tag{3.3.7 - 2}$$

Μονοτονία

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2 - 1, όταν

a) $0 < a < 1$, η συνάρτηση είναι **γνήσια φθίνουσα** (Σχ. 3.3.7 - 1 a),

b) $a > 1$, είναι **γνήσια αύξουσα** (Σχ. 3.3.7 - 1 b).



Σχήμα 3.3.7 - 1: (a) Συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ με $a = \frac{1}{3}$ μπλε, $a = \frac{1}{2}$ κόκκινη καμπύλη και (b) η $\ln x$, όταν $x \in (0, 10]$.

3.3.8 Υπερβολικές

[4]Οι υπερβολικές συναρτήσεις (hyperbolic functions) ορίζονται βάσει των συναρτήσεων e^x και e^{-x}. Χρησιμοποιούνται στην περιγραφή πολλών φυσικών φαινομένων, που αναφέρονται στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία, τη μεταφορά θερμότητας, τις κυματομορφές soliton κ.λπ.

Οι συναρτήσεις αυτές είναι:

Υπερβολικό ημίτονο

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \ |\mathbb{R} \quad (\Sigma\chi.\ 3.3.8 - 1a). \qquad (3.3.8 - 1)$$

Υπερβολικό συνημίτονο

$$\cosh x = \frac{}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \ |\mathbb{R} \quad (\Sigma\chi.\ 3.3.8 - 1b). \qquad (3.3.8 - 2)$$

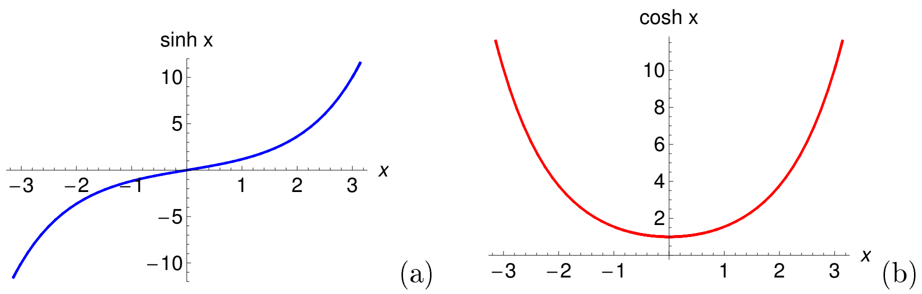
[4]Για εφαρμογές βλέπε Α. Μπράτσος [1].

Υπερβολική εφαπτομένη

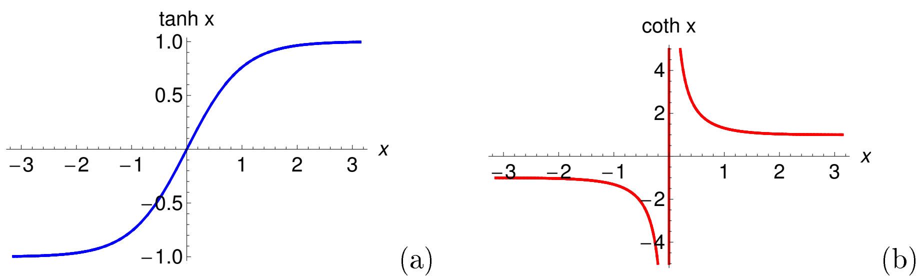
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \,|\, \mathbb{R} \quad (\Sigma\chi.\ 3.3.8 - 2a). \tag{3.3.8 - 3}$$

Υπερβολική συνεφαπτομένη

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \,|\, \mathbb{R} - \{0\} \quad (\Sigma\chi.\ 3.3.8 - 2b). \tag{3.3.8 - 4}$$



Σχήμα 3.3.8 - 1: (a) Συνάρτηση $\sinh x$ και (b) $\cosh x$, όταν $x \in [-\pi, \pi]$.



Σχήμα 3.3.8 - 2: (a) Συνάρτηση $\tanh x$ και (b) $\coth x$, όταν $x \in [-\pi, \pi]$.

3.3.9 Υπερβατικές

Οι συναρτήσεις της κατηγορίας αυτής δεν επαληθεύουν καμία αλγεβρική εξίσωση και η αναλυτική έκφραση επιτυγχάνεται με απεριόριστα μεγάλο αριθμό αλγεβρικών όρων. Είναι προφανές ότι η εκθετική, οι τριγωνομετρικές, οι υπερβολικές και οι αντίστροφές των συναρτήσεις είναι υπερβατικές.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$:

$i)$	$\sqrt{x^2-5x+4}$	$vii)$	$\ln\left(x^2-x-2\right)$
$ii)$	$\tan(\sin 2x)$	$viii)$	$\cosh\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$
$iii)$	$\dfrac{x}{\lvert x+3\rvert}$	$ix)$	$\dfrac{3x^2+4x-5}{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{2x^2-54}}$
$iv)$	$\sin^{-1}3x$	$x)$	$\coth\dfrac{x-1}{x+1}$
$v)$	$\sqrt{\dfrac{1-x}{(x-2)(x+5)}}$	$xi)$	$(x+1)^{1/x}$
$vi)$	$\tan^{-1}5x$	$xii)$	$\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^x.$

2. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\ln(\sin x).$$

Να υπολογιστούν τα πεδία ορισμού, τιμών και να γίνει το διάγραμμά της.

3. Όμοια της συνάρτησης

$$f(x)=\ln\left(\cos\frac{x}{2}\right).$$

4. Δείξτε ότι:

i) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1,$

ii) $\sinh(-x)=-\sinh x,\ \cosh(-x)=\cosh x,\ \tanh(-x)=-\tanh x,$

iii) $\sinh(x\pm y)=\sinh x\,\cosh y\pm\cosh x\,\sinh y,$

iv) $\cosh(x\pm y)=\cosh x\,\cosh y\pm\sinh x\,\sinh y,$

v) $\tanh(x\pm y)=\dfrac{\tanh x\pm\tanh y}{1\pm\tanh x\,\tanh y}.$

5. Δείξτε ότι οι αντίστροφες συναρτήσεις των υπερβολικών συναρτήσεων δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{aligned}
\sinh^{-1} x &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\\
\cosh^{-1} x &= \begin{cases} \cosh_{+}^{-1} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\\ \cosh_{-}^{-1} x = \ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\\ (\text{δίτιμη συνάρτηση})\end{cases}\\
\tanh^{-1} x &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\\
\coth^{-1} x &= \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}.
\end{aligned}$$

Σε κάθε περίπτωση να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού των και βάσει αυτού το πεδίο τιμών των υπερβολικών συναρτήσεων.

6. Να εξεταστεί αν είναι περιοδικές οι παρακάτω συναρτήσεις $f(x)$:

$i)$ $\sin 3x$	$ii)$ $\sin\lvert x\rvert$	$iii)$ $\lvert\sin\omega x\rvert$
$iv)$ $\lvert\cos\omega x\rvert$	$v)$ $\cos x^2$	$vi)$ $\lvert\tan 2x\rvert$,

να υπολογιστεί η θεμελιώδης περίοδος T και να γίνει το διάγραμμα για τις περιοδικές από αυτές στη θεμελιώδη περίοδο.

7. Να γίνει η γραφική παράσταση των παρακάτω περιοδικών συναρτήσεων, όταν ο περιορισμός τους στη θεμελιώδη περίοδο είναι:

i) $f(t) = e^{-t}$ αν $0 \le t < \pi$,

ii) $f(t) = 4\pi^2 - t^2$ αν $0 \le t < 2\pi$,

iii) $f(t) = \begin{cases} t & \text{αν} \quad -\pi \le t < 0\\ 0 & \text{αν} \quad 0 \le t < \pi,\end{cases}$

iv) $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{αν} \quad -\pi/2 \le t < 0\\ 0 & \text{αν} \quad 0 \le t < \pi/2,\end{cases}$

v) $f(t) = \lvert\sin t\rvert$

$$\text{vi)}\ \ f(t)=\begin{cases}\pi+t & \text{αν} \quad -\pi \ \leq \ t \ < \ 0\\ \pi-t & \text{αν} \quad 0 \ \leq \ t \ < \ \pi.\end{cases}$$

8. Να δειχθεί ότι, αν μία συνάρτηση $f(t)$ είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο T, τότε

i) $f(t)=f(t+kT)$, όταν $k\in\mathbb{Z}$,

ii) η $f(kt)$ με $k\neq 0$ είναι όμοια περιοδική με θεμελιώδη περίοδο T/k.

9. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι περιοδικές με περίοδο τ, τότε και η συνάρτηση $h=kf+\lambda g$ όπου $k,\ \lambda\in\mathbb{R}$ είναι όμοια περιοδική.

Απαντήσεις

1. (i) Πρέπει $x^2-5x+4\geq 0$, οπότε $D=(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$. (ii) $D=\mathbb{R}$. (iii) $D=\mathbb{R}-{-3}$. (iv) $D=\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$. (v) Πρέπει $x\neq -5,\,2$ και $(1-x)(x-2)(x+5)\geq 0$, οπότε τελικά $D=(-\infty,-5)\cup[1,2)$. (vi) $D=\left(-\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{10}\right)$. (vii) Πρέπει $x^2-x-2>0$, δηλαδή $D=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$. (viii) Πρέπει $x\neq -1$ και $x(x+1)\geq 0$, οπότε τελικά $D=(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$ (ix) Ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός, ενώ ο αριθμητής ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα τελικά πρέπει $x^2-4\geq 0$ και $2x^2-54\geq 0$, δηλαδή μετά τη συναλήθευση των ανισοτήτων $D=(-\infty,\sqrt{27}]\cup[\sqrt{27},+\infty)$. (x) $D=\mathbb{R}-{\pm 1}$. (xi) Πρέπει $x+1>0$ και $x\neq 0$, οπότε $D=(-1,0)\cup(0,+\infty)$. (xii) Πρέπει $x\sin x>0$ και $x\neq 0$. Άρα $D=(2k\pi,(2k+1)\pi)$ με $k=0,\,2,\,\ldots$.
2. Πρέπει $\sin x>0$, οπότε $D=(2k\pi,(2k+1)\pi)$ με $k=0,\,2,\,\ldots$.
3. Πρέπει $\cos\frac{x}{2}>0$, οπότε $D=\left(2k\pi-\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)$ με $k=0,\,2,\,\ldots$.
4. Αντικατάσταση σύμφωνα με τους τύπους $(3.3.8-1)$ - $(3.3.8-4)$. **5.** Έστω

$$\tanh x=y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^x-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1},$$

οπότε με $1-y\neq 0$ τελικά $(1-y)e^{2x}=1+y)$, δηλαδή $e^{2x}=\frac{1+y}{1-y}$ και λογαριθμίζοντας τελικά η αποδεικτέα. **6.** Εφαρμογή της σχέσης $(3.2.3-1)$. **7.** Δίνονται οι εντολές με το MATHEMATICA:
(i)

```
Plot[Ex[[-t], {t, 0, Pi}, PlotStyle -> Thick,
ColorFunction -> Function[Red],
AxesLabel -> {x, "Ex[-t]"}, BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial",
FontSize -> 14}, AxesOrigin -> {0, 0}]
```

(iii)

```
Plot[Piecewise[{{t, -Pi < t < 0 - 0.03}, {0, 0< t < Pi}}],
{t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> Thick,  ColorFunction -> Function[Blue],
AxesLabel -> {t, "f(t)"}, BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial",
FontSize -> 14}]
```

και ανάλογα οι υπόλοιπες. **8.** Εφαρμογή του Ορισμού 3.2.3 - 1. **9.** Όμοια.

3.4 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Finney, R. L. & Giordano F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

[4] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Βιβλιογραφία για περαιτέρω μελέτη

Παπαδημητράκης, Μ. (2015). *Ανάλυση: Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής* *http : //fourier.math.uoc.gr/ papadim/analysis_n.pdf*
Πανεπιστήμιο Κρήτης: Τμήμα Μαθηματικών.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://eclass.uoa.gr/courses/MATH130/ θέση Έγγραφα
- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/

- http://eom.springer.de/

Μάθημα 4

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

4.1 Ορισμός και Άλγεβρα μιγαδικών αριθμών

4.1.1 Ορισμοί

Ορισμός 4.1.1 - 1 (φανταστική μονάδα). *Ορίζεται από τη σχέση*

$$i = (-1)^{1/2}. \tag{4.1.1 - 1}$$

Άρα

$$i^2 = -1. \tag{4.1.1 - 2}$$

[1] Ο συμβολισμός $i = (-1)^{1/2}$ αρχικά δόθηκε από τον Euler, ενώ ο Gauss επινοώντας τη γεωμετρική παράσταση των μιγαδικών αριθμών απέδειξε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί είναι το ίδιο συγκεκριμένοι, όπως οι πραγματικοί αριθμοί, αφού είναι δυνατόν να παρασταθούν γεωμετρικά στο επίπεδο.

Τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1.1 - 1 είναι δυνατόν να οριστούν οι παρακάτω αριθμοί:

---

[1] Βλέπε βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4, 5, 6] και *https://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number*

Ορισμός 4.1.1 - 2 (φανταστικός αριθμός). *Ορίζεται ως φανταστικός κάθε αριθμός της μορφής $z = \beta i$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$ και i η φανταστική μονάδα.*

Ορισμός 4.1.1 - 3 (μιγαδικός αριθμός). *Ορίζεται ως μιγαδικός κάθε αριθμός (complex number) της μορφής $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και i η φανταστική μονάδα.*

Επομένως οι αριθμοί $3\,i$, $-4\,i$, $\sqrt{2}\,i$ είναι φανταστικοί, ενώ οι αριθμοί $1 + 2\,i$, $2 - 5\,i$, $4 + \sqrt{3}\,i$ μιγαδικοί.

Οι μιγαδικοί αριθμοί θα συμβολίζονται συνήθως με τα γράμματα z, w κ.λπ., ενώ το σύνολο των μιγαδικών αριθμών με $\mathbb{C}$ και το σύνολο των φανταστικών αριθμών με $\mathbb{I}$.

Ορισμός 4.1.1 - 4. *Αν $z = \alpha + \beta i$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός, τότε ορίζεται ως* **πραγματικό μέρος** *του z ο πραγματικός αριθμός*

$$\operatorname{Re} z = \alpha \tag{4.1.1 - 3}$$

και ως **φανταστικό μέρος** *ο πραγματικός αριθμός*

$$\operatorname{Im} z = \beta . \tag{4.1.1 - 4}$$

Άρα, αν $z = 3 - i$, τότε $\operatorname{Re} z = 3$ και $\operatorname{Im} z = -1$.

4.1.2 Ισότητα

Ορισμός 4.1.2 - 1. *Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$. Τότε είναι $z_1 = z_2$, όταν $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$.*

Σύμφωνα με τον ορισμό, αν $x - 2y\,i = 3 + 4$, τότε $x = 2$ και $-2y = 4$, δηλαδή $y = -2$.

Αποδεικνύεται ότι η ισότητα ορίζει στο σύνολο $\mathbb{C}$ μια σχέση ισοδυναμίας.[2]

[2] Μία σχέση $\sim$ ορίζει μια **σχέση ισοδυναμίας** σε ένα σύνολο Σ, όταν πληροί την αυτοπαθή, συμμετρική και μεταβατική ιδιότητα.

4.1.3 Πρόσθεση

Ορισμός 4.1.3 - 1. *Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$. Τότε ορίζεται ως* **άθροισμά** *τους ο μιγαδικός αριθμός*

$$z_1 + z_2 = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i. \tag{4.1.3 - 1}$$

Παράδειγμα 4.1.3 - 1

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1 - 3$ και $z_2 = 4 + 5\,i$. Τότε σύμφωνα με την $(4.1.3 - 1)$ είναι

$$z_1 + z_2 = (1 + 4) + (-3 + 5)i, \quad \text{δηλαδή} \quad z_1 + z_2 = 5 + 2\,i.$$

Ιδιότητες

i) **αντιμεταθετική** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ για κάθε $z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$,

ii) **προσεταιριστική** $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ για κάθε $z_1,\, z_2,\, z_3 \in \mathbb{C}$,

iii) αν $z_1 + z = z_2 + z$, τότε $z_1 = z_2$ για κάθε $z_1,\, z_2,\, z \in \mathbb{C}$ (νόμος διαγραφής στο $\mathbb{C}$),

iv) υπάρχει ένας μονοσήμαντα ορισμένος μιγαδικός αριθμός $z^* = 0 + 0\,i$, έτσι ώστε

$$z + z^* = z \quad \text{για κάθε} \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.1.3 - 2}$$

Ο μιγαδικός $0 + 0i$ λέγεται το **ουδέτερο στοιχείο** της πρόσθεσης.

v) Για κάθε μιγαδικό αριθμό z υπάρχει ένας μονοσήμαντα ορισμένος μιγαδικός αριθμός $z' = (-\alpha) + (-\beta)i$, έτσι ώστε να ισχύει

$$z + z' = 0. \tag{4.1.3 - 3}$$

Ο μιγαδικός z' λέγεται **αντίθετο** ή **συμμετρικό** στοιχείο του z για την πρόσθεση στο $\mathbb{C}$.

vi) Αν $z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$ τότε η εξίσωση

$$z_1 + z = z_2 \tag{4.1.3 - 4}$$

έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{C}$ την $z = z_2 + (-z_1)$. Η μοναδική λύση της εξίσωσης $(4.1.3-4)$ λέγεται διαφορά, ενώ η πράξη **αφαίρεση**.

Έστω $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$. Τότε

$$z_1 - z_2 = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i. \tag{4.1.3 - 5}$$

Παράδειγμα 4.1.3 - 2

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 του Παραδείγματος 4.1.3 - 1. Τότε σύμφωνα με την $(4.1.3-5)$ είναι

$$z_1 - z_2 = (1-4) + (-3-5)i, \quad \text{δηλαδή} \quad z_1 - z_2 = -3 - 8\,i.$$

4.1.4 Πολλαπλασιασμός

Ορισμός 4.1.4 - 1. *Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$. Τότε ορίζεται ως* **γινόμενό** *τους ο μιγαδικός αριθμός*

$$z_1 z_2 = (\alpha + \beta\, i)(\gamma + \delta\, i) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i. \tag{4.1.4 - 1}$$

Σημείωση 4.1.4 - 1

Ο τύπος $(4.1.4-1)$ προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\alpha + \beta\, i)(\gamma + \delta\, i) = \alpha(\gamma + \delta\, i) + \beta\, i(\gamma + \delta\, i) \\ &= \alpha\gamma + \alpha\delta\, i + \beta\gamma\, i + \overbrace{\beta\delta\, i^2}^{(4.1.1-2):\quad i^2=-1} \\ &= (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.1.4 - 1

Έστω οι μιγαδικοί $z_1 = 2-3\,i$ και $z_2 = 4+i$. Τότε σύμφωνα με τη διαδικασία της Σημείωσης 4.1.4 - 1 διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2-3\,i)(5+i) = 2(4+i) - 3i(4+i) \\ &= 8 + 2\,i - 12\,i - 3\,i^2 = 8 + (2-12)i - 3(-1) \\ &= (8+3) + (2-12)i = 11 - 10\,i. \end{aligned}$$

Ιδιότητες

i) αντιμεταθετική $z_1 z_2 = z_2 z_1$ για κάθε $z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$,

ii) προσεταιριστική $(z_1 z_2)\, z_3 = z_1\, (z_2 z_3)$ για κάθε $z_1,\, z_2,\, z_3 \in \mathbb{C}$,

iii) επιμεριστική $z_1\,(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ για κάθε $z_1,\, z_2,\, z_3 \in \mathbb{C}$,

iv) αν $z_1 z = z_2 z$, τότε $z_1 = z_2$ για κάθε $z \in$ με $z \neq 0$ και για κάθε z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ (νόμος της διαγραφής του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{C}$),

v) υπάρχει ένας μονοσήμαντα ορισμένος μιγαδικός αριθμός $z^* = 1 + 0\,i$, έτσι ώστε

$$zz^* = z \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}. \tag{4.1.4 - 2}$$

Ο μιγαδικός $1 + 0i$ λέγεται **ουδέτερο στοιχείο** ή **μονάδα** και θα συμβολίζεται στο εξής με 1.

vi) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$ υπάρχει ένας μονοσήμαντα ορισμένος μιγαδικός αριθμός $z^* = 1/z = z^{-1}$, έτσι ώστε να ισχύει

$$zz^* = 1. \tag{4.1.4 - 3}$$

Ο μιγαδικός αριθμός $1/z = z^{-1}$, λέγεται **αντίστροφος** του z ή το **συμμετρικό** στοιχείο του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{C}$.

vii) Αν $z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_2 \neq 0$, τότε η εξίσωση

$$z_2 z = z_1 \tag{4.1.4 - 4}$$

έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{C}$ την $z = z_1 z_2^{-1} = z_1/z_2$. Η μοναδική λύση της εξίσωσης (4.1.4 − 4) λέγεται **πηλίκο** του z_1 δια του z_2 και συμβολίζεται z_1/z_2, ενώ η πράξη **διαίρεση**.

Σημείωση 4.1.4 - 2

Παραδείγματα υπολογισμού του αντίστροφου και του πηλίκου μιγαδικών αριθμών θα δοθούν στην Παράγραφο 4.3.

4.2 Δύναμη μιγαδικών αριθμών

4.2.1 Ορισμός

Οι δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη ορίζονται για τους μιγαδικούς αριθμούς όπως και για τους πραγματικούς, δηλαδή

$$z^1 = z \quad \text{για κάθε} \quad z \in \mathbb{C}$$

και διαδοχικά (επαγωγικά)

$$z^\nu = z^{\nu-1} z \quad \text{για κάθε} \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{και} \quad \nu = 2, 3, \ldots .$$

Επίσης ορίζεται ότι

$$z^{-\nu} = \frac{1}{z^\nu} \quad \text{για κάθε} \quad z \in \mathbb{C} \text{ με } z \neq 0 \text{ και } \nu = 1, 2, \ldots ,$$

ενώ ειδικά ισχύει ότι $z^0 = 1$ με $z \neq 0$.

Παρατήρηση 4.2.1 - 1

Η παράσταση 0^0 δεν έχει έννοια στο $\mathbb{C}$.

4.2.2 Ιδιότητες

Οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων ισχύουν και στην περίπτωση των μιγαδικών αριθμών.

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$$

και γενικά

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i, \quad i^{4k+4} = 1.$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, όπου $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών.

Παράδειγμα 4.2.2 - 1

Έστω ο μιγαδικός $z_1 = 2 + 3\,i$. Τότε διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} z^2 &= (2+3\,i)^2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot 3\,i + \overbrace{(3\,i)^2}^{9\,i^2=9(-1)=-9} \\ &= (4-9) + 12\,i = -5 + 12\,i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^3 &= (2+3\,i)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot 3\,i + 3\cdot 2\cdot \overbrace{(3\,i)^2}^{9\,i^2=9(-1)=-9} \\ &\quad + \overbrace{(3\,i)^3}^{27\,i^3=27(-1)\,i=-27\,i} \\ &= 8 + 36\,i - 54 - 27\,i = (8-54) + (36-27)i = -46 + 9\,i. \end{aligned}$$

4.3 Συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί

4.3.1 Ορισμός

Ορισμός 4.3.1 - 1. *Έστω $z = \alpha + \beta i$.Τότε ο μιγαδικός αριθμός $\alpha - \beta i$ λέγεται **συζυγής** του z και συμβολίζεται με $\overline{z}$, δηλαδή*

$$\overline{z} = \alpha - \beta i. \tag{4.3.1 - 1}$$

Είναι προφανές ότι ισχύουν

$$\begin{aligned} z\,\overline{z} &= (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2, && (4.3.1 - 2) \\ z + \overline{z} &= 2\alpha. && (4.3.1 - 3) \end{aligned}$$

Σημείωση 4.3.1 - 1

Ο τύπος (4.3.1−1) χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του αντίστροφου και του πηλίκου των μιγαδικών αριθμών, όταν απαιτείται οι αριθμοί αυτοί να γραφούν στη μορφή $\alpha + \beta\, i$. Συγκεκριμένα, αν ο παρονομαστής είναι ο $x + y\, i$, τότε πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τον συζυγή του $x + y\, i$, δηλαδή τον $x - y\, i$. Τότε $(x + y\, i)(x - y\, i) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2$.

Παράδειγμα 4.3.1 - 1

Να γραφούν στη μορφή $\alpha + \beta\, i$ οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1 = \frac{1}{3 - i} \quad \text{και} \quad z_2 = \frac{1 + 2\, i}{3 - i}\,.$$

Λύση. Ο συζυγής του μιγαδικού $3 - i$ είναι ο $3 + i$. Τότε σύμφωνα με τη Σημείωση 4.3.1 - 1 διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{3 - i} = \frac{1}{3 - i}\,\frac{3 + i}{3 + i} = \frac{3 + i}{3^2 - i^2} = \frac{3 + i}{3^2 - (-1)} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}\, i\,, \\ z_2 &= \frac{1 + 2\, i}{3 - i} = \frac{1 + 2\, i}{3 - i}\;\frac{3 + i}{3 + i} = \frac{(1 + 2\, i)(3 + i)}{3^2 - i^2} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}\, i\,. \end{aligned}$$

4.3.2 Ιδιότητες

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

i) $\left(\overline{-z}\right) = -\overline{z}$,

ii) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$,

iii) $\left(\overline{z^\nu}\right) = \left(\overline{z}\right)^\nu \quad$ με $\quad \nu = 1, 2, \ldots$,

iv) $\left(\overline{z^{-1}}\right) = \left(\overline{z}\right)^{-1} \quad$ με $\quad z \neq 0$,

v) $\left(\overline{\dfrac{z_1}{z_2}}\right) = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad$ με $\quad z_2 \neq 0$,

vi) $\overline{\alpha z} = \alpha\, \overline{z} \quad$ για κάθε $\quad \alpha \in \mathbb{R}$,

vii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$. Η ιδιότητα γενικεύεται.

viii) $\overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$. Όμοια γενικεύεται.

Πρόταση 4.3.2 - 1. *Αν ένας μιγαδικός αριθμός είναι ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές, τότε και ο συζυγής του μιγαδικός είναι επίσης ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης.*

4.3.3 Συζυγείς μιγαδικές συντεταγμένες

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$. Επειδή σε πολλές εφαρμογές απαιτείται τα x, y να εκφραστούν συναρτήσει του z, θεωρώντας τον συζυγή μιγαδικό $\overline{z} = x - iy$ εύκολα προκύπτει ότι

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}\,. \tag{4.3.3 - 1}$$

Οι συντεταγμένες $(z, \overline{z})$, που συμπίπτουν με τις (x, y), λέγονται τότε **συζυγείς μιγαδικές συντεταγμένες** ή απλά **συζυγείς συντεταγμένες**.

4.4 Μέτρο μιγαδικών αριθμών

4.4.1 Ορισμός

Ορισμός 4.4.1 - 1. *Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$. Τότε ορίζεται ως* **μέτρο** *(modulus) ή απόλυτη τιμή του z και συμβολίζεται με $|z|$ ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός*

$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{4.4.1 - 1}$$

Από την $(4.4.1 - 1)$ άμεσα προκύπτει ότι

$$|z|^2 = z\overline{z}.$$

Παράδειγμα 4.4.1 - 1

Σύμφωνα με την $(4.4.1 - 1)$ έχουμε:

i) $|1+\sqrt{3}\,i| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} \;=\; 2,$

ii) $\dfrac{1+i}{2+3\,i} = \dfrac{1+i}{2+3\,i}\,\dfrac{2-3\,i}{2-3\,i} = \dfrac{-1+5\,i}{2^2-3^2\,i^2} = \dfrac{1}{13}\,(-1+5\,i)$, οπότε

$$\left|\frac{1+i}{2+3\,i}\right| = \frac{1}{13}\sqrt{(-1)^2+5^2} = \frac{1}{13}\sqrt{26},$$

iii) $(1+2\,i)^3 = 1^3+3\cdot 1^2\cdot 2\,i+3\cdot 1\cdot(2\,i)^2+(2\,i)^3 = 1+6\,i-12-8\,i = -11-2\,i,$

δηλαδή

$$\left|(1+2\,i)^3\right| = \sqrt{(-11)^2+(-2)^2} = \sqrt{125}.$$

Παράδειγμα 4.4.1 - 2

Να υπολογιστεί ο μιγαδικός z, όταν

$$|z-1| = |z-2| = |z-i|.$$

Λύση. Έστω $z = x+i\,y$. Τότε από τη σχέση

$$\begin{aligned}
|z-1| \;&=\; |z-2| \quad \text{προκύπτει ότι} \quad (x-1)^2+y^2 \;=\; (x-2)^2+y^2, \\
&\qquad\qquad \text{οπότε} \qquad x = \frac{3}{2}\,, \\
|z-1| \;&=\; |z-i| \qquad\qquad\qquad\quad (x-1)^2+y^2 \;=\; x^2+(y-1)^2, \\
&\qquad\qquad \text{οπότε} \qquad y = \frac{3}{2}\,.
\end{aligned}$$

■

4.4.2 Ιδιότητες

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

i) $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$. Η ιδιότητα γενικεύεται.

ii) $||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$.

iii) $|z_1 z_2| = |z_1|\;|z_2|$. Όμοια γενικεύεται.

iv) $|z^{\nu}| = |z|^{\nu}$ για κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$.

v) $\left|z^{-1}\right| = |z|^{-1}$ με $z \neq 0$.

vi) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ με $z_2 \neq 0$.

Ασκήσεις

1. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y, όταν

i) $x + yi = |x - yi|$

ii) $x + yi = (x - yi)^2$

iii) $x + 2yi + 5y - ix = 7 + 5i$

iv) $\dfrac{x}{1+2i} + \dfrac{y}{3+2i} = \dfrac{5+6i}{8i-1}$.

2. Να εκφραστούν οι παρακάτω μιγαδικοί στη μορφή $\alpha + \beta i$

i) $(i-2)\left[5(1-i) - 4(1+i)^2\right]$

ii) $\dfrac{\left(i^4 + i^9 + i^{16}\right)}{\left(2 - i^5 + i^{10} - i^{15}\right)}$

iii) $\dfrac{(2+i)(2-i)(1+i)}{(1-i)^3}$

iv) $\dfrac{(1-i)^4 - (1+i)^2}{(1+i)(1-i)}$.

3. Αν

$$z_1 = 1 - i, \quad z_2 = 1 + i \quad \text{και} \quad z_3 = 2 + 3i,$$

να υπολογιστούν οι παραστάσεις

i) $|2z_2 - 5z_1|^2$

ii) $\mathrm{Re}\left(2z_1^2 + 3z_2^2 - z_3\right)$

iii) $(z_3 - z_1)^2$

iv) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z_1 z_2}{z_3}\right)$

v) $|z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2|$

vi) $z_3\left(\overline{z}_3\right)^{-1} + \overline{z}_3\, z_3^{-1}$.

4. Να υπολογιστεί ο μιγαδικός z, όταν

$$|z-1| = |z-2| = |z-i|.$$

5. Αν $z = x + iy$, να υπολογιστεί σχέση μεταξύ των x και y, όταν

$$|z-i| = |z+2|.$$

6. Να εκφραστούν συναρτήσει των μιγαδικών συζυγών συντεταγμένων οι εξισώσεις

$i)\quad x^2+16y^2=25 \qquad\qquad ii)\quad x^2+y^2-5x+y-1=0.$

7. Να αποδειχθούν οι ιδιότητες των Παραγράφων 4.3.2 και 4.4.2.

Απαντήσεις

1. (i) Μετά τις πράξεις εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη προκύπτει το σύστημα $x^2-x-y=0$ και $y(1+2x)=0$, οπότε έχουμε τις λύσεις

$$(x,y)=(1,0),\quad (0,0),\quad \left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \text{και}\quad \left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

(ii) Όμοια το σύστημα $x-x^2+y^2=0$ και $y(1+2x)=0$, οπότε έχουμε τις λύσεις

$$(x,y)=(1,0),\quad (0,0),\quad \left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \text{και}\quad \left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

(iii) Όμοια $x+5y=7$ και $2y-x=5$, οπότε $x=-\frac{11}{7}$ και $y=\frac{12}{7}$.

(iv) Πολλαπλασιάζοντας με τους συζυγείς των παρονομαστών τελικά προκύπτει το σύστημα $13x+15y=43$ και $13x+5y=23$, οπότε $x=1$ και $y=2$.

2. (i) $3+31\,i$, (ii) $2+i$, (iii) $-\frac{5}{2}$, (iv) $-2-i$.

3. (i) Είναι $2z_2-5z_1=-3+7\,i$ κ.λπ. (ii) $\mathrm{Re}(-2-i)=-2$, (iii) $-15+8\,i$, (iv) $\mathrm{Im}\left(\frac{4}{3}-\frac{6}{13}\,i\right)=-\frac{6}{13}$, (v) 0, (vi) $-\frac{10}{13}$.

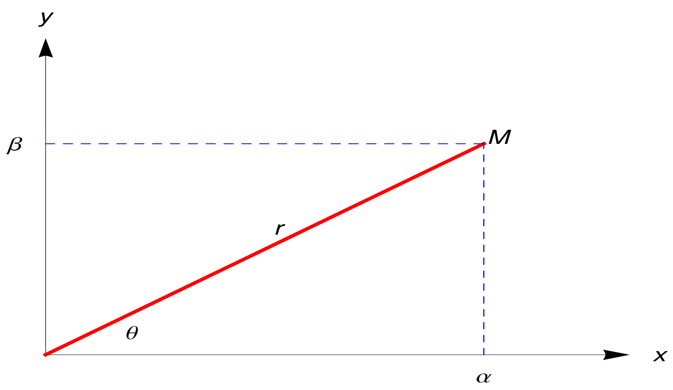
4. Έστω $z=x+i\,y$. Τότε από τη λύση του συστήματος $|z-1|^2=|z-2|^2$ και $|z-1|^2=|z-i|^2$ προκύπτει τελικά ότι $(x,y)=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$. **5.** $4x+2y+3=0$ (ευθεία).

6. Αντικατάσταση των x, y με τις εκφράσεις των τύπων $(4.3.3-1)$ κ.λπ. (vii) Έστω $z_1=\alpha+\beta\,i$, $z_2=\gamma+\delta\,i$ κ.λπ.

4.5 Μορφές μιγαδικού αριθμού

4.5.1 Τριγωνομετρική μορφή

Αποδεικνύεται στα Μαθηματικά ότι υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία του μιγαδικού $z=\alpha+\beta\,i$ και του ζεύγους (α,β) στο $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Σύμφωνα με αυτή την αντιστοιχία είναι δυνατόν να γίνει μια γεωμετρική παράσταση του μιγαδικού αριθμού από ένα σημείο του επιπέδου. Συγκεκριμένα, έστω ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy (Σχ. 4.5.1 - 1) όπου στον άξονα τετμημένων Ox απεικονίζεται το πραγματικό μέρος του z, δηλαδή το α και στον άξονα τεταγμένων Oy το φανταστικό του μέρος β. Τότε προφανώς υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των μιγαδικών αριθμών $z=$



Σχήμα 4.5.1 - 1: τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού.

$\alpha + \beta\, i$ και των σημείων $M(\alpha, \beta)$ του επιπέδου Π, που οι συντεταγμένες τους ορίζονται από το σύστημα Oxy. Το επίπεδο Π λέγεται στην περίπτωση αυτή και **μιγαδικό επίπεδο** ή **επίπεδο Gauss**.

Έστω τώρα ένα [3]πολικό σύστημα συντεταγμένων (polar coordinate system) (ρ, θ) με πόλο το 0 και πολικό άξονα την ημιευθεία Ox. Τότε, αν $z = \alpha + \beta i = (\alpha, \beta)$ με $z \neq 0$, σύμφωνα με τις σχέσεις $(1.1 - 9)$ του Μαθήματος *Διανύσματα* θα ισχύει

$$\begin{aligned} \rho &= |z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \\ \cos\theta &= \frac{\alpha}{|z|} \quad \text{και} \quad \sin\theta = \frac{\beta}{|z|} \quad \text{με} \quad \theta \in [0, 2\pi). \end{aligned} \tag{4.5.1 - 1}$$

Οι σχέσεις $(4.5.1 - 1)$ προσδιορίζουν τα ρ, θ, όταν είναι γνωστά τα α, β και αντίστροφα.

Επομένως το ρ ισούται με το μέτρο του z, ενώ η γωνία θ, θα υπολογίζεται από τις σχέσεις $(4.5.1 - 1)$ και θα λέγεται στο εξής **πρωτεύον όρισμα** (Argument)[4] του z, ενώ θα συμβολίζεται με $\mathrm{Arg}z$.

Άρα από τις σχέσεις $(4.5.1 - 1)$ προκύπτει ότι ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$ γράφεται

$$z = |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right), \ \text{ όταν } \ \theta \in [0, 2\pi) \ \text{ και } \ |z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{4.5.1 - 2}$$

[3]Βλέπε Μάθημα *Διανύσματα - Βασικοί ορισμοί.*

[4]Στη βιβλιογραφία πολλές φορές ως $\mathrm{Arg}z$ θεωρείται η γωνία θ με $\theta \in [-\pi, \pi)$ ή $\theta \in (-\pi, \pi]$.

Η $(4.5.1-2)$ είναι γνωστή ως η **τριγωνομετρική μορφή** (polar form) του z.

Σημειώσεις 4.5.1 - 1

i) Σύμφωνα με γνωστή τριγωνομετρική ιδιότητα στην $(4.5.1-1)$ ο μιγαδικός αριθμός z προσδιορίζεται εκτός από το ζεύγος (ρ, θ) και από το ζεύγος $(\rho, \theta + 2k\pi)$, όταν $k \in \mathbb{Z}$. Τότε οι γωνίες $\theta + 2k\pi$ ορίζουν το **όρισμα** του μιγαδικού, που συμβολίζεται με $\arg z$.

ii) Υπενθυμίζονται οι παρακάτω βασικές ταυτότητες ($k \in \mathbb{Z}$):

$$\sin x = \sin a \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + a \\ x = 2k\pi + \pi - a, \end{cases} \tag{4.5.1 - 3}$$

$$\cos x = \cos a \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + a \\ x = 2k\pi - a. \end{cases} \tag{4.5.1 - 4}$$

Παράδειγμα 4.5.1 - 1

Έστω ο μιγαδικός αριθμός

$$z = -1 + i.$$

Τότε $\alpha = -1$ και $\beta = 1$, οπότε $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^1} = \sqrt{2}$. Άρα

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\,\pi}{4}\,,$$

οπότε

$$\theta = 2k\pi + \frac{3\,\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{5\,\pi}{6}\,, \quad \text{όταν} \quad k = 0 \tag{1}$$

ή

$$\theta = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{5\,\pi}{4}\,, \quad \text{όταν} \quad k = 1. \tag{2}$$

Επίσης $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4}$, οπότε

$$\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}\,, \quad \text{όταν} \quad k = 0 \tag{3}$$

ή

$$\theta = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{3\,\pi}{4}\,, \quad \text{όταν} \quad k = 0\,. \tag{4}$$

Άρα $\operatorname{Arg} z = 3\,\pi/4$. Τότε σύμφωνα με την $(4.5.1-2)$ η τριγωνομετρική μορφή είναι

$$-1 + i = \sqrt{2}\,\left(\cos\frac{3\,\pi}{4} + i\sin\frac{3\,\pi}{4}\right).$$

4.5.2 Σχετικά θεωρήματα

Με την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών αποδεικνύονται τα παρακάτω χρήσιμα θεωρήματα:

Θεώρημα 4.5.2 - 1. *Έστω*

$$z_1 = |z_1|\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \textit{και} \quad z_2 = |z_2|\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\,.$$

Τότε είναι $z_1 = z_2$ τότε και μόνον, όταν

$$|z_1| = |z_2| \quad \textit{και} \quad \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Θεώρημα 4.5.2 - 2 (de Moivre). *Αν $z_k = |z_k|\,(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$; $k = 1, 2, \ldots, \nu$, τότε*

$$\begin{aligned} z_1 z_2 \ldots z_\nu &= |z_1|\,|z_2| \ldots |z_\nu|\,[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_\nu) \\ &\quad + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_\nu)] \end{aligned} \tag{4.5.2 - 1}$$

για κάθε $\nu = 2, 3, \ldots$.

Πόρισμα 4.5.2 - 1 (τύπος de Moivre). *Ισχύει ότι (de Moivre's formula)*

$$z^\nu = |z|^\nu\,[\cos(\nu\theta) + i\sin(\nu\theta)] \quad \textit{για κάθε} \quad \nu = 2, 3, \ldots\,. \tag{4.5.2 - 2}$$

Θεώρημα 4.5.2 - 3. *Αν $z = |z(\cos\theta + i\sin\theta)$ με $z \neq 0$, τότε*

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\,[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]\,.$$

Θεώρημα 4.5.2 - 4. *Αν* $z_1 = |z_1|\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = |z_2|\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ *με* $z_2 \neq 0$, *τότε*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right]. \tag{4.5.2 - 3}$$

Πόρισμα 4.5.2 - 2. *Ισχύει ότι*

$$\frac{1}{z^\nu} = \frac{1}{|z|^\nu}\left[\cos(-\nu\theta) + i\sin(-\nu\theta)\right]; \quad \nu = 1, 2, \ldots .$$

Παράδειγμα 4.5.2 - 1

Έστω οι μιγαδικοί

$$\begin{aligned} z_1 &= \; = \sqrt[3]{2}(-1+i) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\sin\frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{και} \\ z_2 &= \frac{\sqrt{5}}{2}\left(-\sqrt{3} - i\right) = \sqrt{5}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\sin\frac{7\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

Τότε σύμφωνα με τον τύπο

$(4.5.2 - 1)$:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \sqrt[3]{2}\,\sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right) + i\,\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right)\right] \\ &= \sqrt[6]{2^2}\,\sqrt[6]{5^3}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\,\sin\frac{23\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{500}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\,\sin\frac{23\pi}{12}\right) \\ &\approx 2.721273 - 0.729163\,i. \end{aligned}$$

$(4.5.2 - 2)$:

$$\begin{aligned} z_1^4 &= \left(\sqrt[3]{2}\right)^4\left(\cos\frac{4\cdot 3\pi}{4} + i\,\sin\frac{4\cdot 3\pi}{4}\right) \\ &= 2\,\sqrt[3]{2}\,(\cos 3\pi + i\,\sin 3\pi) = -2\,\sqrt[3]{2} \approx -2.519842. \end{aligned}$$

$(4.5.2-3)$:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{5}}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{7\pi}{6}\right)+i\,\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{7\pi}{6}\right)\right]\\ &= \frac{\sqrt[6]{2^2}}{\sqrt[6]{5^3}}\left(\cos\frac{-5\pi}{12}+i\,\sin\frac{-5\pi}{12}\right)=\sqrt[6]{\frac{4}{125}}\left(\cos\frac{5\pi}{12}-i\,\sin\frac{5\pi}{12}\right)\\ &\approx 0.145833-0.544255\,i.\end{aligned}$$

4.5.3 Πολική μορφή

Ορισμός 4.5.3 - 1. *Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=\alpha+\beta i$, που γράφεται σε τριγωνομετρική μορφή $z=|z|\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$. Τότε η* **πολική** *μορφή (angle notation) του μιγαδικού ορίζεται από τη σχέση*

$$z=|z|^{\lfloor\theta},\tag{4.5.3 - 1}$$

όταν η γωνία θ εκφράζεται σε μοίρες.

Παράδειγμα 4.5.3 - 1

Έστω ο μιγαδικός αριθμός

$$z=-\sqrt{3}+i.$$

Τότε $\alpha=-\sqrt{3}$ και $\beta=1$, οπότε $|z|=2$. Άρα

$$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\cos\frac{\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{5\,\pi}{6}\,,$$

οπότε

$$\theta=2k\pi+\frac{5\,\pi}{6}\quad\Longrightarrow\quad\theta=\frac{5\,\pi}{6}\,,\quad\text{όταν}\quad k=0\tag{1}$$

ή

$$\theta=2k\pi-\frac{\pi}{6}\quad\Longrightarrow\quad\theta=\frac{7\,\pi}{6}\,,\quad\text{όταν}\quad k=1.\tag{2}$$

Επίσης $\sin\theta=\dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{\pi}{6}$, οπότε

$$\theta=2k\pi+\frac{\pi}{6}\quad\Longrightarrow\quad\theta=\frac{\pi}{6}\,,\quad\text{όταν}\quad k=0\tag{3}$$

ή

$$\theta = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{5\,\pi}{6}\,, \quad \text{όταν} \quad k = 0\,. \tag{4}$$

Άρα $\operatorname{Arg} z = 5\,\pi/6$. Τότε

$$-\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{5\,\pi}{6} + i\sin\frac{5\,\pi}{6}\right), \quad \text{οπότε} \quad z = 2^{\lfloor 150}.$$

4.5.4 Εκθετική μορφή

Ορισμός 4.5.4 - 1. *Έστω ο μιγαδικός $z = x + iy$. Τότε η δύναμη e^z ορίζεται ότι είναι ο μιγαδικός αριθμός*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\,(\cos y + i\sin y) \tag{4.5.4 - 1}$$

με y σε rad.

Ο Ορισμός 4.5.4 - 1, όταν $y = 0$, συμφωνεί με τον ορισμό του e^x με $x \in \mathbb{R}$, ενώ, όταν $x = 0$, ορίζει την ταυτότητα του Euler (Euler's formula)

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y. \tag{4.5.4 - 2}$$

Προφανώς τότε

$$\left|e^{iy}\right| = \sqrt{\cos^y + \sin^2 y} = 1.$$

Από τον τύπο (4.5.1 − 2), που αναφέρεται στην τριγωνομετρική μορφή $z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ του μιγαδικού z και τον τύπο (4.5.4 − 2), όταν γραφεί ως

$$e^{i\,\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

προκύπτει ότι

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\,\theta}.$$

Η μορφή αυτή ορίζεται στη συνέχεια ως εξής:

Ορισμός 4.5.4 - 2 *Η* **εκθετική μορφή** *ή* **μορφή Euler** *του z (complex exponential form) ορίζεται από τη σχέση*

$$z = |z|e^{i\theta}, \tag{4.5.4 - 3}$$

όταν $\theta = \operatorname{Arg} z$.

Παράδειγμα 4.5.4 - 1

Σύμφωνα με το Παράδειγμα 4.5.3 - 1 είναι

$$-\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{5\,\pi}{6} + i\sin\frac{5\,\pi}{6}\right) = 2\,e^{i\,\frac{5\pi}{6}}.$$

Σημείωση 4.5.4 - 1

Επειδή σύμφωνα με την $(4.5.4-2)$ προφανώς ισχύουν

$$\begin{aligned} e^{i\,\theta} &= \cos\theta + i\,\sin\theta, \\ e^{-i\,\theta} &= \cos(-\theta) + i\,\sin(-\theta) = \cos\theta - i\,\sin\theta \end{aligned}$$

προσθέτοντας, αντίστοιχα αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτουν οι παρακάτω **τύποι του Euler** για το συνημίτονο, αντίστοιχα ημίτονο:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\,\theta}+e^{-i\,\theta}}{2} \quad \text{και} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\,\theta}-e^{-i\,\theta}}{2\,i}. \tag{4.5.4 - 4}$$

Ιδιότητες

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

i) $e^{z_1}\,e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

ii) Η δύναμη e^z είναι πάντοτε διάφορη του μηδενός.

iii) Είναι $\left|e^{ix}\right| = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv) Αν $e^z = 1$, τότε $z = 2k\pi i$ με $k \in \mathbb{Z}$ και αντίστροφα.

v) Αν $e^{z_1} = e^{z_2}$, τότε $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ με $k \in \mathbb{Z}$ και αντίστροφα.

4.6 Ρίζα μιγαδικού αριθμού

4.6.1 Ορισμός και θεώρημα υπολογισμού

Ορισμός 4.6.1 - 1. *Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$ με $z \neq 0$. Τότε ορίζεται ως ν-τάξης ρίζα του z κάθε μιγαδικός αριθμός $w = x + iy$ με την ιδιότητα*

$$(x+iy)^{\nu} = \alpha + \beta i, \quad \textit{όταν} \quad \nu = 2, 3, \ldots .$$

Σχετικά αποδεικνύεται ότι ισχύει:

Θεώρημα 4.6.1 - 1. *Αν* $z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ *είναι ένας μιγαδικός αριθμός με* $z \neq 0$, *τότε οι μιγαδικοί αριθμοί*

$$z_k = \sqrt[\nu]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{\nu} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{\nu}\right); \quad k = 0,\, 1,\, \ldots, \nu - 1 \quad (4.6.1 - 1)$$

είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και επαληθεύουν την εξίσωση $w^\nu = z$.

Παράδειγμα 4.6.1 - 1

Να υπολογιστεί η παράσταση

$$(-1 - i)^{2/3}.$$

Λύση. Έστω $z = -1 - i$. Τότε $|z| = \sqrt{2}$ και

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right),$$

οπότε

$$\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ με } \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ για } k = 0$$

ή

$$\theta = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \text{ με } \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ για } k = 1$$

και

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right),$$

οπότε

$$\theta = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \text{ με } \theta = \frac{7\pi}{4} \text{ για } k = 1$$

ή

$$\theta = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \text{ με } \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ για } k = 0.$$

Άρα $\operatorname{Arg} z = 5\pi/4$, οπότε με τον τύπο $(4.5.2 - 2)$ του de Moivre είναι

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(\sqrt{2}\right)^2\left[\cos 2\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin 2\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right] \\ &= 2\left[\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Επομένως σύμφωνα με τον τύπο $(4.6.1-1)$ η 3ης τάξη ρίζα του z^2 θα είναι

$$z^{2/3}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2k\pi+\pi/2}{3}+i\sin\frac{2k\pi+\pi/2}{3}\right);\quad k=0,\,1,\,2,$$

δηλαδή οι παρακάτω 3 διαφορετικοί μεταξύ τους μιγαδικοί αριθμοί:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}},\\
z_1 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{5\pi}{6}},\\
z_2 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{9\pi}{6}}.
\end{aligned}$$

4.6.2 Εξίσωση διωνυμική

Ορισμός 4.6.2 - 1. *Λέγεται* **διωνυμική** *κάθε εξίσωση της μορφής* $z^{\nu}=\alpha$, *όπου* $\alpha\in\mathbb{C}$ *με* $\alpha\neq 0$ *και* $\nu=1,2,\ldots$.

Η λύση των εξισώσεων της μορφής αυτής γίνεται με τη βοήθεια του Θεωρήματος 4.6.1 - 1 σύμφωνα με τα παρακάτω παραδείγματα:

Παράδειγμα 4.6.2 - 1

Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση

$$z^5=-32\,i.$$

Λύση. Έχουμε

$$-\,i=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\,\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

οπότε

$$z^5=-32\,i=32\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\,\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Άρα σύμφωνα με τον τύπο $(4.6.1-1)$ είναι

$$z_k=2\left(\cos\frac{2k\pi-\pi/2}{5}+i\sin\frac{2k\pi-\pi/2}{5}\right);\quad k=0,\,1,\,2,\,3,\,4.$$

Παράδειγμα 4.6.2 - 2 (ν - τάξης ρίζες της μονάδας)

Όμοια να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση

$$z^{\nu} = 1, \quad \text{όταν} \quad \nu = 1, 2, \ldots .$$

Λύση. Έχουμε $z^{\nu} = 1\,(\cos 0 + i \sin 0)$, οπότε

$$z_k = \left(\cos \frac{2k\pi}{\nu} + i \sin \frac{2k\pi}{\nu} \right); \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, \nu - 1.$$

Επειδή προφανώς ισχύει

$$z_k = \left(\cos \frac{2\pi}{\nu} + i \sin \frac{2\pi}{\nu} \right)^k; \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, \nu - 1$$

έχουμε

$$\begin{aligned} z_0 &= 1,\ \ z_1 = \cos \frac{2\pi}{\nu} + i \sin \frac{2\pi}{\nu}, \\ z_2 &= \left(\cos \frac{2\pi}{\nu} + i \sin \frac{2\pi}{\nu} \right)^2 = z_1^2,\ z_3 = z_1^3,\ \ldots,\ z_{\nu-1} = z_1^{\nu-1}. \end{aligned}$$

Άρα οι ν-τάξης ρίζες της μονάδας είναι

$$1, \quad z_1, \quad z_1^2, \quad z_1^3, \quad \ldots, \quad z_1^{\nu-1}.$$

Γεωμετρικά απεικονίζονται στις ν κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου που εγγράφεται σε κύκλο με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα 1. Ο κύκλος αυτός έχει εξίσωση $|z| = 1$ και λέγεται **μοναδιαίος κύκλος**.

4.6.3 Εξίσωση 2ου βαθμού

Έστω στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση

$$az^2 + bz + c = 0, \quad \text{όταν} \ \ a \neq 0. \tag{4.6.3 - 1}$$

Η $(4.6.3-1)$ γράφεται $az^2+bz=-c$, οπότε διαδοχικά προκύπτουν

$$\begin{aligned} z^2+\frac{b}{a}z &= -\frac{c}{a} \quad \text{ή} \\ z^2+\frac{b}{a}z+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{ή} \\ \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2}. \end{aligned}$$

Άρα

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{4.6.3 - 2}$$

Παράδειγμα 4.6.3 - 1

Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση

$$z^2+(2i-3)z+5-i=0$$

Λύση. Είναι $a=1$, $b=2i-3$ και $c=5-i$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(4.6.3-2)$ έχουμε

$$\begin{aligned} z &= \frac{-(2i-3)+\sqrt{(2i-3)^2-4(5-i)}}{2} \\ &= \frac{3-2i\pm\sqrt{-15-8\,i}}{2}=\frac{3-2i\pm(1-4i)}{2}, \end{aligned}$$

δηλαδή $z_1=2-3i$ και $z_2=1+i$.

Ο υπολογισμός της παραπάνω τετραγωνικής ρίζας γίνεται με τις παρακάτω δύο μεθόδους που είναι δυνατόν να εφαρμόζονται και όταν το βασικό όρισμα του μιγαδικού αριθμού δεν συμπίπτει με γνωστές γωνίες.

Μέθοδος I

Έστω

$$-15-8\,i=\sqrt{(-15)^2+(-8)^2}\,(\cos\theta+i\,\sin\theta)=17\,(\cos\theta+i\,\sin\theta)\,,$$

όταν
$$\cos\theta = -\frac{15}{17} \quad \text{και} \quad \sin\theta = -\frac{8}{17}\,. \tag{1}$$
Τότε από τον τύπο $(4.6.1-1)$ προκύπτει ότι
$$\sqrt{-15-8\,i} = \sqrt{17}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{2} + i\,\sin\frac{\theta+2k\pi}{2}\right)\,; \quad k=0,\,1.$$

Άρα οι ρίζες είναι οι μιγαδικοί αριθμοί:
$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt{17}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\,\sin\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{και} &(2)\\
z_1 &= \sqrt{17}\left[\cos(\frac{\theta}{2}+\pi) + i\,\sin(\frac{\theta}{2}+\pi)\right] = \sqrt{17}\left(-\cos\frac{\theta}{2} - i\,\sin\frac{\theta}{2}\right)\\
&= -\sqrt{17}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\,\sin\frac{\theta}{2}\right). &(3)
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με γνωστούς τύπους της Τριγωνομετρίας έχουμε
$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-15/17}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$$
$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+15/17}{2}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}\,.$$

Επειδή σύμφωνα με την (1) η γωνία θ ανήκει στο 3ο τεταρτημόριο - είναι αρνητικά τα πρόσημα των $\cos\theta$ και $\sin\theta$ - πρέπει η γωνία $\theta/2$ να ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο. Άρα $\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ και $\sin\frac{\theta}{2} = +\frac{4}{\sqrt{17}}$, οπότε αντικαθιστώντας στις (2) και (3) προκύπτει ότι $z_0 = -1+4\,i$ και $z_1 = 1-4\,i$.

Μέθοδος ΙΙ

Έστω ότι οι ρίζες είναι της μορφής $x+i\,y$. Τότε
$$(x+i\,y)^2 = x^2-y^2+2xy\,i = -15-8\,i, \quad \text{οπότε} \quad x^2-y^2=-15, \quad xy=-4.$$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει ότι $x=\pm 1$. Τότε, αν $x=1$ είναι $y=-4$ και, όταν $x=-1$, είναι $y=4$, δηλαδή οι ρίζες είναι οι $-1+4\,i$ και $1-4\,i$ αντίστοιχα. ∎

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι παρακάτω μιγαδικοί αριθμοί και οι ρίζες να γραφούν στην πολική και την εκθετική μορφή:

$i)$ $(-1+i)^{4/5}$

$ii)$ $(-1-\sqrt{3}\,i)^{1/3}$

$iii)$ $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{2/3}$

$iv)$ $\left(\dfrac{1}{2}+i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2/3}$

$v)$ $\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^{1/3}$

$vi)$ $(-1-i)^{1/5}$.

2. Να λυθούν στο $\mathbb{C}$ οι εξισώσεις

i) $5z^2+2z+10=0$,

ii) $z^2+(i-2)z+(3-i)=0$,

iii) $z^4+z^2+1=0$.

3. Αν $z\in\mathbb{C}$ να παρασταθεί γεωμετρικά ο μιγαδικός $|z|e^{i\theta}$ όπου $\theta=\mathrm{Arg}(z)$. Τι παρατηρείτε;

4. Αν $z\in\mathbb{C}$ να παρασταθούν γεωμετρικά οι μιγαδικοί

$$\overline{z},\quad -z,\quad z^2,\quad \frac{1}{z}\quad \text{με } z\neq 0.$$

5. Όμοια τους μιγαδικούς

$$z_1+z_2,\quad z_1z_2,\quad \frac{z_1}{z_2},$$

όταν $z_1,\, z_2\in\mathbb{C}$ με $z_2\neq 0$.

6. Δείξτε ότι

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2}.$$

7. Να προσδιοριστούν οι τιμές του $z\in\mathbb{C}$ για τις οποίες

$i)$ $e^{3z}=1$

$ii)$ $e^{4z}=i$.

Απαντήσεις

1. Τα αντίστοιχα βασικά ορίσματα είναι: (i) $\frac{3\pi}{4}$, (ii) $\frac{4\pi}{3}$, (iii) $\frac{5\pi}{6}$, (iv) $\frac{\pi}{3}$, (v) $\frac{5\pi}{3}$, (vi) $\frac{5\pi}{4}$.
2. (i) $z=-\frac{1}{5}\pm\frac{7}{5}\,i$, (ii) $z_1=1+i,\ z_2=1-2\,i$, (iii) $z=\pm(-1)^{1/3},\ \pm(-1)^{2/3}$.
3. Να χρησιμοποιηθεί ο ορισμός της εκθετικής μορφής.
4. Έστω $z=a+i\,b$. Τότε σύμφωνα με το Σχ. 4.5.1 - 1 κ.λπ.
6. Έστω $e^{z_1}=e^{x_1}\,(\cos y_1+i\,\sin y_1)$ και $e^{z_2}=e^{x_2}\,(\cos y_2+i\,\sin y_2)$ κ.λπ.
7. (i) $z=0,\ -\frac{2\pi}{3}\,i,\ \frac{2\pi}{3}\,i$. (ii) $z=\frac{\pi}{8}\,i,\ -\frac{3\pi}{8}\,i,\ \frac{5\pi}{8}\,i,\ -\frac{7\pi}{8}\,i$

4.7 Λογάριθμος μιγαδικού αριθμού

4.7.1 Ορισμός και τύπος υπολογισμού

Θεώρημα 4.7.1 - 1 (ύπαρξης). *Αν z είναι ένας μιγαδικός αριθμός με $z\neq 0$, τότε υπάρχει πάντοτε ένας άλλος μιγαδικός αριθμός, έστω w, έτσι ώστε $e^w=z$. Ένας από τους μιγαδικούς αυτούς αριθμούς w είναι της μορφής $\ln|z|+i\mathrm{Arg}\,z$, ενώ κάθε άλλος μιγαδικός δίνεται από τη σχέση:*

$$\ln|z|+i\,(\mathrm{Arg}\,z+2k\pi)\quad \text{με}\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Ορισμός 4.7.1 - 1 (λογάριθμου). *Έστω ο μιγαδικός αριθμός z με $z\neq 0$. Αν w είναι ένας μιγαδικός αριθμός τέτοιος, ώστε $e^w=z$, τότε ο w λέγεται λογάριθμος του z.*

Η ειδική τιμή του w που δίνεται από τον τύπο

$$w=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}\,z \tag{4.7.1 - 1}$$

λέγεται **αρχική τιμή** (principal value) του λογάριθμου και συμβολίζεται με $\mathrm{Ln}z$, ενώ γενικά είναι

$$\ln z=\ln|z|+i\,(\mathrm{Arg}\,z+2k\pi)\quad \text{με}\quad k=0,\,\pm1,\,\ldots\,. \tag{4.7.1 - 2}$$

Παράδειγμα 4.7.1 - 1

Να υπολογιστεί η αρχική τιμή του λογάριθμου του μιγαδικού αριθμού

$$z = -2\sqrt{3} - 2i.$$

Λύση. Η τριγωνομετρική μορφή του z είναι

$$z = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right),$$

οπότε

$$\mathrm{Ln}\left(-2\sqrt{3} - 2i\right) = 2\ln 2 + i\frac{7\pi}{6}.$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί η τιμή του λογάριθμου των παρακάτω μιγαδικών αριθμών:

$i) \quad z = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{3}\, i\right) \qquad ii) \quad z = 1 - i.$

Απαντήσεις

(i) $Arg(z) = \frac{4\pi}{3}$, quad (ii) $Arg(z) = \frac{7\pi}{4}$ κ.λπ.

4.7.2 Μιγαδικές δυνάμεις

Με τη βοήθεια των λογαρίθμων είναι δυνατόν να οριστούν οι μιγαδικές δυνάμεις.

Ορισμός 4.7.2 - 1. *Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w με $z \neq 0$. Τότε η δύναμη z^w ορίζεται από τη σχέση*

$$z^w = e^{w\mathrm{Ln}z}. \tag{4.7.2 - 1}$$

Επειδή

- $$i = 0 + 1\,i = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2}, \quad \text{οπότε} \quad \mathrm{Arg}(i) = \frac{\pi}{2},$$

σύμφωνα με τον Ορισμό 4.7.2 - 1 άμεσα προκύπτει ότι[5]

$$i^{\,i} = e^{i\,\mathrm{Ln}i} = e^{i\left(i\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}}, \quad \text{ενώ}$$

- $$-1 = -1 + 0\,i = \cos\pi + i\,\sin\pi, \quad \text{οπότε} \quad \mathrm{Arg}(-1) = \pi.$$

Τότε όμοια σύμφωνα με τον Ορισμό 4.7.2 - 1 είναι

$$(-1)^{i} = e^{i\,\mathrm{Ln}(-1)} = e^{i(i\,\pi)} = e^{-\pi}.$$

Παρατήρηση 4.7.2 - 1

Αν ο ν είναι ακέραιος, τότε

$$z^{\,\nu} = e^{\,\nu\,\mathrm{Ln}z} = e^{(\nu-1)\,\mathrm{Ln}z}\,e^{\mathrm{Ln}z} = z^{\,\nu-1}z,$$

δηλαδή ο ορισμός της δύναμης, που ορίζεται με τον τύπο $(4.7.2-1)$, συμφωνεί με τον ορισμό της δύναμης μιγαδικού αριθμού της παραγράφου 4.2.

Δίνονται τώρα χωρίς απόδειξη τα παρακάτω θεωρήματα που αφορούν τον υπολογισμό των μιγαδικών δυνάμεων:

Θεώρημα 4.7.2 - 1. *Αν $z,\, w_1,\, w_2 \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$, τότε*

$$z^{w_1} z^{w_2} = z^{w_1+w_2}.$$

Θεώρημα 4.7.2 - 2. *Αν $z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_1 z_2 \neq 0$, τότε*

$$(z_1 z_2)^{w} = {z_1}^{w}\,{z_2}^{w} e^{2\pi i w\,\mathrm{k}(z_1,z_2)}$$

[5]Επομένως το **μαθηματικό παράδοξο**: *η μιγαδική φανταστική μονάδα, όταν υψωθεί στη φανταστική μονάδα να ισούται με* πραγματικό αριθμό.

όπου

$$
\mathrm{k}\left(z_1, z_2\right)=\begin{cases} 0 & \alpha\nu \quad -\pi < \operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2 \leq \pi \\ 1 & \alpha\nu \quad -2\pi < \operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2 \leq -\pi \\ -1 & \alpha\nu \quad \pi < \operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2 \leq 2\pi \end{cases}
$$

Άσκηση

Δείξτε ότι

i) $(1+i)^i=\left[\cos\left(\frac{\ln 2}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\ln 2}{2}\right)\right]e^{-\frac{\pi}{4}}$,

ii) $\left|(-1)^{-i}\right|=e^{\frac{3\pi}{2}}$.

4.8 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά.* Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[2] Ξένος, Θ. (2008). *Μιγαδικές Συναρτήσεις.* Εκδόσεις Ζήτη. ISBN 978–960–456–092–9.

[3] Τσάγκας, Γρ. (1990). *Μαθήματα Μιγαδικών Συναρτήσεων.* Θεσσαλονίκη.

[4] Churchill, R. & Brown, J. (2005). *Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 960–7309–41–3.

[5] Spiegel, M. (2009). *Complex Variables.* Εκδότης McGraw-Hill Education – Europe. ISBN 007–060–230–1.

[6] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά.* Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 5

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

5.1 Εισαγωγή

Στο μάθημα αυτό θα δοθούν οι βασικότερες έννοιες των μιγαδικών συναρτήσεων. Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία του μαθήματος [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

5.1.1 Ορισμοί

Έστω z μια μεταβλητή, που συμβολίζει τις τιμές ενός συνόλου D όπου $D \subseteq \mathbb{C}$ με $\mathbb{C}$ το σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Τότε η z θα λέγεται μιγαδική μεταβλητή ή απλά στο εξής μεταβλητή. Αν σε κάθε τιμή της μεταβλητής z αντιστοιχούν μία ή περισσότερες τιμές της μιγαδικής μεταβλητής w, τότε η w θα λέγεται ότι είναι μία **μιγαδική συνάρτηση** του z και θα γράφεται

$$w = f(z).$$

Ειδικότερα, αν στο z αντιστοιχεί μία ακριβώς τιμή του w, η f θα λέγεται μονότιμη συνάρτηση, ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση πλειότιμη. Τότε το D θα ορίζει το **πεδίο ορισμού** της f, ενώ το σύνολο των τιμών της w, έστω T, το **πεδίο τιμών** της f.

Παράδειγμα 5.1.1 - 1

Η συνάρτηση

$$f(z) = z^3$$

και γενικότερα η

$$z^\nu; \quad \nu = 1,\, 2,\, \ldots \quad \text{με} \quad z \in \mathbb{C}$$

είναι μονότιμη, επειδή σύμφωνα με τον ορισμό της δύναμης[1] σε κάθε $z \in \mathbb{C}$ αντιστοιχεί ακριβώς ένας μιγαδικός z^ν. Ειδικότερα, αν

$$z = 2 - 3\,i, \quad \text{τότε} \quad z^3 = -46 - 9\,i.$$

Παράδειγμα 5.1.1 - 2

Η συνάρτηση

$$g(z) = z^{1/3}$$

και γενικότερα η

$$z^{1/\nu} \quad \nu = 2,\, 3,\, \ldots,$$

όταν $z \in \mathbb{C}$, είναι πλειότιμη, επειδή ν-τάξης ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού[2] είναι ν το πλήθος διαφορετικοί μιγαδικοί αριθμοί.

Όμοια, έστω $z = -1 + i$. Τότε

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\sin\frac{5\pi}{4}\right), \quad \text{οπότε} \\ z^{1/2} &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}{2} + i\,\sin\frac{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}{2}\right); \; k = 0,\, 1. \end{aligned}$$

Αν $w = f(z)$, τότε είναι δυνατόν το z να θεωρηθεί ως συνάρτηση του w, με την έννοια της συνάρτησης που παραπάνω δόθηκε. Στην περίπτωση αυτή γράφεται $z = f^{-1}(w)$ και η f^{-1} λέγεται στην περίπτωση αυτή **αντίστροφη συνάρτηση** της f.

---

[1] Βλέπε Μάθημα *Μιγαδικοί Αριθμοί* - Παράγραφος 4.2.

[2] Βλέπε Μάθημα *Μιγαδικοί Αριθμοί* - Παράγραφος 4.6.

5.1.2 Αναλυτική έκφραση

Έστω η συνάρτηση

$$w = f(z), \quad \text{όπου} \quad z = x + i\,y \quad \text{με} \quad x,\, y \in \mathbb{R}.$$

Τότε μετά από πράξεις η w γράφεται στη μορφή

$$w = f(x + iy) = u(x, y) + i\,v(x, y) \quad \text{για κάθε } \; z \in D, \qquad (5.1.2 - 1)$$

όπου οι $u(x, y)$ και $v(x, y)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις δύο πραγματικών μεταβλητών x και y, που λέγονται και **συνιστώσες** της f. Η $(5.1.2 - 1)$ ορίζει τότε την **αναλυτική έκφραση** της f.

Στην $(5.1.2-1)$ η $u(x, y)$ λέγεται το πραγματικό και η $v(x, y)$ το φανταστικό μέρος της f στο D και ορίζουν έναν **μετασχηματισμό** (transformation) στο D, με την έννοια ότι ένα σημείο του z-επιπέδου απεικονίζεται μέσω της f στο αντίστοιχο σημείο του w-επιπέδου ή σε περίπτωση πλειότιμης συνάρτησης στα αντίστοιχα σημεία του w-επιπέδου.

Παράδειγμα 5.1.2 - 1

Έστω $f(z) = z^2$. Τότε, αν $z = x + i\,y$, διαδοχικά έχουμε

$$f(z) = f(x + i\,y) = (x + i\,y)^2 = x^2 + 2xy\,i + (i\,y)^2 = x^2 - y^2 + 2xy\,i,$$

οπότε το πραγματικό της μέρος είναι το $u(x, y) = x^2 - y^2$ και το φανταστικό $v(x, y) = 2xy$.

5.2 Στοιχειώδεις μιγαδικές συναρτήσεις

5.2.1 Πολυωνυμική

Ορισμός 5.2.1 - 1. *Ορίζεται κάθε συνάρτηση της μορφής*

$$P(z) = P_\nu(z) = \alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1} z^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 \quad \text{για κάθε} z \in \mathbb{C}, \; (5.2.1 - 1)$$

όπου $\alpha_k \in \mathbb{C}$ *για κάθε* $k = 0,\, 1,\, \ldots,\, \nu$ *με* $\alpha_\nu \neq 0$.

Αν $P(z)=0$, δηλαδή

$$f(z)=P_\nu(z)=\alpha_\nu z^\nu+\alpha_{\nu-1}z^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 z+\alpha_0=0, \qquad (5.2.1 - 2)$$

όταν $\alpha_k\in\mathbb{C}$ και $k=0,\,1,\,\ldots,\,\nu$ με $\alpha_\nu\neq 0$, τότε ορίζεται η **πολυωνυμική εξίσωση** ν - βαθμού.[3]

Από την Άλγεβρα είναι τότε γνωστό το παρακάτω θεώρημα σχετικά με τις ρίζες του πολυωνύμου $P(z)$:

Θεώρημα 5.2.1 - 1 (θεμελιώδες της Άλγεβρας). *Το πολυώνυμο P έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{C}$.*

Συνέπεια του θεωρήματος 5.2.1 - 1 είναι ότι το P έχει ν ακριβώς ρίζες στο $\mathbb{C}$, έστω $z_1,\,z_2,\,\ldots,\,z_\nu$, που μερικές ή και όλες είναι δυνατό να συμπίπτουν. Αν οι ρίζες είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε

$$P(z)=a_\nu\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)\cdots\left(z-z_\nu\right), \qquad (5.2.1 - 3)$$

ενώ στην περίπτωση που μία ρίζα, έστω η z_1, έχει πολλαπλότητα ρ, είναι

$$P(z)=\left(z-z_1\right)^\rho P_1(z), \qquad (5.2.1 - 4)$$

όπου $P_1\left(z_1\right)\neq 0$ και $\rho=2,\,3,\,\ldots$.

5.2.2 Ρητή

Ορισμός 5.2.2 - 2. *Ορίζεται κάθε συνάρτηση της μορφής*

$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}\quad \text{για κάθε } z\in\mathbb{C}-\{\text{ρίζες του } Q\}\,,$$

όπου $P,\,Q$ πολυωνυμικές συναρτήσεις.

[3] Για εφαρμογή στη 2ου βαθμού και τη διώνυμη εξίσωση βλέπε Μάθημα *Μιγαδικοί Αριθμοί* - Παράγραφοι 4.6.2 και 4.6.3.

5.2.3 Εκθετική

Ορισμός 5.2.3 - 3 (εκθετικής συνάρτησης). *Αν $z = x + iy$, ορίζεται από τον τύπο*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}. \tag{5.2.3 - 5}$$

Από τον ορισμό προκύπτουν:

i) αν ο z είναι πραγματικός αριθμός, δηλαδή $y = 0$, τότε η συνάρτηση e^z συμπίπτει με την πραγματική e^x,

ii) αν $x = 0$, ισχύει η ταυτότητα του Euler

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad \text{για κάθε } y \in \mathbb{R}. \tag{5.2.3 - 6}$$

Τότε προφανώς είναι $\left|e^{iy}\right| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1$, ενώ σύμφωνα με την $(5.2.3 - 5)$ ισχύει ότι

$$|e^z| = |e^x (\cos y + i \sin y)| = e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x.$$

Ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης:

i)

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \quad \text{και} \quad (e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$$

για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, ενώ είναι $e^1 = e$ και $e^0 = 1$.

ii)

$$e^z \neq 0 \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

iii) Ισχύει $e^z = 1$ τότε και μόνον, όταν $z = 2k\pi i$ με $k \in \mathbb{Z}$.

5.2.4 Όρισμα

[4]Είναι γνωστό ότι κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται στην εκθετική του μορφή ως εξής:

$$z = |z|(\cos\theta + i\,\sin\theta) = |z|e^{i\,\theta}.$$

Τότε σύμφωνα και με τον Ορισμό 5.2.3 - 3 έχουμε:

Ορισμός 5.2.4 - 4 (συνάρτηση ορίσματος). *Για κάθε μιγαδικό αριθμό z με $|z| = 1$ ορίζεται ως συνάρτηση του ορίσματος (argument) και συμβολίζεται με $\arg z$, κάθε πραγματικός αριθμός θ για τον οποίο ισχύει $z = e^{i\theta}$, δηλαδή*

$$\theta = \arg z \quad \textit{τότε και μόνον, όταν } z = e^{i\theta}.$$

Επειδή

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta = \cos(\theta + 2k\pi) + i\,\sin(\theta + 2k\pi),$$

ενώ προφανώς $|e^{i\theta}| = 1$, από τον Ορισμό 5.2.4 - 4 προκύπτει ότι η συνάρτηση του ορίσματος $\arg z$ ενός μιγαδικού αριθμού είναι **πλειότιμη** με πεδίο ορισμού το σύνολο των σημείων της περιφέρειας του μοναδιαίου κύκλου.

Στην περίπτωση που $|z| \neq 1$ και $z \neq 0$, από τον Ορισμό 5.2.4 - 4 προκύπτει ότι:

$$\theta = \arg z = \arg\frac{z}{|z|} \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C} \text{ με } z \neq 0. \tag{5.2.4 - 7}$$

Τότε, επειδή σύμφωνα με τον τύπο $(5.2.4 - 7)$ και τον Ορισμό 5.2.4 - 4 είναι $e^{i\theta} = z/|z|$, πρέπει, αν $z = x + iy$, το όρισμα να προκύπτει ως η κοινή λύση του παρακάτω συστήματος εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \quad \text{και} \\ \sin\theta &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \end{aligned} \tag{5.2.4 - 8}$$

με άγνωστο το θ.

[4]Βλέπε Μάθημα *Μιγαδικοί Αριθμοί* - Παράγραφος 4.5.1.

Από το σύνολο αυτό των τιμών θ της συνάρτησης $\arg z$ στην $(5.2.4-8)$ υπάρχει ακριβώς μία τιμή, έστω

$$\theta_0 = \mathrm{Arg} z \quad \text{με} \quad \theta_0 \in [0, 2\pi), \tag{5.2.4 - 9}$$

που λέγεται **βασικό όρισμα** του z και η οποία ορίζει μία **μονότιμη** συνάρτηση. Τότε προφανώς ισχύει

$$\arg z = \mathrm{Arg}\, z + 2k\pi \quad \text{για κάθε } k = 0,\, \pm 1,\, \ldots\,, \tag{5.2.4 - 10}$$

ενώ είναι

$$z = |z|\, e^{i\theta} = |z|\, e^{i \arg z} = |z|\, e^{i\,(\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi)}. \tag{5.2.4 - 11}$$

Σημείωση 5.2.4 - 1

Αντί του διαστήματος $[0, 2\pi)$ χρησιμοποιείται επίσης και το διάστημα $[-\pi, \pi)$, είναι όμως δυνατόν να χρησιμοποιηθεί και κάθε άλλο διάστημα πλάτους 2π.

5.2.5 Λογαριθμική

Ορισμός 5.2.5 - 5 (φυσικού λογάριθμου). *Έστω $z \neq 0$. Τότε ορίζεται ως φυσικός λογάριθμος του z και συμβολίζεται με $\log_e z$ ή συνήθως με $\ln z$, κάθε μιγαδικός αριθμός w που επαληθεύει την εξίσωση $e^w = z$.*

Επειδή σύμφωνα με την $(5.2.4-11)$ είναι

$$z = |z|\, e^{i\,\theta} = |z| e^{i(\theta + 2k\pi)} = |z| e^{i(\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi)} \quad \text{για κάθε} \quad k = 0,\, \pm 1,\, \ldots,$$

από τον ορισμό του λογάριθμου προκύπτει ότι

$$e^w = |z| e^{i(\mathrm{Arg} z + 2k\pi)} \quad \text{για κάθε} \quad k = 0,\, \pm 1,\, \ldots,$$

δηλαδή ο λογάριθμος ορίζεται από τη σχέση

$$\ln z = \ln |z| + i\,(\mathrm{Arg} z + 2k\pi) \quad \text{για κάθε } k = 0,\, \pm 1,\, \ldots \tag{5.2.5 - 12}$$

και είναι μια **πλειότιμη** συνάρτηση. Τότε για $k = 0$ ορίζεται η **αρχική** του τιμή, που συμβολίζεται με

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln |z| + i\, \mathrm{Arg}\, z \tag{5.2.5 - 13}$$

και είναι τότε μία **μονότιμη** συνάρτηση.

5.2.6 Γενίκευση εκθετικής συνάρτησης

Έχοντας υπόψη τους Ορισμούς 5.2.3 - 3 και 5.2.5 - 5 δίνεται η παρακάτω γενίκευση της εκθετικής συνάρτησης:[5]

Ορισμός 5.2.6 - 6. *Η συνάρτηση a^z με $a \in \mathbb{C}$ και $a \neq 0$, ορίζεται από τη σχέση*

$$a^z = e^{z \ln a} \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}$$

με αρχική τιμή την

$$a^z = e^{z \,\mathrm{Ln} a} \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

Τότε η a^z είναι μια πλειότιμη συνάρτηση, ενώ η αρχική της μονότιμη.

Ιδιότητες

Από τον Ορισμό 5.2.6 - 6 προκύπτουν οι ιδιότητες:

- $a^{z_1}\, a^{z_2} = a^{z_1 + z_2}$, και
- $(a^{z_1})^{z_2} = a^{z_1 z_2}$ για κάθε $z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$,

ενώ είναι $a^1 = a$ και $a^0 = 1$.

Ο Ορισμός 5.2.6 - 6 γενικεύεται ως εξής:

Ορισμός 5.2.6 - 7 *Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $f(z) \neq 0$ η δύναμη $[f(z)]^{g(z)}$ ορίζεται από τη σχέση*

$$[f(z)]^{g(z)} = e^{g(z) \ln f(z)}. \tag{5.2.6 - 14}$$

Είναι προφανές ότι στην περίπτωση αυτή έχουμε επίσης μία πλειότιμη συνάρτηση, ενώ η αρχική τιμή της είναι

$$[f(z)]^{g(z)} = e^{g(z) \mathrm{Ln} f(z)}. \tag{5.2.6 - 15}$$

---

[5] Βλέπε Μάθημα *Πραγματικές Συναρτήσεις* - Παράγραφος 3.3.7 (αντίστοιχη πραγματική εκθετική συνάρτηση a^x) και Μάθημα *Μιγαδικοί Αριθμοί* - Παράγραφος 4.7.

Άσκηση

Να αποδειχθούν οι ιδιότητες των Παραγράφων 5.2.3 και 5.2.6.

5.2.7 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις αυτές ορίζονται με τη βοήθεια των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων ως εξής:

Ημίτονο	$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$	Συνημίτονο	$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
Εφαπτομένη	$\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$	Συνεφαπτομένη	$\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$

με κατάλληλους περιορισμούς στο z, όπου αυτό απαιτείται.

Σημείωση 5.2.7 - 2

Στις εφαρμογές χρησιμοποιούνται επίσης οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \quad \text{και} \quad \csc z = \frac{1}{\sin z} = \frac{2\,i}{e^{iz} - e^{-iz}}\,.$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Αν $w = \sin z$, η αντίστροφη συνάρτηση που συμβολίζεται με $z = \sin^{-1} w$ ή επίσης και $z = \arcsin w$, ορίζει το **τόξο ημιτόνου** z και προφανώς είναι μία πλειότιμη συνάρτηση.

Όμοια ορίζονται οι αντίστροφες των άλλων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Αποδεικνύεται ότι οι αρχικές τιμές των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων δίνονται από τους τύπους

$$\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\,\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \qquad \tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)$$

$$\cos^{-1} z = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) \qquad \cot^{-1} z = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)$$

με κατάλληλους περιορισμούς στο z, όπου αυτό απαιτείται.

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι

i) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,

ii) $\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z, \quad \tan(-z) = -\tan z$,

iii) $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$.

2. Όμοια ότι

$$\tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right).$$

3. Δείξτε ότι οι

$$\sin z, \quad \tan z \quad \text{και} \quad \cot z$$

είναι περιττές συναρτήσεις, ενώ η $\cos z$ άρτια συνάρτηση.

4. Να υπολογιστούν τα

$$\sin^{-1} 2 \quad \text{και} \quad \cos^{-1} i.$$

5. Δείξτε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι

$$\overline{\sin z} = \sin \overline{z}, \quad \overline{\cos z} = \cos \overline{z} \quad \text{και} \quad \overline{\tan z} = \tan \overline{z}.$$

Απαντήσεις

1. Αντικατάσταση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με τις αντίστοιχες εκφράσεις τους.

2. Έστω

$$w = \tan z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \Big/ \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \text{οπότε γράφοντας} \quad e^{-iz} = \frac{1}{e^{iz}}$$

και λύνοντας ως προς z προκύπτει λογαριθμίζοντας την τελική σχέση η αποδεικτέα.

3. Εφαρμογή του ορισμού των περιττών, αντίστοιχα άρτιων συναρτήσεων στις εκφράσεις των συναρτήσεων.

4. Είναι $\sin^{-1} z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$, οπότε θέτοντας $z = 2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \sin^{-1} 2 &= \frac{1}{i} \operatorname{Ln}\left(2\,i + \sqrt{1-2^2}\right) = \ldots = \frac{1}{i}\left[\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + i\,\frac{\pi}{2}\right] \\ &= 1.570\,796 - 1.316\,958\,i. \end{aligned}$$

Όμοια

$$\begin{aligned} \cos^{-1} i &= \frac{1}{i}\,\mathrm{Ln}\left(i + \sqrt{i^2 - 1}\right) = \ldots = \frac{1}{i}\left[\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + i\,\frac{\pi}{2}\right] \\ &= 1.570\,796 - 0.881\,374\,i. \end{aligned}$$

5. Θα δειχθεί ότι $\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$. Έστω $z = x + i\,y$, οπότε $\overline{z} = x - i\,y$. Τότε

$$\sin \overline{z} = \frac{e^{i(x-i\,y)} - e^{-i(x-i\,y)}}{2i} = \ldots = \frac{e^{y}\,(\cos x + i\,\sin x) - e^{-y}\,(\cos x - i\,\sin x)}{2i}, \qquad (1)$$

ενώ

$$\overline{\sin z} = \frac{\overline{e^{-y+i\,x} - e^{y-i\,x}}}{\overline{2i}} = \ldots = \frac{e^{y}\,(\cos x + i\,\sin x) - e^{-y}\,(\cos x - i\,\sin x)}{2i}. \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει η αποδεικτέα. Όμοια και οι άλλες δύο περιπτώσεις.

5.2.8 Υπερβολικές συναρτήσεις

Όμοια, όπως και στις πραγματικές συναρτήσεις, ορίζονται οι υπερβολικές συναρτήσεις με τη βοήθεια των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων ως εξής:

Ημίτονο $\sinh z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$ Συνημίτονο $\cosh z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$

Εφαπτομένη $\tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$ Συνεφαπτομένη $\coth z = \dfrac{\cosh z}{\sinh z}$

με κατάλληλους περιορισμούς στο z όπου αυτό απαιτείται.

Σημείωση 5.2.8 - 3

Επίσης στις εφαρμογές χρησιμοποιούνται οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$\mathrm{sech} z = \frac{1}{\cosh z} = \frac{2}{e^{z} + e^{-z}} \quad \text{και} \quad \mathrm{csch} z = \frac{1}{\sinh z} = \frac{2}{e^{z} - e^{-z}}.$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Αποδεικνύεται ότι οι αρχικές τιμές των αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων δίνονται από τους τύπους

$$\sinh^{-1} z = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right) \qquad \tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$\cosh^{-1} z = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) \qquad \coth^{-1} z = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

με κατάλληλους περιορισμούς στο z.

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι

i) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$,

ii) $\sinh(-z) = -\sinh z, \quad \cosh(-z) = \cosh z, \quad \tanh(-z) = -\tanh z$,

iii) $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$,

iv) $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \mp \sinh z_1 \sinh z_2$.

2. Όμοια ότι

$$\begin{aligned} \sinh^{-1} z &= \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right) \\ \tanh^{-1} z &= \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \end{aligned}$$

με κατάλληλους περιορισμούς στο z.

3. Να υπολογιστεί το $\sinh^{-1} i$.

Απαντήσεις

1. Αντικατάσταση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με τις αντίστοιχες εκφράσεις τους.

2. Έστω

$$w = \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \text{οπότε γράφοντας} \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z},$$

λύνοντας ως προς z και λογαριθμίζοντας προκύπτει τελικά η αποδεικτέα.

3. Είναι $\sinh^{-1} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{1-z^2}\right)$, οπότε θέτοντας $z = i$ προκύπτει ότι

$$\sinh^{-1} i = \operatorname{Ln}\left(i + \sqrt{i^2+1}\right) = \ldots = \operatorname{Ln} i = \ln 1 + i\,\frac{\pi}{2} = i\,\frac{\pi}{2}.$$

5.3 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[2] Ξένος, Θ. (2008). *Μιγαδικές Συναρτήσεις*. Εκδόσεις Ζήτη. ISBN 978–960–456–092–9.

[3] Τσάγκας, Γρ. (1990). *Μαθήματα Μιγαδικών Συναρτήσεων*. Θεσσαλονίκη.

[4] Bak, J. & Newman, D. (2004). *Μιγαδική Ανάλυση*. Εκδόσεις Leader Books. ISBN: 978–960–790–140–8.

[5] Churchill, R. & Brown, J. (2005). *Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 960–7309–41–3.

[6] Spiegel, M. (2009). *Complex Variables*. Εκδότης McGraw-Hill Education – Europe. ISBN 007–060–230–1.

[7] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 6

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

6.1 Πίνακες

Η επίλυση διαφόρων προβλημάτων των Μαθηματικών και γενικότερα των εφαρμοσμένων επιστημών οδήγησε μεταξύ των άλλων στην ανάγκη ομαδοποίησης των διαφόρων δεδομένων. Κύριος στόχος της ομαδοποίησης αυτής ήταν αφενός η εύκολη πρόσβαση σε αυτά και αφετέρου η ευκολία των μεταξύ τους πράξεων. Στην περίπτωση που τα δεδομένα αυτά είναι πραγματικοί ή γενικότερα μιγαδικοί αριθμοί, η παραπάνω ομαδοποίηση γίνεται με την έννοια του πίνακα, μια έννοια που εισάγεται στη συνέχεια αυτού του μαθήματος, ενώ για μία γενικότερη αντιμετώπιση του προβλήματος, ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11] και
https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_(mathematics).

6.1.1 Ορισμοί

Ορισμός 6.1.1 - 1 (πίνακα). *Λέγεται πίνακας (matrix) τάξης (m, n) μία διάταξη $m\,n$ στοιχείων από το σύνολο $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$, που είναι διατεταγμένα σε m-γραμμές και n-στήλες, έτσι ώστε κάθε στοιχείο της να ανήκει ακριβώς σε μία γραμμή και μία στήλη.*

Οι πίνακες θα συμβολίζονται στο εξής με κεφαλαία γράμματα, όπως A, B, C κ.λπ., ενώ ένας πίνακας A με στοιχεία από το $\mathbb{R}$ τάξης (m,n) θα συμβολίζεται με $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και με $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, όταν έχει στοιχεία από το $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 6.1.1 - 1

Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{1η γραμμή} \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \\ \quad\ \uparrow \\ \text{1η στήλη} \end{array} \qquad \text{είναι τάξης} \quad (3,2),$$

επειδή έχει 3 γραμμές και 2 στήλες.

Στο παραπάνω παράδειγμα αν τα στοιχεία του πίνακα A συμβολιστούν με το γράμμα, έστω a, τότε για να καθοριστούν τα στοιχεία αυτά στις επιμέρους θέσεις του πίνακα, απαιτούνται δύο δείκτες, που ένας να δείχνει τη γραμμή και ο άλλος τη στήλη στην οποία ανήκει το κάθε στοιχείο. Αν δεχθούμε ότι στο εξής ο πρώτος δείκτης, έστω i, θα συμβολίζει τις γραμμές (rows) του πίνακα και ο δεύτερος, έστω j, τις στήλες (columns), τότε ο παραπάνω πίνακας A γράφεται ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = (a_{ij}), \quad \text{όταν} \quad \begin{array}{lcl} i & = & 1,\, 2,\, 3 \ \text{και} \\ j & = & 1,\, 2. \end{array}$$

Γενικότερα ένας πίνακας A τάξης (m,n) γράφεται

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})\ ;\ 1 \le i \le m\,,\ 1 \le j \le n. \quad (6.1.1 - 1)$$

Αν $n = 1$, δηλαδή υπάρχει μια μόνο στήλη, τότε ο πίνακας λέγεται **πίνακας διάνυσμα** ή απλά **διάνυσμα**.

Παράδειγμα 6.1.1 - 2

Οι παρακάτω πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \overrightarrow{a} = \mathbf{a} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \overrightarrow{b} = \mathbf{b}$$

είναι πίνακες διανύσματα τάξης $(2, 1)$ και $(3, 1)$ αντίστοιχα.

Αν $m = n$, τότε ο πίνακας λέγεται **τετραγωνικός πίνακας** τάξης (n, n) ή εν συντομία τάξης n.

Παράδειγμα 6.1.1 - 3

Οι παρακάτω πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

είναι τετραγωνικοί τάξης 2 και 3 αντίστοιχα. Τότε γράφεται $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ και $B \in \mathbb{R}^{3\times3}$, όταν τα στοιχεία των πινάκων είναι πραγματικοί αριθμοί, αντίστοιχα γράφεται $A \in \mathbb{C}^{2\times2}$ και $B \in \mathbb{C}^{3\times3}$, όταν είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Τα στοιχεία a_{11}, a_{22}, $\ldots$, a_{nn} ενός τετραγωνικού πίνακα τάξης n ορίζουν την **κύρια** ή **πρωτεύουσα διαγώνιο**, ενώ τα a_{1n}, $a_{2,n-1}$, $\ldots$, a_{n1} τη δευτερεύουσα διαγώνιο.

Παρατήρηση 6.1.1 - 1

Στο εξής στις διάφορες εφαρμογές θα χρησιμοποιείται μόνον η κύρια διαγώνιος.

Παράδειγμα 6.1.1 - 4

Στον τετραγωνικό πίνακα

$$A = \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\ & \searrow & & \swarrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\ & \swarrow & & \searrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \end{array}\right]$$

τα στοιχεία $a_{11},\ a_{22},\ a_{33}$ ορίζουν την κύρια και τα $a_{13},\ a_{22},\ a_{31}$ τη δευτερεύουσα διαγώνιο.

Ορισμός 6.1.1 - 2 *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τετραγωνικός πίνακας. Τότε το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου ορίζει το* **ίχνος** *(trace) του A, που συμβολίζεται με $\mathrm{tr}\ (A) = \mathrm{trace}\ (A)$, δηλαδή*

$$\mathrm{tr}\ (A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Επομένως, αν

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad \mathrm{tr}(A) = -1 + 2 + 5 = 6.$$

Ορισμός 6.1.1 - 3 (διαγώνιος πίνακας). *Έστω $A = (a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Αν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i \neq j$, τότε ο A λέγεται διαγώνιος (diagonal) και συμβολίζεται με $A = diag\,(a_{ii})$; $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Παράδειγμα 6.1.1 - 5

Οι πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

είναι διαγώνιοι, ενώ οι πίνακες

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

δεν είναι.

Η δημιουργία με το MATHEMATICA ενός διαγώνιου πίνακα, έστω του A_2, γίνεται με την παρακάτω εντολή [7]:

Πρόγραμμα 6.1.1 - 1 (δημιουργία πίνακα διαγώνιου)

```
DiagonalMatrix[{2,0,-1,-2}]//MatrixForm
```

Ορισμός 6.1.1 - 4 (μοναδιαίος πίνακας). *Ένας διαγώνιος πίνακας $A = (a_{ij})$ τάξης n θα λέγεται μοναδιαίος (identity) και θα συμβολίζεται με I_n ή απλά I, όταν $a_{ii} = 1$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Επομένως οι πίνακες

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{I} = \mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{I} = \mathrm{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι μοναδιαίοι, ενώ οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν είναι.

Όμοια η δημιουργία ενός μοναδιαίου πίνακα τάξης, έστω 3, με το MATHEMATICA γίνεται με την εντολή:

Πρόγραμμα 6.1.1 - 2 (δημιουργία πίνακα μοναδιαίου)

```
IdentityMatrix[3]//MatrixForm
```

6.1.2 Αλγεβρική δομή

Δίνεται στη συνέχεια η αλγεβρική δομή στο σύνολο των πινάκων.

Ισότητα

Ορισμός 6.1.2 - 1. *Έστω οι πίνακες $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ τάξης (m, n). Οι πίνακες A και B θα είναι ίσοι τότε και μόνον, όταν $a_{ij} = b_{ij}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Άρα, αν

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad \begin{array}{rclcrcl} a & = & -1 & \quad & b & = & 0 \\ c & = & 3 & \quad & d & = & 2. \end{array}$$

Είναι προφανές ότι η ισότητα ορίζει στο σύνολο των πινάκων τάξης (m, n) μία σχέση **ισοδυναμίας**, δηλαδή αν A, B, C είναι πίνακες τάξης (m, n), τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

- $A = A$ **αυτοπαθής**,
- αν $A = B$, τότε και $B = A$ **συμμετρική**,
- αν $A = B$ και $B = C$, τότε και $A = C$ **μεταβατική**.

Πίνακες διαφορετικοί

Ορισμός 6.1.2 - 2. *Έστω οι πίνακες $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ τάξης (m, n). Οι πίνακες A και B θα είναι διαφορετικοί και θα συμβολίζεται αυτό με $A \neq B$ τότε και μόνον, όταν $a_{ij} \neq b_{ij}$ για ένα τουλάχιστον $i = 1, 2, \ldots, m$ ή $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Επομένως, αν

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{1} \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{0} \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad A \neq B.$$

Παρατήρηση 6.1.2 - 1

Η έννοια της διάταξης, δηλαδή της $>$, αντίστοιχα της $<$, δεν ορίζεται στους πίνακες.

Πρόσθεση

Ορισμός 6.1.2 - 3. *Έστω οι πίνακες $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ τάξης (m, n). Τότε ορίζεται ως άθροισμά τους ο πίνακας $A + B = (c_{ij})$ όμοια τάξης (m, n), όπου $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Επομένως, αν

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \\ A + B &= \begin{bmatrix} -1+2 & 3+1 \\ -2+3 & 1+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της πρόσθεσης και θεωρώντας ότι οι πίνακες είναι της **ίδιας τάξης**, αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες:

Ιδιότητες

i) **αντιμεταθετική** (commutative) $\quad A + B = B + A$,

ii) **προσεταιριστική** (associative) $\quad (A + B) + C = A + (B + C)$,

iii) υπάρχει ένας ακριβώς πίνακας, έστω M, που λέγεται **μηδενικός** (null matrix) και του οποίου τα στοιχεία είναι όλα ίσα με το μηδέν τέτοιος, ώστε $A + M = A$ για κάθε πίνακα A.

Άρα, αν

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

iv) Για κάθε πίνακα A υπάρχει ακριβώς ένας πίνακας, που λέγεται **αντίθετος** του A και συμβολίζεται με $-A$, έτσι ώστε $A + (-A) = M$.

Άρα, αν

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε προφανώς} \quad -A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

v) Αν $A + X = B + X$, τότε $A = B$ για κάθε πίνακα A, B και X (**νόμος της διαγραφής**).

vi) Για κάθε πίνακα A, B και X η εξίσωση $A + X = B$ έχει ακριβώς μία λύση τη

$$X = B - A.$$

Η λύση της εξίσωσης λέγεται **διαφορά** του πίνακα B από τον A, ενώ η πράξη με την οποία υπολογίζεται η διαφορά αυτή λέγεται **αφαίρεση**.

Επομένως, αν

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \\ A - B &= \begin{bmatrix} 1 + (-3) & -2 + 1 \\ 5 + 2 & 3 + (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Η απόδειξη των ιδιοτήτων αφήνεται ως άσκηση.

Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα

Ορισμός 6.1.2 - 4. *Έστω ο πίνακας* $A = (a_{ij})$ *τάξης* (m, n) *και* $\lambda \in \mathbb{R}$, *αντίστοιχα* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Τότε το γινόμενο* λA *ορίζεται ότι είναι ο πίνακας* $\lambda A = \lambda (a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$ *τάξης* (m, n) *για κάθε* $i = 1, 2, \ldots, m$ *και* $j = 1, 2, \ldots, n$.

Επομένως, αν

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \lambda = 3, \quad \text{τότε}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-4) \\ 3 \cdot (-5) & 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ -15 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται αν το λ αντικατασταθεί με ένα βαθμωτό μέγεθος, έστω $\phi(x)$.

Παρατήρηση 6.1.2 - 2

Γράφεται λA και όχι $A\lambda$.

Όμοια βάσει του ορισμού και θεωρώντας ότι οι πίνακες είναι της **ίδιας τάξης**, αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες:

Ιδιότητες

i) $1A = A$ και $0A = M$, όταν M ο μηδενικός πίνακας,

ii) επιμεριστική ως προς την πρόσθεση πινάκων

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B,$$

iii) επιμεριστική ως προς την πρόσθεση αριθμών

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A,$$

iv) προσεταιριστική ως προς το γινόμενο αριθμών

$$\lambda(\mu A) = \mu(\lambda A) = (\lambda\mu)A.$$

Η απόδειξη των ιδιοτήτων αφήνεται ως άσκηση.

Πολλαπλασιασμός πινάκων

Ορισμός 6.1.2 - 5. *Έστω ο πίνακας* $A = (a_{ij})$ *τάξης* (m, n) *και ο πίνακας* $B = (b_{ij})$ *τάξης* (n, ρ). *Τότε ορίζεται ως γινόμενό τους ο πίνακας* $AB = (c_{ij})$ *τάξης* (m, p) *όπου*

$$\begin{aligned} c_{ij} &= [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} \\ &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}. \end{aligned} \tag{6.1.2 - 1}$$

Παρατήρηση 6.1.2 - 3

Συμβολικά η σχέση $(6.1.2 - 2)$ προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1j} & \ldots & c_{1\rho} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \ldots & \mathbf{c_{ij}} & \ldots & c_{i\rho} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \ldots & c_{m2} & \ldots & c_{m\rho} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \ldots & \mathbf{a_{in}} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & \mathbf{b_{1j}} & \ldots & b_{1\rho} \\ b_{21} & \ldots & \mathbf{b_{2j}} & \ldots & b_{2\rho} \\ & & \vdots & & \\ b_{n1} & \ldots & \mathbf{b_{nj}} & \ldots & b_{n\rho} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.1.2 - 2}$$

Επομένως σύμφωνα με τον Ορισμό 6.1.2 - 5 και την $(6.1.2 - 2)$ θα έχουμε i)

$$\underset{(2,3)}{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}} \; \underset{(3,2)}{\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$= \underset{(2,2)}{\begin{bmatrix} 3\cdot 4 + 1\cdot 2 + 2\cdot(-3) & 3\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ -1\cdot 4 + 4\cdot 2 + 0\cdot(-3) & -1\cdot 1 + 4\cdot 1 + 0\cdot 2 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},$$

ii)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot x_1 + (-1)\cdot x_2 + 3\cdot x_3 \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 5\cdot x_3 \\ -2\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 1\cdot x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ x_2 + 5x_3 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 \end{bmatrix},$$

iii)

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot a_1 + 3\cdot a_2 + (-2)\cdot a_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2a_1 + 3a_2 - 2a_3 \end{bmatrix} \quad \text{κ.λπ.}$$

Ο υπολογισμός του παραπάνω παραδείγματος (i) με το MATHEMATICA γίνεται ως εξής:

Πρόγραμμα 6.1.2 - 1 (πολλαπλασιασμού πινάκων)

```
A={{3,1,2},{-1,4,0};
B={{4,1},{2,1},{-3,2}};
A.B//MatrixForm
```

Θεωρώντας ότι οι πίνακες έχουν τάξη, τέτοια ώστε να είναι δυνατόν να οριστούν οι αντίστοιχες πράξεις, αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

Ιδιότητες

i) προσεταιριστική

$$A(BC) = (AB)C,$$

ii) επιμεριστική (distributive) ως προς την πρόσθεση πινάκων

$$A(B+C) = AB + AC \text{ και } (B+C)A = BA + CA,$$

iii) προσεταιριστική ως προς τον πολλαπλασιασμό με αριθμό

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B),$$

iv) στο σύνολο των τετραγωνικών πινάκων τάξης n, υπάρχει ακριβώς ένα ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, που είναι ο μοναδιαίος πίνακας I_n ή εν συντομία I, δηλαδή

$$A\,\mathrm{I} = \mathrm{I}\,A = A \quad \text{για κάθε τετραγωνικό πίνακα } A.$$

Επομένως, αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

v) Η σχέση

$$AB = M,$$

όπου M ο μηδενικός πίνακας, δεν συνεπάγεται πάντοτε ότι

$$A = M \quad \text{ή} \quad B = M,$$

όπως αυτό φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η απόδειξη των ιδιοτήτων αφήνεται ως άσκηση.

Παρατήρηση 6.1.2 - 4

Γενικά **δεν** ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή

$$AB \neq BA.$$

6.1.3 Δύναμη πίνακα

Σύμφωνα με τον ορισμό του γινομένου των πινάκων και την προσεταιριστική ιδιότητά του η δύναμη ενός πίνακα ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 6.1.3 - 1. *Έστω A τετραγωνικός πίνακας. Τότε επαγωγικά ορίζεται η δύναμη A^ν ως εξής:*

$$A^\nu = A^{\nu-1}A \quad \text{για κάθε } \nu = 2, 3, \ldots,$$

όταν $A^1 = A$. Ειδικά ορίζεται ότι $A^0 = \mathrm{I}$, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας.

Παράδειγμα 6.1.3 - 1

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε}$$

$$\begin{aligned} A^2 &= A\,A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}, \\ A^3 &= A^2 A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -15 \\ 10 & -6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Στο Πρόγραμμα 6.1.3 - 1 υπολογίζονται οι παραπάνω δυνάμεις με το MATHEMATICA.

Πρόγραμμα 6.1.3 - 1 (δύναμης πίνακα)

```
A={{1,3},{-2,0}};
MatrixForm[A]
MatrixPower[A,2]//MatrixForm                (2η δύναμη του A)
MatrixPower[A,3]//MatrixForm                (3η δύναμη του A)
```

Παράδειγμα 6.1.3 - 2

Όμοια, αν

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \\ A^2 &= A\,A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}, \\ A^3 &= A^2 A = \begin{bmatrix} (-1)^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{bmatrix}, \\ &\text{και γενικά} \\ A^\nu &= A^{\nu-1} A = \begin{bmatrix} (-1)^{\nu-1} & 0 \\ 0 & 3^{\nu-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^\nu & 0 \\ 0 & 3^\nu \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ιδιότητες

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A και ν, $\mu = 1,\ 2,\ \ldots$ ισχύουν

i) $A^{\nu}A^{\mu} = A^{\nu+\mu}$,

ii) $(A^{\nu})^{\mu} = A^{\nu\mu}$.

Παρατηρήσεις 6.1.3 - 1

i) Σύμφωνα με τον Ορισμό 6.1.3 - 1 η δύναμη πίνακα με διαφορετικό αριθμό γραμμών και στηλών δεν ορίζεται.

ii) Δυνάμεις με αρνητικούς ή και κλασματικούς εκθέτες δεν ορίζονται.

6.1.4 Πίνακες ειδικής μορφής

Δίνονται τώρα οι ορισμοί πινάκων ειδικής μορφής που είναι χρήσιμοι στα επόμενα.

Ορισμός 6.1.4 - 1 (διαγώνια ορισμένος πίνακας).
Έστω $A = (a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε ο A λέγεται διαγώνια ορισμένος (diagonally dominant), όταν

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \qquad \text{για κάθε } i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ορισμός 6.1.4 - 2 (αυστηρά διαγώνια ορισμένος πίνακας).
Έστω $A = (a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε ο A λέγεται αυστηρά διαγώνια ορισμένος (strictly diagonally dominant), όταν

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \text{για κάθε } i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Παράδειγμα 6.1.4 - 1

Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς στον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{ισχύει} \qquad \begin{array}{l} |a_{11}| \geq |a_{12}| + |a_{13}| \\ |a_{22}| \geq |a_{21}| + |a_{23}| \\ |a_{33}| \geq |a_{31}| + |a_{32}| \end{array},$$

δηλαδή ο A είναι διαγώνια ορισμένος, ενώ στον πίνακα

$$B=\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{ισχύει} \quad \begin{aligned} |b_{11}| &> |b_{12}|+|b_{13}| \\ |b_{22}| &> |b_{21}|+|b_{23}| \\ |b_{33}| &> |b_{31}|+|b_{32}|\,, \end{aligned}$$

οπότε ο B είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος.

Ορισμός 6.1.4 - 3 (θετικός πίνακας). *Έστω $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$. Τότε ο A λέγεται θετικός (positive), όταν $a_{ij}>0$ για κάθε $i=1,2,\ldots,m$ και $j=1,2,\ldots,n$.*

Ορισμός 6.1.4 - 4 (μη αρνητικός πίνακας). *Έστω $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$. Τότε ο A λέγεται μη αρνητικός (non-negative), όταν $a_{ij}\geq 0$ για κάθε $i=1,2,\ldots,m$ και $j=1,2,\ldots,n$.*

Ορισμός 6.1.4 - 5 (ανάστροφος πίνακας). *Έστω ο πίνακας $A=(a_{ij})$ τάξης (m,n). Τότε ορίζεται ως ανάστροφος (transpose) πίνακας ο $A^{\top}=(b_{ij})$ τάξης (n,m) όπου $b_{ij}=a_{ji}$ για κάθε $i=1,2,\ldots,m$ και $j=1,2,\ldots,n$.*

Άρα οι γραμμές του A είναι οι στήλες του $A^{\top}$.

Παράδειγμα 6.1.4 - 2

Αν

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad A^{\top}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ο υπολογισμός του παραδείγματος με το MATHEMATICA γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 6.1.4 - 1 (ανάστροφου πίνακα)

```
A={{1,-4,2},{3,-2,5}};Transpose[A]//MatrixForm
```

Ορισμός 6.1.4 - 6 (συμμετρικός πίνακας). *Ο τετραγωνικός πίνακας A με $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται συμμετρικός (symmetric), όταν $A=A^{\top}$.*

Παράδειγμα 6.1.4 - 3

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & -5 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ τότε προφανώς } \quad A^\top = A.$$

Ο έλεγχος με το MATHEMATICA γίνεται ως εξής:

Πρόγραμμα 6.1.4 - 2 (συμμετρικού πίνακα)

```
A={{1,3,5},{3,-5,2},{5,2,4}};
SymmetricMatrixQ[A]                              (true)
```

Ορισμός 6.1.4 - 7 (αντισυμμετρικός πίνακας). *Ο τετραγωνικός πίνακας* A *με* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *λέγεται αντισυμμετρικός (skew-symmetric), όταν* $A = -A^\top$.

Παρατήρηση 6.1.4 - 1

Σύμφωνα με τον ορισμό, αν $A^\top = (b_{ij})$, πρέπει $b_{ij} = -a_{ij}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Αλλά από τον ορισμό του ανάστροφου πίνακα προκύπτει ότι $b_{ij} = a_{ji}$, οπότε $a_{ji} = -a_{ij}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Τότε όμως για $i = j$ θα είναι $a_{ii} = -a_{ii}$, δηλαδή $a_{ii} = 0$. Επομένως τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ενός αντισυμμετρικού πίνακα είναι μηδέν, ενώ τα στοιχεία που βρίσκονται σε συμμετρική θέση ως προς την κύρια διαγώνιο είναι αντίθετα.

Ορισμός 6.1.4 - 8 (συζυγής πίνακας). *Αν* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$, *τότε ορίζεται ως συζυγής (conjugate) ο πίνακας* $\overline{A} = (\overline{a}_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

Άρα ο $\overline{A}$ αποτελείται από τα συζυγή στοιχεία του A.

Παρατήρηση 6.1.4 - 2

Αν είναι $A = \overline{A}$, τότε προφανώς ο A έχει στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, ενώ, αν είναι $A = -\overline{A}$, ο A έχει στοιχεία φανταστικούς αριθμούς.

Ορισμός 6.1.4 - 9 (συζυγής ανάστροφος πίνακας). *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Τότε ορίζεται ως συζυγής ανάστροφος (conjugate transpose) $A^* = \left(\overline{A}\right)^\top = \overline{A^\top}$ ή Ερμιτιανός ανάστροφος (Hermitian transpose) A^{H} ο πίνακας*

$$A^{\mathrm{H}} = A^* = (\overline{a}_{ji}) \in \mathbb{C}^{n\times m}.$$

Συνεπώς οι γραμμές του A είναι στήλες του A^{H} και επιπλέον ο A^{H} αποτελείται από τα συζυγή μιγαδικά στοιχεία του A.

Παράδειγμα 6.1.4 - 4

Αν

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1+i & -i & 0 \\ 2 & 3-2i & i \end{bmatrix}, \text{ τότε} \\ \overline{A} &= \begin{bmatrix} 1-i & i & 0 \\ 2 & 3+2i & -i \end{bmatrix} \text{ και} \\ A^{\mathrm{H}} &= (\overline{A})^\top = \overline{A^\top} = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ i & 3+2i \\ 0 & -i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 6.1.4 - 3 (συζυγή ανάστροφου πίνακα)

```
A={{1+I,-I,0},{2,3-2I,I}};
Conjugate[A]//MatrixForm
ConjugateTranspose[A]//MatrixForm
```

Ορισμός 6.1.4 - 10 (Ερμιτιανός πίνακας). *Ο τετραγωνικός πίνακας A με $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ λέγεται Ερμιτιανός (Hermitian), όταν $A^{\mathrm{H}} = A$.*

Άμεσα προκύπτει τότε ότι $a_{ii} = \overline{a}_{ii}$ για κάθε με $i = 1, 2, \ldots, n$, δηλαδή ότι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι πραγματικοί αριθμοί.

Παράδειγμα 6.1.4 - 5

Σύμφωνα με τον ορισμό, αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix}, \text{ τότε } A^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix} = A.$$

Ο έλεγχος με το MATHEMATICA γίνεται με την εντολή:

Πρόγραμμα 6.1.4 - 4 (Ερμιτιανού πίνακα)

```
A={{1,I,1+I},{-I,-5,2-I},{1-I,2+I,3}};
HermitianMatrixQ[A]                              (true)
```

Ορισμός 6.1.4 - 11 (αντιερμιτιανός πίνακας). *Ο τετραγωνικός πίνακας A με $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ λέγεται αντιερμιτιανός (skew-Hermitian), όταν $A^{\mathrm{H}} = -A$.*

Παράδειγμα 6.1.4 - 6

Αν

$$A = \begin{bmatrix} i & 4+i \\ -4+i & 2i \end{bmatrix}, \quad \text{τότε } A^{\mathrm{H}} = -A.$$

Ορισμός 6.1.4 - 12 (τριγωνικός άνω πίνακας). *Έστω $A = (a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε ο A λέγεται άνω ή δεξιά τριγωνικός (upper triangular) και συμβολίζεται συνήθως με R ή συνήθως με U, όταν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i > j$.*

Άρα στην περίπτωση αυτή τα στοιχεία που βρίσκονται αριστερά και κάτω της κύριας διαγωνίου είναι ίσα με το μηδέν.

Ορισμός 6.1.4 - 13 (αυστηρά τριγωνικός άνω πίνακας). *Έστω $A = (a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε ο A λέγεται άνω τριγωνικός (strictly upper triangular), όταν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i \geq j$.*

Όμοια ορίζεται ο κάτω ή αριστερά τριγωνικός (lower triangular) πίνακας, όταν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i < j$ και συμβολίζεται συνήθως με L, αντίστοιχα ο καθαρά κάτω τριγωνικός, όταν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i \leq j$.

Άρα οι πίνακες

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}, \text{ αντίστοιχα } L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}.$$

είναι άνω, αντίστοιχα κάτω τριγωνικοί, ενώ οι

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ & 0 & 1 & -3 \\ & & 0 & -2 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \text{ αντίστοιχα } \tilde{L} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 3 & 0 & & \\ -3 & 2 & 0 & \\ -1 & 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

είναι αυστηρά άνω, αντίστοιχα αυστηρά κάτω τριγωνικοί.

Οι παρακάτω εντολές δημιουργούν με το MATHEMATICA έναν άνω τριγωνικό, αντίστοιχα έναν καθαρά άνω τριγωνικό πίνακα τάξης 3:

Πρόγραμμα 6.1.4 - 5 (τριγωνικού πίνακα)

```
A={{a11,a12,a13},{a21,a22,a23},{a31,a32,a33}};
UpperTriangularize[A]//MatrixForm
UpperTriangularize[A,1]//MatrixForm
```

Όμοια έναν κάτω τριγωνικό, αντίστοιχα έναν καθαρά κάτω τριγωνικό πίνακα:

```
A={{a11,a12,a13},{a21,a22,a23},{a31,a32,a33}};
LowerTriangularize[A]//MatrixForm
LowerTriangularize[A,-1]//MatrixForm
```

Η παρακάτω εντολή δημιουργεί έναν κάτω τριγωνικό πίνακα με μονάδες στη διαγώνιο.

```
A={{a11,a12,α13},{α21,α22,α23},{α31,α32,α33}};
LowerTriangularize[A,-1]
+IdentityMatrix[3]//MatrixForm
```

Ασκήσεις

1. Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης 3, δείξτε ότι

$i)$ $\operatorname{tr}(kA+\lambda B)=k\operatorname{tr}(A)+\lambda\operatorname{tr}(B)$, όταν k, λ σταθερές,

$ii)$ $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(A)\ \operatorname{tr}(B)$,

$iii)$ $\operatorname{tr}\left(A^\top\right)=\operatorname{tr}(A)$.

2. Έστω A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης n. Εξετάστε αν ισχύει

$$(AB)^2=A^2B^2$$

και δικαιολογήστε την απάντησή σας. Στη συνέχεια υπολογίστε τα αναπτύγματα

$$(A+B)^2 \quad \text{και} \quad (A+B)^3.$$

3. Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης n και $AB=BA$, δείξτε ότι

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2 \quad \text{και} \quad (AB)^2=B^2A^2.$$

4. Έστω $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3$ αντίστοιχα $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}\in\mathbb{C}^3$. Δείξτε ότι[1]

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{x}^\top\mathbf{y}.$$

5. Αν A, $B\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ δείξτε ότι

$i)$ $(A+B)^\top=A^\top+B^\top$

$ii)$ $(\lambda A)^\top=\lambda A^\top$ με $\lambda\in\mathbb{R}$

$iii)$ $\left(A^\top\right)^\top=A$

$iv)$ $(AB)^\top=B^\top A^\top$.

6. Όμοια, αν A, $B\in\mathbb{C}^{3\times 3}$ ότι

$i)$ $(A+B)^{\mathrm{H}}=A^{\mathrm{H}}+B^{\mathrm{H}}$

$ii)$ $(\lambda A)^{\mathrm{H}}=\bar{\lambda}A^{\mathrm{H}}$ με $\lambda\in\mathbb{C}$

$iii)$ $\left(A^{\mathrm{H}}\right)^{\mathrm{H}}=A$

$iv)$ $(AB)^{\mathrm{H}}=B^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}$.

7. Αν $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, δείξτε ότι οι πίνακες $A+A^\top$, $AA^\top$ είναι συμμετρικοί και ο $A-A^\top$ αντισυμμετρικός, ενώ αν $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, τότε ο πίνακας $A+A^{\mathrm{H}}$ είναι Ερμιτιανός και ο $A-A^{\mathrm{H}}$ αντιερμιτιανός.

8. Να δειχθεί ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας A με $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ γράφεται ως

$$A=\frac{1}{2}\left(A-A^\top\right)+\frac{1}{2}\left(A+A^\top\right),$$

[1] Βλέπε Μάθημα *Διανύσματα - Εσωτερικό γινόμενο.*

ενώ αν $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, τότε

$$A = \frac{1}{2}\left(A - A^{\mathrm{H}}\right) + \frac{1}{2}\left(A + A^{\mathrm{H}}\right).$$

9. Δείξτε ότι όλα τα στοιχεία ενός αντιερμιτιανού πίνακα είναι φανταστικοί αριθμοί.

10. Να δειχθεί ότι κάθε Ερμιτιανός πίνακας, έστω A, γράφεται στη μορφή $A = B + iD$, όπου B είναι ένας συμμετρικός και D ένας αντισυμμετρικός πίνακας.

11. Αν A, B αντιερμιτιανοί πίνακες, δείξτε ότι ο πίνακας $kA + \lambda B$ είναι όμοια αντιερμιτιανός για κάθε k, $\lambda \in \mathbb{R}$.

12. Αν ο A είναι ένας αντιερμιτιανός πίνακας, δείξτε ότι ο πίνακας iA είναι Ερμιτιανός, ενώ ο A^{ν} είναι Ερμιτιανός, αν ο ν είναι άρτιος και αντιερμιτιανός, αν ο ν είναι περιττός αριθμός.

13. Να προσδιοριστούν τα α, β και γ, έτσι ώστε ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} -1 & \alpha & -\beta \\ 3-5i & 0 & \gamma \\ i & 2+4i & 2 \end{bmatrix}$$

να είναι Ερμιτιανός.

14. Δείξτε ότι οι παρακάτω πίνακες του Pauli

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

επαληθεύουν τις σχέσεις $A^2 = B^2 = C^2 = I$, $BC = -CB = iA$, $CA = -AC = iB$ και $AB = -BA = iC$.

Απαντήσεις

1. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{21} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια εφαρμογή του Ορισμού 6.1.1 - 2 σε καθένα μέλος των $(i) - (iii)$.
2. Είναι

$$(AB)^2 = A\overbrace{B\,A}^{\neq A\,B}B \neq A^2B^2 = A\,A\,B\,B,$$

επειδή σύμφωνα με την Παρατήρηση 6.1.2 - 4 γενικά είναι $AB \neq BA$. Στη συνέχεια εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα έχουμε

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2,\\ (A+B)^3 &= (A+B)(A+B)^2 = (A+B)\left(A^2 + AB + BA + B^2\right) \quad \text{κ.λπ.}\end{aligned}$$

3. Εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα έχουμε

$$(A+B)(A-B) = A^2\overbrace{-AB+BA}^{-AB+AB=0}-B^2 = A^2 - B^2.$$

Όμοια $(AB)^2 = B^2A^2$. **4.** Έστω

$$\mathbf{x} = \overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{y} = \overrightarrow{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Τότε το εσωτερικό γινόμενο είναι $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$, ενώ προφανώς το γινόμενο των πινάκων είναι επίσης $\mathbf{x}^\top\mathbf{y} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$. Ανάλογα οι υπόλοιπες ασκήσεις.

6.2 Ορίζουσες

[2]Η έννοια της ορίζουσας είναι θεμελιώδους σημασίας για τα προβλήματα της Γραμμικής Άλγεβρας, επειδή η γνώση της δίνει λύση σε πολλά από αυτά, όπως είναι η μελέτη ύπαρξης λύσης γραμμικών συστημάτων κ.λπ., ενώ έχει και άλλες γενικότερες εφαρμογές στις θετικές επιστήμες.

6.2.1 Ορισμός

Ορισμός 6.2.1 - 1 (ορίζουσας). *Έστω $A = (a_{ij})$ ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε η ορίζουσα (determinant) του A συμβολίζεται με $|A|$ ή*

[2]Βλέπε βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11] και:
https://en.wikipedia.org/wiki/Determinant

det (A) *και ισούται με τον αριθμό* [3]

$$\det\,(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}\, M_{1j}, \qquad (6.2.1\text{ - }1)$$

όταν $i = 1$ *ή* $2, \ldots$ *ή* n, *αντίστοιχα* [4]

$$\det\,(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1}\, M_{i1}, \qquad (6.2.1\text{ - }2)$$

όταν $j = 1$ *ή* $2, \ldots$ *ή* n *και* M_{ij} *είναι η* **ελάσσονα ορίζουσα** *(minor determinant) του στοιχείου* a_{ij} *που προκύπτει, όταν διαγραφεί η* i*-γραμμή και η* j*-στήλη του πίνακα* A.

Όταν $n = 2$ η ορίζουσα ισούται με

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad (6.2.1\text{ - }3)$$

ενώ για $n = 1$ είναι $|A| = a_{11}$.

Οι τύποι $(6.2.1-1)$ και $(6.2.1-2)$ είναι γνωστοί ως **τύποι του Laplace**. Η ελάσσονα ορίζουσα M_{ij} λέγεται και 1η ελάσσονα ορίζουσα (first minor), ενώ αυτή που προκύπτει με διαγραφή δύο γραμμών και δύο στηλών 2η ελάσσονα (second minor) κ.λπ. Η τάξη της ορίζουσας ορίζεται ίση με την τάξη του πίνακα A, δηλαδή ίση με n, ενώ προφανώς η τάξη της πρώτης ελάσσονας ορίζουσας είναι $n - 1$.

Επομένως, σύμφωνα με τον Ορισμό 6.2.1 - 1, το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας 3ης τάξης ως προς τα στοιχεία της 1ης γραμμής $(i = 1)$ σε ορίζουσες 2ης τάξης

[3] Ανάπτυγμα ως προς την 1η γραμμή.
[4] Ανάπτυγμα ως προς την 1η στήλη.

και στη συνέχεια ο υπολογισμός της σύμφωνα με την $(6.2.1-3)$ θα είναι:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}\, a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}\, a_{12}M_{12} + (-1)^{1+3}\, a_{13}M_{13} \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 6.2.1 - 1

Να υπολογιστούν οι ορίζουσες

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} \quad \text{και} \quad |B| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Λύση. Διαδοχικά έχουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot 12 - (-3) \cdot 1 = 27,$$

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3(1 \cdot 4 - (-1) \cdot 0) + 5(2 \cdot 4 - (-1) \cdot 1) + 3(2 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = 54. \end{aligned}$$

Ο υπολογισμός της παραπάνω ορίζουσας με το MATHEMATICA γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 6.2.1 - 1 (ορίζουσας)

```
A={{3,-5,3},{2,1,-1},{1,0,4}};
Det[A]
```

6.2.2 Ιδιότητες των οριζουσών

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, που δίνονται στη συνέχεια με τη μορφή προτάσεων:

Πρόταση 6.2.2 - 1. *Αν οι γραμμές γίνουν στήλες και οι στήλες γραμμές, τότε η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται.*

Παράδειγμα 6.2.2 - 2

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = A^\top .$$

Πρόταση 6.2.2 - 2. *Αν αντιμετατεθούν δύο γραμμές ή δύο στήλες, τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο.*

Παράδειγμα 6.2.2 - 3

Εναλλαγή 1ης και 2ης γραμμής:

$$-\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} .$$

Πρόταση 6.2.2 - 3. *Αν δύο γραμμές ή δύο στήλες είναι ίσες ή ανάλογες, τότε η ορίζουσα ισούται με το μηδέν.*

Η ιδιότητα αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 6.2.2 - 4. *Όταν τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό, τότε και η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με τον αριθμό αυτόν.*

Παράδειγμα 6.2.2 - 4

Πολλαπλασιασμός 1ης γραμμής ή 2ης στήλης: αν

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5,$$

τότε

$$3|A| = \begin{vmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \cdot 2 \\ 4 & 3 \cdot 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) = -15.$$

Πρόταση 6.2.2 - 5. *Αν τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης είναι άθροισμα m προσθετέων, τότε η ορίζουσα αναλύεται σε άθροισμα m άλλων οριζουσών.*

Όμοια αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 6.2.2 - 6. *Αν σε μία γραμμή ή στήλη προστεθούν μία ή περισσότερες γραμμές ή στήλες που η καθεμία πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό, η ορίζουσα που προκύπτει είναι ίση με την αρχική.*

Παράδειγμα 6.2.2 - 5

$$\begin{vmatrix} -6 & 21 & -30 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6+1\cdot 7 & 21-3\cdot 7 & -30+5\cdot 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1-1 & -3-0 & 5-5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 42.$$

Πρόταση 6.2.2 - 7. *Όταν μία γραμμή ή μία στήλη είναι γραμμική έκφραση των άλλων γραμμών ή στηλών, τότε η ορίζουσα ισούται με το μηδέν.*

Όμοια αφήνεται ως άσκηση.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι ορίζουσες

$i)$ $\begin{vmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{vmatrix}$ $\qquad$ $iv)$ $\begin{vmatrix} 16 & 22 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ 12 & 25 & 2 \end{vmatrix}$

$ii)$ $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ $\qquad$ $v)$ $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 15 & 3 & 6 \\ 10 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

$iii)$ $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ $\qquad$ $vi)$ $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

2. Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης 2, αντίστοιχα 3, δείξτε ότι

$$|AB| = |A||B|.$$

3. Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης n δείξτε ότι

$ii)$ $\left|A^{\top}\right| = |A|$ $\qquad$ $iii)$ $|\lambda A| = \lambda^n |A|$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Αν $A = (a_{ij})$ είναι ένας άνω αντίστοιχα κάτω τριγωνικός πίνακας τάξης 4, δείξτε ότι

$$|A| = \prod_{i=1}^{4} a_{ii}.$$

3. Δείξτε ότι η ορίζουσα ενός Ερμιτιανού πίνακα τάξης 2, αντίστοιχα 3 είναι πραγματικός αριθμός.

Απαντήσεις

1. i) 1, ii) 24,, iii) $(b-a)(a-c)(b-c)$, iv) 0, v) 180, vi) $4a^2b^2c^2$. Ανάλογα οι υπόλοιπες ασκήσεις.

6.3 Αντίστροφος πίνακας

6.3.1 Ορισμοί

Ορισμός 6.3.1 - 1 (αλγεβρικό συμπλήρωμα πίνακα). *Έστω $A = (a_{ij})$ ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε το αλγεβρικό συμπλήρωμα (cofactor) του στοιχείου a_{ij} ορίζεται ως ο αριθμός*

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}, \qquad (6.3.1 - 1)$$

όπου M_{ij} η ελάσσονα ορίζουσα του a_{ij}.

Ο πίνακας των αλγεβρικών συμπληρωμάτων συμβολίζεται τότε με C και είναι επίσης τάξης n.

Παράδειγμα 6.3.1 - 1

Να υπολογιστεί ο συμπληρωματικός πίνακας του

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Αρχικά υπολογίζονται τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του A.

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} &=& \quad a_{22} &=& \quad 4, \\ C_{12} &= (-1)^{1+2} M_{12} &=& -a_{21} &=& -2, \\ C_{21} &= (-1)^{2+1} M_{21} &=& -a_{12} &=& -1, \\ C_{22} &= (-1)^{2+2} M_{11} &=& \quad a_{11} &=& \quad 3. \end{aligned}$$

Άρα

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

■

Ορισμός 6.3.1 - 2 (συμπληρωματικού πίνακα). *Ορίζεται ως συμπληρωματικός πίνακας (adjugate ή adjoint matrix) του τετραγωνικού πίνακα A τάξης n και συμβολίζεται με* $\text{adj}(A) = C^\top$, *ο πίνακας*

$$\text{adj }(A) = C^\top = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (6.3.1 - 2)$$

όταν C_{ij} τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του A.

Παράδειγμα 6.3.1 - 2

Να υπολογιστεί ο συμπληρωματικός πίνακας του A του Παραδείγματος 6.3.1 - 1.

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο 6.3.1 - 2 είναι

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},$$

οπότε

$$\mathrm{adj}(A) = C^{\top} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 6.3.1 - 1 (συμπληρωματικού πίνακα)

```
A={{3,1},{2,4}};
Needs[Combinatorica];Cofactor[A,{i,j}]
```

■

Ορισμός 6.3.1 - 3 (αντίστροφου πίνακα). *Ο τετραγωνικός πίνακας A τάξης n θα είναι αντιστρέψιμος (invertible ή nonsingular) τότε και μόνον, όταν υπάρχει άλλος τετραγωνικός πίνακας ίδιας τάξης, που συμβολίζεται με A^{-1}, έτσι ώστε*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{I}_n = \mathrm{I}. \tag{6.3.1 - 3}$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση ο A θα λέγεται **μη αντιστρέψιμος** (singular).[5]

Πρόταση 6.3.1 - 1. *Ο αντίστροφος πίνακας του A, όταν υπάρχει, είναι μονοσήμαντα ορισμένος.*

Απόδειξη. Έστω A^{-1}, $\tilde{A}^{-1}$ δύο διαφορετικοί αντίστροφοι πίνακες του A. Τότε $A\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1}A = \mathrm{I}$, οπότε

$$A^{-1} = A^{-1}\mathrm{I} = A^{-1}\left(A\tilde{A}^{-1}\right) = \left(A^{-1}A\right)\tilde{A}^{-1} = \mathrm{I}\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1}.$$

■

Σημείωση 6.3.1 - 1

Θα πρέπει στο σημείο αυτό να τονιστεί ότι ο αντίστροφος πίνακας για **μη τετραγωνικούς πίνακες δεν ορίζεται.**

[5] Βλέπε βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11] και:
https://en.wikipedia.org/wiki/Invertible_matrix

6.3.2 Υπολογισμός αντίστροφου πίνακα

Σχετικά με τον υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 6.3.2 - 1. *Έστω A αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A). \tag{6.3.2 - 1}$$

Πόρισμα 6.3.2 - 1. *Ο τετραγωνικός πίνακας A θα είναι αντιστρέψιμος, αν $|A| \neq 0$, ενώ αν $|A| = 0$ μη αντιστρέψιμος.*

Παράδειγμα 6.3.2 - 1

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος πίνακας του Παραδείγματος 6.3.1 - 1.
Λύση. Είναι

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

ενώ σύμφωνα με το Παράδειγμα 6.3.1 - 2

$$\mathrm{adj}(A) = C^{\top} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Επειδή $|A| = 10$, σύμφωνα με τον τον τύπο $(6.3.2 - 1)$ θα είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

■

Στο παρακάτω πρόγραμμα δίνονται οι εντολές υπολογισμού του αντίστροφου πίνακα του Παραδείγματος 6.3.2 - 1 με το MATHEMATICA.

Πρόγραμμα 6.3.2 - 1 (αντίστροφου πίνακα)

```
A={{3,1},{2,4}};MatrixForm[A]
Inverse[A]//MatrixForm                        (αντίστροφος του A)
```

Παράδειγμα 6.3.2 - 2

Όμοια του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Επειδή $|A| = 10 \neq 0$ σύμφωνα με το Πόρισμα 6.3.2 - 1 υπάρχει ο A^{-1}. Αρχικά ο A γράφεται ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του A (βλέπε επίσης Παράδειγμα 6.3.1 - 1). Διαδοχικά έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1}\, M_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ -8 & 13 \end{vmatrix} = -4 \\ C_{12} &= (-1)^{1+2}\, M_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} = -15 \\ C_{13} &= (-1)^{1+3}\, M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{21} &= (-1)^{2+1}\, M_{21} = -\begin{vmatrix} 6 & -11 \\ -8 & 13 \end{vmatrix} = 10 \\ C_{22} &= (-1)^{2+2}\, M_{22} = \begin{vmatrix} -3 & -11 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} = 5 \\ C_{23} &= (-1)^{2+3}\, M_{23} = -\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{31} &= (-1)^{3+1}\, M_{31} = \begin{vmatrix} 6 & -11 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -8 \\ C_{32} &= (-1)^{3+2}\, M_{32} = -\begin{vmatrix} -3 & -11 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -15 \\ C_{33} &= (-1)^{3+3}\, M_{33} = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -6. \end{aligned}$$

Άρα

$$C = \begin{bmatrix} -4 & -15 & -8 \\ 10 & 5 & 0 \\ -8 & -15 & -6 \end{bmatrix},$$

οπότε σύμφωνα με τον τύπο 6.3.1 - 2 είναι

$$\mathrm{adj}\,(A) = C^{\top} = \begin{bmatrix} -4 & 10 & -8 \\ -15 & 5 & -15 \\ -8 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Τότε από την 6.3.2 - 1 προκύπτει ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\,\mathrm{adj}\,(A) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -4 & 10 & -8 \\ -15 & 5 & -15 \\ -8 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 1.0 & -0.8 \\ -1.5 & 0.5 & -1.5 \\ -0.8 & 0 & -0.6 \end{bmatrix}.$$

■

6.3.3 Σχετικές προτάσεις

Πρόταση 6.3.3 - 1. *Αν A, B αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}. \qquad (6.3.3 - 2)$$

Απόδειξη. Επειδή οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι, από την $(6.3.2-1)$ αντικαθιστώντας όπου A το $A\,B$ διαδοχικά έχουμε

$$A\,A^{-1} = \mathrm{I} \quad ή \quad A\,B\,(A\,B)^{-1} = \mathrm{I}.$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία ισότητα από αριστερά με A^{-1} προκύπτει ότι

$$\overbrace{A^{-1}\,A}^{\mathrm{I}}\,B\,(A\,B)^{-1} = A^{-1}\,\mathrm{I} = A^{-1} \quad ή \quad B\,(A\,B)^{-1} = A^{-1}$$

και όμοια από αριστερά με B^{-1} τελικά

$$\overbrace{B^{-1}\,B}^{\mathrm{I}}\,(A\,B)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad ή \quad (A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1},$$

δηλαδή η αποδεικτέα. ■

Η παραπάνω πρόταση γενικεύεται ως εξής:

Πρόταση 6.3.3 - 2. *Αν A_1, A_2, …, A_n αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε*

$$(A_1\,A_2\,\cdots\,A_{n-1}\,A_n)^{-1} = A_n^{-1}\,A_{n-1}^{-1}\,\cdots\,A_2^{-1}\,A_1^{-1}. \qquad (6.3.3 - 3)$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

Πρόταση 6.3.3 - 3. *Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης n, τότε*

i) $\operatorname{adj}(AB) = \operatorname{adj}(B)\operatorname{adj}(A)$ *ii)* $\operatorname{adj}(A)\,A = |A|\mathrm{I} = A$

iii) $|\operatorname{adj}(A)| = |A|^{n-1}$ *iv)* $\operatorname{adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1}\operatorname{adj}(A);\ \ \lambda \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 6.3.3 - 4. *Αν ο πίνακας A με $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι Ερμιτιανός, τότε και ο $\operatorname{adj}(A)$ είναι όμοια Ερμιτιανός.*

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι αντίστροφοι πίνακες των

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

2. Όμοια των πινάκων

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{όταν} \quad abc \neq 0.$$

3. Δείξτε ότι

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

4. Αν A αντιστρέψιμος πίνακας, δείξτε ότι ο πίνακας είναι όμοια λA είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq 0$.

5. Αν $A = \operatorname{diag}(a_{ii})$ με $a_{ii} \neq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, δείξτε ότι

$$A^{-1} = \operatorname{diag}\left(a_{ii}^{-1}\right).$$

Απαντήσεις

1.

$$A_1^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad A_3^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

2.

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3, **4** και **5.** Οι αποδείξεις γίνονται με μεθοδολογία ανάλογη των αποδείξεων της Παραγράφου 6.3.3.

6.4 Γραμμικά συστήματα

[6]Στην παράγραφο αυτή θα γίνει μια εισαγωγή στην έννοια του γραμμικού συστήματος και της λύσης του που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη θεωρία της Παραγράφου 6.3.

6.4.1 Ορισμός

Ορισμός 6.4.1 - 1. *Η γενική μορφή ενός* **γραμμικού συστήματος** *(linear system) m-εξισώσεων με n-αγνώστους $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$ είναι*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \cdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \qquad (6.4.1 - 1)$$

όπου τα a_{ij} με $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, m;\ j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$ είναι οι συντελεστές του συστήματος και τα $b_i;\ i = 1,\, 2,\, \ldots,\, m$ είναι γνωστοί αριθμοί.

Σημείωση 6.4.1 - 1

Όπως προκύπτει από την $(6.4.1-1)$, κάθε εξίσωση είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των αγνώστων, δηλαδή οι άγνωστοι πολλαπλασιάζονται μόνο με σταθερές. Αν σε μια τουλάχιστον εξίσωση ένας άγνωστος, έστω ο x_1, είναι στη μορφή x_1^2 ή $x_1\, x_2$ ή $\sin x_1$, κ.λπ., τότε το σύστημα $(6.4.1-1)$ λέγεται **μη γραμμικό** (nonlinear).

[6]Ο αναγνώστης, για μια γενικότερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11], στα βιβλία Α. Μπράτσος [3] Κεφ. 8 και Α. Μπράτσος [4] Κεφ. 3 και:
https://en.wikipedia.org/wiki/System_of_linear_equations

Παράδειγμα 6.4.1 - 1

Σύμφωνα με τον Ορισμό 6.4.1 - 1 το

$$\begin{aligned} 3x_1 &+ x_2 &= 1 \\ 2x_1 &+ 4x_2 &= -6 \end{aligned} \tag{6.4.1 - 2}$$

είναι ένα γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους $(m = n = 2)$, το

$$\begin{aligned} -3x_1 &+ 6x_2 &- 11x_3 &= 4 \\ 3x_1 &- 4x_2 &+ 6x_3 &= -5 \\ 4x_1 &- 8x_2 &+ 13x_3 &= -7 \end{aligned} \tag{6.4.1 - 3}$$

3 εξισώσεων με 3 αγνώστους $(m = n = 3)$, το

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 10x_3 &= -6 \\ -5x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 11 \end{aligned} \tag{6.4.1 - 4}$$

4 εξισώσεων $(m = 4)$ με 3 αγνώστους $(n = 3)$ και το

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 &= 5 \end{aligned} \tag{6.4.1 - 5}$$

3 εξισώσεων $(m = 3)$ με 5 αγνώστους $(n = 5)$.

Αν $b_i = 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$, τότε το σύστημα $(6.4.1 - 1)$ λέγεται **ομογενές** και μία προφανής λύση του είναι η $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, ενώ, όταν ένα τουλάχιστον από τα b_i; $i = 1, 2, \ldots, m$ είναι διάφορο του μηδενός, τότε λέγεται **μη ομογενές**.

Με τη βοήθεια των πινάκων το σύστημα $(6.4.1-1)$ γράφεται

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\vec{x} \text{ ή } \mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\vec{b} \text{ ή } \mathbf{b}},$$

δηλαδή

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{όπου } A \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ και } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \tag{6.4.1 - 6}$$

όπου A ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων. Αντίστοιχη μορφή της $(6.4.1-6)$ ισχύει για στοιχεία από το $\mathbb{C}$ αντί του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 6.4.1 - 2

Ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων για το σύστημα $(6.4.1-2)$, αντίστοιχα $(6.4.1-3)$ είναι

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \tag{6.4.1 - 7}$$

αντίστοιχα

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{bmatrix}. \tag{6.4.1 - 8}$$

Μια μέθοδος υπολογισμού της λύσης του συστήματος $(6.4.1-2)$, όταν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, δηλαδή ο αριθμός των εξισώσεων ισούται με τον αριθμό των αγνώστων, δίνεται στην Παράγραφο 6.4.2 που ακολουθεί, ενώ στην Παράγραφο 6.4.4 για τις περιπτώσεις όπου $m < n$ ή $m > n$.

6.4.2 Μέθοδος του Cramer

[7]Η λύση του συστήματος $(6.4.1-2)$ στην περίπτωση αυτή θα προκύψει, αν η $(6.4.1-2)$ είναι δυνατόν να γραφεί σε ισοδύναμη μορφή $\mathbf{x} = \mathbf{c}$, όταν $\mathbf{c}$ το

[7]Υπενθυμίζεται το ανάλογο γνωστό πρόβλημα της λύσης της εξίσωσης $a\,x = b$, όταν $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε, αν

διάνυσμα με τις τιμές της λύσης. Αυτό θα συμβεί μόνον, όταν ο πίνακας A απαλειφθεί από αριστερά, έτσι ώστε να απομονωθεί το $\mathbf{x}$. Διαφορετικά, όταν η $(6.4.1-2)$ πολλαπλασιαστεί από αριστερά με τον αντίστροφο πίνακα A^{-1} του A. Είναι όμως γνωστό από το [8]Πόρισμα 6.3.2 - 1 ότι ο A^{-1} υπάρχει, όταν $|A| \neq 0$.

Επομένως τότε διαδοχικά έχουμε

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{ή} \quad \overbrace{A^{-1}A}^{\mathrm{I}}\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \quad \text{ή} \quad \mathrm{I}\,\mathbf{x} = \overbrace{A^{-1}\mathbf{b}}^{\mathbf{c}},$$

δηλαδή

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}. \qquad (6.4.2 - 1)$$

Αποδεικνύεται ότι η $(6.4.2-1)$ συναρτήσει των αγνώστων $x_1, x_2, \ldots, x_n$ τελικά γράφεται

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}; \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (6.4.2 - 2)$$

όταν με $|A_i|$ συμβολίζεται η ορίζουσα που προκύπτει, αν η i-στήλη του πίνακα A αντικατασταθεί από τις συντεταγμένες του διανύσματος $\mathbf{b}$.

Η μέθοδος αυτή, που είναι γνωστή ως η **μέθοδος του Cramer**, έχει θεωρητικό μόνον ενδιαφέρον, επειδή λόγω του μεγάλου αριθμού των πράξεων και των υπεισερχομένων σφαλμάτων στρογγυλοποίησης (round-off errors) που προκύπτουν από αυτές, οι λύσεις σε μεγάλο αριθμό εξισώσεων δεν είναι ακριβείς.

Παράδειγμα 6.4.2 - 1

Έστω το σύστημα $(6.4.1-2)$

$$\begin{aligned} 3x_1 &+ x_2 &= 1 \\ 2x_1 &+ 4x_2 &= -6 \end{aligned}$$

- $a \neq 0$, η εξίσωση έχει **ακριβώς μια λύση** την $x = a^{-1}\, b = \dfrac{a}{b}$.
- $a = 0$, έχουμε τις εξής περιπτώσεις: αν και
    - $a = 0$, είναι **αόριστη**, ενώ, αν
    - $a \neq 0$, είναι **αδύνατη**.

[8] *Ο τετραγωνικός πίνακας A θα είναι αντιστρέψιμος, αν $|A| \neq 0$, ενώ αν $|A| = 0$ μη αντιστρέψιμος.*

του Παραδείγματος 6.4.1 - 1 όπου $\mathbf{b} = [1, -6]^\top$. Τότε, όπως προκύπτει από την $(6.4.1-7)$, είναι

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{οπότε} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10.$$

Επειδή σύμφωνα με το Παράδειγμα 6.3.2 - 1 είναι

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix},$$

από την $(6.4.2-1)$ έχουμε

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4+0.6 \\ -0.2-1.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

δηλαδή $x_1 = 1$ και $x_2 = -2$.

Η λύση σύμφωνα με την $(6.4.2-2)$ υπολογίζεται επίσης ως εξής:

$$\begin{aligned} |A_1| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad \text{οπότε} \quad x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = 1, \ \text{και} \\ |A_2| &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -20, \quad \text{οπότε} \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = -2. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 6.4.2 - 2

Όμοια έστω το σύστημα $(6.4.1-3)$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 6x_2 - 11x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= -5 \\ 4x_1 - 8x_2 + 13x_3 &= -7 \end{aligned}$$

του Παραδείγματος 6.4.1 - 2 όπου $\mathbf{b} = [4, -5, -7]^{\top}$. Τότε, όπως προκύπτει από την $(6.4.1 - 7)$, είναι

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{bmatrix}, \quad \text{οπότε} \quad |B| = \begin{vmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{vmatrix} = 10.$$

Επειδή σύμφωνα με το Παράδειγμα 6.3.2 - 2 είναι

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -0.4 & 1.0 & -0.8 \\ -1.5 & 0.5 & -1.5 \\ -0.8 & 0 & -0.6 \end{bmatrix},$$

από την $(6.4.2 - 1)$ έχουμε

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 1.0 & -0.8 \\ -1.5 & 0.5 & -1.5 \\ -0.8 & 0 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

δηλαδή $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ και $x_3 = 1$.

Η λύση σύμφωνα με την $(6.4.2 - 2)$ υπολογίζεται επίσης ως εξής:

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -11 \\ -5 & -4 & 6 \\ -7 & -8 & 13 \end{vmatrix} = -10, \quad \text{οπότε} \quad x_1 = \frac{|B_1|}{|B|} = -1,$$

$$|B_2| = \begin{vmatrix} -3 & 4 & -11 \\ 3 & -5 & 6 \\ 4 & -7 & 13 \end{vmatrix} = 20, \quad \text{οπότε} \quad x_2 = \frac{|B_2|}{|B|} = 2, \ \text{και}$$

$$|B_3| = \begin{vmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 3 & -4 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{vmatrix} = 10, \quad \text{οπότε} \quad x_3 = \frac{|B_3|}{|B|} = 1.$$

6.4.3 Μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Έστω το παρακάτω γραμμικό σύστημα των n-εξισώσεων και n-αγνώστων $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \cdots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \qquad (6.4.3 - 1)$$

Γενικά η προτεινόμενη μέθοδος λύσης του συστήματος $(6.4.3-1)$ από τον Gauss, ειδικότερα όπως είναι γνωστή ως μέθοδος **απαλοιφής του Gauss** (Gauss elimination), βασίζεται στον μετασχηματισμό του συστήματος σε άλλο ισοδύναμό του, όπου μια εξίσωσή του θα είναι τελικά με έναν άγνωστο, δηλαδή της μορφής $ax = b$, οπότε λύνεται ($x = b/a$) και στη συνέχεια διαδοχικά αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στις υπόλοιπες εξισώσεις θα προκύψει τελικά η λύση του συστήματος.[9]

Στο μάθημα αυτό από το σύνολο των μεθόδων απαλοιφής του Gauss θα εξεταστεί μόνο η μέθοδος **χωρίς διάταξη** (pivoting)[10], που περιγράφεται από τα παρακάτω **βήματα** (steps):

1ο βήμα

Έστω ότι οι εξισώσεις του συστήματος $(6.4.3 - 1)$ έχουν διαταχθεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε $a_{11} \neq 0$. Το a_{11} λέγεται και **οδηγό στοιχείο** (pivot).

[9] Η μεθοδολογία αυτή έχει ήδη πρακτικά εφαρμοστεί στη λύση για παράδειγμα ενός συστήματος 2-εξισώσεων με 2-αγνώστους, όταν πολλαπλασιάζοντας κατάλληλα τις εξισώσεις και προσθέτοντας προκύπτει μια εξίσωση με έναν άγνωστο. Τότε λύνοντας την εξίσωση αυτή υπολογίζεται ο ένας άγνωστος, οπότε στη συνέχεια αντικαθιστώντας την τιμή του αγνώστου σε μια εξίσωση του συστήματος υπολογίζεται και ο άλλος άγνωστος.

[10] Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [4] Κεφ. 3.

Τότε ο άγνωστος x_1 απαλείφεται από τη 2η, 3η, ..., n-εξίσωση, αφαιρώντας:

$$\begin{array}{rclllll} m_{21} & = & \dfrac{a_{21}}{a_{11}} & \text{φορές την} & 1\eta & \text{από τη} & 2\eta \text{ εξίσωση} \\ m_{31} & = & \dfrac{a_{31}}{a_{11}} & ” & ” & & 3\eta \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & = & \dfrac{a_{n1}}{a_{11}} & ” & ” & & n - \text{εξίσωση}, \end{array}$$

όταν τα $m_{21}, m_{31}, \ldots, m_{n1}$ είναι οι **πολλαπλασιαστές** του Gauss για το 1ο βήμα. Η μορφή του συστήματος στο τέλος του 1ου βήματος είναι

$$\begin{array}{rcccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}^{(1)}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\ & & \vdots & & & & & \vdots & \\ & & a_{n2}^{(1)}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}^{(1)}x_n & = & b_n^{(1)}, \end{array} \qquad (6.4.3 \text{ - } 2)$$

όπου με $a_{ij}^{(k)}$, $b_i^{(k)}$; $k = 1, 2, \ldots, n-1$ θα συμβολίζεται στο εξής η νέα τιμή των a_{ij} και b_i στο τέλος του k-βήματος γενικά.

2ο βήμα

Όμοια, έστω ότι οι εξισώσεις του συστήματος $(6.4.3 - 2)$ έχουν διαταχθεί κατά τέτοιον τρόπο, ώστε $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Τότε ο άγνωστος x_2 απαλείφεται από την 3η, ..., n-εξίσωση, αφαιρώντας

$$\begin{array}{rclllll} m_{32} & = & \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \text{φορές τη} & 2\eta & \text{από την} & 3\eta \text{ εξίσωση} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ m_{n2} & = & \dfrac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & ” & ” & & n - \text{εξίσωση}. \end{array}$$

Η μορφή του συστήματος στο τέλος του 2ου βήματος θα είναι

$$
\begin{array}{rcrcccccl}
a_{11}x_1+ & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & a_{22}^{(1)}x_2 & + & a_{23}^{(1)}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = b_2^{(1)} \\
 & & & a_{33}^{(2)}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}^{(2)}x_n & = b_3^{(2)} \\
 & & & \vdots & & & & & \quad \vdots \\
 & & & a_{n3}^{(2)}x_3 & + & \ldots & + & a_{nn}^{(2)}x_n & = b_n^{(2)}.
\end{array}
\qquad (6.4.3 - 3)
$$

n-1 βήμα

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο στο τέλος και του $n-1$ βήματος, η μορφή του αρχικού συστήματος $(6.4.3-1)$ τελικά θα είναι

$$
\begin{array}{rcccccl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\
a_{33}^{(2)}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}^{(2)}x_n & = & b_3^{(2)} \\
 & \ddots & & & & & \vdots \\
 & & & & a_{nn}^{(n-1)}x_n & = & b_n^{(n-1)},
\end{array}
\qquad (6.4.3 - 4)
$$

όπου προφανώς το σύστημα $(6.4.3-4)$, επειδή σε κάθε βήμα διατηρείται μια εξίσωση του αρχικού συστήματος, είναι ισοδύναμο με το αρχικό.

Το σύστημα $(6.4.3-4)$ γράφεται απλούστερα ως

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
u_{11}x_1 & + & u_{12}x_2 & + & u_{13}x_3 & + & \cdots & + & u_{1n}x_n & = & c_1 \\
 & & u_{22}x_2 & + & u_{23}x_3 & + & \cdots & + & u_{2n}x_n & = & c_2 \\
 & & & & u_{33}x_3 & + & \cdots & + & u_{3n}x_n & = & c_3 \\
 & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & u_{nn}x_n & = & c_n
\end{array}
$$

ή με τη βοήθεια των πινάκων

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

δηλαδή

$$U\mathbf{x} = \mathbf{c} \quad \text{με} \quad U \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{6.4.3 - 5}$$

όπου ο U είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας.

Η λύση του συστήματος $(6.4.3 - 5)$ γίνεται με ανάδρομη αντικατάσταση (backward substitution), δηλαδή από την τελευταία προς την πρώτη εξίσωση ως εξής:

$$\begin{aligned} x_n &= c_n/u_{nn} \\ x_{n-1} &= \left[c_{n-1} - u_{n-1,n}\, x_n\right]/u_{n-1,n-1} \\ \vdots \quad & \quad\ \vdots \\ x_1 &= \left[c_1 - \sum_{j=2}^{n} u_{1j}\, x_j\right] / \, u_{11} \,. \end{aligned} \tag{6.4.3 - 6}$$

Παράδειγμα 6.4.3 - 1

Έστω το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 8 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 11 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 3. \end{array}$$

Τότε διαδοχικά έχουμε:

1ο βήμα

$$\begin{array}{lclcl} \text{Εξίσωση } 2: & = & \text{Εξίσωση } 2 & - & m_{21} * \text{Εξίσωση } 1\,; \quad m_{21} = \dfrac{3}{2} \\ \text{Εξίσωση } 3: & = & \text{Εξίσωση } 3 & - & m_{31} * \text{Εξίσωση } 1\,; \quad m_{31} = 1, \end{array}$$

δηλαδή

$$\begin{array}{lclcl} \text{Εξίσωση } 2: & 3x_1 + x_2 - 2x_3 & - & \dfrac{3}{2}\,(2x_1 + x_2 - x_3) & = 11 - \dfrac{3 \cdot 8}{2} \\ \text{Εξίσωση } 3: & 2x_1 - x_2 - 2x_3 & - & (2x_1 + x_2 - x_3) & = 3 - 8, \end{array}$$

οπότε το σύστημα τελικά μετά και την αλλαγή των προσήμων γράφεται

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 8 \\ & & \dfrac{1}{2}\,x_2 & + & \dfrac{1}{2}\,x_3 & = & 1 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & = & 5. \end{array}$$

2ο βήμα

$$\text{Εξίσωση } 3: \; = \; \text{Εξίσωση } 3 \; - \; m_{32} * \text{Εξίσωση } 2\,; \quad m_{32} \; = \; 4,$$

δηλαδή

$$\text{Εξίσωση } 3: \quad 2x_2 + x_3 \; - \; 4\left(\frac{1}{2}\,x_2 + \frac{1}{2}\,x_3\right) \; = \; 5 - 4 \cdot 1.$$

Άρα τελικά

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 8 \\ & & \dfrac{1}{2}\,x_2 & + & \dfrac{1}{2}\,x_3 & = & 1 \\ & & & - & x_3 & = & 1, \end{array}$$

οπότε σύμφωνα με τη διαδικασία $(6.4.3-6)$ έχουμε ότι:

$$x_3 = -1, \quad x_2 = 3 \quad \text{και} \quad x_1 = 2.$$

6.4.4 Γραμμικά συστήματα γενικής μορφής

Έχει ήδη γραφεί στην αρχή της Παραγράφου 6.4 ότι οι περιπτώσεις συστημάτων με περισσότερες, αντίστοιχα λιγότερες εξισώσεις είναι πέραν των ορίων του μαθήματος αυτού και ότι ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία για μια περαιτέρω μελέτη. Κρίνεται όμως σκόπιμο στο σημείο αυτό για καθεμιά από τις δύο αυτές περιπτώσεις να δοθεί στη συνέχεια η μορφή της λύσης με ένα παράδειγμα.

Περίπτωση I: λιγότερες εξισώσεις από αγνώστους $(m < n)$

Παράδειγμα 6.4.4 - 1

Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 - \; 2x_3 + \quad x_4 + \; 3x_5 &= 2 \\ 2x_1 - \quad x_2 + \; 2x_3 + \; 2x_4 + \; 6x_5 &= 3 \\ 3x_1 + \; 2x_2 - \; 4x_3 - \; 3x_4 - \; 9x_5 &= 5. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε 3 εξισώσεις $(m = 3)$ με 5 αγνώστους $(n = 5)$. Επειδή η λύση είναι δυνατή μόνο για συστήματα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους, θεωρούμε ότι 2 άγνωστοι, έστω οι x_3 και x_5, είναι γνωστοί με **αυθαίρετες** τιμές $x_3 = u$ και $x_5 = v$.

Τότε το σύστημα γράφεται

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_4 & = & 2 + 2x_3 - 3x_5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_4 & = & 3 - 2x_3 - 6x_5 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_4 & = & 5 + 4x_3 + 9x_5. \end{array}$$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει ότι

$$x_1 = \frac{14}{9}, \quad x_2 = \frac{1+6u}{3} \quad \text{και} \quad x_3 = \frac{1-27v}{9},$$

δηλαδή έχουμε άπειρες λύσεις, που προκύπτουν δίνοντας αυθαίρετες τιμές στις παραμέτρους u, v.

Επομένως τα συστήματα της κατηγορίας αυτής, όταν επιλύονται, έχουν μια **απειρία λύσεων**, που προκύπτει εκφράζοντας ορισμένους αγνώστους **παραμετρικά**.

Περίπτωση II: περισσότερες εξισώσεις από αγνώστους $(m > n)$

Παράδειγμα 6.4.4 - 2

Έστω το σύστημα

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1+ & 5x_2+ & 10x_3 & = & -6 \\ -5x_1+ & 2x_2- & 3x_3 & = & 2 \\ 4x_1+ & x_2+ & 4x_3 & = & -1 \\ 4x_1+ & 3x_2- & 4x_3 & = & 11, \end{array}$$

όπου $m = 4$ και $n = 3$.

Όμοια θεωρώντας το παρακάτω 3×3 σύστημα

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1+ & 5x_2+ & 10x_3 & = & -6 \\ -5x_1+ & 2x_2- & 3x_3 & = & 2 \\ 4x_1+ & x_2+ & 4x_3 & = & -1 \end{array}$$

έχουμε τη λύση

$$x_1 = \frac{3}{4}, \quad x_2 = 1 \quad \text{και} \quad x_3 = -\frac{5}{4}.$$

Οι λύσεις αυτές προφανώς επαληθεύουν ή διαφορετικά είναι συμβατές με την 4η εξίσωση $4x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 11$ του συστήματος. Επομένως έχουμε ένα **συμβατό** σύστημα. Σε περίπτωση που δεν υπήρχε επαλήθευση της 4ης εξίσωσης το σύστημα λέγεται ασυμβίβαστο.

Ασκήσεις

1. Να λυθούν με τη μέθοδο του Cramer και του Gauss τα παρακάτω συστήματα:

$$i)\quad \begin{array}{rcrcl} (1-3i)x_1 & + & x_2 & = & 1+i \\ 2x_1 & + & (1+3i)x_2 & = & 0, \end{array}$$

$$ii)\quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ -x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 6, \end{array}$$

$$iii)\quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 11 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -7, \end{array}$$

$$iv)\quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -4 \\ 4x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 9+7i \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1+i. \end{array}$$

2. Να γραφεί πρόγραμμα λύσης των συστημάτων της Άσκησης 1 με το MATHEMATICA, αντίστοιχα το MATLAB.

Απαντήσεις

1.

$$\begin{array}{llll} (i) & x_1 = -\frac{1}{4}+\frac{i}{2}, & x_2 = -\frac{1}{4}-\frac{i}{4}, & \\ (ii) & x_1 = -1, & x_2 = 1, & x_3 = 0, \\ (iii) & x_1 = 1, & x_2 = -1, & x_3 = 2, \\ (iv) & x_1 = 1+i, & x_2 = 2, & x_3 = 1-i. \end{array}$$

6.5 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων έχουν μεγάλη σημασία στα διάφορα προβλήματα των εφαρμογών και η γνώση τους καθορίζει τη λύση πολλών από αυτά. Στην παράγραφο αυτή δίνονται οι κυριότερες μέθοδοι υπολογισμού τους.[11]

6.5.1 Χαρακτηριστικά μεγέθη πίνακα

Έστω $S^{n\times n}$ το σύνολο των τετραγωνικών πινάκων τάξης n με στοιχεία από το σύνολο S, όπου S το σύνολο $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

Ορισμός 6.5.1 - 1 (ιδιοτιμής). *Ο αριθμός λ θα είναι μια ιδιοτιμή (eigenvalue) του πίνακα A με $A \in S^{n\times n}$ τότε και μόνον, όταν υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x}$ με $\mathbf{x} \in S^n$ τέτοιο, ώστε*

$$A\,\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \qquad (6.5.1 - 1)$$

Τότε το $\mathbf{x}$ θα λέγεται το **ιδιοδιάνυσμα** (eigenvector) του A, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Άμεσα προκύπτει ότι, αν ο λ είναι πραγματικός αντίστοιχα μιγαδικός αριθμός, το ίδιο θα συμβαίνει και με τις συντεταγμένες του διανύσματος $\mathbf{x}$.

6.5.2 Υπολογισμός ιδιοτιμών

Η σχέση $(6.5.1 - 1)$ γράφεται

$$(A - \lambda\,\mathrm{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}, \qquad (6.5.2 - 1)$$

[11] Ο αναγνώστης, για μια γενικότερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11], στα βιβλία Α. Μπράτσος [3] Κεφ. 8 και Α. Μπράτσος [4] Κεφ. 3 και:
https://en.wikipedia.org/wiki/Eigenvalues_and_eigenvectors

όπου I ο μοναδιαίος πίνακας τάξης n. Τότε το ομογενές σύστημα $(6.5.2-1)$ λέγεται το **χαρακτηριστικό σύστημα** του πίνακα A, ο πίνακας

$$A-\lambda\,\mathrm{I}=\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \qquad (6.5.2\text{ - }2)$$

χαρακτηριστικός πίνακας του A και η ορίζουσα

$$|A-\lambda \mathrm{I}| \qquad (6.5.2\text{ - }3)$$

χαρακτηριστική ορίζουσα του A.

Μια προφανής λύση του συστήματος $(6.5.2-1)$ είναι η $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Επειδή όμως σύμφωνα με τον Ορισμό 6.5.1 - 1 θα πρέπει το διάνυσμα $\mathbf{x}$ να είναι μη μηδενικό, ο αριθμός λ θα είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα A τότε και μόνον, όταν το σύστημα $(6.5.2-1)$ έχει και μη μηδενικές λύσεις, δηλαδή έχει **άπειρες λύσεις**. Τότε όμως σύμφωνα με γνωστό θεώρημα πρέπει

$$|A-\lambda\,\mathrm{I}|=0.$$

Άρα έχει αποδειχθεί ότι:

Πρόταση 6.5.2 - 1. *Ο αριθμός λ θα είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα A τότε και μόνον, όταν ο πίνακας $A-\lambda\mathrm{I}$ είναι μη αντιστρέψιμος ή ισοδύναμα, όταν $|A-\lambda\mathrm{I}|=0$.*

Η εξίσωση

$$|A-\lambda I|=0 \qquad (6.5.2\text{ - }4)$$

ορίζει τη **χαρακτηριστική εξίσωση** (characteristic equation) του πίνακα A και οι ρίζες της δίνουν τις ιδιοτιμές του A.

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα $(6.5.2-4)$ προκύπτει ένα πολυώνυμο, έστω $\varphi(\lambda)$, που έχει γενικά τη μορφή

$$\varphi(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_0. \qquad (6.5.2\text{ - }5)$$

Το $\varphi(\lambda)$ που, όταν αναφέρεται στον πίνακα A, συμβολίζεται επίσης και $\varphi_A(\lambda)$, λέγεται τότε το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** (characteristic polynomial) του A.

Ορισμός 6.5.2 - 1. *Ορίζεται ως* **φάσμα** *(spectrum) ενός τετραγωνικού πίνακα A τάξης n και συμβολίζεται με $\sigma(A)$, το σύνολο των ιδιοτιμών του, δηλαδή*

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}\,. \tag{6.5.2 - 6}$$

Ορισμός 6.5.2 - 2. *Η* **φασματική ακτίνα** *(spectral radius) ενός τετραγωνικού πίνακα A με $A \in S^{n\times n}$ συμβολίζεται με $\varrho(A)$ και ισούται με*

$$\varrho(A) = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|, \tag{6.5.2 - 7}$$

όταν λ_i; $i = 1, 2, \ldots, n$ οι ιδιοτιμές του A.

Ορισμός 6.5.2 - 3. *Το σύνολο των ιδιοτιμών και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων ενός τετραγωνικού πίνακα ορίζει τα* **χαρακτηριστικά μεγέθη** *του.*

Παράδειγμα 6.5.2 - 1

Να υπολογιστούν τα χαρακτηριστικά μεγέθη του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

δηλαδή

$$(3-\lambda)(1+\lambda) = 0$$

με ρίζες

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = -1,$$

που ορίζουν και τις ιδιοτιμές του.

Ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$

Το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα προσδιορίζεται από την $(6.5.1-1)$ ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} 3x_1 + \ 0\,x_2 &= 3x_1 \\ 8x_1 - \ \ x_2 &= 3x_2, \end{aligned}$$

οπότε από τη 2η εξίσωση προκύπτει ότι

$$8x_1 - 4x_2 = 0. \tag{1}$$

Δίνοντας μια αυθαίρετη τιμή στον άγνωστο x_1 με $x_1 \neq 0$, έστω $x_1 = 1$, από την (1) προκύπτει ότι $x_2 = 2$. Άρα το ιδιοδιάνυσμα, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$, είναι το $[1, 2]^\top$.

Ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$

Όμοια από την $(6.5.1-1)$ ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} 3x_1 + \ 0\,x_2 &= -x_1 \\ 8x_1 - \ \ x_2 &= -x_2, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$4x_1 + 0x_2 = 0. \tag{2}$$

Δίνοντας μια αυθαίρετη τιμή στον άγνωστο x_2 με $x_2 \neq 0$, έστω $x_2 = 1$, από την εξίσωση (2) προκύπτει $x_1 = 0$. Άρα το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ είναι το $[0, 1]^\top$.

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές:

Πρόγραμμα 6.5.2 - 1 (ιδιοτιμών - ιδιοδιανυσμάτων)

```
A = {{3,0}, {8,-1}};MatrixForm[A]
Print["Eigenvalues  A = ", Eigenvalues[A]]
Print["Eigenvectors A = ", Eigenvectors[A]]
```

■

Παράδειγμα 6.5.2 - 2

Όμοια του πίνακα

$$B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2-2\lambda+2=0$$

με ρίζες

$$\lambda_1=1+i \quad \text{και} \quad \lambda_2=1-i$$

που ορίζουν και τις ιδιοτιμές του.

Ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1+i$

Από την $(6.5.1-1)$ προκύπτει

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=(1+i)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{array}{rcrcl} ix_1 & + & x_2 & = & 0\\ x_1 & - & ix_2 & = & 0,\end{array}$$

δηλαδή

$$x_1-i\,x_2=0. \tag{3}$$

Δίνοντας μια αυθαίρετη τιμή στον άγνωστο x_2 με $x_2\neq 0$, έστω $x_2=1$, από την εξίσωση (3) προκύπτει $x_1=i$. Άρα το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1=1+i$ είναι το $[\,i,1\,]^\top$.

Ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1-i$

Από την $(6.5.1-1)$ προκύπτει

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=(1-i)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{array}{rcrcl} ix_1 & - & x_2 & = & 0\\ x_1 & + & ix_2 & = & 0,\end{array}$$

δηλαδή

$$x_1+i\,x_2=0. \tag{4}$$

Δίνοντας μια αυθαίρετη τιμή στον άγνωστο x_2 με $x_2 \neq 0$, έστω $x_2 = 1$, από την εξίσωση (4) προκύπτει $x_1 = -i$. Άρα το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1 - i$ είναι το $[-i, 1]^\top$. ■

Παράδειγμα 6.5.2 - 3

Όμοια του πίνακα

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

με ρίζα $\lambda = 1$ **διπλή**.

Στη διπλή ρίζα αντιστοιχούν δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, που υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ δηλαδή τελικά } 0\,x_1 + 0\,x_2 = 0. \tag{5}$$

Έστω αυθαίρετα $x_1 = 1$. Τότε από την (5) έχουμε $x_2 = 0$. Άρα το 1ο ιδιοδιάνυσμα είναι το $[1, 0]^\top$.

Όμοια, έστω αυθαίρετα $x_2 = 1$, οπότε από την (5) προκύπτει $x_1 = 0$. Επομένως το 2ο ιδιοδιάνυσμα είναι το $[0, 1]^\top$. ■

Έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι ο υπολογισμός των ιδιοτιμών σε πίνακες τάξης μεγαλύτερης του 4 είναι δύσκολος και συνήθως μη ακριβής. Για τον λόγο αυτό ο υπολογισμός των γίνεται με προσεγγιστικές μεθόδους. Υπάρχει όμως μια ειδική κατηγορία πινάκων, που ο υπολογισμός είναι εύκολος και ακριβής. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι ισχύει:

Πρόταση 6.5.2 - 2. *Έστω ότι ο $U = (u_{ij})$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$ είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας. Τότε ο αριθμός λ θα είναι μία ιδιοτιμή του U τότε και μόνον, όταν $\lambda = u_{ii}$ για κάποιο $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα χαρακτηριστικά μεγέθη των πινάκων

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2+i \end{bmatrix}.$$

2. Όμοια των

$$B_1 = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Να υπολογιστούν τα χαρακτηριστικά μεγέθη των μοναδιαίων πινάκων τάξης 2 και 3.

Απαντήσεις

1. A_1: ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v}_1 = [1,1]^\top$, $\lambda_2 = 2$ με $\mathbf{v}_2 = [2,1]^\top$.

A_2: $\lambda_1 = -2+4\,i$ με $\mathbf{v}_1 = [-i,1]^\top$, $\lambda_2 = -2-4\,i$ με $\mathbf{v}_2 = [i,1]^\top$.

A_3: $\lambda_1 = 2+i$ διπλή με $\mathbf{v}_1 = [0,1]^\top$, $\mathbf{v}_2 = [1,0]^\top$.

2. B_1: $\lambda_1 = 1$ με $\mathbf{v}_1 = [-2,-1,1]^\top$, $\lambda_{2,3} = -3$ διπλή με $\mathbf{v}_2 = [-2,0,1]^\top$, $\mathbf{v}_3 = [-1,1,0]^\top$.

B_2: $\lambda_1 = 2$ με $\mathbf{v}_1 = [1,1,1]^\top$, $\lambda_{2,3} = -1$ διπλή με $\mathbf{v}_2 = [-1,0,1]^\top$, $\mathbf{v}_3 = [-1,1,0]^\top$.

3. I_2: $\lambda_1 = 1$ διπλή με $\mathbf{v}_1 = [0,1]^\top$, $\mathbf{v}_2 = [1,0]^\top$.

I_3: $\lambda_1 = 1$ τριπλή με $\mathbf{v}_1 = [0,0,1]^\top$, $\mathbf{v}_2 = [0,1,0]^\top$ και $\mathbf{v}_3 = [1,0,0]^\top$.

6.6 Βιβλιογραφία

[1] Βάρσος, Δ., Δεριζιώτης, Δ., Εμμανουήλ, Ι., Μαλιάκας, Μ., Μελάς, Α. & Ταλέλλη, Ο. (2012). *Μια Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα.* Εκδόσεις Σοφία. ISBN: 978–960–670–636–3.

[2] Καδιανάκης, Ν. & Καρανάσιος, Σ. (2008). *Γραμμική Άλγεβρα, Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές.* ISBN: 960–917–250–4.

[3] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.* Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[4] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά.* Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[5] Ξένος, Θ. (2004). *Γραμμική Άλγεβρα.* Εκδόσεις Ζήτη. ISBN 960–431–904–3.

[6] Σχοινάς, Χρ. (2009). *Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας.* Εκδόσεις Γκιούρδας. ISBN 960–387–748–4.

[7] Don, E. (2006). *Schaum's Outlines – Mathematica.* Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN 978–960–461–000–6.

[8] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

[9] Golub, G. H. & Van Loan, C. F. (1996). *Matrix Computations.* Baltimore: Johns Hopkins (3rd ed.). ISBN 978–0–8018–5414–9.

[10] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

[11] Strang, G. (2005). *Γραμμική Άλγεβρα και εφαρμογές*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 960–730–970–7.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 7

ΟΡΙΑΚΗ ΤΙΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Στο μάθημα αυτό θα δοθεί η έννοια του ορίου μιας πραγματικής συνάρτησης με τρόπο προσαρμοσμένο στις απαιτήσεις των διαφόρων εφαρμογών, που απαιτούνται στην επιστήμη του. Ο αναγνώστης, για μια αυστηρά μαθηματική μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3].

7.1 Γενικές έννοιες και ορισμοί

7.1.1 Σύγκλιση σε σημείο

Είναι ήδη γνωστός[1] ο παρακάτω ορισμός της πραγματικής συνάρτησης:

Ορισμός 7.1.1 - 1 (συνάρτησης). *Έστω D και T δύο τυχόντα μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Τότε λέγεται συνάρτηση, μία* **μονοσήμαντη** *απεικόνιση, έστω f, του συνόλου D στο T, δηλαδή*

$$f: \qquad D \ni x \longrightarrow f(x) = y \in T, \tag{7.1.1 - 1}$$

[1] Βλέπε Μάθημα *Πραγματικές Συναρτήσεις*.

Πίνακας 7.1.1 - 1: Παράδειγμα 7.1.1 - 1.

x	1.7	1.8	1.9	1.99	2	2.01	2.1	2.2	2.3
$f(x)$	5.8	6.2	6.6	6.96	7	7.04	7.4	7.8	8.2

όταν το D είναι το πεδίο ορισμού και το T πεδίο τιμών της συνάρτησης f.

Σύμφωνα με τον ορισμό, αν x_0 σημείο του πεδίου ορισμού D, τότε η αντίστοιχη τιμή $f\left(x_0\right)$ της συνάρτησης υπολογίζεται αντικαθιστώντας στον τύπο $f(x)$ όπου x το x_0.

Παράδειγμα 7.1.1 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = 4x - 1 \quad \text{με πεδίο ορισμού το} \quad \mathbb{R}.$$

Τότε, αν $x = x_0 = 2$, είναι $f\left(x_0\right) = f(2) = 7$ κ.λπ.

Ορίζεται στη συνέχεια η έννοια της περιοχής ενός σημείου ως εξής:

Ορισμός 7.1.1 - 2 (περιοχής). *Η περιοχή ενός σημείου x_0 με ακτίνα δ, συμβολίζεται με $\varpi\left(x_0, \delta\right)$ και ορίζεται από το σύνολο των σημείων για τα οποία ισχύει ότι, αν $x \in \varpi\left(x_0, \delta\right)$, τότε*[2]

$$|x - x_0| < \delta. \tag{7.1.1 - 2}$$

Υποθέτουμε ότι στο Παράδειγμα 7.1.1 - 1 οι τιμές στη μεταβλητή x δίνονται πλησίον του 2 και είναι μικρότερες, αντίστοιχα μεγαλύτερες κατά 0.3 ή διαφορετικά λαμβάνοντας υπόψη και τον Ορισμό 7.1.1 - 2 ότι ανήκουν σε μια περιοχή του 2 με ακτίνα $\delta = 0.3$, δηλαδή $x \in \varpi\,(2, \delta)$. Τότε από τις αντίστοιχες τιμές της $f(x)$ προκύπτουν οι τιμές του Πίνακα 7.1.1 - 1.

[2] Είναι: $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ ή $-\delta < x - x_0 < \delta$.

Επομένως στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$2-\delta < x < 2+\delta \;\Leftrightarrow\; -\delta < x-2 < \delta \;\Leftrightarrow\; |x-2| < \delta, \qquad (7.1.1 - 3)$$

ενώ για τις αντίστοιχες τιμές της $f(x)$, που θα είναι όμοια σε μια απόσταση έστω ε από την τιμή $f(2)=7$ ότι

$$7-\varepsilon < f(x) < 7+\varepsilon \;\Leftrightarrow\; -\varepsilon < f(x)-f(2) < \varepsilon,$$

δηλαδή

$$|f(x)-f(2)| < \varepsilon. \qquad (7.1.1 - 4)$$

Θα δειχθεί τώρα ότι η σχέση $(7.1.1-4)$ ισχύει για κάθε $\varepsilon>0$, όταν το x παίρνει τιμές, που επαληθεύουν την $(7.1.1-3)$. Πράγματι, αν

$$|f(x)-f(2)| < \varepsilon, \quad \text{δηλαδή} \quad |(4x-1)-7| < \varepsilon \quad \text{ή} \quad 4|x-2| < \varepsilon,$$

τότε

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Επομένως η $(7.1.1-4)$ ισχύει για κάθε ε, όταν στην $(7.1.1-3)$ είναι $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$.

Εφαρμόζοντας το συμπέρασμα αυτό, αν $\varepsilon=10^{-2}$, τότε ο x πρέπει να παίρνει τιμές, έτσι ώστε

$$|x-2| < \frac{10^{-2}}{4} = 0.0025 \quad \text{ή} \quad 2-0.0025 < x < 2+0.0025,$$

δηλαδή $x\in(1.9975, 2.0025)$, ενώ ανάλογα διαστήματα μεταβολών του x θα προκύψουν[3] **για κάθε** $\varepsilon>0$, όπως $\varepsilon=10^{-10}, 10^{-50},\dots$. Άρα, αν θεωρηθεί ότι το $\varepsilon\to 0$, δηλαδή, αν η περιοχή περί το σημείο $f(2)$ τείνει να έχει ακτίνα 0 ή διαφορετικά ότι οι τιμές της $f(x)$ τείνουν στην τιμή $f(2)$, τότε πάντοτε υπάρχει κατάλληλη περιοχή του x ακτίνας $\delta=\delta(\varepsilon)$, που να το εξασφαλίζει.

Η ιδιότητα αυτή στα Μαθηματικά εκφράζεται λέγοντας ότι, όταν ο x τείνει προς τον αριθμό 2, η συνάρτηση $f(x)=4x-1$ έχει οριακή τιμή ή όριο τον αριθμό 7, ενώ συμβολικά στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 7. \qquad (7.1.1 - 5)$$

[3] Ο όρος **για κάθε** $\varepsilon>0$ είναι απαραίτητος, διαφορετικά τα συμπεράσματα που ακολουθούν δεν ισχύουν.

Παρατηρήσεις 7.1.1 - 1

i) Το lim αποτελεί συγκοπή της λέξης limes, που σημαίνει όριο.

ii) Σύμφωνα και με τον Πίνακα 7.1.1 - 1, όταν στην $(7.1.1-5)$ γράφεται $x \to 2$, αυτό σημαίνει ότι το x τείνει στο 2 από μικρότερες (συμβολικά $x \to 2-0$ ή $x \to 2^-$), αντίστοιχα μεγαλύτερες (συμβολικά $x \to 2+0$ ή $x \to 2^+$) τιμές.

iii) Στα επόμενα, όταν απαιτείται ο υπολογισμός ορίων της μορφής $(7.1.1-5)$, δεν θα γίνεται απόδειξη ότι μια σχέση της μορφής $(7.1.1-4)$ ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$.

Δίνεται στη συνέχεια ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός 7.1.1 - 3. *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $[a, x_0) \cup (x_0, b] \subset \mathbb{R}$. Τότε θα λέγεται ότι η f είναι* **συγκλίνουσα** *για $x \to x_0$ ή διαφορετικά ότι υπάρχει το όριο της f στο x_0 και θα συμβολίζεται αυτό με $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ τότε και μόνον, όταν* **για κάθε** *$\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε (Σχ. 7.1.1 - 1)*

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{για κάθε } x \in [a, x_0) \cup (x_0, b] \ \text{ με } \ |x - x_0| < \delta \qquad (7.1.1 - 6)$$

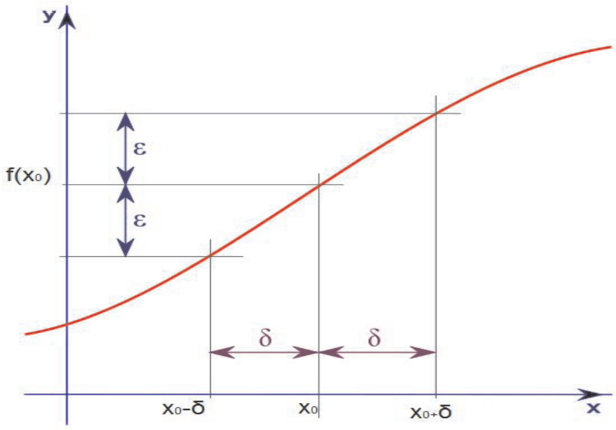
Στην περίπτωση που $l = 0$, η f θα λέγεται **μηδενική** στο x_0.

Σημείωση 7.1.1 - 1

Στα Μαθηματικά δίνονται αναλυτικότερα οι παρακάτω ορισμοί:

Ορισμός 7.1.1 - 4. *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $(x_0, b] \subset \mathbb{R}$. Τότε θα λέγεται ότι η f είναι* **συγκλίνουσα** *για $x \to x_0^+$ ή διαφορετικά ότι υπάρχει το δεξιό όριο της f στο x_0 και θα συμβολίζεται αυτό με*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$$



Σχήμα 7.1.1 - 1: Ορισμός 7.1.1 - 3 με $l = f(x_0)$: αν $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{για κάθε} \quad x \in (x_0, b] \quad \text{με} \quad 0 < x - x_0 < \delta \qquad (7.1.1 - 7)$$

Ορισμός 7.1.1 - 5. *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $[a, x_0) \subset \mathbb{R}$. Τότε θα λέγεται ότι η f είναι* **συγκλίνουσα** *για $x \to x_0^-$ ή διαφορετικά ότι υπάρχει το αριστερό όριο της f στο x_0 και θα συμβολίζεται αυτό με*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{για κάθε} \quad x \in [a, x_0) \quad \text{με} \quad 0 < x_0 - x < \delta \qquad (7.1.1 - 8)$$

Τα όρια αυτά λέγονται και **μονόπλευρα** όρια της f στο x_0.

Παρατήρηση 7.1.1 - 1

Η οριακή τιμή $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει, όταν υπάρχουν το αριστερό, αντίστοιχα δεξιό όριό της στο x_0 και είναι ίσα μεταξύ τους. Σε κάθε άλλη περίπτωση η οριακή τιμή δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 7.1.1 - 2

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x + \frac{|x|}{x} \quad \text{με πεδίο ορισμού} \quad D = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Τότε, αν $x < 0$, είναι $|x| = -x$, οπότε

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x + \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = 0 - 1 = -1,$$

ενώ

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x + \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 0 + 1 = 1,$$

δηλαδή

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x),$$

οπότε η οριακή τιμή $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 7.1.1 - 3

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} \quad \text{με πεδίο ορισμού} \quad D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

Είναι προφανές ότι, αν οι τιμές του x τείνουν στην τιμή 1, τότε ενδεικτικά έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 7.1.1 - 2.

Ανάλογα με την απόδειξη στην (7.1.1−4) είναι δυνατόν και στην περίπτωση αυτή να αποδειχθεί ότι, για κάθε αριθμό $M > 0$ υπάρχει ένα αντίστοιχο διάστημα τιμών του x στην περιοχή του 1, για το οποίο να ισχύει ότι

$$\frac{4}{(x-1)^2} > M. \tag{7.1.1 - 9}$$

Πίνακας 7.1.1 - 2: Παράδειγμα 7.1.1 - 3.

x	0	0.5	0.99	1.02	1.5
$f(x)$	4	16	4×10^4	10^4	16

Πράγματι, διαδοχικά από την ανισότητα $(7.1.1-9)$ προκύπτει

$$\frac{4}{(x-1)^2} > M \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(x-1)^2}{4} < \frac{1}{M} \quad\Leftrightarrow\quad (x-1)^2 < \frac{4}{M}$$

$$|x-1| < \frac{2}{\sqrt{M}} \quad\Leftrightarrow\quad 1-\frac{2}{\sqrt{M}} < x < 1+\frac{2}{\sqrt{M}}\,.$$

Επομένως, αν $M = 10^4$, για να είναι $f(x) > 10^4$, πρέπει σύμφωνα με την τελευταία παραπάνω ανισότητα ο x να παίρνει τιμές στο διάστημα

$$1-\frac{2}{100} < x < 1+\frac{2}{100}\,, \quad \text{δηλαδή} \quad 0.98 < x < 1.02.$$

Η ανισότητα $(7.1.1-4)$, όταν χρησιμοποιηθεί ο αριθμός ε με $\varepsilon > 0$ γράφεται ως εξής:

$$\frac{4}{(x-1)^2} > \frac{1}{\varepsilon}\,. \tag{7.1.1 - 10}$$

Η παραπάνω ιδιότητα εκφράζεται στα Μαθηματικά λέγοντας: όταν ο x τείνει στον αριθμό 1, η συνάρτηση $f(x)$ τείνει στο $+\infty$ ή ότι έχει όριο το $+\infty$, ενώ συμβολικά γράφεται

$$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty.$$

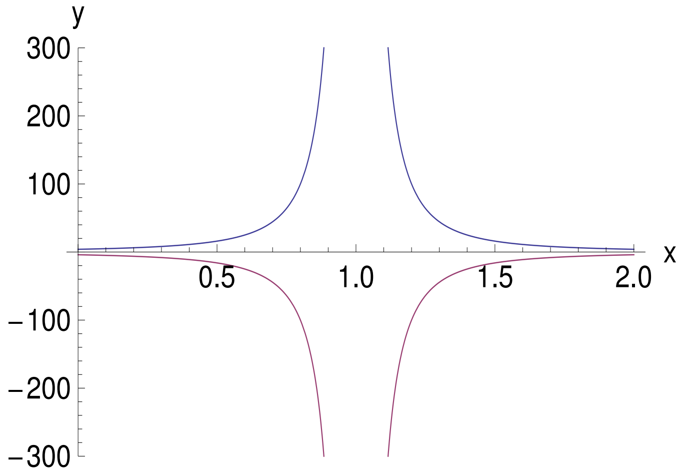
Όμοια για τη συνάρτηση

$$g(x) = -\frac{4}{(x-1)^2} \quad \text{είναι} \quad \lim_{x\to 1} g(x) = -\infty.$$

Η ανάλογη ανισότητα της $(7.1.1-10)$ στην περίπτωση αυτή είναι η

$$-\frac{4}{(x-1)^2} < -\frac{1}{\varepsilon}\,. \tag{7.1.1 - 11}$$

Τα διαγράμματα των συναρτήσεων f και g δίνονται στο Σχ. 7.1.1 - 2.



Σχήμα 7.1.1 - 2: Παράδειγμα 7.1.1 - 3: η συνάρτηση $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2}$ μπλε και η $g(x) = -\frac{4}{(x-1)^2}$ κόκκινη καμπύλη.

Σημείωση 7.1.1 - 2

Στο εξής δεν θα γίνεται υπολογισμός των τιμών της μεταβλητής για τις οποίες ισχύει η $(7.1.1 - 10)$, αντίστοιχα η $(7.1.1 - 11)$, αλλά θα χρησιμοποιούνται μόνον τα συμπεράσματά των.

Παράδειγμα 7.1.1 - 4

Να υπολογιστεί η οριακή τιμή

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}.$$

Λύση. Προφανώς είναι $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Άρα σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.1.1 - 1 πρέπει να εξεταστούν οι παρακάτω δύο οριακές τιμές:

i)

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x-1}.$$

Τότε $x \in (-\infty, 1)$, οπότε $x < 1$, δηλαδή $x - 1 < 0$. Επομένως

$$\frac{1}{x-1} < 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in (-\infty, 1),$$

οπότε σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.1.1 - 2 είναι:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty\,.$$

ii)

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{1}{x-1}\,.$$

Τότε $x \in (1, +\infty)$, οπότε

$$x > 1, \quad \text{δηλαδή} \quad x - 1 > 0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{x-1} > 0$$

και επομένως

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x-1} = +\infty\,.$$

Άρα το όριο $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$ δεν υπάρχει (Σχ. 7.1.1 - 3).

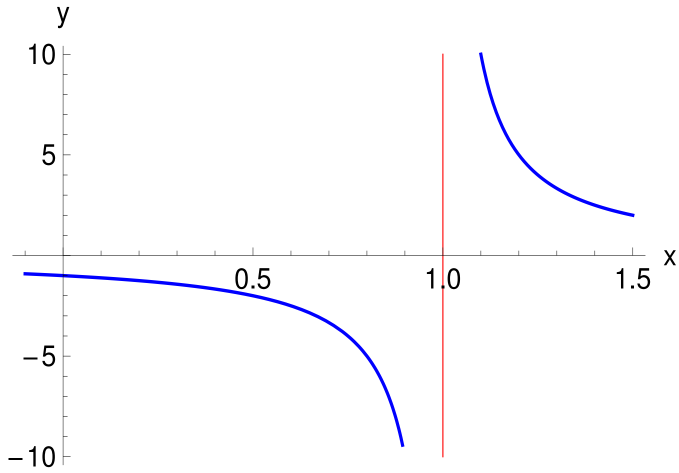
Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 7.1.1 - 1 (οριακής τιμής)

```
Limit[1/x-1),x->1,Direction->1]          x->1-0
Limit[1/(x-1),x->1,Direction->-1]        x->1+0
```

ενώ το Σχ. 7.1.1 - 3 με τις:

```
f[x_] := 1/(x - 1)
fgr1 = Plot[f[x], {x, -0.1, 0.95},
   PlotStyle -> {Blue, Thickness[0.005]},
   BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 12},
   AxesLabel -> {"x", "y"}, AxesOrigin -> {0, 0}];
fgr2 = Plot[f[x], {x, 1.1, 1.5},
   PlotStyle -> {Blue, Thickness[0.005]},
   BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 12},
   AxesLabel -> {"x", "y"}, AxesOrigin -> {0, 0}];
line = Line[{{1, -10}, {1, 10}}];
fgr3 = Graphics[{Red, Thick, line}];
fgr = Show[fgr1, fgr2, fgr3, PlotRange -> All, Axes -> True,
  AxesLabel -> {"x", "y"},
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 12},
  AxesOrigin -> {0, 0}]
```



Σχήμα 7.1.1 - 3: Παράδειγμα 7.1.1 - 4: το διάγραμμα της συνάρτησης $\frac{1}{x-1}$ - μπλε καμπύλη και η ευθεία $x = 1$ - κόκκινη καμπύλη, που αντιστοιχεί στην οριακή τιμή.

■

Παρατήρηση 7.1.1 - 2

Στα Μαθηματικά, όταν η οριακή της συνάρτησης απειρίζεται, λέγεται ότι η συνάρτηση συγκλίνει **κατ' εκδοχή**.

Δίνεται τώρα ο ορισμός της κατ' εκδοχή σύγκλισης για την περίπτωση που η μεταβλητή τείνει σε σημείο ως εξής:

Ορισμός 7.1.1 - 6. *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $[a, x_0) \cup (x_0, b]$. Τότε θα ισχύει:*

i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *τότε και μόνον, όταν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *έτσι ώστε*

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \tag{7.1.1 - 12}$$

για κάθε $x \in [a, x_0) \cup (x_0, b]$ *με* $|x - x_0| < \delta$.

ii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ *τότε και μόνον, όταν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *έτσι ώστε*

$$f(x) < -\frac{1}{\varepsilon} \tag{7.1.1 - 13}$$

για κάθε $x \in [a, x_0) \cup (x_0, b]$ *με* $|x - x_0| < \delta$.

7.1.2 Σύγκλιση στο άπειρο

Αρχικά κρίνεται σκόπιμο στο σημείο αυτό να δοθεί ο παρακάτω χρήσιμος για τα επόμενα μαθήματα ορισμός:

Ορισμός 7.1.2 - 1. *Η συνάρτηση* $f(x)$ *με πεδίο ορισμού* $[a, +\infty)$ *θα λέγεται ότι είναι* **φραγμένη** *στην περιοχή του* $+\infty$ *τότε και μόνον, όταν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί* $M \geq 0$ *και* $\theta > 0$, *έτσι ώστε*

$$|f(x)| < \theta \quad \text{για κάθε} \quad x \in [a, +\infty) \quad \text{και} \quad x > M. \tag{7.1.2 - 1}$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία της Παραγράφου 7.1.1 είναι δυνατόν να οριστεί ανάλογα η οριακή τιμή μιας συνάρτησης, έστω $f(x)$, όταν $x \to \infty$.

Παράδειγμα 7.1.2 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{με πεδίο ορισμού} \quad (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η $f(x)$ παίρνει τιμές απολύτως μικρότερες από οποιονδήποτε αριθμό ε με $\varepsilon > 0$, όταν η μεταβλητή x παίρνει τιμές απολύτως μεγαλύτερες από κατάλληλα οριζόμενο κάθε φορά αριθμό N με $N > 0$.

Πράγματι, έστω ε με $\varepsilon > 0$. Τότε, αν $\frac{1}{x-1} < \varepsilon$, διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad |x-1| > \frac{1}{\varepsilon} \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x - 1 > \dfrac{1}{\varepsilon} \\ \text{ή} \\ x - 1 < -\dfrac{1}{\varepsilon} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x > 1 + \dfrac{1}{\varepsilon} \\ \text{ή} \\ x < 1 - \dfrac{1}{\varepsilon} \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Επομένως, αν $\varepsilon = \frac{1}{10^3}$, τότε για να ισχύει $\frac{1}{x-1} < \frac{1}{10^3}$, αρκεί οι τιμές του x να είναι μεγαλύτερες του $1 + \frac{1}{\varepsilon} = 1 + 10^3 = 1001$ ή μικρότερες του $1 - \frac{1}{\varepsilon} = 1 - 10^3 = -999$.

Η παραπάνω ιδιότητα εκφράζεται στα Μαθηματικά λέγοντας ότι η συνάρτηση $f(x)$ έχει όριο το 0, όταν $x \to +\infty$ ή $x \to -\infty$ και συμβολικά γράφεται

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

Επίσης χρησιμοποιείται και ο γενικότερος συμβολισμός $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Παράδειγμα 7.1.2 - 2

Όμοια συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \left(2 + \frac{1}{x-1} \right) = 2$$

και

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = 1.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω δίνεται ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός 7.1.2 - 2. *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $[a, +\infty)$. Τότε θα λέγεται ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι* **συγκλίνουσα** *για $x \to +\infty$ και θα συμβολίζεται αυτό με $f(x) \to l$, όταν $x \to +\infty$ ή ισοδύναμα*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

τότε και μόνον, όταν η συνάρτηση $f(x) - l$ είναι μηδενική, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $N = N(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{για κάθε} \quad x \in [a, +\infty) \quad \text{με} \quad x > N. \qquad (7.1.2 - 2)$$

Ορισμός 7.1.2 - 3. *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $(-\infty, a]$. Τότε θα λέγεται ότι η συνάρτηση f είναι* **συγκλίνουσα** *για $x \to -\infty$ και θα συμβολίζεται αυτό με $f(x) \to l$, όταν $x \to -\infty$ ή ισοδύναμα*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

τότε και μόνον, όταν η συνάρτηση $f(x) - l$ είναι μηδενική, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $N = N(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \textit{για κάθε} \quad x \in (-\infty, a] \quad \textit{με} \quad x < -N \qquad (7.1.2 - 3)$$

Ο ορισμός της μηδενικής συνάρτησης στις παραπάνω δύο περιπτώσεις είναι προφανής.

Παράδειγμα 7.1.2 - 3

Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = 25\,x^2.$$

Τότε για οποιονδήποτε αριθμό M με $M > 0$, υπάρχει πάντοτε ένας άλλος θετικός αριθμός, έστω N, έτσι ώστε για τιμές του x (θετικές ή αρνητικές) με $|x| > N$ να είναι $g(x) = 25\,x^2 > M$.

Πράγματι, έστω M με $M > 0$. Τότε, αν $25\,x^2 > M$, διαδοχικά έχουμε

$$25\,x^2 > M \quad \Leftrightarrow \quad |x| > \frac{\sqrt{M}}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x > \dfrac{\sqrt{M}}{5} \\ \text{ή} \\ x < -\dfrac{\sqrt{M}}{5}\,. \end{array} \right.$$

Επομένως, αν $M = 9 \times 10^4$, τότε για να ισχύει

$$25\,x^2 > 9 \times 10^4 = \left(3 \times 10^2\right)^2,$$

αρκεί οι τιμές του x να είναι μεγαλύτερες των $\frac{300}{5} = 60$ ή μικρότερες του $-\frac{300}{5} = -60$.

Η παραπάνω ιδιότητα όμοια εκφράζεται στα Μαθηματικά λέγοντας ότι η συνάρτηση $g(x)$ έχει όριο το $+\infty$, όταν $x \to +\infty$ ή $x \to -\infty$ και συμβολικά γράφεται

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty.$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι:

- αν $\tilde{g}(x) = -25\,x^2$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty} \tilde{g}(x) = +\infty \quad ή \quad \lim_{x\to-\infty} \tilde{g}(x) = +\infty, \quad \text{ενώ}$$

- αν $\hat{g}(x) = x^3$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty} \hat{g}(x) = +\infty \quad ή \quad \lim_{x\to-\infty} \hat{g}(x) = -\infty.$$

Σημείωση 7.1.2 - 1

Ανάλογα όπως στη Σημείωση 7.1.2 - 1 στο εξής δεν θα γίνεται υπολογισμός των τιμών της μεταβλητής για τις οποίες ισχύουν οι παραπάνω περιπτώσεις, αλλά θα χρησιμοποιούνται μόνον τα συμπεράσματά των.

Ο ορισμός της κατ' εκδοχή σύγκλισης μιας συνάρτησης στην περίπτωση αυτή γράφεται ως εξής:

Ορισμός 7.1.2 - 4. *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $[a, +\infty)$. Τότε θα ισχύει:*

i) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $N = N(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε*

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{για κάθε} \quad x \in [a, +\infty) \quad \text{με} \quad x > N. \tag{7.1.2 - 4}$$

ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ *τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $N = N(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε*

$$f(x) < -\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{για κάθε} \quad x \in [a, +\infty) \quad \text{με} \quad x > N. \tag{7.1.2 - 5}$$

Ορισμός 7.1.2 - 5. *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $(-\infty, a]$. Τότε θα ισχύει*

i) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ *τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός $N = N(\varepsilon) > 0$ έτσι ώστε*

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{για κάθε} \quad x \in (-\infty, a] \quad \text{με} \quad x < -N. \tag{7.1.2 - 6}$$

Πίνακας 7.1.3 - 1: ιδιοτήτων συγκλινουσών συναρτήσεων όπου με ΑΜ συμβολίζεται η απροσδιόριστη μορφή.

f	g	$f+g$	$f\,g$	f/g
f_0	g_0	f_0+g_0	$f_0\,g_0$	$f_0/g_0 \quad (g_0 \neq 0)$
f_0	∞	∞	$\infty \quad (f_0 \neq 0)$	0
∞	g_0	∞	$\infty \quad (g_0 \neq 0)$	∞
0	0	0	0	ΑΜ
0	∞	∞	ΑΜ	0
∞	0	∞	ΑΜ	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ΑΜ
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ΑΜ
$+\infty$	$-\infty$	ΑΜ	$-\infty$	ΑΜ
$-\infty$	$+\infty$	ΑΜ	$-\infty$	ΑΜ

ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ *τότε και μόνον, όταν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει πραγματικός αριθμός* $N = N(\varepsilon) > 0$, *έτσι ώστε*

$$f(x) < -\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{για κάθε} \quad x \in (-\infty, a] \quad \text{με} \quad x < -N \qquad (7.1.2 - 7)$$

7.1.3 Ιδιότητες συγκλινουσών συναρτήσεων

Δίνονται τώρα στον Πίνακα 7.1.3 - 1 περιληπτικά όλες οι ιδιότητες των συγκλινουσών συναρτήσεων με την έννοια της σύγκλισης, όπως παραπάνω έχει δοθεί, για δύο συναρτήσεις, έστω f και g με αντίστοιχες οριακές τιμές f_0 και g_0.

Σημειώσεις 7.1.3 - 1

- Οι συναρτήσεις f, g υποτίθεται ότι έχουν κοινό πεδίο ορισμού και ότι έχουν όριο έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό ή έναν προσημειωμένο άπειρο, όταν $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ ή $x \to \pm\infty$.

- Στις ιδιότητες του Πίνακα 7.1.3 - 1 συμπεριλαμβάνεται και η εξής:
  Αν οι συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$ και $h(x)$ έχουν κοινό πεδίο ορισμού, έστω D και ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l, \quad \text{ενώ} \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

  για κάθε $x \in D$, τότε και $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$.

- Όταν η πράξη δεν είναι επιτρεπτή (απροσδιόριστη μορφή), τότε έχει τεθεί η ένδειξη ΑΜ.

Παρατήρηση 7.1.3 - 1

Τα σύμβολα $+\infty$ και $-\infty$ δεν πρέπει σε καμιά περίπτωση να θεωρούνται ως αριθμοί.

Παράδειγμα 7.1.3 - 1

Να υπολογιστεί η οριακή τιμή $\lim_{x \to \infty} f(x)$, όταν

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}\,.$$

Λύση. Η $f(x)$ γράφεται

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{x^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

Άρα

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\lim_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{0+0}{1+0} = 0.$$

■

Παράδειγμα 7.1.3 - 2

Όμοια των συναρτήσεων

$$g(x)=\frac{4x^2+5x-2}{2x^2+4x+4} \quad \text{και} \quad h(x)=\frac{2x^3+x+1}{x^2+x+1} \quad \text{όταν} \quad x\to -\infty.$$

Λύση. Διαδοχικά έχουμε

$$g(x)=\frac{4x^2+5x-2}{2x^2+4x+4}=\frac{x^2\left(4+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}=\frac{4+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}{2+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}},$$

οπότε

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(4+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}=\frac{4+0}{2+0}=2$$

και

$$h(x)=\frac{2x^3+x+1}{x^2+x+1}=\frac{x^3\left(2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=x\,\frac{2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}},$$

οπότε

$$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty} x\,\frac{\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=(-\infty)\frac{2+0}{1+0}=-\infty.$$

■

Παρατήρηση 7.1.3 - 2

Από το παραπάνω παράδειγμα προκύπτουν τα εξής: Όταν έχουμε να υπολογίσουμε την οριακή τιμή μιας ρητής συνάρτησης για $x\to\pm\infty$, τότε, αν

- ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή, το όριο είναι το 0,
- ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος με τον βαθμό του παρονομαστή, το όριο ισούται με το πηλίκο του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου στον αριθμητή προς τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του παρονομαστή, και
- ο αριθμητής είναι μεγαλύτερου βαθμού από τον παρονομαστή, τότε το όριο είναι ένα προσημειωμένο άπειρο ($+\infty$, αντίστοιχα $-\infty$).

Παράδειγμα 7.1.3 - 3

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} \quad \text{με πεδίο ορισμού} \quad D = \mathbb{R} - \{-2, 1\}.$$

Να υπολογιστούν οι οριακές τιμές $\lim_{x \to 1} f(x)$ και $\lim_{x \to -2} f(x)$.

Λύση. Έστω αρχικά ο υπολογισμός της οριακής τιμής $\lim_{x \to 1} f(x)$. Επειδή η τιμή $x = 1$ μηδενίζει τον αριθμητή και τον παρονομαστή, δεν εφαρμόζεται η ιδιότητα του πηλίκου του Πίνακα 7.1.3 - 1. Τότε στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$f(x) = \frac{(x-1)\left(x^2+1\right)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2+1}{x+2} \quad \text{για κάθε} \quad x \in D,$$

οπότε

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{\lim_{x \to 1}\left(x^2+1\right)}{\lim_{x \to 1}(x+2)} = \frac{2}{3}.$$

Όταν $x \to -2$, τότε $\lim_{x \to -2}\left(x^2+1\right) = 5$, ενώ το $x + 2$ τείνει στο 0 μέσω αρνητικών τιμών, όταν $x \to -2-0$ και μέσω θετικών, όταν $x \to -2+0$. Άρα

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -2-0} f(x) &= \lim_{x \to -2-0} \frac{x^2+1}{x+2} = -\infty \\
\lim_{x \to -2+0} f(x) &= \lim_{x \to -2+0} \frac{x^2+1}{x+2} = +\infty.
\end{aligned}$$

■

7.1.4 Όριο σύνθετης συνάρτησης

Ο υπολογισμός των οριακών τιμών των Παραγράφων 7.1.1 - 7.1.3 αναφέρεται σε απλές συναρτήσεις. Σε περιπτώσεις που η συνάρτηση είναι σύνθετη, δηλαδή της μορφής $f(g(x))$, τότε ο υπολογισμός του ορίου $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$, όταν $x \in D$ με D το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g, γίνεται ως εξής:

- Η συνάρτηση γράφεται στη μορφή $f(u)$ όπου $u = g(x)$.
- Υπολογίζεται, εφόσον υπάρχει, το $u_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$, και στη συνέχεια, όμοια εφόσον υπάρχει, το $\lim_{u \to u_0} f(u)$.

Παράδειγμα 7.1.4 - 1

Να υπολογιστεί η οριακή τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = e^{-x^2}$$

στα άκρα του πεδίου ορισμού της.

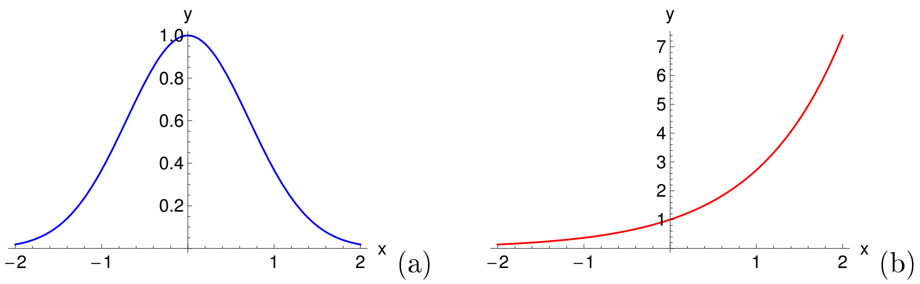
Λύση. Το πεδίο ορισμού της f είναι προφανώς το $\mathbb{R}$. Η f είναι σύνθετη συνάρτηση και γράφεται ως εξής:

$$f(u) = e^u, \quad \text{όταν} \quad u = g(x) = -x^2.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pm\infty} g(x) &= \lim_{x \to \pm\infty} \left(-x^2\right) = -\infty, \quad \text{οπότε} \\ \lim_{u \to -\infty} f(u) &= \lim_{x \to -\infty} e^u = 0. \end{aligned}$$

Άρα $\quad \lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = 0 \quad$ (Σχ. 7.1.4 - 1). ∎



Σχήμα 7.1.4 - 1: Παράδειγμα 7.1.4 - 1 (a) Συνάρτηση e^{-x^2} και (b) e^x.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι οριακές τιμές των παρακάτω συναρτήσεων:

$i)\quad \lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^4+1}$ $\qquad v)\quad \lim_{x\to-\infty}\left(5x^2-x+1\right)$

$ii)\quad \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x+1}$ $\qquad vi)\quad \lim_{x\to-\infty}\left(2x^3+x^2+1\right)$

$iii)\quad \lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{4x^2+5}$ $\qquad vii)\quad \lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$

$iv)\quad \lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2x^2+1}$ $\qquad viii)\quad \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x}}$.

2. Όμοια των συναρτήσεων

$i)\quad \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ $\qquad v)\quad \lim_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$

$ii)\quad \lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+x}{-x^3+27}$ $\qquad vi)\quad \lim_{x\to 2}\dfrac{|x-2|+x^2-3x+2}{x-2}$

$iii)\quad \lim_{x\to 0}\cos^2\left(x^2+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $\qquad vii)\quad \lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{x|x|}$

$iv)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\ln\left(x^2+1\right)$ $\qquad viii)\quad \lim_{x\to 0}\dfrac{x^3-8}{|x|}$.

Απαντήσεις

1. i) 0, ii) 0, iii) $\frac{1}{4}$, iv) $+\infty$, v) $+\infty$ vi) $-\infty$, vii) $+\infty$,
viii) $\lim_{x\to 0_-}\exp(-1/x)=+\infty$, $\lim_{x\to 0_+}\exp(-1/x)=0$.

2. i) 0, ii) -1, iii) $\frac{1}{2}$, iv) $+\infty$, v) $-\infty$, όταν $x\to 2-0$ και $+\infty$, όταν $x\to 2+0$, vi) 0, όταν $x\to 2-0$ και 2, όταν $x\to 2+0$, vii) $-\infty$, όταν $x\to 0_-$ και $+\infty$, όταν $x\to 0_+$, viii) $-\infty$.

7.2 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά.* Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[2] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

[3] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά.* Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Βιβλιογραφία για περαιτέρω μελέτη

Παπαδημητράκης, Μ. (2015). *Ανάλυση: Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής* *http : //fourier.math.uoc.gr/ papadim/analysis_n.pdf*
Πανεπιστήμιο Κρήτης: Τμήμα Μαθηματικών.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://eclass.uoa.gr/courses/MATH130/ θέση Έγγραφα
- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 8

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Όμοια, όπως και στο Μάθημα *Οριακή τιμή συνάρτησης*, δίνονται περιληπτικά οι βασικότεροι ορισμοί και θεωρήματα που αναφέρονται στη συνέχεια μιας πραγματικής συνάρτησης, ενώ ο αναγνώστης για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [2, 3, 4].

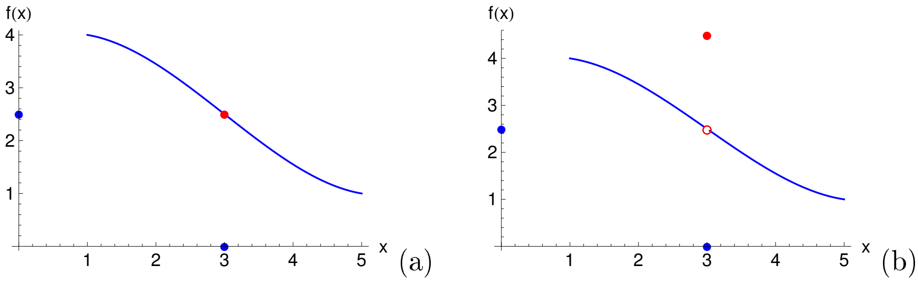
8.1 Γενικές έννοιες και ορισμοί

8.1.1 Ορισμός συνέχειας

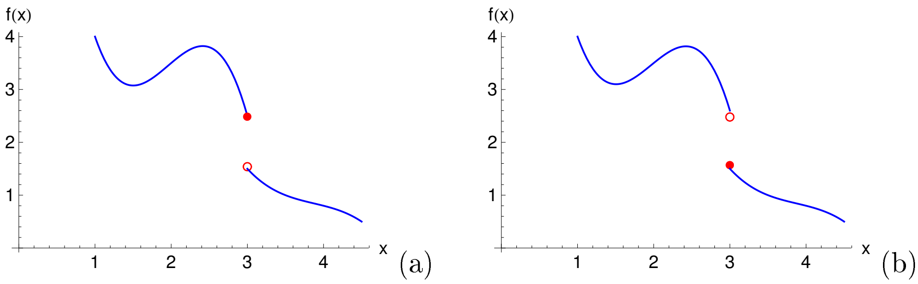
Ορισμός 8.1.1 - 1 (συνέχειας). *Έστω η συνάρτηση $f|D$ και σημείο $x_0 \in D$. Τότε η f θα λέγεται συνεχής (continuous) στο σημείο $x_0 \in D$ τότε και μόνον, όταν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ και ισχύει (Σχ. 8.1.1 - 1a)*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(x_0\right). \tag{8.1.1 - 1}$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση θα λέγεται ασυνεχής στο σημείο x_0 (Σχ. 8.1.1 - 1b και Σχ. 8.1.1 - 2).



Σχήμα 8.1.1 - 1: (a) Συνάρτηση συνεχής στο $x_0 = 3$. Ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. (b) Ασυνεχής στο $x_0 = 3$. Υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και είναι διαφορετικό από το $f(x_0)$.



Σχήμα 8.1.1 - 2: Συνάρτηση ασυνεχής στο $x_0 = 3$, επειδή $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$. (a) Αριστερά συνεχής και (b) δεξιά συνεχής στο $x_0 = 3$.

Ορισμός 8.1.1 - 2 (πλευρικής συνέχειας). *Η συνάρτηση $f|D$ θα λέγεται αριστερά, αντίστοιχα δεξιά συνεχής στο σημείο $x_0 \in D$ τότε και μόνον, όταν*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

(Σχ. 8.1.1 - 2a), αντίστοιχα

$$\lim_{x->x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

(Σχ. 8.1.1 - 2b).

Εύκολα αποδεικνύεται σύμφωνα με τον Ορισμό 8.1.1 - 1 ότι οι συναρτήσεις ax^{ν}, οι τριγωνομετρικές και η e^x είναι συνεχείς συναρτήσεις.

8.1.2 Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Δίνονται στη συνέχεια οι ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων με τη μορφή προτάσεων.[1]

Πρόταση 8.1.2 - 1. *Αν $f, g\,|\,D$ συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο $x_0 \in D$, τότε και οι συναρτήσεις $f \pm g$ και fg είναι συνεχείς στο σημείο $x_0 \in D$.*

Πρόταση 8.1.2 - 2. *Αν $f, g\,|\,D$ συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο $x_0 \in D$ και $f(x_0) \neq 0$, τότε υπάρχει περιοχή $\varpi(x_0)$, τέτοια ώστε $f(x_0) \neq 0$ για κάθε $x \in \varpi(x_0)$, οπότε η συνάρτηση $1/f$ έχει έννοια για κάθε $x \in D \cap \varpi(x_0)$ και είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in D$.*

Σύμφωνα με τις ιδιότητες αυτές οι πολυωνυμικές, ρητές, υπερβολικές συναρτήσεις είναι συνεχείς συναρτήσεις στα πεδία ορισμού των.

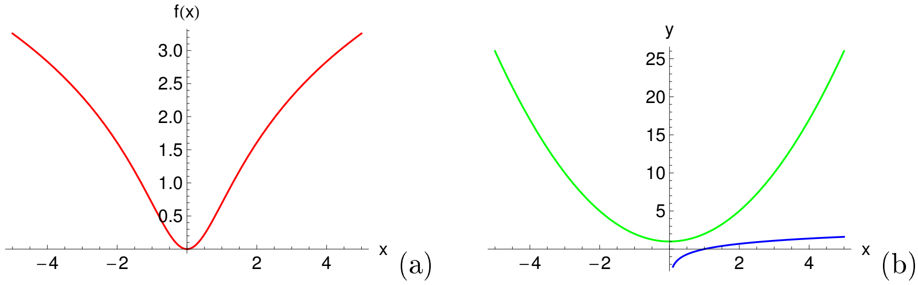
8.1.3 Θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων

Θεώρημα 8.1.3 - 1 (σύνθετης συνάρτησης). *Έστω ότι η συνάρτηση $u = g(x)|D$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in D$ και η συνάρτηση $f(u)|g(D)$ είναι συνεχής στο σημείο $u_0 = g(x_0) \in g(D)$. Τότε η σύνθετη συνάρτηση $h(x) = f(g(x))|D$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in D$.*

Παράδειγμα 8.1.3 - 1

Η συνάρτηση
$$f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$$
είναι συνεχής, επειδή είναι σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων (Σχ. 8.1.3 - 1)
$$f(u) = \ln u, \quad \text{όταν} \quad u = g(x) = 1 + x^2.$$

[1] Για τον ορισμό της περιοχής ενός σημείου βλέπε Μάθημα *Οριακή τιμή συνάρτησης*.



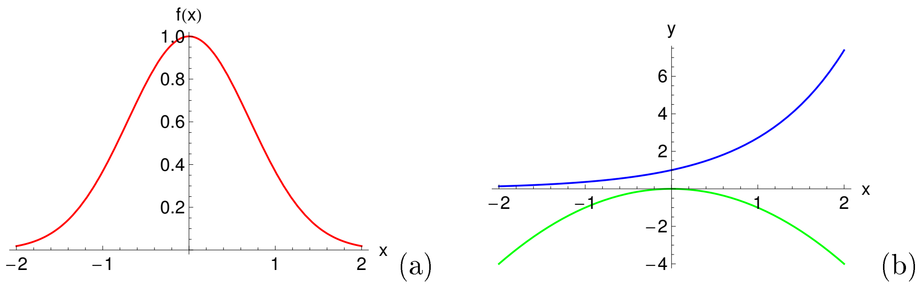
Σχήμα 8.1.3 - 1: (a) Συνάρτηση $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$, όταν $x \in [-5, 5]$. (b) Συνάρτηση $1 + x^2$ πράσινη και $\ln x$ μπλε καμπύλη.

Παράδειγμα 8.1.3 - 2

Όμοια η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ είναι συνεχής, επειδή είναι σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων (Σχ. 8.1.3 - 2)

$$f(u) = e^u, \quad \text{όταν} \quad u = -x^2.$$

Δίνονται στη συνέχεια χωρίς απόδειξη τα κυριότερα θεωρήματα επί των



Σχήμα 8.1.3 - 2: (a) Συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$, όταν $x \in [-2, 2]$. (b) Συνάρτηση $-x^2$ πράσινη και e^x μπλε καμπύλη.

συνεχών συναρτήσεων.

Θεώρημα 8.1.3 - 2 (αντίστροφης συνάρτησης). *Έστω ότι η συνάρτηση $f|D$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in D$. Τότε, αν υπάρχει η αντίστροφή της συνάρτηση $f^{-1}|f(D)$, η f^{-1} θα είναι συνεχής στο σημείο $\eta_0 = g\left(x_0\right) \in g(D)$.*

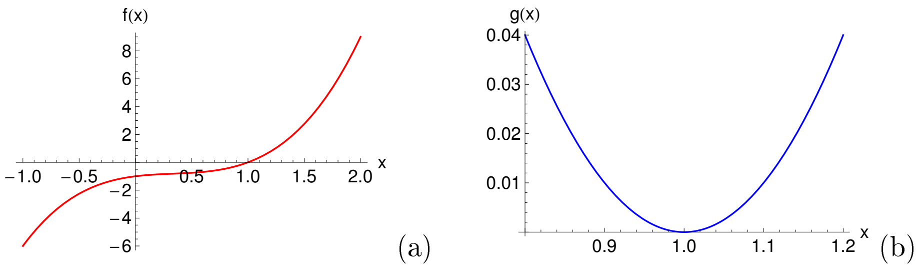
Σύμφωνα με το Θεώρημα 8.1.3 - 2 η λογαριθμική, οι αντίστροφες τριγωνομετρικές και οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Θεώρημα 8.1.3 - 3 (Bolzano). *Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)\,|\,[a,b]$ είναι συνεχής για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε, αν $f(a)f(b) < 0$, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ξ με $\xi \in (a,b)$, έτσι ώστε $f(\xi) = 0$. (Σχ. 8.1.3 - 3a)*

Εφαρμογές του θεωρήματος γίνονται στην προσεγγιστική λύση των εξισώσεων.[2]

Παρατήρηση 8.1.3 - 1

Αν η ρίζα ξ είναι πολλαπλή με βαθμό πολλαπλότητας άρτιο αριθμό, τότε το Θεώρημα 8.1.3 - 3 δεν ισχύει (Σχ. 8.1.3 - 3b).



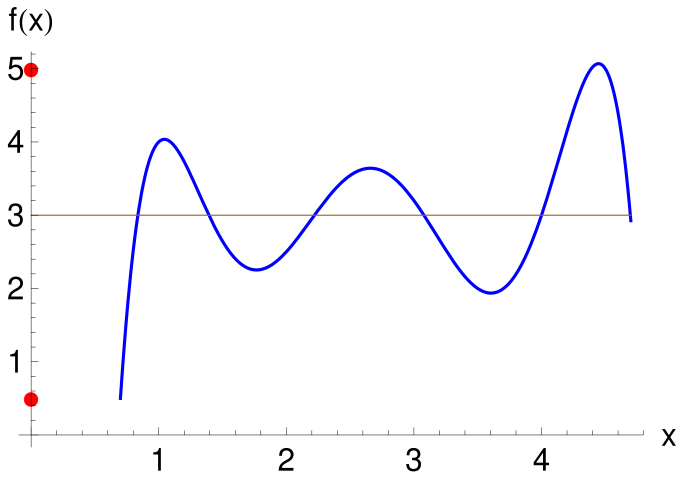
Σχήμα 8.1.3 - 3: (a) Θεώρημα 8.1.3 - 3 του Bolzano: $f(x) = -1+x-2x^2+2x^3$ διάστημα $[-1,2]$ και $\xi = 1$. (b) $g(x) = (x-1)^2$ όπου η ρίζα $\xi = 1$ έχει πολλαπλότητα 2 και το θεώρημα δεν εφαρμόζεται.

Θεώρημα 8.1.3 - 4 (γενίκευση Bolzano ή ενδιάμεσων τιμών). *Έστω $f|[a,b]$ μία συνεχής συνάρτηση και $f(a) = \eta_1$, $f(b) = \eta_2$ με $\eta_1 \neq \eta_2$. Αν υποτεθεί χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $\eta_1 < \eta_2$, τότε για κάθε $\eta \in (\eta_1, \eta_2)$, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\xi \in (\eta_1, \eta_2)$, έτσι ώστε $f(\xi) = \eta$.*

Το θεώρημα γεωμετρικά σημαίνει ότι κάθε ευθεία με εξίσωση $y = \eta$, τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε ένα τουλάχιστον σημείο (Σχ. 8.1.3 - 4).

Σύμφωνα τώρα με το Θεώρημα 8.1.3 - 4 αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα της Άλγεβρας:

[2] Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στο βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 5.



Σχήμα 8.1.3 - 4: Γενίκευση του θεωρήματος του Bolzano.

Θεώρημα 8.1.3 - 5. *Αν ένα πολυώνυμο* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_\nu x^\nu$ *με* $a_\nu \neq 0$ *είναι περιττού βαθμού* $\nu \geq 1$, *ενώ οι συντελεστές του πραγματικοί αριθμοί, τότε υπάρχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα του.*

Θεώρημα 8.1.3 - 6 (μέγιστης και ελάχιστης τιμής). *Έστω ότι η συνάρτηση* $f(x) \,|\, [a, b]$ *είναι συνεχής για κάθε* $x \in [a, b]$. *Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο* $\gamma \in [a, b]$, *αντίστοιχα σημείο* $\delta \in [a, b]$, *έτσι ώστε (Σχ. 8.1.3 - 5)*

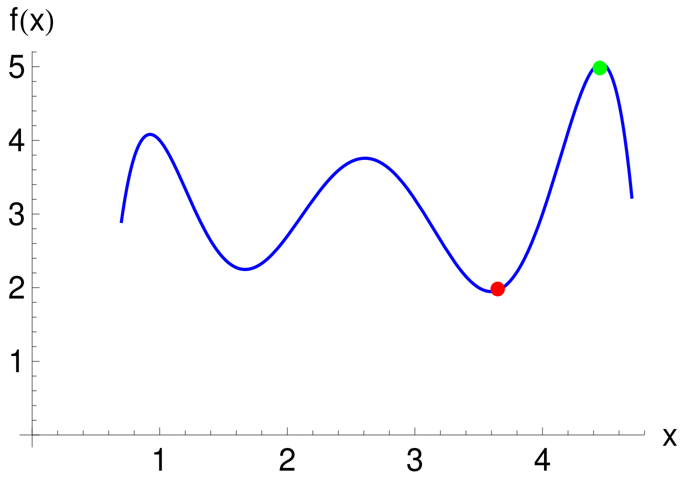
$$f(\gamma) = \min_{x \in [a,b]} f(x), \quad \textit{αντίστοιχα} \quad f(\delta) = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

8.1.4 Ασυνέχεια συνάρτησης

Στην παράγραφο αυτή θα εξεταστούν τα είδη ασυνέχειας μιας συνάρτησης (discontinuous function), που κύρια εμφανίζονται στις εφαρμογές.

Ασυνέχεια 1ου είδους

Ορισμός 8.1.4 - 1. *Η συνάρτηση* $f|D$ *θα παρουσιάζει στο σημείο* $x_0 \in D$ **ασυνέχεια 1ου είδους** *τότε και μόνον, όταν υπάρχουν οι πλευρικές οριακές*



Σχήμα 8.1.3 - 5: Θεώρημα 8.1.3 - 6: μέγιστο στο $(4.45, 5.0)$ πράσινο και ελάχιστο στο $(3.65, 2.0)$ κόκκινο σημείο.

τιμές της f στο $x_0 \in D$ (ή απειρίζονται) και μία τουλάχιστον από αυτές είναι διάφορη από την τιμή της συνάρτησης (Σχ. 8.1.1 - 2).

Παρατηρήσεις 8.1.4 - 1

Σύμφωνα με τον Ορισμό 8.1.4 - 1 έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

I) η ασυνέχεια να **διορθώνεται** ή να απαλείφεται, όταν (Σχ. 8.1.4 - 1)[3]

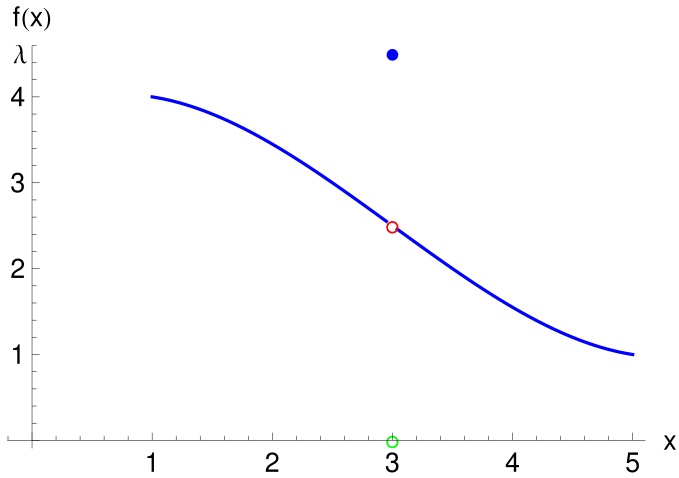
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lambda \qquad (8.1.4 - 1)$$

με λ πεπερασμένο αριθμό, δηλαδή υπάρχει η οριακή τιμή της συνάρτησης $f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$ και είναι διαφορετική από την τιμή της συνάρτησης στο σημείο x_0.

II) Η συνάρτηση f να παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in D$ πεπερασμένο άλμα με τιμή, έστω d, όπου

$$d = \left| \lim_{x \to x_0^-} f(x) - \lim_{x \to x_0^+} f(x) \right|, \qquad (8.1.4 - 2)$$

[3] Στα σχήματα το $\circ$ στον x-άξονα θα ορίζει το πιθανό σημείο ασυνέχειας.



Σχήμα 8.1.4 - 1: Παρατηρήσεις 8.1.4 - 1 (I) με ασυνέχεια στο $x_0 = 3$ πράσινο και $\lim_{x \to 3} f(x) = \lambda$ κόκκινο σημείο.

δηλαδή υπάρχουν οι πλευρικές οριακές τιμές, είναι πεπερασμένες και διαφορετικές μεταξύ τους.

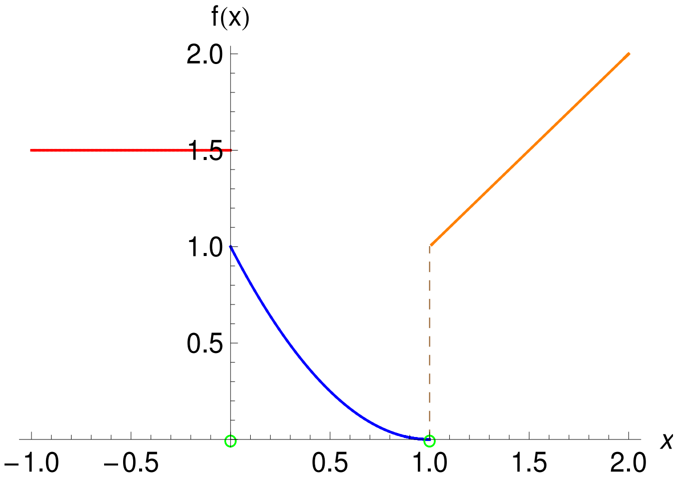
Παράδειγμα 8.1.4 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1.5 & \text{αν} \quad x \leq 0 \\ (x-1)^2 & \text{αν} \quad 0 < x \leq 1 \\ x & \text{αν} \quad 1 < x < 2. \end{cases}$$

Θα εξεταστεί η συνέχειά της μόνο στα σημεία που αλλάζει ο τύπος της, δηλαδή στα 0 και 1, επειδή σε όλο το άλλο πεδίο ορισμού της η f είναι συνεχής (Σχ. 8.1.4 - 2). Τότε:

a. Σημείο $x_0 = 0$
Είναι $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1.5 \neq 1 = \lim_{x \to 0^+} f(x)$, δηλαδή η f παρουσιάζει ασυνέχεια 1ου είδους στο σημείο 0 με άλμα $d = 0.5$,



Σχήμα 8.1.4 - 2: Παρατηρήσεις 8.1.4 - 1 (II) Παράδειγμα 8.1.4 - 1.

που **διορθώνεται** (Περίπτωση I), αν τεθεί

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad x \leq 0 \\ (x-1)^2 & \text{αν} \quad 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

b. Σημείο $x_0 = 1$

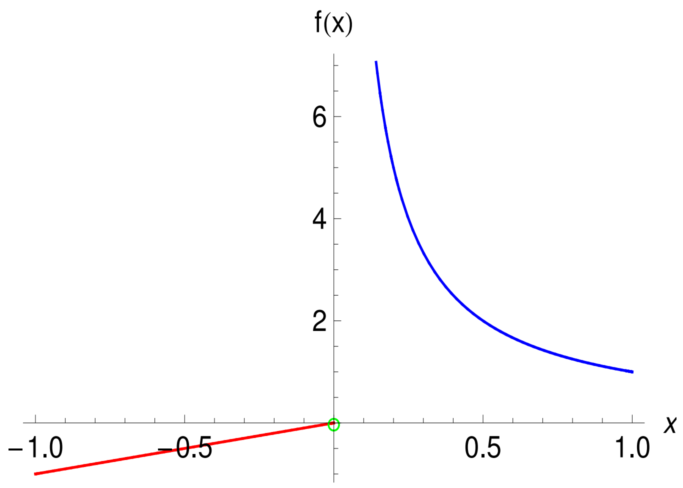
$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \to 1^+} f(x)$, δηλαδή η f παρουσιάζει όμοια ασυνέχεια 1ου είδους στο σημείο 1 με άλμα $d = 1$, που **δεν διορθώνεται**, επειδή απαιτείται η αλλαγή του τύπου της f, σε αντίθεση με την περίπτωση (a) που απαιτείται η αλλαγή μόνον μιας σταθεράς.

iii) Η f να παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in D$ **άπειρο άλμα** τότε και μόνον, όταν οι πλευρικές οριακές τιμές είναι διαφορετικές μεταξύ τους και η μία τουλάχιστον από αυτές απειρίζεται.

Παράδειγμα 8.1.4 - 2

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{αν} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{αν} \quad x > 0. \end{cases}$$



Σχήμα 8.1.4 - 3: Παρατηρήσεις 8.1.4 - 1 (III) Παράδειγμα 8.1.4 - 2.

Εξετάζεται η συνέχειά της μόνο στο σημείο που αλλάζει ο τύπος της, δηλαδή στο 0, επειδή σε όλο το άλλο πεδίο ορισμού της η f είναι συνεχής. Τότε

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \neq +\infty = \lim_{x \to 0^+} f(x),$$

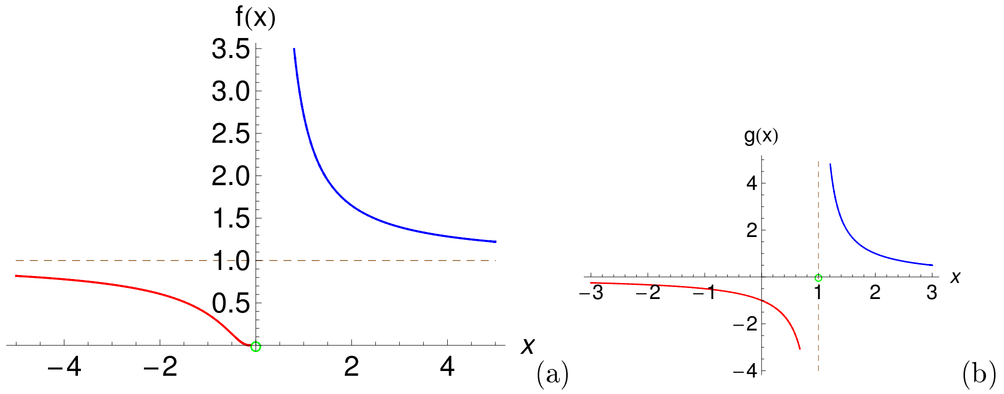
δηλαδή η f παρουσιάζει ασυνέχεια 1ου είδους στο σημείο 0 με άπειρο άλμα, που δεν διορθώνεται (Σχ. 8.1.4 - 3). Η f είναι αριστερά συνεχής στο σημείο 0 - **πλευρική συνέχεια** - επειδή $\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0$.

Παράδειγμα 8.1.4 - 3

Όμοια οι συναρτήσεις (Σχ. 8.1.4 - 4)

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{αν} \quad x < 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{αν} \quad x > 0. \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{αν} \quad x < 1 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{αν} \quad x > 1. \end{cases}$$

Η μελέτη των γίνεται ανάλογα με εκείνη του Παραδείγματος 8.1.4 - 2.



Σχήμα 8.1.4 - 4: Παρατηρήσεις 8.1.4 - 1 (III): ασυνέχεια με άπειρο άλμα. (a) Συνάρτηση $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$: σημείο ασυνέχειας $x_0 = 0$. Το διάγραμμα της f, όταν $x < 0$ κόκκινη και $x > 0$ μπλε καμπύλη, ενώ η ευθεία $y = 1$ - καφέ καμπύλη - ορίζει την τιμή $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = e^0 = 1$. (b) Όμοια η $g(x) = \frac{1}{x-1}$ με σημείο ασυνέχειας $x_0 = 1$ (καφέ ευθεία) και διάγραμμα της g, όταν $x < 1$ κόκκινη και $x > 1$ μπλε καμπύλη.

Ασυνέχεια 2ου είδους

Ορισμός 8.1.4 - 2. *Η συνάρτηση $f|D$ θα παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in D$ ασυνέχεια του 2ου είδους τότε και μόνον, όταν δεν ορίζεται η οριακή τιμή της f στο σημείο $x_0 \in D$.*

Παράδειγμα 8.1.4 - 4

Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x} & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής για κάθε $x \neq 0$ ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $\frac{1}{x}$ και $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$- Σχ. 8.1.4 - 5. Για τη συνέχεια στο 0 εξετάζονται τα πλευρικά όρια της f.[4] Έστω οι ακολουθίες

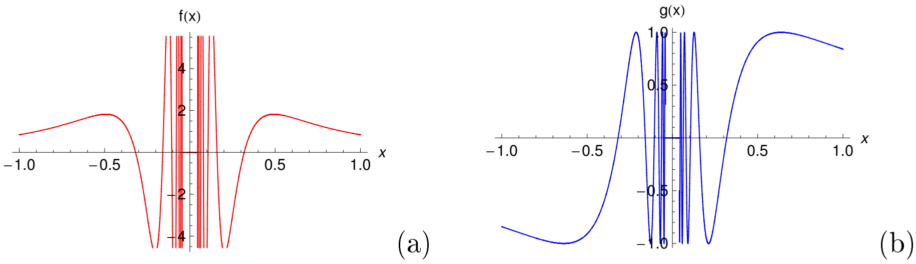
$$a_\nu = \frac{1}{2\nu\pi - \pi/2} \text{ με } \nu = 1, 2, \ldots \text{ και } b_\nu = \frac{1}{2\nu\pi + \pi/2} \text{ με } \nu = 1,\, 2,\, \ldots$$

[4] Βλέπε Μάθημα *Σειρές* - Ακολουθίες.

όπου $\lim a_\nu = \lim b_\nu = 0$. Τότε

$$\begin{aligned}\lim f(a_\nu) &= \left(2\nu\pi - \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2\nu\pi - \frac{\pi}{2}\right) = +\infty\cdot(-1) = -\infty, \ \text{ενώ}\\ \lim f(b_\nu) &= \left(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}\right) = +\infty\cdot(+1) = +\infty,\end{aligned}$$

δηλαδή για την ίδια συνάρτηση έχουμε διαφορετικά όρια στο σημείο 0, που είναι άτοπο σύμφωνα με την ιδιότητα του μονοσήμαντου του ορίου και επομένως έχουμε στο 0 ασυνέχεια του 2ου είδους.



Σχήμα 8.1.4 - 5: (a) Συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. (b) $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Ασκήσεις

1. Να εξεταστούν ως προς τη συνέχεια σε όλο το πεδίο ορισμού των οι παρακάτω συναρτήσεις $f(x)$:

$i)$ $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4} & ; \ |x|\neq 2 \\ 0 & ; \ |x| = 2 \end{cases}$

$v)$ $\begin{cases} x & ; \ x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right] \\ \dfrac{1}{2}+x & ; \ x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right] \end{cases}$

$ii)$ $\begin{cases} \dfrac{1}{x} & ; \ x\neq 0 \\ 1 & ; \ x = 0 \end{cases}$

$vi)$ $\begin{cases} \cos x & ; \ x\in[-\pi,0) \\ 1 & ; \ x\in[0,1) \\ \dfrac{1}{x} & ; \ x\in[1,2] \end{cases}$

$$iii)\quad \begin{cases} \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|} & ; \quad x \neq 0 \\[2ex] 2 & ; \quad x = 0 \end{cases} \qquad vii)\quad \begin{cases} x + \dfrac{|x|}{x} & ; \quad x \neq 0 \\[2ex] 1 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

$$iv)\quad \begin{cases} \sin x + \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} & ; \quad x \neq 0 \\[2ex] \sqrt{2} & ; \quad x = k\pi, \end{cases} \qquad viii)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{-1/x}} & ; \quad x \neq 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2} & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

2. Όμοια των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$ και να γίνει η μορφή του διαγράμματος στα άκρα του πεδίου ορισμού των

$i)\quad e^{-x^2}$ $\qquad$ $iv)\quad \sinh\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

$ii)\quad \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$ $\qquad$ $v)\quad \ln(\sin x)$

$iii)\quad \exp\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ $\qquad$ $vi)\quad \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3. Όμοια των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$

$i)\quad \ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$ $\qquad$ $iv)\quad \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

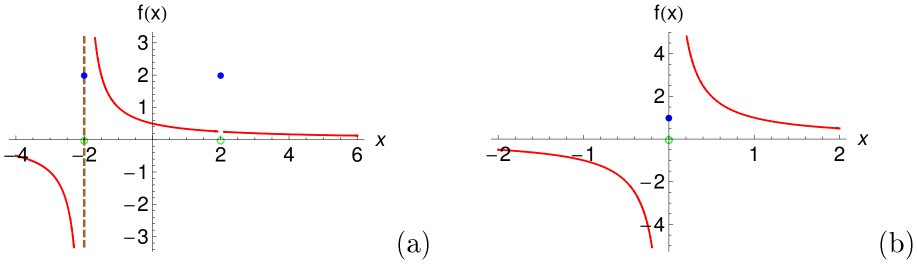
$ii)\quad (1+x)\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)$ $\qquad$ $v)\quad e^{-1/x^2}$

$iii)\quad e^{1/(1-x)}$ $\qquad$ $vi)\quad \ln|\cos x|$

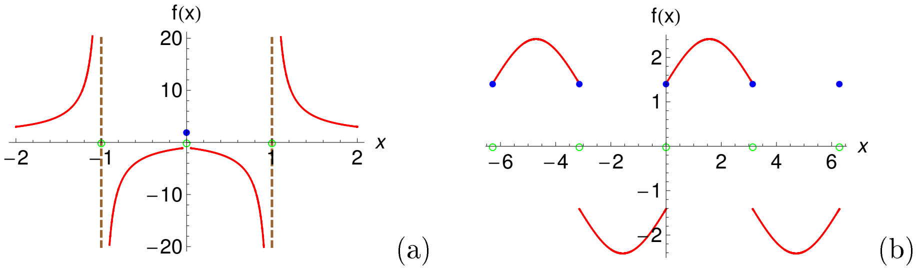
4. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3 - 3x + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

Απαντήσεις

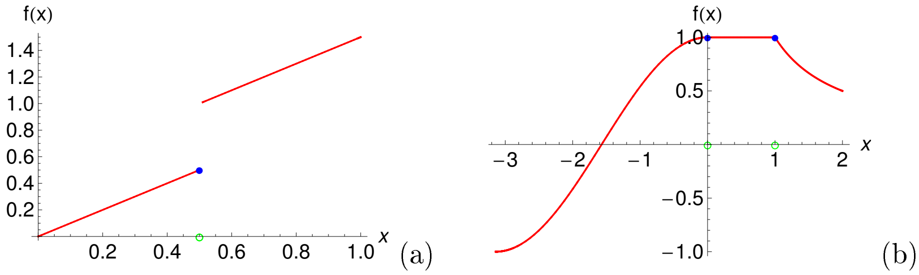
1-3: Οι απαντήσεις στις Ασκήσεις προκύπτουν από τα διαγράμματα, που ακολουθούν. Τα πιθανά σημεία ασυνέχειας x_0 απεικονίζονται με $\circ$, τα αντίστοιχα σημεία $(x_0, f(x_0))$ με $\bullet$. Οι ευθείες $x = x_0$ με διακεκομμένες πράσινες, ενώ οι $y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ με διακεκομμένες καφέ γραμμές. **4.** Εφαρμογή του Θεωρήματος του Bolzano.



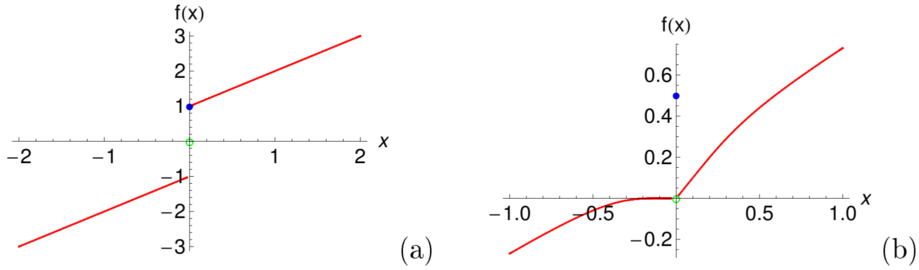
Σχήμα 8.1.4 - 6: Άσκηση: (a) $1i$, (b) $1ii$.



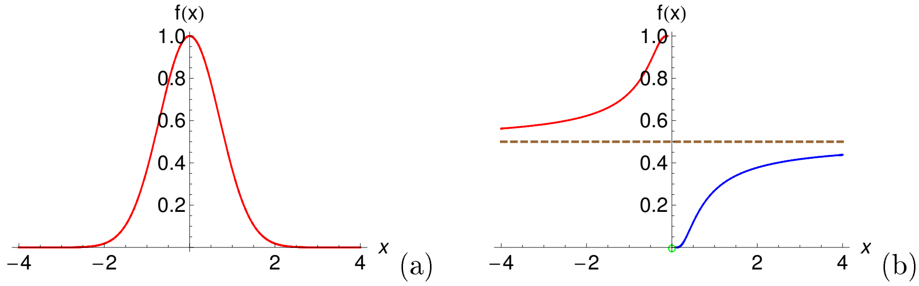
Σχήμα 8.1.4 - 7: Άσκηση: (a) $1iii$, (b) $1v$.



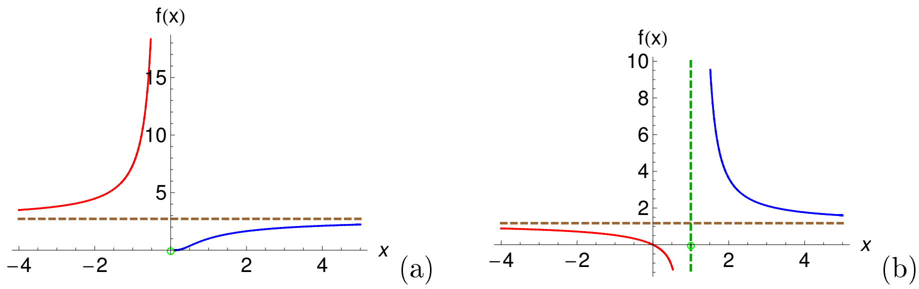
Σχήμα 8.1.4 - 8: Άσκηση: (a) $1v$, (b) $1vi$.



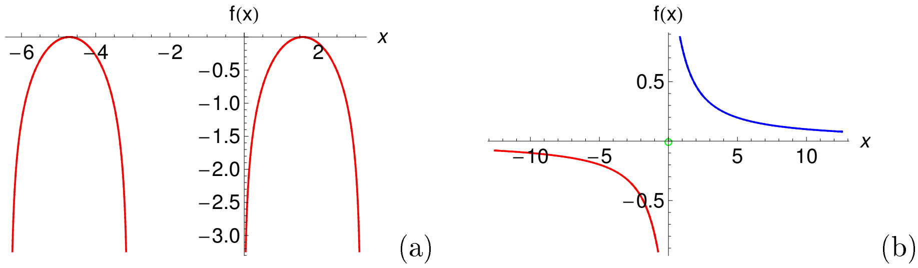
Σχήμα 8.1.4 - 9: Άσκηση: (a) $1vii$, (b) $1viii$.



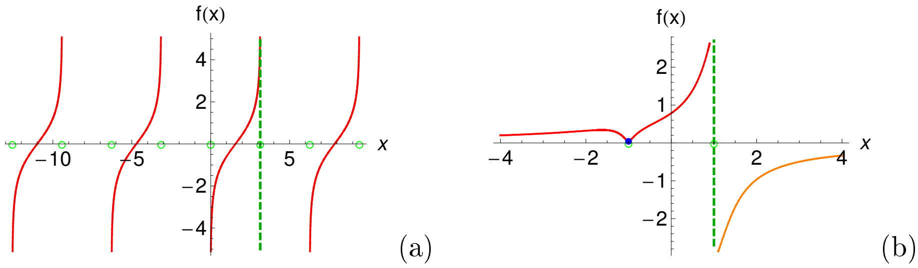
Σχήμα 8.1.4 - 10: Άσκηση: (a) $2i$, (b) $2ii$.



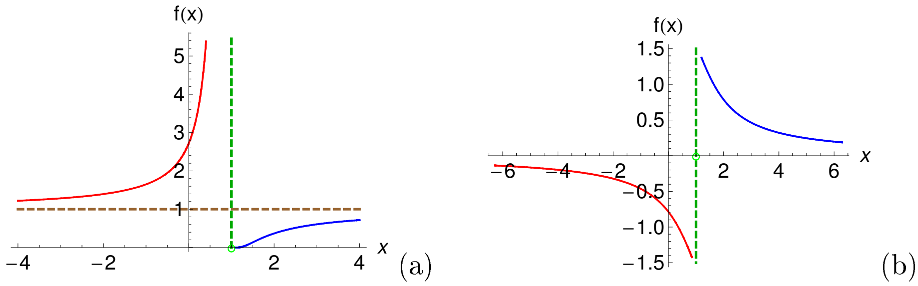
Σχήμα 8.1.4 - 11: Άσκηση: (a) $2iii$, (b) $2v$.



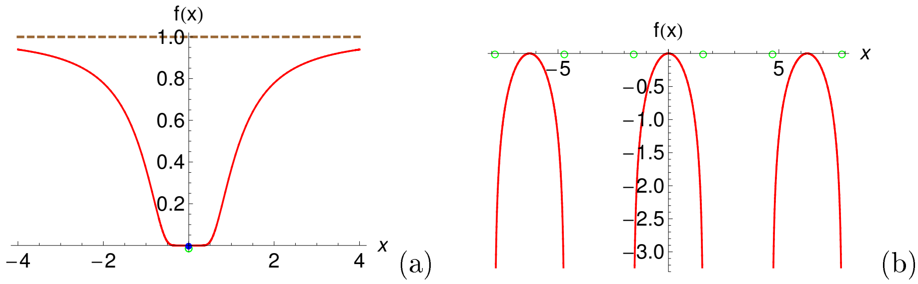
Σχήμα 8.1.4 - 12: Άσκηση: (a) $2v$, (b) $2vi$.



Σχήμα 8.1.4 - 13: Άσκηση: (a) $3i$, (b) $3ii$.



Σχήμα 8.1.4 - 14: Άσκηση: (a) $3iii$, (b) $3iv$.



Σχήμα 8.1.4 - 15: Άσκηση: (a) $3v$, (b) $3vi$.

8.2 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός II*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

[4] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Βιβλιογραφία για περαιτέρω μελέτη

Παπαδημητράκης, Μ. (2015). *Ανάλυση: Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής* *http : //fourier.math.uoc.gr/ papadim/analysis_n.pdf*
Πανεπιστήμιο Κρήτης: Τμήμα Μαθηματικών.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://eclass.uoa.gr/courses/MATH130/ θέση Έγγραφα
- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/

- http://eom.springer.de/

Μάθημα 9

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη του μαθήματος, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [2, 3, 4].

9.1 Ορισμοί και σχετικά θεωρήματα

9.1.1 Ορισμός παραγώγου

Αρχικά ορίζεται η κλίση μιας συνάρτησης ως εξής:[1]

Ορισμός 9.1.1 - 1 (κλίσης). *Έστω η συνάρτηση* $f \,|\, (a, b)$ *και σημείο* $x_0 \in (a, b)$*. Τότε για κάθε* $x \in (a, b) - \{x_0\}$ *με τον τύπο*

$$K_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{9.1.1 - 1}$$

ορίζεται μία συνάρτηση, που λέγεται πηλίκο διαφορών ή κλίση της f *στο σημείο* x_0.

Αν $x = x_0 + \Delta x$, οπότε

$$\Delta x = x - x_0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in (a, b) - \{x_0\}, \tag{9.1.1 - 2}$$

[1] Βλέπε ανάλογο ορισμό στο Μάθημα *Αναλυτική Γεωμετρία*.

τότε ο τύπος $(9.1.1-1)$ γράφεται

$$K_{x_0} = \frac{f\,(x_0+\Delta x) - f\,(x_0)}{\Delta x}\,. \qquad (9.1.1 - 3)$$

Ορισμός 9.1.1 - 2 (παραγώγου). *Έστω η συνάρτηση $f\,|\,(a,b)$ και σημείο $x_0 \in (a,b)$. Τότε θα λέγεται ότι η f παραγωγίζεται στο σημείο x_0 τότε και μόνον, όταν η οριακή τιμή*

$$\lim_{x \to x_0} K_{x_0}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f\,(x) - f\,(x_0)}{x - x_0} \qquad (9.1.1 - 4)$$

υπάρχει.

Η $(9.1.1-4)$ θα λέγεται τότε η **1ης τάξης** παράγωγος (ή πολλές φορές απλά παράγωγος) της f στο x_0 και θα συμβολίζεται με $f'\,(x_0)$.

Έχοντας υπόψη την $(9.1.1-2)$, η $(9.1.1-4)$ ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} f'\,(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f\,(x) - f\,(x_0)}{x - x_0} && (9.1.1 - 5)\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x_0+\Delta x) - f\,(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f\,(x_0+h) - f\,(x_0)}{h}\,. && (9.1.1 - 6) \end{aligned}$$

Ορισμός 9.1.1 - 3. *Έστω η συνάρτηση $f\,|\,(a,b)$ Τότε θα λέγεται ότι η f παραγωγίζεται στο (a,b) τότε και μόνον, όταν υπάρχει η παράγωγος $f'\,(x_0)$ για κάθε $x_0 \in (a,b)$.*

Στην περίπτωση αυτή συμβολικά γράφεται

$$f'(x) = f^{(1)}(x) = \frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{d\,y}{dx} = D^1 f(x) = D\,f(x), \qquad (9.1.1 - 7)$$

όπου το σύμβολο (τελεστής) $D = D^1 = \frac{d}{dx}$ θα συμβολίζει στο εξής την 1ης τάξης παράγωγο μιας συνάρτησης με μεταβλητή x.

Παρατηρήσεις 9.1.1 - 1

Από τους Ορισμούς 9.1.1 - 2 και 9.1.1 - 3 προκύπτουν τα εξής:

i) η $f'\,(x_0)$, εφόσον υπάρχει, είναι πραγματικός αριθμός, ενώ

ii) η $f'(x)$ είναι συνάρτηση.

Ορισμός 9.1.1 - 4. *Έστω ότι της συνάρτησης $f\,|\,(a,b)$ υπάρχει η $f'(x)$ για κάθε $x \in (a,b)$. Τότε θα λέγεται ότι υπάρχει η* **2ης τάξης** *παράγωγος της f στο (a,b) τότε και μόνον, όταν υπάρχει η παράγωγος της $f'(x)$ για κάθε $x \in (a,b)$.*

Στην περίπτωση αυτή συμβολικά γράφεται

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\,f(x)}{dx}\right) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = D^2 f(x), \qquad (9.1.1 - 8)$$

όπου το $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ συμβολίζει τον τελεστή της 2ης τάξης παραγώγου μιας συνάρτησης με μεταβλητή x. Διευκρινίζεται ότι $\frac{d^2}{dx^2} \neq \left(\frac{d}{dx}\right)^2$.

Ανάλογα ορίζονται οι παράγωγοι:

3ης τάξης:

$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3} = D^3 f(x), \qquad (9.1.1 - 9)$$

όπου το $D^3 = \frac{d^3}{dx^3}$ συμβολίζει τον τελεστή της 3ης τάξης παραγώγου μιας συνάρτησης με μεταβλητή x, και γενικά η

ν - τάξης:

$$f^{(\nu)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{\nu-1} f(x)}{dx^{\nu-1}}\right) = \frac{d^{\nu} f(x)}{dx^{\nu}} = D^{\nu} f(x), \qquad (9.1.1 - 10)$$

όπου όμοια ο τελεστής $D^{\nu} = \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}}$ συμβολίζει την ν-τάξης παράγωγο μιας συνάρτησης με μεταβλητή x.

Ειδικά ορίζεται ότι

$$f^{(0)}(x) = f(x). \qquad (9.1.1 - 11)$$

Σύμφωνα με τον τύπο (9.1.1–6) αποδεικνύονται οι παράγωγοι των κυριότερων στοιχειωδών συναρτήσεων του Πίνακα 9.1.1 - 1.

9.1.2 Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου

Έστω η συνάρτηση $y = f(x)|\,(a,b)$. Τότε όπως είναι γνωστό, αν Oxy είναι ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, το σύνολο των σημείων του επιπέδου

$$G_f = \{(x, f(x)) \quad \text{με} \quad x \in (a,b)\} \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad (9.1.2 - 1)$$

Πίνακας 9.1.1 - 1: παραγώγων των κυριότερων σύνθετων συναρτήσεων.

α / α	Συνάρτηση	Παράγωγος
1	x^a με a ρητό	ax^{a-1}
2	e^x	e^x
3	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
4	$\sin x$	$\cos x$
5	$\cos x$	$-\sin x$
6	$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
7	$\cot x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
8	$\tan^{-1} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
9	$\sin^{-1} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10	$\cos^{-1} x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11	$\sinh x$	$\cosh x$
12	$\cosh x$	$\sinh x$
13	$\tanh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x} = \left[1-\tanh^2 x\right]$
14	$\coth x$	$-\dfrac{1}{\sinh^2 x} = \left[1-\coth^2 x\right]$

ορίζει το διάγραμμα της συνάρτησης f. Έστω τώρα τα σημεία $x_0 \in (a, b)$ και $x_1 = x_0 + \Delta x \in (a, b)$, όταν το Δx δίνεται από την $(9.1.1 - 2)$, με αντίστοιχα σημεία στο διάγραμμα της f τα $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ και $B\left(x_0 + \Delta x, f\left(x_0 + \Delta x\right)\right)$. Η ευθεία AB λέγεται τότε και τέμνουσα ευθεία (secant line) του διαγράμματος της f στα σημεία A και B. Στο Σχ. 9.1.2 - 1 είναι $AB = \Delta x$ και $CB = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) = \Delta y$. Η κλίση ή διαφορετικά ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB θα δίνεται τότε από τη σχέση[2]

$$\lambda = \tan\theta = \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

οπότε η εξίσωση της τέμνουσας ευθείας θα είναι

$$y - f\left(x_0\right) = \lambda\left(x - x_0\right). \tag{9.1.2 - 2}$$

Ο τύπος $(9.1.2 - 2)$ τότε για όλα τα Δx με $\Delta x \neq 0$ και $x_0 + \Delta x \in D$ ορίζει το σύνολο όλων των ευθειών που τέμνουν το διάγραμμα της f στο σημείο $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$.

Έστω τώρα ότι το Δx τείνει στο μηδέν, δηλαδή το σημείο C τείνει στο A. Τότε το σημείο B κινούμενο επί του διαγράμματος της f τείνει να συμπέσει όμοια με το σημείο A, η κάθετη πλευρά CB του τριγώνου ABC τείνει να λάβει μία οριακή τιμή, έστω dy, ενώ η τέμνουσα ευθεία AB τείνει να γίνει η εφαπτομένη του διαγράμματος της f στο σημείο $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$. Υποθέτοντας τώρα ότι υπάρχει η παράγωγος $f'\left(x_0\right)$ έχουμε στην περίπτωση αυτή ότι[3]

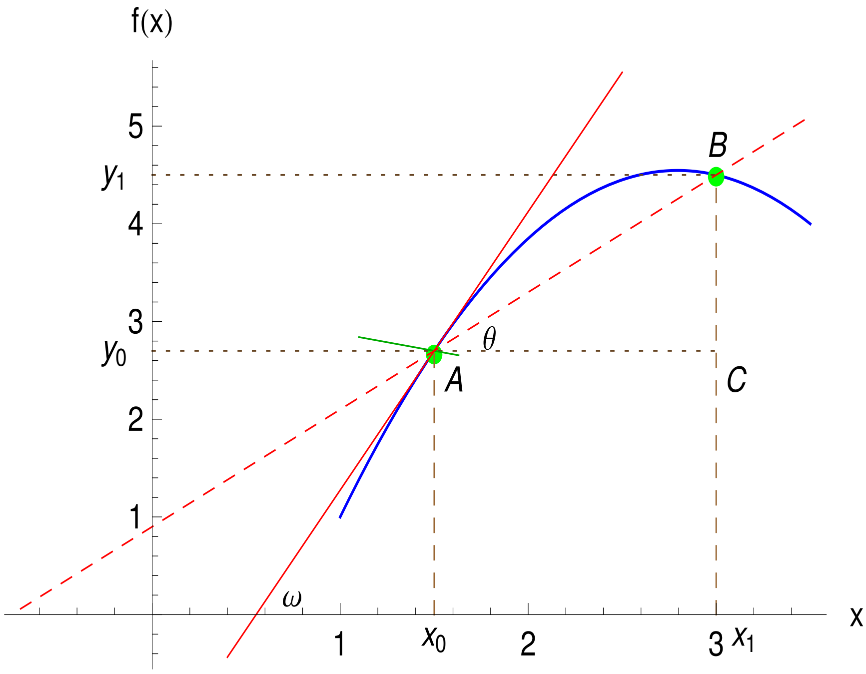
$$\begin{aligned} f'\left(x_0\right) = \tan\omega &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x} \\ &= \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_0} = \left.\frac{d\,f(x)}{dx}\right|_{x = x_0} \end{aligned} \tag{9.1.2 - 3}$$

όπου $\tan\omega$ είναι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας του διαγράμματος της f στο σημείο $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$. Άρα έχει αποδειχθεί η πρόταση:

---

[2]Βλέπε όμοια Μάθημα *Αναλυτική Γεωμετρία*.

[3]Ο συμβολισμός dx οφείλεται στον Leibniz. Στα μαθηματικά συμβολίζει το απειροστό ή το ελάχιστο δυνατό x. Τότε στο απειροστό αυτό dx αντιστοιχεί η απειροστή μεταβολή dy της συνάρτησης $y = f(x)$.



Σχήμα 9.1.2 - 1: Γεωμετρική σημασία παραγώγου: σημεία x_0, $y_0 = f(x_0)$, $x_1 = x_0 + \Delta x$ και $y_1 = f(x_0 + \Delta x)$. Εφαπτόμενη η κόκκινη συνεχής και κάθετη η πράσινη ευθεία.

Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου

Πρόταση 9.1.2 - 1. *Η παράγωγος* $f'(x_0)$ *μιας συνάρτησης* $y = f(x) \,|\, (a,b)$ *στο σημείο* $x_0 \in (a,b)$ *ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας ή διαφορετικά με τον* **συντελεστή διεύθυνσης** *της εφαπτομένης του διαγράμματος της* f *στο σημείο* $(x_0, f(x_0))$.

Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση της **εφαπτόμενης ευθείας** (tangent line) θα δίνεται από τον τύπο

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \tag{9.1.2 - 4}$$

ενώ της **κάθετης ευθείας** (normal tangent line) του διαγράμματος της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, εφόσον $(x_0, f(x_0)) \neq 0$, από τον

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{9.1.2 - 5}$$

Παρατήρηση 9.1.2 - 1

Αν $f'(x_0) = 0$, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 9.1.2 - 1 η εφαπτόμενη θα είναι **παράλληλη** στον x-άξονα ή θα συμπίπτει με αυτόν, τότε η εξίσωσή της είναι

- $$y = f(x_0), \quad \text{ενώ} \tag{9.1.2 - 6}$$
- της κάθετης ευθείας
$$x = x_0. \tag{9.1.2 - 7}$$

Παράδειγμα 9.1.2 - 1

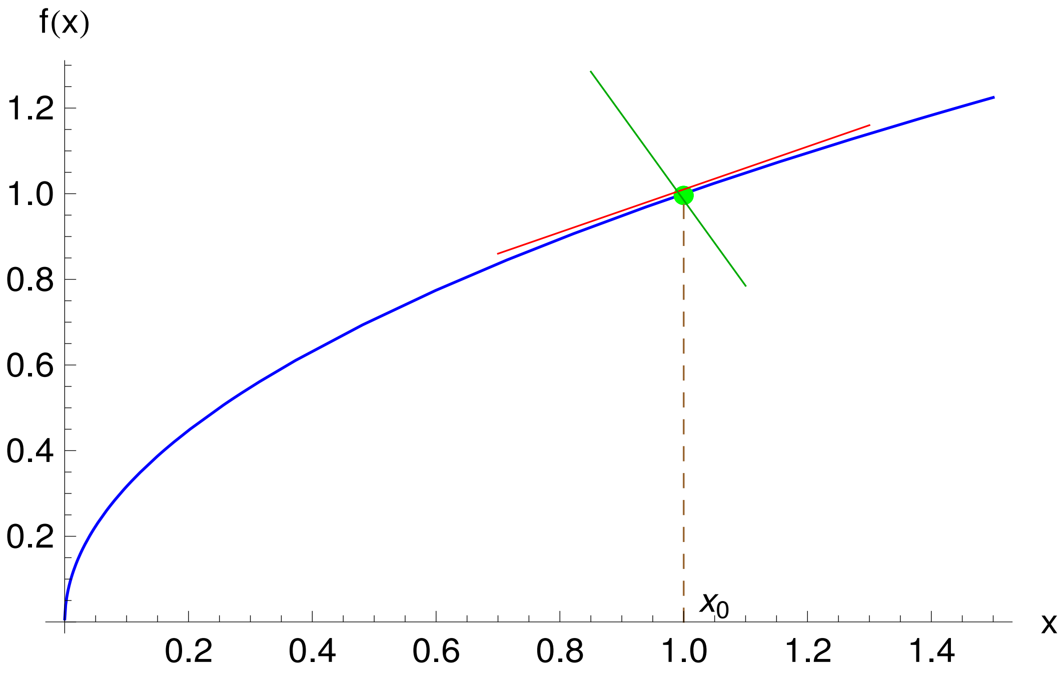
Να υπολογιστεί η εξίσωση της εφαπτόμενης και της κάθετης σε αυτή ευθείας στην παραβολή με εξίσωση

$$y = f(x) = x^{1/2}$$

στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$ (Σχ. 9.1.2 - 2).

Λύση. Επειδή

$$x_0 = 1 \quad \text{είναι} \quad y_0 = f(x_0) = \sqrt{x_0} = 1.$$



Σχήμα 9.1.2 - 2: Παράδειγμα 9.1.2 - 2 με σημείο $x_0 = 1$. Εφαπτόμενη η κόκκινη συνεχής και κάθετη η πράσινη ευθεία.

Τότε σύμφωνα με τον τύπο 1 του Πίνακα 9.1.1 - 1 όπου $x^a = x^{1/2}$, δηλαδή $a = 1/2$, προκύπτει ότι

$$f'(x) = \frac{1}{2}\, x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{οπότε} \quad f'\left(x_0\right) = \frac{1}{2}\,.$$

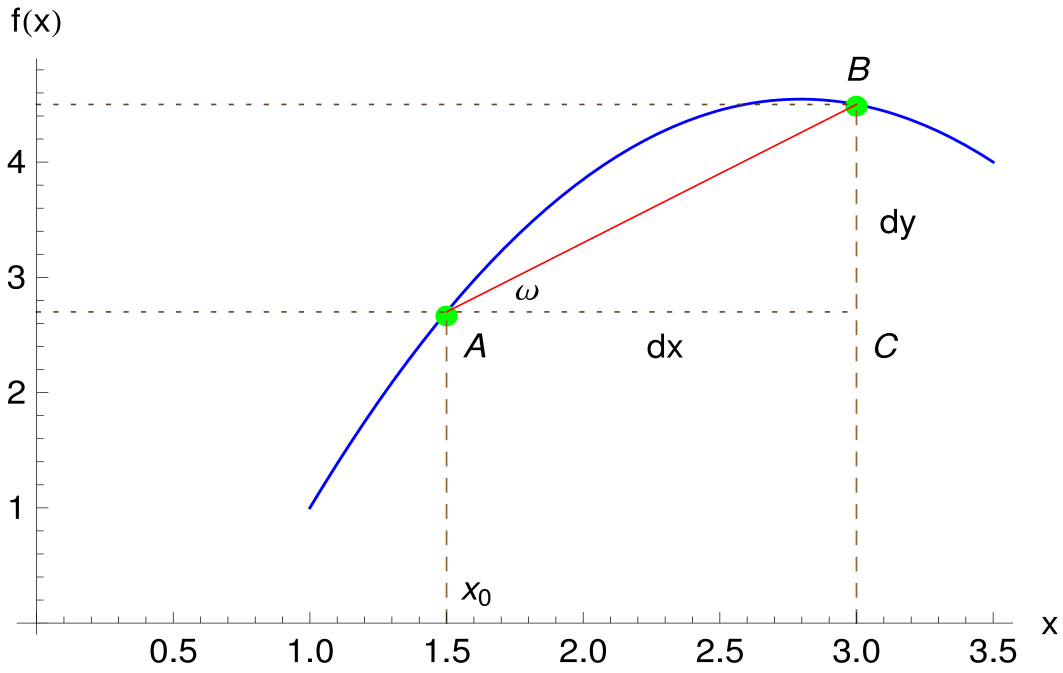
Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο $(9.1.2-4)$, η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι

$$y - 1 = \frac{1}{2}\,(x-1), \quad \text{δηλαδή} \quad x - 2y + 1 = 0,$$

ενώ με τον τύπο $(9.1.2-5)$ της κάθετης

$$y - 1 = -2\,(x-1), \quad \text{δηλαδή} \quad 2x + y - 3 = 0.$$

■



Σχήμα 9.1.3 - 1: Γεωμετρική ερμηνεία διαφορικού στο σημείο x_0, όταν $\tan\omega = f'(x_0)$.

9.1.3 Διαφορικό συνάρτησης

Ορισμός 9.1.3 - 1. *Έστω η συνάρτηση $f \,|\, (a, b)$ και σημείο $x_0 \in (a, b)$. Τότε, αν υπάρχει η $f'(x_0)$, το διαφορικό (differential) 1ης τάξης της f στο x_0 συμβολίζεται $d\,f(x)|_{x=x_0}$ και ισούται με*

$$d\,f(x)|_{x=x_0} = f'(x_0)\; dx. \qquad (9.1.3 - 1)$$

Γεωμετρικά το διαφορικό 1ης τάξης dy ισούται με την οριακή τιμή της πλευράς CB (Σχ. 9.1.3 - 1), όταν το σημείο C τείνει στο A, δηλαδή η πλευρά CA τείνει στο μηδέν, οπότε ελαχιστοποιείται λαμβάνοντας μια ελάχιστη ή όπως έχει ήδη γραφεί στη γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου (Υποσημείωση 3) την απειροστή τιμή dx. Το dx λέγεται και απειροστό της μεταβλητής.

Ορισμός 9.1.3 - 2. *Έστω ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ παραγωγίζεται για κάθε $x \in (a, b)$. Τότε το διαφορικό 1ης τάξης της f στο (a, b) συμβολίζεται $d\,f(x)$ ή dy και ισούται με*

$$dy = d\,f(x) = f'(x)\,dx \quad \text{για κάθε} \quad x \in (a, b). \tag{9.1.3 - 2}$$

Σημείωση 9.1.3 - 1

Εφαρμογές του τύπου (9.1.3−2) θα δοθούν στο Μάθημα *Αόριστο Ολοκλήρωμα.*

Υποθέτοντας τώρα ότι υπάρχουν στο (a, b) οι παράγωγοι της f μέχρι και ν-τάξης, είναι δυνατόν να οριστεί επαγωγικά το ν-τάξης διαφορικό της συνάρτησης $f(x)$ ως εξής:

$$d^{\nu}y = d\left(d^{\nu-1}y\right) = f^{(\nu)}(x)dx^{\nu} \tag{9.1.3 - 3}$$

για κάθε $\nu = 2,\, 3,\, \ldots$.

9.1.4 Κανόνες παραγώγισης

Δίνονται στη συνέχεια χωρίς απόδειξη οι παρακάτω κανόνες παραγώγισης:

Πρόταση 9.1.4 - 1 (παράγωγος σταθεράς συνάρτησης). *Έστω η συνάρτηση $f\,|\,\mathbb{R}$ όπου $f(x) = c$ σταθερά για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε*

$$f'(x) = 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Πρόταση 9.1.4 - 2. *Έστω ότι οι συναρτήσεις $f,\, g\,|\,(a, b)$ είναι παραγωγίσιμες στο (a, b). Τότε ισχύει*

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in (a, b). \tag{9.1.4 - 1}$$

Πόρισμα 9.1.4 - 1 (γενίκευση παραγώγου αθροίσματος). *Έστω ότι οι συναρτήσεις* $f_1, \ldots, f_\nu \,|\, (a,b)$ *είναι παραγωγίσιμες στο* (a,b). *Τότε*

$$[f_1(x) + \ldots + f_\nu(x)]' = f_1'(x) + \ldots + f_\nu'(x) \qquad (9.1.4 - 2)$$

για κάθε $x \in (a,b)$.

Πρόταση 9.1.4 - 3 (παράγωγος γινομένου). *Έστω ότι οι συναρτήσεις* $f, g \,|\, (a,b)$ *είναι παραγωγίσιμες στο* (a,b). *Τότε ισχύει*

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in (a,b). \qquad (9.1.4 - 3)$$

Πόρισμα 9.1.4 - 2. *Έστω ότι οι συναρτήσεις* $f, g, h \,|\, (a,b)$ *είναι παραγωγίσιμες στο* (a,b). *Τότε*

$$\begin{aligned}[f(x)\,g(x)\,h(x)]' &= f'(x)\,g(x)\,h(x) + f(x)\,g'(x)\,h(x) \\ &\quad + f(x)\,g(x)\,h'(x) \qquad (9.1.4 - 4)\end{aligned}$$

για κάθε $x \in (a,b)$.

Η Πρόταση 9.1.4 - 3 επίσης γενικεύεται.

Επειδή προφανώς ισχύει

$$(\lambda f(x))' = \lambda f'(x), \quad \text{όταν} \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ σταθερά},$$

από τις Προτάσεις 9.1.4 - 1 και 9.1.4 - 3 προκύπτει η παρακάτω **γραμμική ιδιότητα**

$$[k\,f(x) + \lambda g(x)]' = k\,f'(x) + \lambda\,g'(x) \qquad (9.1.4 - 5)$$

για κάθε $x \in (a,b)$, που επίσης γενικεύεται.

Πρόταση 9.1.4 - 4 (παράγωγος πηλίκου). *Αν η συνάρτηση* $f \,|\, (a,b)$ *παραγωγίζεται στο* (a,b) *και επιπλέον υπάρχει* $x_0 \in (a,b)$, *έτσι ώστε* $f'(x_0) \neq 0$, *τότε*

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]'_{x=x_0} = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x)}. \qquad (9.1.4 - 6)$$

Πόρισμα 9.1.4 - 3. *Έστω ότι οι συναρτήσεις f, $g \,|\, (a,b)$ είναι παραγωγίσιμες στο (a,b) και επιπλέον $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Τότε ισχύει*

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{για κάθε} \quad x \in (a,b). \tag{9.1.4 - 7}$$

Πόρισμα 9.1.4 - 4. *Αν η $f \,|\, (a,b)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο (a,b), τότε*

$$[f^{\,\nu}(x)]' = \nu f^{\,\nu-1}(x) f'(x) \tag{9.1.4 - 8}$$

για κάθε $x \in D$ με $\nu = 2,\, 3,\, \ldots$.

Απόδειξη. Η απόδειξη του τύπου $(9.1.4 - 8)$ προκύπτει ή επαγωγικά ή από τον τύπο $(9.1.4 - 4)$, αν τεθεί

$$f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_\nu(x) = f(x).$$

■

9.1.5 Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Θεώρημα 9.1.5 - 1. *Έστω οι συναρτήσεις $y = f(w) \,|\, D_1$ και $w = g(x) \,|\, D_2$, όπου $g\,(D_2) \subseteq D_1$ και D_1, D_2 ανοικτά διαστήματα και η προκύπτουσα σύνθετη συνάρτηση $F(x) = (f \circ g)\,(x) = f(g(x))$ για κάθε $x \in D_2$. Έστω επίσης ότι για ένα σημείο $x_0 \in D_2$ υπάρχουν οι παράγωγοι $g'\,(x_0) = w_0'$ και $y_0' = f'\,(w_0)$. Τότε υπάρχει και η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης $F(x)|D_2$ στο σημείο $x_0 \in D_2$ και ισχύει*

$$\left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{df(w)}{dw}\right|_{w=w_0} \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = y_0'\; w_0'. \tag{9.1.5 - 1}$$

Σημείωση 9.1.5 - 1

Ο τύπος $(9.1.5 - 1)$ είναι γνωστός ως ο **αλυσιδωτός κανόνας** (chain rule) παραγώγισης και, όταν ισχύει για κάθε $x \in D_2$, γράφεται

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)}\,\frac{dg(x)}{dx} = f_g\, g_x. \tag{9.1.5 - 2}$$

Πίνακας 9.1.5 - 1: παραγώγων των κυριότερων σύνθετων συναρτήσεων.

α / α	Συνάρτηση	Παράγωγος
1	$f^a(x)$	$af'(x)f^{a-1}(x)$
2	$e^{f(x)}$	$f'(x)e^{f(x)}$
3	$\ln f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
4	$\sin f(x)$	$f'(x)\cos f(x)$
5	$\cos f(x)$	$-f'(x)\sin f(x)$
6	$\tan f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
7	$\cot f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$
8	$\tan^{-1} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$
9	$\sin^{-1} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
10	$\cos^{-1} f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
11	$\sinh f(x)$	$f'(x)\cosh f(x)$
12	$\cosh f(x)$	$f'(x)\sinh f(x)$
13	$\tanh f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\cosh^2 f(x)} = f'(x)\left[1-\tanh^2 f(x)\right]$
14	$\coth f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sinh^2 f(x)} = f'(x)\left[1-\coth^2 f(x)\right]$

Οι παράγωγοι των κυριότερων σύνθετων συναρτήσεων δίνονται στη συνέχεια χωρίς απόδειξη στον Πίνακα 9.1.5 - 1.

Παράδειγμα 9.1.5 - 1

Έστω
$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Τότε σύμφωνα με τον τύπο (2) του Πίνακα 9.1.5 - 1 θα είναι

$$f'(x) = \left(-x^2\right)' e^{-x^2} = -2xe^{-x^2},$$

ενώ σύμφωνα και με τον κανόνα παραγώγισης γινομένου

$$f''(x) = (-2x)' e^{-x^2} - 2x \left(e^{-x^2}\right)' = -2\left(1 - 2x^2\right) e^{-x^2}.$$

Όμοια υπολογίζεται ότι

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= -4x\, e^{-x^2}\left(-3 + 2x^2\right), \quad \text{και} \\ f^{(4)}(x) &= 4e^{-x^2}\left(3 - 12x^2 + 4x^4\right). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.1.5 - 2

Έστω
$$f(x) = \sin^2 3x = (\sin 3x)^2.$$

Όμοια από τους τύπους (1) και (4) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\,(\sin 3x)^{2-1}\,(\sin 3x)' = 2\sin 3x\,\cos 3x\,\,(3x)' \\ &= 3\cdot\overbrace{2\sin 3x\,\cos 3x}^{\sin 6x} = 3\sin 6x, \quad \text{και} \\ f''(x) &= (3\sin 6x)' = 3\,(6x)'\sin 6x = 18\sin 6x. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.1.5 - 3

Έστω
$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad \text{όπου} \quad -1 < x < 1.$$

Από τον τύπο (3) και το Πόρισμα 9.1.4 - 3, έχουμε

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1-x}{1+x}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1-x^2}$$

και

$$f''(x) = -\,\frac{\left(1-x^2\right)'}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}\,,$$

ενώ σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου είναι

$$f^{(3)}(x) = 2\,\frac{x'\left(1-x^2\right)^2 - \overbrace{\left[\left(1-x^2\right)^2\right]'}^{2\left(1-x^2\right)^2(-2x)}}{\left(1-x^2\right)^4} = -\,\frac{2\left(1+3x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^3}\,.$$

Παράδειγμα 9.1.5 - 4

Έστω

$$f(x) = \sqrt[3]{1-x^2} = \left(1-x^2\right)^{1/3}.$$

Τότε σύμφωνα με το τύπο (1) είναι

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{-2/3}\left(1-x^2\right)' = -\frac{2}{3}x\left(1-x^2\right)^{-2/3}.$$

Παράδειγμα 9.1.5 - 5

Αν

$$f(x) = \ln(1+x) + \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$

να υπολογιστεί η $f'(1)$.

Λύση. Σύμφωνα με τους τύπους (3) και (9) έχουμε ότι

$$f'(x) = \frac{(1+x)'}{1+x} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{1}{1+x} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,,$$

οπότε

$$f'(1) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

■

Παράδειγμα 9.1.5 - 6

Να υπολογιστεί η 2ης τάξης παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = \tan^{-1} 2x.$$

Λύση. Αρχικά σύμφωνα με τον τύπο (8) είναι

$$f'(x) = \frac{(2x)'}{1+(2x)^2} = \frac{2}{1+4x^2}\,,$$

οπότε σύμφωνα με το Πόρισμα 9.1.4 - 3, έχουμε

$$f''(x) = -2\,\frac{\overbrace{\left(1+4x^2\right)'}^{4\cdot 2x}}{(1+4x^2)^2} = -\frac{16x}{(1+4x^2)^2}\,.$$

■

Παράδειγμα 9.1.5 - 7

Να υπολογιστεί η ν-τάξης παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = 2^x.$$

Λύση. Από την ταυτότητα

$$a^x = e^{x\ln a} \quad \text{με } a > 0 \text{ και } x \in \Re,$$

προκύπτει ότι

$$f'(x) = \left(e^{x\ln 2}\right)' = (x\ln 2)'\ e^{x\ln 2} = 2^x \ln 2.$$

Όμοια $f''(x) = 2^x (\ln 2)^2$ και γενικά

$$f^{(\nu)}(x) = 2^x (\ln 2)^\nu \quad \text{με} \quad \nu = 1,\, 2,\, \ldots\,.$$

■

Παράδειγμα 9.1.5 - 8

Έστω

$$f(x) = \text{sech} x.$$

Τότε, επειδή

$$\text{sech} x = \frac{1}{\cosh x},$$

σύμφωνα με το Πόρισμα 9.1.4 - 3, έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{(\cosh x)'}{\cosh^2 x} = -\frac{\sinh x}{\cosh^2 x} \\ &= -\frac{1}{\cosh x}\frac{\sinh x}{\cosh x} = -\text{sech} x \, \tanh x. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.1.5 - 9

Έστω

$$f(x) = \tanh 2x.$$

Τότε σύμφωνα με τον τύπο (13) είναι

$$f'(x) = \frac{(2x)'}{\cosh^2 2x} = \frac{2}{\cosh^2 2x} = 2\,\text{sech}^2 2x.$$

Αν $x = 0$, είναι

$$f'(0) = 2\left(\frac{2}{e^{2\cdot 0} + e^{-2\cdot 0}}\right)^2 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η εξίσωση της εφαπτομένης και της καθέτου των παρακάτω καμπυλών στα έναντι σημεία:

i) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ στο σημείο $x_0 = -2$,

ii) $y = (x-1)^{1/3}$ στο $x_0 = 2$,

iii) $y = \tan^{-1} 2x$ στο $x_0 = 0$,

iv) $y = e^{1-x^2}$ στο σημείο τομής με την ευθεία $y = 1$,

v) $y = \sin^{-1}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$ στο σημείο τομής με τον x-άξονα,

vi) $y = \cos^{-1} 3x$ στο σημείο τομής με τον y-άξονα.

2. Να υπολογιστεί το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της καμπύλης $y = x^2 - 7x + 3$ είναι παράλληλη στην ευθεία $5x + y - 3 = 0$.

3. Να προσδιοριστούν τα σημεία στα οποία οι εφαπτόμενες της καμπύλης

$$y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$$

είναι παράλληλες στον x-άξονα.

4. Να υπολογιστούν οι 1ης τάξης παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$:

$i)$	$\ln(\sin 2\,x)$	$viii)$	$\tan^{-1}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$
$ii)$	$e^{-x}\,(2\sin 2x - \cos 2x)$	$ix)$	2^{-x}
$iii)$	$\cos^3 \omega\, x$	$x)$	$\left(1-x^2\right)^{1/2}$
$iv)$	$\ln\left(x^2+x+1\right)$	$xi)$	$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$
$v)$	$x^2 \tan 2x$	$xii)$	$\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$
$vi)$	$\sin^2 \omega\, x$	$xiii)$	$\tan^{-1}(\sqrt{x}\,)$
$vii)$	$\cos x^2$	$xiv)$	$\sin^{-1}\dfrac{x}{2}\,.$

5. Να υπολογιστούν οι 2ης τάξης παράγωγοι των αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων.

6. Όμοια οι 2ης τάξης παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$:

$i)$	$\dfrac{1-x}{1+x}$	$v)$	$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$
$ii)$	$\tan^{-1} 2x$	$vi)$	$\sin^2 \omega x$
$iii)$	e^{-x^2}	$vii)$	3^x
$iv)$	$x\,e^{-3x}$	$viii)$	$\cosh\left(\dfrac{x}{2}\right).$

7. Όμοια οι ν-τάξης παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

$i)\quad e^{-3x}$ $\qquad iii)\quad \ln x$

$ii)\quad a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ $\qquad iv)\quad \dfrac{1}{1-x}\,.$

8. Δείξτε ότι η παράγωγος μιας άρτιας συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση, ενώ η παράγωγος μιας περιττής είναι άρτια συνάρτηση.

9. Δείξτε ότι η παράγωγος μιας περιοδικής συνάρτησης είναι όμοια περιοδική συνάρτηση.

10. Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις επαληθεύονται από τις έναντι συναρτήσεις:

i) $L\dfrac{d\,i}{d\,t} + Ri = E$ από την $i = i(t) = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$,

ii) $L\dfrac{d^2 i}{d\,t^2} + R\dfrac{d\,i}{d\,t} + \dfrac{i}{C} = 0$ από την $i = i(t) = (c_1 + tc_2)\, e^{-Rt/(2L)}$,

όταν $R^2 = 4L/C$,

iii)

$$x^2 y'' + (1-2\nu)xy' + \left(1+\nu^2\right) y = 0$$

από την $y = x^\nu\left[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right]$.

11. Να δειχθεί ότι

i) η 3ης τάξης παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = e^{1/x}$ με $x \neq 0$ είναι της μορφής

$$f^{(3)}(x) = (-1)^3 P_2(x) x^{-2\cdot 3}\, e^{1/x},$$

όπου $P_2(x)$ πολυώνυμο βαθμού 2,

ii) η 2ης τάξης παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \left(1+x^2\right)^{-1/2}$ είναι της μορφής

$$f^{(2)}(x) = \left(1+x^2\right)^{-2-1/2}\; P_2(x),$$

όπου $P_2(x)$ πολυώνυμο βαθμού 2.

Απαντήσεις

1. Ανάλογα με το Παράδειγμα 9.1.2 - 1 έχουμε τα εξής:
(i) αν $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, τότε $x_0 = -2$, $y_0 = f(-2) = 5$ και $f'(0) = 0$. Άρα σύμφωνα με τον τύπο $(9.1.2 - 6)$ η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας είναι $y = 5$, ενώ με τον τύπο $(9.1.2 - 7)$ της κάθετης $x = -2$.
(ii) Όμοια είναι $f(x) = (x-1)^3$, $x_0 = 2$, $y_0 = f(2) = 1$ και $f'(2) = 3$, οπότε σύμφωνα με τον τύπο $(9.1.2 - 4)$ η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας είναι $y - 3x + 5 = 0$, ενώ με τον τύπο $(9.1.2 - 5)$ της κάθετης $3y + x - 5 = 0$.
(iii) $f(x) = \tan 2x$, $x_0 = 0$, $y_0 = f(0) = 0$ και $f'(2) = 2$, οπότε από τον τύπο $(9.1.2 - 4)$ η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας είναι $y - 2x = 0$, ενώ από τον $(9.1.2 - 5)$ της κάθετης $2y + x = 0$.
(iv) Τα κοινά σημεία υπολογίζονται θέτοντας $f(x) = e^{1-x^2} = 1 = e^0$, οπότε $1 - x^2 = 0$, δηλαδή $x = \pm 1$. Τότε αν

- $x_0 = 1$, $y_0 = f(1) = 1$ και $f'(1) = -2$, οπότε από τον τύπο $(9.1.2 - 4)$ η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας είναι $y + 2x - 3 = 0$, ενώ από τον $(9.1.2 - 5)$ της κάθετης $2y - x - 1 = 0$,
- $x_0 = -1$, $y_0 = f(-1) = 1$ και $f'(1) = 2$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας είναι $y - 2x - 3 = 0$, ενώ της κάθετης $2y + x - 1 = 0$,

(v) Τα κοινά σημεία υπολογίζονται θέτοντας $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) = 0$, οπότε $x_0 = 1$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο 9 του Πίνακα 9.1.5 - 1 είναι $f'(x) = \left(3 + 2x - x^2\right)^{-1/2}$ και άρα $f'(1) = \frac{1}{2}$, οπότε από τον τύπο $(9.1.2 - 4)$ η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας είναι $2y - x + 1 = 0$, ενώ από τον $(9.1.2 - 5)$ της κάθετης $y + 2x - 2 = 0$.
(vi) Στο σημείο τομής με τον y-άξονα πρέπει $x = 0$. Έστω $f(x) = \cos^{-1} 3x$, οπότε $y_0 = f(0) = \frac{\pi}{2}$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο 10 του Πίνακα 9.1.5 - 1 είναι $f'(x) = -3\left(1 - 9x^2\right)^{-1/2}$ και άρα $f'(0) = -3$, οπότε από τον τύπο $(9.1.2 - 4)$ η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας είναι $2y + 6x - \pi = 0$, ενώ από τον $(9.1.2 - 5)$ της κάθετης $6y - 2x - 3\pi = 0$.
2. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι $\lambda = -A/B$ (βλέπε Μάθημα *Αναλυτική Γεωμετρία*), οπότε για την $5x + y - 3 = 0$ έχουμε $\lambda = -5$. Έστω $f(x) = x^2 - 7x + 3$. Τότε λόγω της παραλληλίας πρέπει $f'(x) = -5$ και συνεπώς τελικά το σημείο είναι το $(1, -3)$.
3. Λόγω της παραλληλίας με τον x-άξονα πρέπει $y' = 0$, οπότε $x_0 = -2,\ 0,\ 1$.
4. (i) $2\cot 2x$, (ii) $5e^{-x}\cos 2x$, (iii) $-3\omega\cos^2\omega x\sin\omega x$, (iv) $\frac{1+2x}{1+x+x^2}$,
(v) $\frac{2x}{1+4x^2} + \tan^{-1} 2x$, (vi) $\omega\sin 2\omega x$, (vii) $-2x\sin x^2$, (viii) $-\frac{1}{1+x^2}$, (ix) $-2^{-x}\ln 2$,
(x) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, (xi) $-\frac{\sqrt{1+x}}{(1+x)^2\sqrt{1-x}}$, (xii) $\frac{1}{x(x+1)}$, (xiii) $\frac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}$, (xiv) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.
5. $(\sinh^{-1} x)'' = -\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$, $(\cosh^{-1} x)'' = -\frac{x}{(x-1)^{3/2}(x+1)^{3/2}}$,
$(\tanh^{-1} x)'' = \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$, $(\coth^{-1} x)'' = \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$.
6. (i) $\frac{4}{(1+x)^3}$, (ii) $-\frac{16x}{\left(1+4x^2\right)^2}$, (iii) $2\left(1 - 2x^2\right)e^{-x^2}$, (iv) $3(3x-2)e^{-3x}$,

(v) $-\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$, (vi) $2\omega^2 \cos 2\omega x$, (vii) $3^x \ln^2 3$ (viii) $\frac{1}{4}\cosh\frac{x}{2}$.
7. (i) $(-1)^\nu 3^\nu e^{-3x}$, (ii) $a_\nu\, \nu\,!$, (iii) $(-1)^{\nu-1}(\nu-1)\,!x^{-\nu}$, (iv) $\frac{\nu\,!}{(1-x)^{\nu+1}}$.
8. Είναι $[f(-t)]' = (-t)' f(-t) = -f(-t)$ κ.λπ. **9.** Όμοια με 8.
10. Υπολογισμός των παραγώγων και αντικατάσταση στην αποδεικτέα.
11. (i) $P_2(x) = 6x^2 + 6x + 1$, (ii) $P_2(x) = 2x^2 - 1$.

9.1.6 Παραμετρική παράγωγος

Έστω ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ έχει την παρακάτω παραμετρική μορφή:[4]

$$\begin{aligned} x &= \phi(t) \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \quad \text{όταν} \quad t \in [a, b] \tag{9.1.6 - 1}$$

και οι συναρτήσεις ϕ, ψ είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες για κάθε $t \in (a, b)$.

Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 9.1.5 - 1 και τον τύπο (9.1.5−2) αποδεικνύεται ότι για την παράγωγο[5] (parametric derivative), εφόσον $dx/dt = x_t \neq 0$, ισχύουν:

1ης τάξης παράγωγος

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

δηλαδή

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad \text{ή και} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y_t}{x_t}. \tag{9.1.6 - 2}$$

2ης τάξης παράγωγος

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \left[\frac{\psi''(t)\phi'(t) - \psi'(t)\phi''(t)}{[\phi'(t)]^2}\right]\frac{1}{\phi'(t)}, \end{aligned}$$

[4] Για γεωμετρικές εφαρμογές των παραμετρικών παραστάσεων βλέπε Μάθημα *Αναλυτική Γεωμετρία.*

[5] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Parametric_derivative*

δηλαδή

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\psi''(t)\phi'(t)-\psi'(t)\phi''(t)}{[\phi'(t)]^3} \quad \text{ή και} \\ &= \frac{y_{tt}\,x_t - y_t\,x_{tt}}{x_t^3} \qquad (9.1.6 - 3)\end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.1.6 - 1

Έστω η συνάρτηση με παραμετρική μορφή

$$\begin{aligned} x &= 3\cos t = \phi(t) \\ y &= 2\sin t = \psi(t). \end{aligned} \qquad (9.1.6 - 4)$$

Τότε

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= x_t = -3\sin t, \quad \phi''(t) = x_{tt} = -3\cos t \\ \psi'(t) &= y_t = 2\cos t, \quad \psi''(t) = y_{tt} = -2\sin t,\end{aligned}$$

οπότε σύμφωνα με τον τύπο $(9.1.6-2)$ τότε είναι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos t}{-3\sin t} = -\frac{2}{3}\cot t,$$

ενώ με τον τύπο $(9.1.6-3)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-2\sin t)(-3\sin t) - 2\cos t(-3\cos t)}{(-3\sin t)^3} = \frac{2}{9\sin^3 t}.$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση $y = f(x)$ από την οποία έχει προκύψει η $(9.1.6-4)$ υπολογίζεται απαλείφοντας το t μεταξύ των x, y υψώνοντας στο τετράγωνο τις σχέσεις των, δηλαδή

$$x^2 = 9\cos^2 t \quad \text{και} \quad y^2 = 4\sin^2 t$$

και στη συνέχεια προσθέτοντας κατά μέλη, οπότε τελικά προκύπτει

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Επομένως πρόκειται για έλλειψη με κέντρο το $(0,0)$ και ημιάξονες $a = 3$ και $b = 2$.

Ο υπολογισμός των παραγώγων με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές:

Πρόγραμμα 9.1.6 - 1 (παραμετρική παράγωγος)

```
x[t_] := 3 Cos[t]
y[t_] := 2 Sin[t]
Print["Derivative dy/dx = ", Simplify[D[y[t], t]/D[x[t], t]]]
Print["Derivative d^2y/dx^2 = ",
 Simplify[(D[y[t], {t, 2}] D[x[t], t] -
     D[y[t], t] D[x[t], {t, 2}])/(D[x[t], t])^3]]
```

Άσκηση

Των παρακάτω παραμετρικών συναρτήσεων να γίνει η γραφική παράσταση και στη συνέχεια η 1ης και η 2ης τάξης παράγωγος:

$$i)\quad \begin{aligned} x &= \ln t \\ y &= t^2 \end{aligned} \qquad\qquad v)\quad \begin{aligned} x &= \sin^{-1} t \\ y &= \left(1-t^2\right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$ii)\quad \begin{aligned} x &= \cos 2t \\ y &= \sin^2 t \end{aligned} \qquad\qquad vi)\quad \begin{aligned} x &= \tan^{-1} t \\ y &= t \end{aligned}$$

$$iii)\quad \begin{aligned} x &= a\left(\sin t - t\cos t\right) \\ y &= a\left(\cos t + t\sin t\right) \end{aligned} \qquad\qquad vii)\quad \begin{aligned} x &= e^t \cos t \\ y &= e^t \sin t \end{aligned} \quad \text{αν } t = \frac{\pi}{3}$$

$$iv)\quad \begin{aligned} x &= t - \sin t \\ y &= t - \cos t \end{aligned} \qquad\qquad viii)\quad \begin{aligned} x &= \ln\left(1+t^2\right) \\ y &= t^2 \end{aligned} \quad \text{αν } t = 1.$$

Απαντήσεις

(i) $\frac{dy}{dx} = 2t^2$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 4t^2$. Η γραφική παράσταση, όταν $t \in [0, e]$, γίνεται με την εντολή του MATHEMATICA:

```
ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0.1, E}]
```

(ii) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, (iii) $\frac{dy}{dx} = \cot t$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a\,t\sin^3 t}$,

(iv) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+\sin t}{1-\cos t}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1-\cos t+\sin t}{(\cos t-1)^3}$,

(v) $\frac{dy}{dx} = -t$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sqrt{1-t^2}$ (vi) $\frac{dy}{dx} = 1+t^2$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2t\left(1+t^2\right)$,

(vii) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/2} = \left.\frac{-\cos t+\sin t}{\cos t+\sin t}\right|_{t=\pi/2} = 1, \quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\pi/2} = -\left.\frac{2e^t}{(\cos t+\sin t)^3}\right|_{t=\pi/2} = -2e^{\pi/2},$

(viii) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = 1+t^2\big|_{t=1} = 2, \quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = 1+t^2\big|_{t=1} = 2.$

9.1.7 Πεπλεγμένη παράγωγος

Όταν η σχέση μεταξύ της ανεξάρτητης μεταβλητής x και της συνάρτησης $y=y(x)$ δίνεται με τη μορφή

$$f(x,y)=0, \tag{9.1.7 - 1}$$

τότε λέγεται ότι έχουμε μία **πεπλεγμένη** συνάρτηση (implicit function). Η εύρεση της παραγώγου[6] (implicit derivative) μιας πεπλεγμένης συνάρτησης στις απλούστερες των περιπτώσεων είναι δυνατόν να υπολογιστεί ως εξής:

i) υπολογίζεται η παράγωγος με μεταβλητή x στο αριστερό μέλος της $(9.1.7-1)$, θεωρώντας το y ως συνάρτηση του x, δηλαδή υπολογίζεται η παράγωγος

$$\frac{df(x,y)}{dx}=0\,, \tag{9.1.7 - 2}$$

ii) λύνεται η $(9.1.7-2)$ ως προς y'.

Παράδειγμα 9.1.7 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$x\,y+e^y=0 \quad \text{όπου} \quad y=y(x).$$

Τότε παραγωγίζοντας έχουμε

$$x'y+x\,y'+y'e^y=0 \quad \text{ή} \quad y+(x+e^y)\,y'=0,$$

οπότε λύνοντας ως προς y' προκύπτει ότι

$$y'=-\frac{y}{x+e^y}\,.$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 9.1.7 - 1 (πεπλεγμένη παράγωγος)
```
f = D[x  y[x] + Exp[y[x]], x]
Solve[f == 0, y'[x]]
```

[6] Βλέπε βιβλιογραφία και
https://en.wikipedia.org/wiki/Implicit_function#Implicit_differentiation

Άσκηση

Να υπολογιστούν οι 1ης τάξης παράγωγοι των παρακάτω πεπλεγμένων συναρτήσεων $y = y(x)$:

$i)\quad x^3 + y^3 = a^3 \qquad\qquad iv)\quad \tan y = x + y$

$ii)\quad a\cos^2(x+y) = \beta \qquad\qquad v)\quad \sqrt{x^2+y^2} + y = 0$

$iii)\quad xy = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right) \qquad\qquad vi)\quad e^{-\left(x^2+y^2\right)} = 1.$

Απαντήσεις

(i) $y' = -\frac{x^2}{y^2}$,, (ii) $y' = -1$, (iii) $y' = -\frac{y\left(-1+x^2+y^2\right)}{x\left(1+x^2+y^2\right)}$, (iv) $y' = \frac{1}{-1+\sec y^2}$, όταν $\sec y^2 = \frac{1}{\cos y^2}$, (v) $y' = -\frac{x}{y+\sqrt{x^2+y^2}}$, (vi) $y' = -\frac{x}{y}$.

9.1.8 Υπολογισμός οριακών τιμών

Είναι ήδη γνωστό από την Παράγραφο 7.1.3 ότι αν οι συναρτήσεις $f,\, g \,|\, D$ είναι ορισμένες για κάθε $x \in D$ εκτός από ένα σημείο, έστω $x_0 \in D$, όπου

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = k \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = l \quad \text{με} \quad k,\, l \in \mathbb{R},$$

τότε υπάρχουν οι παρακάτω οριακές τιμές του:

i) **αθροίσματος**

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = k + l,$$

ii) **γινομένου**

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x)\,\lim_{x\to x_0} g(x) = k\,l,$$

iii) **πηλίκου**

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{k}{l}\,, \quad \text{όταν} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = l \neq 0.$$

Οι παραπάνω οριακές τιμές δεν υπάρχουν, όταν οι τιμές των k και l ανάγουν σε μια από τις **μη επιτρεπτές πράξεις** στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, που είναι οι εξής:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\,\infty, \quad \infty\,0, \quad \infty-\infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0. \qquad (9.1.8 - 1)$$

Διευκρινίζεται ότι μια πράξη είναι μη επιτρεπτή, όταν το αποτέλεσμά της δεν είναι **μονοσήμαντα ορισμένο**, διαφορετικά η πράξη αυτή δίνει διαφορετικά αποτελέσματα ανάλογα με τις εκάστοτε συναρτήσεις f και g.

Στις περιπτώσεις αυτές πολλές φορές υπάρχει η οριακή τιμή και υπολογίζεται με κανόνες, που είναι γνωστοί σαν **κανόνες de L'Hôpital** (De L'Hôpital's rule)[7] και οι οποίοι δίνονται στη συνέχεια με μορφή θεωρημάτων.

Μορφή $\frac{0}{0}$

Θεώρημα 9.1.8 - 1. *Αν* $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ *και* $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, *όταν* $x_0 \in \mathbb{R}$ *ή* $x_0 = \pm\infty$ *και υπάρχει η οριακή τιμή* $\lim_{x\to x_0} [f'(x)/g'(x)]$, *τότε υπάρχει και η οριακή τιμή του πηλίκου των συναρτήσεων και ισχύει*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\,. \qquad (9.1.8 - 2)$$

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται ως εξής:

Θεώρημα 9.1.8 - 2. *Αν* $\lim_{x\to x_0} f^{(k)}(x) = 0$ *και* $\lim_{x\to x_0} g^{(k)}(x) = 0$, *όταν* $x_0 \in \mathbb{R}$ *ή* $x_0 = \pm\infty$ *για κάθε* $k = 0,\,1,\,\ldots,\,\nu-1$ *και υπάρχει η οριακή τιμή* $\lim_{x\to x_0}\left[f^{(\nu)}(x)/g^{(\nu)}(x)\right]$, *τότε υπάρχει και η οριακή τιμή του πηλίκου των συναρτήσεων και ισχύει*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{g^{(\nu)}(x_0)}\,. \qquad (9.1.8 - 3)$$

[7]Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/L%27Hôpital%27s_rule*

Παράδειγμα 9.1.8 - 1

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 9.1.8 - 1 έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.1.8 - 2

Όμοια εφαρμόζοντας το Θεώρημα 9.1.8 - 2 έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x^2)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x+x\sin x-\cos x}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(x\sin x)'}{(2x)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x}{2}=0.\end{aligned}$$

Μορφή $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Θεώρημα 9.1.8 - 3. *Αν* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ *και* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, *όταν* $x_0 \in \mathbb{R}$ *ή* $x_0 = \pm\infty$ *και υπάρχει η οριακή τιμή* $\lim_{x\to x_0}[f'(x)/g'(x)]$, *τότε υπάρχει και η οριακή τιμή του πηλίκου των συναρτήσεων και ισχύει*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \tag{9.1.8 - 4}$$

Όμοια γενικεύεται ως εξής:

Θεώρημα 9.1.8 - 4. *Αν* $\lim_{x\to x_0} f^{(k)}(x) = \pm\infty$ *και* $\lim_{x\to x_0} g^{(k)}(x) = \pm\infty$, *όταν* $x_0 \in \mathbb{R}$ *ή* $x_0 = \pm\infty$ *για κάθε* $k = 0, 1, \ldots, \nu-1$ *και υπάρχει η* *οριακή τιμή* $\lim_{x\to x_0}\left[f^{(\nu)}(x)/g^{(\nu)}(x)\right]$, *τότε υπάρχει και η οριακή τιμή του πηλίκου των συναρτήσεων και ισχύει*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{g^{(\nu)}(x_0)}\,. \tag{9.1.8 - 5}$$

Παράδειγμα 9.1.8 - 3

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 9.1.8 - 3 έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} &= \left(\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty}\right)\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot 0=0.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.1.8 - 4

Όμοια εφαρμόζοντας το Θεώρημα 9.1.8 - 4 έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty.\end{aligned}$$

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν οι παρακάτω οριακές τιμές:

i) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x+\ln x}$ *iii)* $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}$

ii) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-2x}}{x^2}$ *iv)* $\lim_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x^2}$

Απαντήσεις

i) $+\infty$, ii) $+\infty$, iii) 0, iv) $-\frac{1}{2}$.

Μορφή $0 \cdot (\pm\infty)$

Έστω ότι

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Τότε η μορφή αυτή ανάγεται στην

- $\dfrac{0}{0}$, όταν γραφεί ως

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}.$$

- $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, όταν

$$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}.$$

Παράδειγμα 9.1.8 - 5

Να υπολογιστεί το $\lim_{x \to 0^+} (x \ln x)$.

Λύση. Είναι της μορφής $0 \cdot (-\infty)$. Τότε διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} (x \ln x) &= \left(\text{μορφή } \frac{-\infty}{+\infty}\right) \lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to 0^+} x = 0. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 9.1.8 - 6

Όμοια το $\lim_{x \to 0^+} (x \cot x)$.

Λύση. Είναι της μορφής $0 \cdot (+\infty)$, οπότε διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} (x \cot x) &= \left(\text{μορφή } \frac{0}{0}\right) \lim_{x \to 0^+} \frac{(x)'}{(\tan x)'} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \to 0^+} \cos^2 x = 1. \end{aligned}$$

■

Μορφή $(\pm\infty) - (\pm\infty)$

Έστω ότι

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty.$$

Τότε ανάγεται στη μορφή

I. $\dfrac{0}{0}$, όταν $f(x)g(x) \neq 0$ και γραφεί ως

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{f(x)-g(x)}{1} = \frac{\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)g(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}} \\ &= \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}. \end{aligned}$$

II. $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, ή $0\cdot(\pm\infty)$, όταν $f(x) \neq 0$ και γραφεί ως

$$f(x)g(x) = f(x)\left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right).$$

Παράδειγμα 9.1.8 - 7

Να υπολογιστεί το $\lim_{x\to+\infty}(x - e^x)$.

Λύση. Είναι της μορφής $(+\infty) - (+\infty)$ και ανάγεται στη μορφή II ως εξής:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}(x - e^x) &= \lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty} e^x \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{x}{e^x}\right). \end{aligned}$$

Επειδή είναι

- $$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \quad \text{και}$$

•

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x}{e^x}\right) &= 1-\overbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}}^{\text{μορφή }+\infty/+\infty} = 1-\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'} \\
&= 1-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 1-0 = 1,
\end{aligned}$$

τελικά έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}(x-e^x) = (+\infty)\cdot 1 = +\infty.$$

■

Παράδειγμα 9.1.8 - 8

Όμοια το

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right).$$

Λύση. Είναι της μορφής $(+\infty)-(+\infty)$ και ανάγεται στη μορφή I ως εξής:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) &= \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\,\ln x} \\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{(\ln x - x + 1)'}{[(x-1)\,\ln x]'} \\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{x\ln x + x - 1} \\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{(1-x)'}{(x\ln x + x - 1)'} \\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{\ln x + 2} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

■

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν οι παρακάτω οριακές τιμές:

i) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$,

ii) $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,\ln x$.

Απαντήσεις

i) $\frac{1}{2}$, ii) 0.

Μορφές 0^0, $1^{\pm\infty}$ και $(\pm\infty)^0$

Έστω ότι οι παραπάνω μορφές προκύπτουν από την παρακάτω οριακή τιμή:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}. \tag{9.1.8 - 1}$$

Τότε η $(9.1.8-1)$ ανάγεται στην $0(\pm\infty)$, αντίστοιχα $(\pm\infty)0$ με την παρακάτω διαδικασία:

- η $[f(x)^{g(x)}$ μετασχηματίζεται σύμφωνα με την ταυτότητα

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\,\ln f(x)}. \tag{9.1.8 - 2}$$

- Επειδή η συνάρτηση e^x είναι συνεχής, ο υπολογισμός της οριακής τιμής $(9.1.8-1)$ βάσει της $(9.1.8-2)$ γίνεται τότε ως εξής:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\,[f(x)]^{g(x)} &= \lim_{x\to x_0}\,e^{g(x)\,\ln f(x)}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to x_0}\,g(x)\ln f(x)}.\end{aligned} \tag{9.1.8 - 3}$$

Παράδειγμα 9.1.8 - 9

Να υπολογιστεί η οριακή τιμή

$$\lim_{x\to 0^+} x^x.$$

Λύση. Είναι της μορφής 0^0, οπότε σύμφωνα και με την παραπάνω διαδικασία έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)} = e^0 = 1,$$

επειδή $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, όπως έχει ήδη αποδειχθεί στο Παράδειγμα 9.1.8 - 5. ∎

Παράδειγμα 9.1.8 - 10

Όμοια η οριακή τιμή

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x, \quad \text{όταν} \quad k = 1,\, 2,\, \ldots\,.$$

Λύση. Είναι της μορφής $1^{+\infty}$. Αρχικά σύμφωνα με την $(9.1.8-2)$ έχουμε ότι

$$\left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^{x\,\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\overbrace{\lim_{x \to +\infty} \left[x\,\ln\left(1 + \frac{k}{x}\right)\right]}^{\text{μορφή}\ \ 0(+\infty)} &= \left(\text{μορφή}\ \frac{0}{0}\right) \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\left(1+\frac{k}{x}\right)'}{1+\frac{k}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{-\frac{k}{x^2}}{1+\frac{k}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{k}{1+\frac{k}{x}} = k.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^{\lim_{x \to +\infty}\left[x\,\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\right]} = e^k.$$

■

Παράδειγμα 9.1.8 - 11

Όμοια η οριακή τιμή

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}.$$

Λύση. Είναι της μορφής $(+\infty)^0$. Σύμφωνα με την $(9.1.8-2)$ έχουμε ότι

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\,\ln x},$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} &= e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'}} \\
&= e^{\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1.
\end{aligned}$$

■

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν οι παρακάτω οριακές τιμές:

i) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ *iii*) $\lim_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$

ii) $\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x}$ *iv*) $\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\sin x}$.

Απαντήσεις

i) 1, ii) 1, iii) e, iv) 1.

9.1.9 Διωνυμικός συντελεστής

Ορισμός 9.1.9 - 1 (διωνυμικός συντελεστής). *Το σύμβολο $\binom{n}{k}$ που παριστάνει το πλήθος όλων των διαφόρων μεταξύ τους συνδυασμών των n στοιχείων ανά k, λέγεται διωνυμικός συντελεστής*[8] *(binomial coefficient) και ορίζεται από τη σχέση*

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad k = 0; \ n = 1,\, 2,\, \ldots \\ \dfrac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)]}{k\,!} & \text{αν} \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n. \end{cases} \qquad (9.1.9 - 1)$$

Σημειώσεις 9.1.9 - 1

- Υπενθυμίζεται ότι είναι

$$k\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k, \quad \text{ενώ} \quad 0\,! = 1. \qquad (9.1.9 - 2)$$

- Ο διωνυμικός συντελεστής διαβάζεται n ως προς k ή αναλυτικότερα οι συνδυασμοί των n ως προς k.

Γενικότερα η $(9.1.9 - 1)$ ορίζεται ως εξής:

[8] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_coefficient*

Ορισμός 9.1.9 - 2 (γενίκευση διωνυμικού συντελεστή)

$$\binom{a}{k} = \begin{cases} 1 & \textit{αν} \quad k = 0;\ a \in \mathbb{R} \\ \dfrac{a(a-1)\cdots[a-(k-1)]}{k\,!} & \textit{αν} \quad k = 1,\, 2,\, \ldots \\ & \quad\ \textit{και} \ \ a \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{9.1.9 - 3}$$

Επειδή σύμφωνα με τον τύπο $(9.1.9-3)$ είναι

$$\binom{0}{0} = 1, \qquad \binom{a}{0} = 1 \quad \text{με} \quad a \in \mathbb{R},$$

$$\binom{k}{k} = 1 \quad \text{με} \quad k = 1,\, 2,\, \ldots\,, \tag{9.1.9 - 4}$$

η $(9.1.9-3)$, οπότε και η $(9.1.9-1)$, θα παριστάνουν πάντοτε πραγματικό αριθμό.

Ιδιότητες

Αποδεικνύεται ότι:

I. αν n **ακέραιος** με $n = 0, 1, \ldots$ με $k \leq n$, τότε

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,!}{k\,!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}. \tag{9.1.9 - 5}$$

II.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{9.1.9 - 6}$$

Παράδειγμα 9.1.9 - 1

Σύμφωνα με τον τύπο $(9.1.9-1)$ είναι

$$\binom{4}{3} = \frac{4(4-1)(4-2)}{3\,!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4,$$

επειδή $n = 4$, $k = 3$ και $k - 1 = 2$, ενώ με τον τύπο $(9.1.9 - 3)$ είναι

$$\binom{5.3}{4} = \frac{5.3(5.3-1)(5.3-2)(5.3-3)}{4\,!} = \frac{5.3 \cdot 4.3 \cdot 3.3 \cdot 2.3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 7.207\,337,$$

επειδή $a = 5.3$, $k = 4$ και $k - 1 = 3$.

Στην 1η περίπτωση, επειδή ο n είναι ακέραιος, ο υπολογισμός γίνεται επίσης με τον τύπο $(9.1.9 - 5)$ ως εξής:

$$\binom{4}{3} = \frac{4\,!}{3\,!\,\underbrace{(4-3)!}_{=1}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4.$$

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι

$$\binom{5}{2} = 10, \qquad \binom{7}{3} = 35, \qquad \binom{10}{4} = 210.$$

2. Όμοια ότι

$$\binom{5.3}{3} = 12.5345, \qquad \binom{9.5}{7} = 67.659\,670.$$

9.1.10 Τρίγωνο του Pascal - Κανόνας του Leibniz

Διωνυμικό θεώρημα

Είναι γνωστό από την Άλγεβρα ότι ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 9.1.10 - 1 (διωνυμικό). *Για κάθε x, y και $n = 0, 1, 2, \ldots$ ισχύει ότι (binomial theorem)*[9]

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \qquad (9.1.10 - 1)$$

[9] Βλέπε: M. Abramowitz and I. A. Stegun (Eds) (1972). *Handbook of Mathematical Functions and Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* New York: Dover, 9η έκδοση, σελίδα 10.

Πίνακας 9.1.10 - 1: Τρίγωνο του Pascal.

n													
0							1						
1						1		1					
2					1		2		1				
3				1		3		3		1			
4			1		4		6		4		1		
5		1		5		10		10		5		1	
6	1		6		15		20		15		5		1

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται.[10]

Σύμφωνα με τον τύπο $(9.1.10-1)$ και τους τύπους $(9.1.9-1)$, $(9.1.9-4)$ διαδοχικά έχουμε το παρακάτω ήδη γνωστό ανάπτυγμα:

$$\begin{aligned}
(x+y)^3 &= \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}x^k y^{3-k} \\
&= \binom{3}{0}x^0y^{3-0}+\binom{3}{1}x^1y^{3-1}+\binom{3}{2}x^2y^{3-2}+\binom{3}{3}x^3y^{3-3} \\
&= y^3+3xy^2+3x^2y+x^3.
\end{aligned}$$

Ο υπολογισμός των συντελεστών $\binom{n}{k}$ στον τύπο $(9.1.10-1)$ για μεγαλύτερες τιμές του n γίνεται με το **τρίγωνο του Pascal** (Pascal's triangle), που δίνεται στον Πίνακα 9.1.10 - 1 για ανάπτυγμα μέχρι και βαθμού $n=6$. Η λογική των συντελεστών των αναπτυγμάτων που παρουσιάζονται στον πίνακα βασίζεται στην ιδιότητα ότι *κάθε συντελεστής ισούται με το άθροισμα των δύο ακριβώς προηγούμενων αυτού εκατέρωθεν συντελεστών*, δηλαδή, έστω για παράδειγμα ο πρώτος συντελεστής 6 στην τελευταία γραμμή με εκατέρωθεν προηγούμενούς τους 1 και 5, οπότε $6=1+5$, όμοια ο $15=5+10$ κ.λπ.

[10]Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_theorem* και επίσης *mathworld.wolfram.com/BinomialTheorem.html*

Σύμφωνα με το τρίγωνο του Pascal είναι:

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4,\\ (x+y)^6 &= x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6.\end{aligned}$$

Κανόνας του Leibniz

Ο υπολογισμός των παραγώγων του γινομένου συναρτήσεων γίνεται με τον γενικευμένο κανόνα του Leibniz (general Leibniz rule).[11] Στην περίπτωση του γινομένου δύο συναρτήσεων ο κανόνας διατυπώνεται με τη μορφή της παρακάτω πρότασης:[12]

Πρόταση 9.1.10 - 1. *Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν παραγώγους μέχρι και n-τάξη, τότε ισχύει*

$$[f(x)g(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)\,g^{(k)}(x), \tag{9.1.10 - 2}$$

όταν $n=0,\,1,\,2,\,\ldots$. και

$$\binom{n}{k}=\frac{n\,!}{k\,!(n-k)!}$$

ο διωνυμικός συντελεστής.

[11] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/General_Leibniz_rule*

[12] Για απόδειξη βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 6.

Παράδειγμα 9.1.10 - 1

Σύμφωνα με τον κανόνα του Leibniz έχουμε

$$\begin{aligned}
\left(x^4e^x\right)^{(3)} &= \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}\left(x^4\right)^{(3-k)}\left(e^x\right)^k \\
&= \binom{3}{0}\left(x^4\right)^{(3)}\left(e^x\right)^{(0)}+\binom{3}{1}\left(x^4\right)^{(3-1)}\left(e^x\right)^{(1)} \\
&\quad +\binom{3}{2}\left(x^4\right)^{(3-2)}\left(e^x\right)^{(2)}+\binom{3}{3}\left(x^4\right)^{(3-3)}\left(e^x\right)^{(3)} \\
&= \left(24x+24x^2+12x^3+x^4\right)e^x.
\end{aligned}$$

Άσκηση

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Leibniz να υπολογιστούν οι παράγωγοι 4ης τάξης των συναρτήσεων

$i)$ x^4e^x

$ii)$ $x\,e^{-x^2}$

$iii)$ $x^2\cos x$

$iv)$ $e^{-x}\sin\omega x$

$v)$ $x\,\sin\omega x$

$vi)$ $x^4\ln x.$

Απαντήσεις

i) $e^x\left(24+96x+72x^2+16x^3+x^4\right)$, ii) $4xe^{-x^2}\left(15-20x^2+4x^4\right)$,
iii) $\left(x^2-12\right)\cos x+8x\sin x$, iv) $e^{-x}\left[4\omega\left(\omega^2-1\right)\cos\omega x+\left(\omega^4-6\omega^2+1\right)\sin\omega x\right]$,
v) $\omega^3\left(\omega x\sin\omega x-4\cos\omega x\right)$, vi) $50+24\ln x$.

9.2 Πολυώνυμα ειδικής μορφής

Δίνονται στη συνέχεια μια κατηγορία πολυωνύμων με σημαντικές εφαρμογές στις θετικές επιστήμες.

9.2.1 Πολυώνυμα Bernstein

Ορισμός 9.2.1 - 1. *Τα* $n+1$ **βασικά πολυώνυμα Bernstein**[13] *(Bernstein basis polynomials) βαθμού n ορίζονται από τον τύπο*

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad \text{όταν} \quad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n \tag{9.2.1 - 1}$$

όταν

$$\binom{n}{i} = \frac{n\,!}{i\,!(n-i)!}$$

ο διωνυμικός συντελεστής.

Σύμφωνα με τον τύπο $(9.2.1-1)$, όταν $x \in [0,1]$, τα βασικά πολυώνυμα Bernstein βαθμού:

- $n = 1$ είναι (Σχ. 9.2.1 - 1):

$$\begin{aligned} B_{0,1}(x) &= 1 - x, \\ B_{1,1}(x) &= x. \end{aligned} \tag{9.2.1 - 2}$$

Το Σχ. 9.2.1 - 1 έγινε με τις παρακάτω εντολές του MATHEMATICA:

Πρόγραμμα 9.2.1 - 1 (βασικά πολυώνυμα Bernstein)

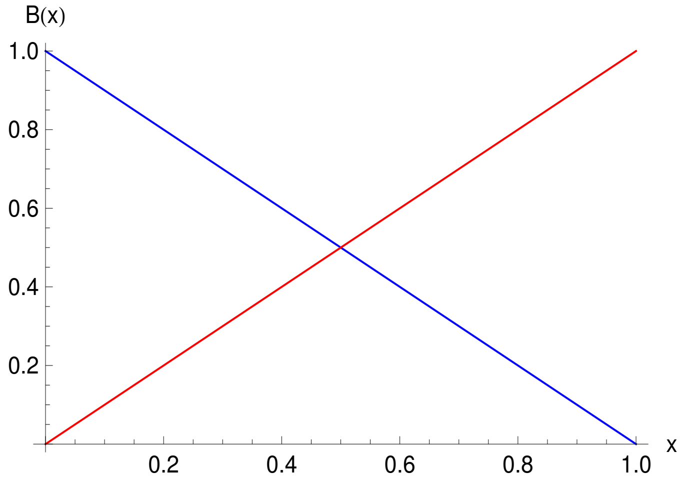
```
f1 = Plot[BernsteinBasis[1, 0, x], {x, 0, 1},
   PlotStyle -> {Blue, Thickness[0.003]}];
f2 = Plot[BernsteinBasis[1, 1, x], {x, 0, 1},
   PlotStyle -> {Red, Thickness[0.003]}, PlotRange -> All];
fgr = Show[f1, f2,
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 10},
  AxesLabel -> {"x", "B(x)"}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
```

ενώ τα βασικά πολυώνυμα Bernstein βαθμού $n = 1$ με την εντολή

```
Table[PiecewiseExpand@BernsteinBasis[1, k, x], {k, 0, 1}]
```

---

[13] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Bernstein_polynomials*



Σχήμα 9.2.1 - 1: Πολυώνυμα βασικά Bernstein βαθμού $n = 1$: $B_{0,1}$ μπλε και $B_{1,1}$ κόκκινη καμπύλη, όταν $x \in [0, 1]$.

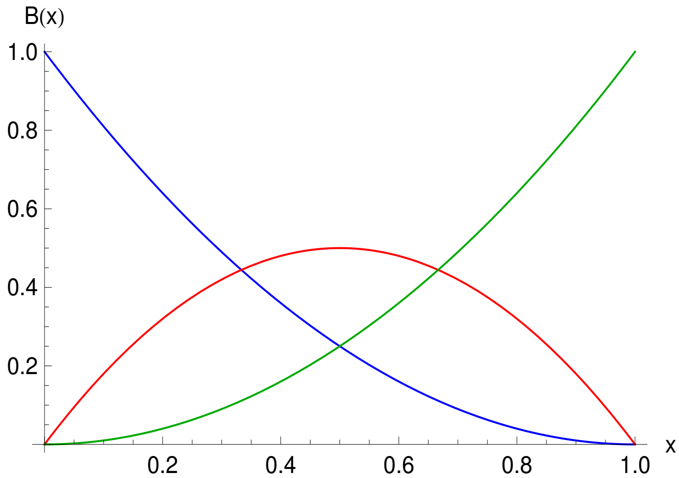
- $n = 2$ (Σχ. 9.2.1 - 2):

$$\begin{aligned} B_{0,2}(x) &= (1-x)^2, \\ B_{1,2}(x) &= 2x(1-x), \\ B_{2,2}(x) &= x^2. \end{aligned} \qquad (9.2.1 - 3)$$

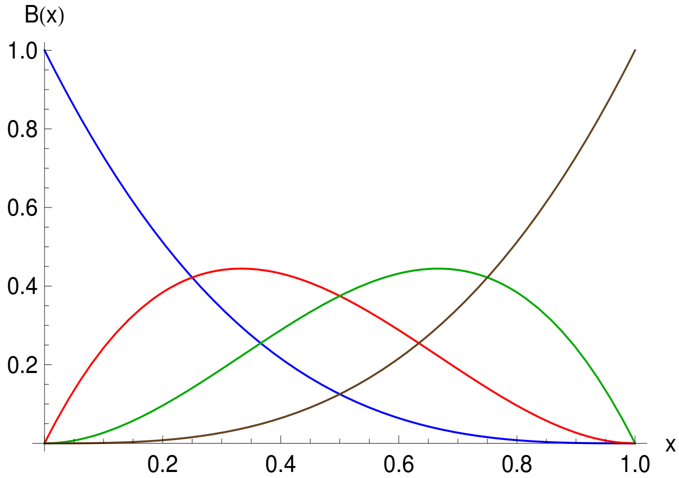
- $n = 3$ (Σχ. 9.2.1 - 3):

$$\begin{aligned} B_{0,3}(x) &= (1-x)^3, \\ B_{1,3}(x) &= 3x(1-x)^2, \\ B_{2,3}(x) &= 3x^2(1-x), \\ B_{3,3}(x) &= x^3. \end{aligned} \qquad (9.2.1 - 4)$$

Όμοια υπολογίζονται και τα άλλα πολυώνυμα.



Σχήμα 9.2.1 - 2: Πολυώνυμα βασικά Bernstein βαθμού $n = 2$: $B_{0,2}$ μπλε, $B_{1,2}$ κόκκινη και $B_{2,2}$ πράσινη καμπύλη, όταν $x \in [0, 1]$.



Σχήμα 9.2.1 - 3: Πολυώνυμα βασικά Bernstein βαθμού $n = 3$: $B_{0,3}$ μπλε, $B_{1,3}$ κόκκινη, $B_{2,3}$ πράσινη και $B_{3,3}$ καφέ καμπύλη, όταν $x \in [0, 1]$.

Ορισμός 9.2.1 - 2. *Το n βαθμού* **πολυώνυμο Bernstein** *(Bernstein polynomial) ορίζεται από τον γραμμικό συνδυασμό*

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \, B_{i,n}(x), \tag{9.2.1 - 5}$$

όταν $B_{i,n}(x)$ τα βασικά πολυώνυμα Bernstein και β_i οι συντελεστές Bernstein ή Bézier.

Δίνονται στη συνέχεια οι κυριότερες ιδιότητες των βασικών πολυωνύμων Bernstein με τη μορφή προτάσεων.

Πρόταση 9.2.1 - 1. *Τα $B_{i,n}(x)$; $i = 0, 1, \ldots, n$ βασικά πολυώνυμα Bernstein βαθμού n εκφράζονται συναρτήσει των $n-1$ βαθμού αντίστοιχων πολυωνύμων με την παρακάτω αναδρομική σχέση:*

$$B_{i,n}(x) = (1-x)B_{i,n-1}(x) + xB_{i-1,n-1}(x). \tag{9.2.1 - 6}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με τις $(9.2.1 - 1)$ και $(9.1.9 - 6)$ διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned}
B_{i,n}(x) &= (1-x)B_{i,n-1}(x) + xB_{i-1,n-1}(x) \\
&= (1-x)\binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-1-i} \\
&\quad + x\binom{n-1}{i-1} x^{i-1}(1-x)^{n-1-(i-1)} \\
&= \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1} x^i (1-x)^{n-i} \\
&= \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right] x^i (1-x)^{n-i} \\
&= \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} = B_{i,n}(x).
\end{aligned}$$

■

Πρόταση 9.2.1 - 2. *Για τα $B_{i,n}(x)$; $i = 0, 1, \ldots, n$ βασικά πολυώνυμα Bernstein βαθμού n ισχύει ότι*

$$B_{i,n}(x) \geq 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in [0,1]. \tag{9.2.1 - 7}$$

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση τα πολυώνυμα είναι **μη αρνητικά** στο $[0,1]$.

Πρόταση 9.2.1 - 3 (διαμέριση μονάδας). *Το άθροισμα των $i+1$ βασικών πολυωνύμων Bernstein βαθμού n ισούται με τη μονάδα.*

Η ιδιότητα αυτή είναι σημαντική στη χρήση των πολυωνύμων στη γεωμετρική μοντελοποίηση και των γραφικών με υπολογιστή.

Πρόταση 9.2.1 - 4. *Κάθε βασικό πολυώνυμο Bernstein βαθμού $n-1$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των αντίστοιχων βασικών πολυωνύμων Bernstein βαθμού n.*

Πρόταση 9.2.1 - 5. *Κάθε βασικό πολυώνυμο Bernstein βαθμού n εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $1, x, \ldots, x^n$*

Παράγωγος βασικών πολυωνύμων Bernstein

Πρόταση 9.2.1 - 6. *Η παράγωγος των βασικών πολυωνύμων Bernstein βαθμού n εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των αντίστοιχων βασικών πολυωνύμων Bernstein βαθμού $n-1$ σύμφωνα με τη σχέση*

$$B'_{i,n}(x) = \frac{dB_{i,n}(x)}{dx} = n\left[B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x)\right]. \tag{9.2.1 - 8}$$

Παράδειγμα 9.2.1 - 1

Σύμφωνα με τον τύπο $(9.2.1-8)$ και την $(9.2.1-2)$ είναι

$$B'_{1,2}(x) = 2\left[B_{0,1}(x) - B_{1,1}(x)\right] = 2[(1-x) - x] = 2(1-x).$$

Το αποτέλεσμα επαληθεύεται, επειδή σύμφωνα με την (9.2.1 − 3) είναι $B_{1,2}(x) = 2x(1-x)$, οπότε

$$B'_{1,2}(x) = [2x(1-x)]' = 2(1-2x).$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA γίνεται με την εντολή:

```
Table[PiecewiseExpand@D[BernsteinBasis[2, k, x], x], {k, 1, 1}]
```

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η παράγωγος των βασικών πολυωνύμων Bernstein $B_{i,4}(x)$; $i = 0, \ldots, 4$.

2. Να δειχθούν οι Προτάσεις 9.2.1 - 2 μέχρι και 9.2.1 - 6.

Απαντήσεις

1. $B'_{4,0}(x) = 4(-1+x)^3$, $B'_{4,1}(x) = -4\left(-1+6x-9x^2+4x^3\right)$, $B'_{4,2}(x) = 12\left(x-3x^2+2x^3\right)$, $B'_{4,3}(x) = -4\left(-3x^2+4x^3\right)$ και $B'_{4,4}(x) = 4x^3$.

2. Ανάλογα με την απόδειξη της Πρότασης 9.2.1 - 1.

9.2.2 Πολυώνυμα Hermite

Τα πολυώνυμα Hermite[14] (Hermite polynomials) H_n βαθμού n ορίζονται από τον τύπο

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n\left(e^{-x^2}\right)}{dx^n}; \quad n = 0, 1, \ldots \tag{9.2.2 - 1}$$

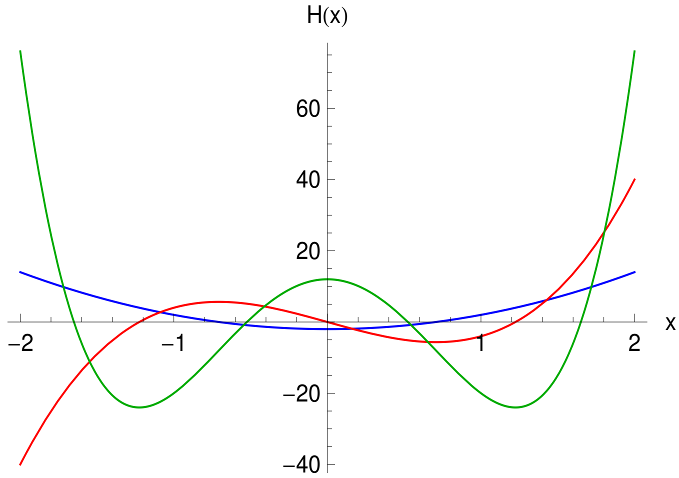
όπου $H_0(x) = 1$ (Σχ. 9.2.2 - 1).

Αν $n = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} H_1(x) &= (-1)^1 e^{x^2} \frac{d^1\left(e^{-x^2}\right)}{dx^1} = -e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)' \\ &= -e^{x^2}(-2x)\left(e^{-x^2}\right) = 2x. \end{aligned}$$

Όμοια υπολογίζονται και τα άλλα πολυώνυμα.

[14] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Hermite_polynomials*



Σχήμα 9.2.2 - 1: Πολυώνυμα Hermite: H_2 μπλε, H_3 κόκκινη και H_4 πράσινη καμπύλη, όταν $x \in [-2, 2]$.

Σημείωση 9.2.2 - 1

Αποδεικνύεται ότι[15] τα πολυώνυμα Hermite επαληθεύουν τη διαφορική εξίσωση[16] (Hermite differential equation)

$$y''(x) - 2x\, y'(x) + \lambda y(x) = 0, \qquad (9.2.2 - 2)$$

όταν $y(x) = H_n(x)$.

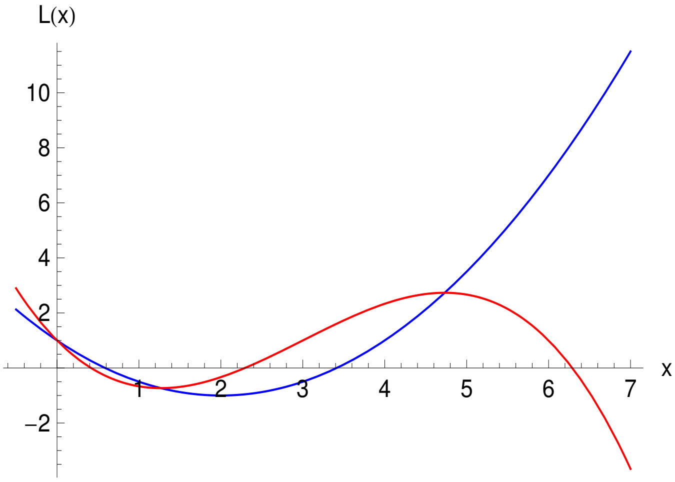
Το Σχ. 9.2.2 - 1 έγινε με τις παρακάτω εντολές του MATHEMATICA:

Πρόγραμμα 9.2.2 - 1 (πολυώνυμα Hermite)

```
f2 = Plot[HermiteH[2, x], {x, -2, 2},PlotStyle -> {Blue, Thickness[0.003]}];
f3 = Plot[HermiteH[3, x], {x, -2, 2},
   PlotStyle -> {Red, Thickness[0.003]},PlotRange -> All];
f4 = Plot[HermiteH[4, x],{x,-2,2},PlotStyle -> {Darker[Green],
   Thickness[0.003]}];
fgr = Show[f2, f3, f4,BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 10},
  AxesLabel -> {"x", "H(x)"},AxesOrigin -> {0, 0},PlotRange -> All]
```

[15] Βλέπε Υποσημείωση 14 και *mathworld.wolfram.com/HermiteDifferentialEquation.html*

[16] Για διαφορική εξίσωση βλέπε Μάθημα *Διαφορικές Εξισώσεις*.



Σχήμα 9.2.3 - 1: Πολυώνυμα Laguerre: L_2 μπλε και L_3 κόκκινη καμπύλη, όταν $x \in [-0.5, 7]$.

Άσκηση

Δείξτε ότι:

- $H_2(x) = 4x^2 - 2$,
- $H_3(x) = 8x^3 - 12x$, και
- $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$.

9.2.3 Πολυώνυμα Laguerre

Τα πολυώνυμα Laguerre[17] (Laguerre polynomials) L_n βαθμού n ορίζονται από τον τύπο

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n\,!}\,\frac{d^n\left(x^n\,e^{-x}\right)}{d\,x^n}\,; \quad n = 0,\,1,\,\ldots \tag{9.2.3 - 1}$$

όπου $L_0(x) = 1$ (Σχ. 9.2.3 - 1).

Αν $n = 1$ έχουμε

$$L_1(x) \quad = \quad \frac{e^x}{1\,!}\,\frac{d^1\left(x^1\,e^{-x}\right)}{d\,x^1} = e^x\left(xe^{-x}\right)' = 1 - x.$$

[17]Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Laguerre_polynomials*

Όμοια υπολογίζονται και τα άλλα πολυώνυμα.

Σημείωση 9.2.3 - 1

Αποδεικνύεται ότι[18] τα πολυώνυμα Laguerre επαληθεύουν τη διαφορική εξίσωση (Laguerre differential equation)

$$x y''(x) + (1 - x) y'(x) + n y(x) = 0, \qquad (9.2.3 - 2)$$

όταν $y(x) = L_n(x)$.

Το Σχ. 9.2.3 - 1 έγινε με τις παρακάτω εντολές του MATHEMATICA:

Πρόγραμμα 9.2.3 - 1 (πολυώνυμα Laguerre)

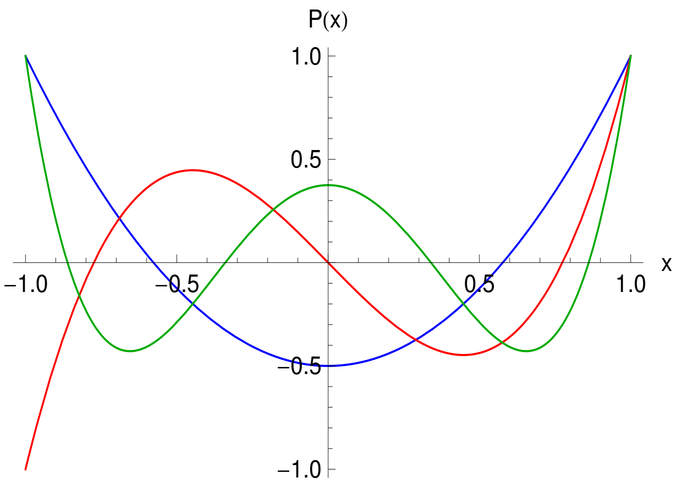
```
f2 = Plot[LaguerreL[2, x], {x, -0.5, 7},
   PlotStyle -> {Blue, Thickness[0.003]}];
f3 = Plot[LaguerreL[3, x], {x, -0.5, 7},
   PlotStyle -> {Red, Thickness[0.003]}];
fgr = Show[f2, f3, BaseStyle ->{FontFamily -> "Arial",FontSize -> 10},
   AxesLabel -> {"x", "L(x)"}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
```

Άσκηση

Δείξτε ότι:

- $L_2(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$,
- $L_3(x) = 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$, και
- $L_4(x) = 1 - 4x + 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4$.

[18] Βλέπε Υποσημείωση 17 και *mathworld.wolfram.com/LaguerreDifferentialEquation.html*



Σχήμα 9.2.4 - 1: Πολυώνυμα Legendre: P_2 μπλε, P_3 κόκκινη και P_4 πράσινη καμπύλη, όταν $x \in [-1, 1]$.

9.2.4 Πολυώνυμα Legendre

Τα πολυώνυμα Legendre[19] (Legendre polynomials) P_n βαθμού n ορίζονται από τον τύπο του Rodrigues ως εξής:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\,\frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{d\,x^n}\,;\quad n = 0,\,1,\,\ldots,\quad \text{όπου } x \in [-1, 1], \qquad (9.2.4 - 1)$$

όταν $P_0(x) = 1$ (Σχ. 9.2.4 - 1).

Αν $n = 1$ έχουμε

$$P_1(x) \;=\; \frac{1}{2^1\; 1!}\,\frac{d^1\left(x^2-1\right)^1}{d\,x^1} = \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)' = x.$$

Όμοια υπολογίζονται και τα άλλα πολυώνυμα.

Σημείωση 9.2.4 - 1

Αποδεικνύεται ότι[20] τα πολυώνυμα Legendre επαληθεύουν τη διαφορική εξίσωση

[19] Βλέπε Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 9 και *https : //en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials*

[20] Βλέπε Υποσημείωση 19 και *mathworld.wolfram.com/LegendreDifferentialEquation.html*

(Legendre differential equation)

$$\left(1-x^2\right) y''(x) - 2x\, y'(x) + n(n+1)y(x) = 0, \qquad (9.2.4 - 2)$$

όταν $y(x) = P_n(x)$.

Το Σχ. 9.2.2 - 1 έγινε με τις παρακάτω εντολές του MATHEMATICA:

Πρόγραμμα 9.2.4 - 1 (πολυώνυμα Hermite)

```
f2 = Plot[LegendreP[2, x], {x, -1, 1},
   PlotStyle -> {Blue, Thickness[0.003]}];
f3 = Plot[LegendreP[3, x], {x, -1, 1},
   PlotStyle -> {Red, Thickness[0.003]}, PlotRange -> All];
f4 = Plot[LegendreP[4, x], {x, -1, 1},
   PlotStyle -> {Darker[Green], Thickness[0.003]}];
fgr = Show[f2, f3, f4,
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 10},
  AxesLabel -> {"x", "P(x)"}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All]
```

Άσκηση

Δείξτε ότι:

- $P_2(x) = \dfrac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$,
- $P_3(x) = \dfrac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$, και
- $P_4(x) = \dfrac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$.

9.2.5 Τύποι των Taylor και Maclaurin

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο ν-βαθμού. Τότε

$$f(x) = P_\nu(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_\nu(x-a)^\nu,$$

οπότε εύκολα προκύπτει ότι

$$a_0 = f(a), \quad a_1 = f'(a), \quad \ldots, \quad a_\nu = f^{(\nu)}(a).$$

Άρα, όταν η συνάρτηση είναι πολυωνυμική, έχουμε

$$f(x) = P_\nu(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1\,!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2\,!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu\,!}(x-a)^\nu.$$

Γενικότερα, όταν έχουμε γενικά μία συνάρτηση $f\,|\,(a,b)$ με γνωστές τις τιμές των παραγώγων της σε ένα σημείο $\xi \in (a,b)$, αποδεικνύεται ότι ισχύει ο παρακάτω **τύπος του Taylor**:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1\,!}(x-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2\,!}(x-\xi)^2 \\ &\quad + \ldots + \frac{f^{(\nu)}(\xi)}{\nu\,!}(x-\xi)^\nu, \end{aligned} \tag{9.2.5 - 1}$$

όπου το 2ο μέλος της $(12.4.5-1)$ είναι το ν - βαθμού πολυώνυμο του Taylor, που προσεγγίζει την f, ενώ οι αριθμοί $f(\xi)$, $f'(\xi)$, …, $f^{(\nu)}(\xi)$ είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου.

Όταν $\xi = 0$, ο τύπος $(12.4.5-1)$ γράφεται στην παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!}x + \frac{f''(0)}{2\,!}x^2 \\ &= + \ldots + \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu\,!}x^\nu \end{aligned} \tag{9.2.5 - 2}$$

που είναι γνωστός ως **τύπος του Maclaurin**, ενώ οι αριθμοί $f(0)$, $f'(0)$, …, $f^{(\nu)}(0)$ είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου.

Παράδειγμα 9.2.5 - 1

Με τον τύπο του Maclaurin να υπολογιστεί το πολυώνυμο ν - βαθμού που προσεγγίζει τη συνάρτηση $f(x) = e^{-ax}$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^{-ax} & f(0) = 1 \\ f'(x) = -a\,e^{-ax}\ f'(0) = -a & \\ f''(x) = a^2 e^{-ax} & f''(0) = a^2 \\ \vdots & \vdots \\ f^{(\nu)}(x) = (-1)^\nu a^\nu e^{-ax} & f^{(\nu)}(0) = (-1)^\nu a^\nu. \end{array}$$

Άρα

$$
\begin{aligned}
e^{-ax} &\approx 1 - ax + \frac{a^2}{2\,!}\,x^2 - \ldots + (-1)^\nu\,\frac{a^\nu}{\nu\,!}\,x^\nu \\
&= \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k\,\frac{a^k}{k\,!}\,x^k .
\end{aligned}
$$

■

Παράδειγμα 9.2.5 - 2

Όμοια με τον τύπο του Taylor για $\xi = 1$ το πολυώνυμο ν-βαθμού που προσεγγίζει τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$.

Λύση. Έχουμε

$f(x) = \ln x$ $\qquad$ $f(1) = 0$

$f'(x) = x^{-1}$ $\qquad$ $f'(1) = 1$

$\ldots$ $\qquad$ $\ldots$

$f^{(4)}(x) = -2 \cdot 3x^{-4} = -3\,!\,x^{-4}$ $\qquad$ $f^{(4)}(1) = -3\,!$

$\ldots$ $\qquad$ $\ldots$

$f^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu-1}\,(\nu-1)\,!\,x^{-\nu}$ $\qquad$ $f^{(\nu)}(1) = (-1)^{\nu-1}\,(\nu-1)\,!\,.$

Άρα

$$
\begin{aligned}
\ln x &\approx x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} - \ldots + (-1)^{\nu-1}\,\frac{(x-1)^\nu}{\nu} \\
&= \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^{k-1}\,\frac{(x-1)^k}{k} . \qquad (9.2.5 - 3)
\end{aligned}
$$

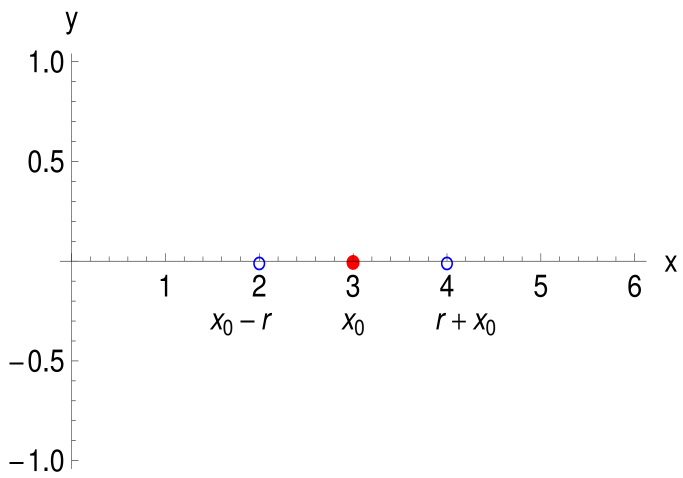
■

Θα πρέπει επίσης στο σημείο αυτό να γραφεί ότι το πολυώνυμο του Taylor αντίστοιχα του Maclaurin, όταν χρησιμοποιείται για την προσέγγιση μιας συνάρτησης, παρουσιάζει κυρίως τα παρακάτω μειονεκτήματα:

i) δεν έχει ακρίβεια που να αυξάνεται πάντοτε ανάλογα με τον βαθμό του πολυωνύμου,

ii) απαιτείται η γνώση του κέντρου ξ,

iii) απαιτείται ο υπολογισμός των παραγώγων, κάτι που όμως δεν είναι εύκολο να γίνεται πάντοτε.



Σχήμα 9.3.1 - 1: Περιοχή του σημείου $x_0 = 3$ με ακτίνα $r = 1$. Τότε $\varpi(3,1) = \varpi(3) = (2,4)$.

Άσκηση

Δείξτε τα αναπτύγματα του Πίνακα 9.2.5 - 1.

9.3 Ακρότατα και σχετικά θεωρήματα

9.3.1 Ακρότατα

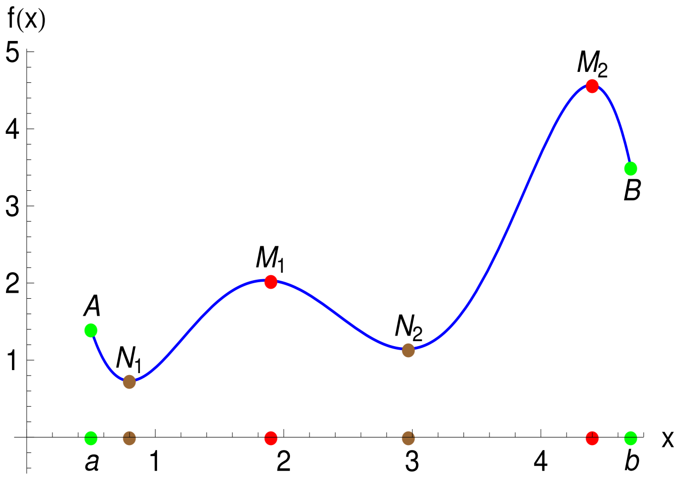
Ορισμός 9.3.1 - 1 (περιοχής). *Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $r > 0$. Τότε ορίζεται ως περιοχή του σημείου x_0 με ακτίνα r και συμβολίζεται με $\varpi(x_0, r)$ ή απλά $\varpi(x_0)$ το ανοικτό διάστημα $(x_0 - r, x_0 + r)$ (Σχ. 9.3.1 - 1).*

Ορισμός 9.3.1 - 2 (τοπικό ακρότατο). *Έστω μία συνάρτηση $f|D$ και σημείο $x_0 \in D$. Τότε θα λέγεται ότι η f παρουσιάζει στο x_0 ένα τοπικό μέγιστο, αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο τότε και μόνον, όταν υπάρχει $\varpi(x_0)$, έτσι ώστε $f(x) \leq f(x_0)$, αντίστοιχα $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in \varpi(x_0) \cap D$.*

Ορισμός 9.3.1 - 3 (ολικό ακρότατο). *Έστω μία συνάρτηση $f|D$ και σημείο $x_0 \in D$. Τότε θα λέγεται ότι η f παρουσιάζει στο x_0 ένα ολικό μέγιστο,*

Πίνακας 9.2.5 - 1: των κυριότερων αναπτυγμάτων κατά Maclaurin.

α/α	συνάρτηση	ανάπτυγμα
1	$\tan x$	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$
2	$\tanh x$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{17x^7}{315}+\ldots$
3	$\tanh x$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{17x^7}{315}+\ldots$
4	$\sin^{-1} x$	$x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\ldots$
5	$e^{\sin x}$	$1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^5}{15}+\ldots$
6	$e^{\cos x}$	$e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\frac{31x^6}{720}+\ldots\right)$
7	$e^x\sin x$	$x+x^2+\frac{2x^3}{3}-\frac{x^5}{30}-\frac{x^5}{90}+\ldots$
8	$e^x\cos x$	$1+x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}+\ldots$
9	$\sin x$	$\sum_{k=0}^{\nu}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,!}$
10	$\cos x$	$\sum_{k=0}^{\nu}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)\,!}$
11	$\ln(1+x)$	$\sum_{k=1}^{\nu}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$
12	a^x	$\sum_{k=0}^{\nu}\frac{(x\ln a)^k}{k\,!}$
13	$\sin^2 x$	$\sum_{k=1}^{\nu}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)\,!}x^{2k}$
14	$\cos^2 x$	$\sum_{k=1}^{\nu}(-1)^{k}\frac{2^{2k-1}}{(2k)\,!}x^{2k}$
15	$\tanh^{-1} x$	$\sum_{k=0}^{\nu}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$
16	$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{\nu}x^k$



Σχήμα 9.3.1 - 2: Τα σημεία N_2, B, αντίστοιχα τα A, M_1 είναι θέσεις τοπικού ελάχιστου, αντίστοιχα τοπικού μέγιστου, ενώ το σημείο N_1, αντίστοιχα το M_2 είναι θέση ολικού ελάχιστου, αντίστοιχα ολικού μέγιστου.

αντίστοιχα ολικό ελάχιστο τότε και μόνον, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ *αντίστοιχα* $f(x) \geq f(x_0)$ *για κάθε* $x \in D$.

Ορισμός 9.3.1 - 4 (θέση ακρότατου). *Ένα σημείο $x_0 \in D$ στο οποίο η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστη, αντίστοιχα ελάχιστη τιμή, θα λέγεται θέση ακρότατου (extremum) της f (Σχ. 9.3.1 - 2).*

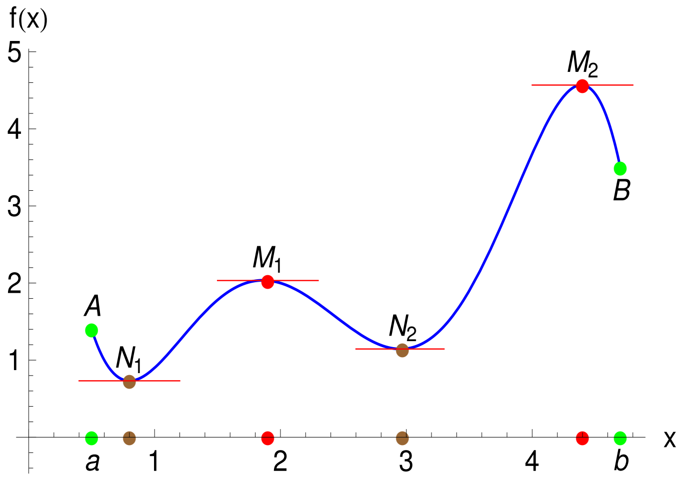
9.3.2 Σχετικά θεωρήματα

Θεώρημα 9.3.2 - 1 (Fermat). *Αν μία συνάρτηση $f|D$ με D ανοικτό διάστημα παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in D$ ένα τοπικό ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο) και επιπλέον υπάρχει η παράγωγος της f στο x_0, τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$.*

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει πάντοτε.

Παρατηρήσεις 9.3.2 - 1

i) Αν το σημείο x_0 είναι άκρο του διαστήματος D, τότε η παράγωγος $f'(x)$ δεν μηδενίζεται πάντοτε, όπως αυτό φαίνεται στη συνάρτηση $f(x)$ του Σχ. 9.3.2 - 1 με πεδίο ορισμού $[0.5, 4.7]$.



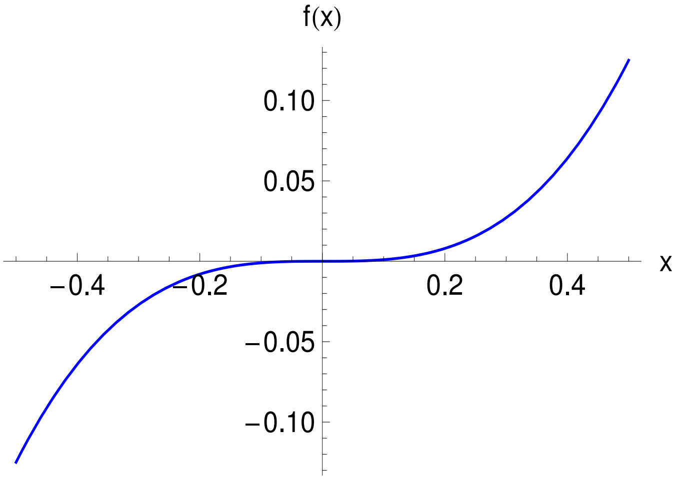
Σχήμα 9.3.2 - 1: Συνάρτηση $f(x) = -0.2614695(-4.964911+x)(9.648431-6.07417x + x^2)(0.6597672 - 1.46998x + x^2)$. Η $f'(x) = 0$ στα σημεία N_1, M_1, N_2, M_2, ενώ είναι $f'(a) = f'(0.5) = -5.11353$ και $f'(b) = f'(4.7) = -7.810628$, δηλαδή το Θεώρημα του Fermat δεν εφαρμόζεται.

ii) Αν η παράγωγος μιας συνάρτησης $f|D$ μηδενίζεται σε ένα εσωτερικό σημείο $x_0 \in D$, τότε δεν συνεπάγεται πάντοτε ότι το σημείο αυτό είναι θέση ακρότατου, όπως αυτό φαίνεται στη συνάρτηση $f(x) = x^3$, όπου $f'(x) = 3x^2$ και η οποία μηδενίζεται στο σημείο $x_0 = 0$, ενώ η f ανέρχεται στο σημείο αυτό, δηλαδή δεν παρουσιάζει ακρότατο (Σχ. 9.3.2 - 2).

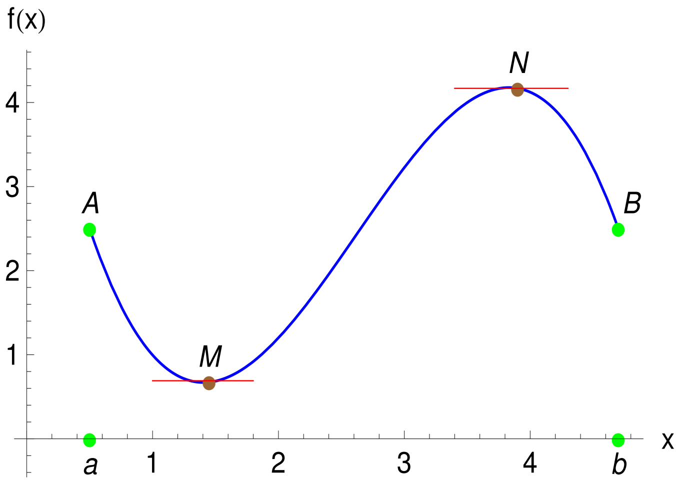
iii) Τα σημεία που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος λέγονται και **κρίσιμα σημεία** (critical points) της συνάρτησης.

Δίνονται τώρα χωρίς απόδειξη τα παρακάτω θεμελιώδη θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού:

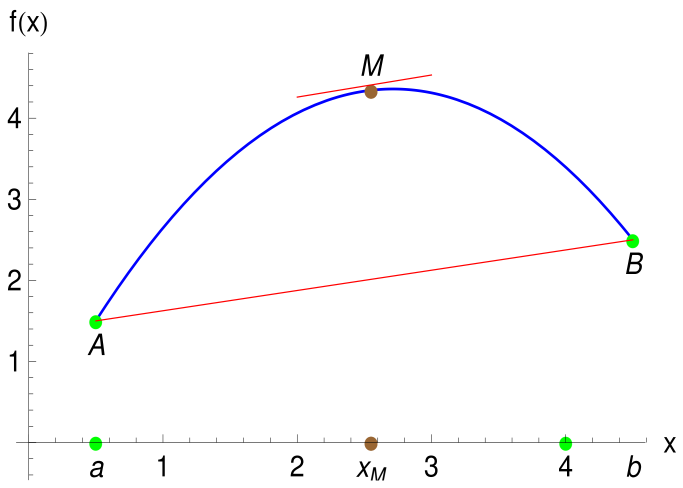
Θεώρημα 9.3.2 - 2 (Rolle). *Έστω ότι η συνάρτηση $f|[a,\beta\,]$ είναι συνεχής για κάθε $x \in [a,\,\beta\,]$ και επιπλέον ότι υπάρχει η $f'(x)$ ή απειρίζεται για κάθε $x \in (a,\beta)$. Αν $f(a) = f(\beta)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\xi \in (a,\beta)$, έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$. (Σχ. 9.3.2 - 3)*



Σχήμα 9.3.2 - 2: Συνάρτηση $f(x) = x^3$. Η $f'(x) = 3x^2$ μηδενίζεται στο σημείο $x_0 = 0$, αλλά η f δεν έχει ακρότατο στο x_0.



Σχήμα 9.3.2 - 3: Θεώρημα του Rolle. Συνάρτηση $f(x) = -0.4917695(-5.140385 + x)(2.201698 - 2.712335x + x^2)$. Η $f'(x) = 0$ στα σημεία $x_M = 1.45$ και $x_N = 4.7$.



Σχήμα 9.3.2 - 4: Θεώρημα της μέσης τιμής. Συνάρτηση $f(x) = -0.5833333(-5.448237 + x)(0.0196656 + x)$. Η εφαπτομένη στο σημείο M όπου $\xi = x_M = 2.55$ είναι παράλληλη της ευθείας AB.

Θεώρημα 9.3.2 - 3 (μέσης τιμής). *Έστω ότι η συνάρτηση $f\,|\,[a,\beta\,]$ είναι συνεχής για κάθε $x \in [a,\,\beta\,]$ και επιπλέον ότι για κάθε $x \in (a,\beta)$ υπάρχει η $f'(x)$ ή απειρίζεται. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\xi \in (a,\beta)$ (Σχ. 9.3.2 - 4), έτσι ώστε*

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}\,. \qquad (9.3.2 - 1)$$

9.4 Μελέτη συνάρτησης

Στην παράγραφο αυτή θα δοθούν οι κυριότεροι ορισμοί και θεωρήματα που εφαρμόζονται για τη μελέτη και τη γραφική παράσταση του διαγράμματος μιας συνάρτησης. Συνιστάται στον αναγνώστη εκτός από τη θεωρητική μελέτη, να κάνει και εφαρμογή των ασκήσεων που λύνονται στο μάθημα με μαθηματικά πακέτα, όπως είναι το MATHEMATICA, MATLAB κ.λπ.

9.4.1 Μονοτονία συνάρτησης

Αρχικά γίνεται υπενθύμιση του ορισμού της μονοτονίας μιας συνάρτησης, που δόθηκε στο Μάθημα *Πραγματικές Συναρτήσεις*. Το πεδίο ορισμού D των συναρτήσεων θα θεωρείται ότι είναι ένα ανοικτό διάστημα, εκτός και αν διαφορετικά ορίζεται.

Ορισμός 9.4.1 - 1 (μονοτονίας). *Έστω η συνάρτηση $f|D$ και $x_1, x_2 \in D$, όπου χωρίς να περιορίζεται η γενικότητα υποτίθεται ότι $x_1 < x_2$. Τότε αν:*

i) $f(x_1) \leq f(x_2)$ *η f θα λέγεται αύξουσα και θα συμβολίζεται με $\uparrow$.*

ii) $f(x_1) \geq f(x_2)$ *η f θα λέγεται φθίνουσα και θα συμβολίζεται με $\downarrow$. Και στις δύο περιπτώσεις η συνάρτηση θα λέγεται* **μονότονη**.

iii) $f(x_1) < f(x_2)$ *η f θα λέγεται γνήσια αύξουσα και θα συμβολίζεται με $\Uparrow$.*

iv) $f(x_1) > f(x_2)$ *η f θα λέγεται γνήσια φθίνουσα και θα συμβολίζεται με $\Downarrow$. Στις περιπτώσεις (iii) και (iv) η συνάρτηση θα λέγεται* **γνήσια μονότονη**.

Θεωρήματα σχετικά με τη μονοτονία

Θεώρημα 9.4.1 - 1. *Αν η συνάρτηση $f|D$ παραγωγίζεται για κάθε $x \in D$ και ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in D$, τότε η f έχει σταθερή τιμή στο D και αντίστροφα.*

Πόρισμα 9.4.1 - 1. *Έστω ότι οι συναρτήσεις $f, g\,|\,D$ είναι παραγωγίσιμες για κάθε $x \in D$. Τότε οι συναρτήσεις θα έχουν ίσες παραγώγους τότε και μόνον, όταν η διαφορά τους είναι μία σταθερή συνάρτηση στο D.*

Θεώρημα 9.4.1 - 2 (έλεγχος μονοτονίας). *Έστω ότι η συνάρτηση $f\,|\,D$ παραγωγίζεται για κάθε $x \in D$. Τότε*

i) αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in D$, η f είναι γνήσια αύξουσα,

ii) αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in D$, η f είναι αύξουσα, *iii) αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in D$, η f είναι γνήσια φθίνουσα,*

iv) αν $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in D$, η f είναι φθίνουσα.

Παράδειγμα 9.4.1 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^2(x-2) \quad \text{με} \quad f'(x) = x(3x-4).$$

Οι ρίζες της f είναι $x_1 = 0$ με πολλαπλότητα 2 και $x_2 = 2$ με πολλαπλότητα 1, ενώ τα κρίσιμα σημεία της f είναι $c_1 = 0$ και $c_2 = \frac{4}{3}$. Τα πρόσημα της πρώτης παραγώγου δίνονται στον Πίνακα 9.4.1 - 1, ενώ η γραφική παράσταση της $f(x)$ στο Σχ. 9.4.1 - 1, όπου προφανώς από τον τύπο της $f(x)$ προκύπτει ότι

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

9.4.2 Υπολογισμός ακρότατων

Δίνονται στη συνέχεια τα θεωρήματα σύμφωνα με τα οποία υπολογίζονται τα ακρότατα μιας συνάρτησης, όταν υπάρχουν.

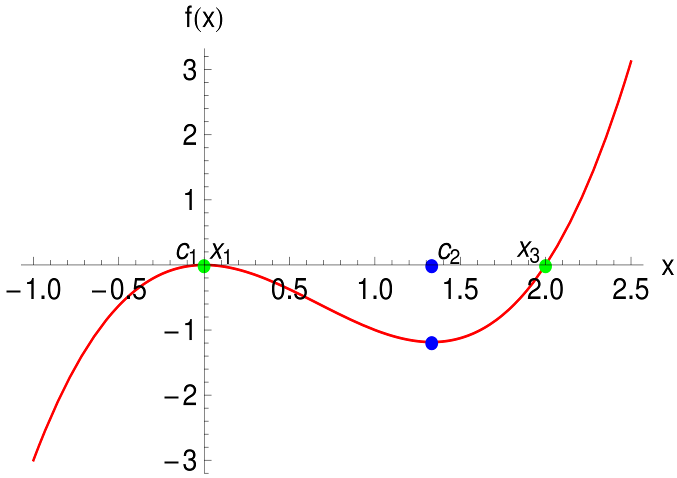
Θεώρημα 9.4.2 - 1. *Αν η συνάρτηση $f|(a,b)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη για κάθε $x \in (a,b)$, τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

i) η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in (a,b)$ ακρότατο,

ii) η παράγωγος της f παρουσιάζει στο σημείο x_0 αλλαγή προσήμου.

Παρατήρηση 9.4.2 - 1

Επειδή το πρόσημο της πρώτης παραγώγου συνδέεται με τη μονοτονία της συνάρτησης, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 9.4.2 - 1, όταν η συνάρτηση είναι αύξουσα αριστερά του σημείου x_0 και φθίνουσα δεξιά του, το σημείο x_0 θα είναι θέση μεγίστου, ενώ, όταν είναι φθίνουσα αριστερά του σημείου x_0 και αύξουσα δεξιά του, το x_0 θα είναι θέση ελαχίστου.



Σχήμα 9.4.1 - 1: Παράδειγμα 9.4.1 - 1.

Πίνακας 9.4.1 - 1

Συνάρτηση	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
f'		$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$		$+$	
f		$\nearrow$	$\circ$	$\searrow$		$\nearrow$	$\circ$	$\nearrow$	
ακρότατα			max		min				

Παράδειγμα 9.4.2 - 1

Έστω η συνάρτηση
$$f(x)=x^2(x-2)$$
του Παραδείγματος 9.4.1 - 1. Τότε σύμφωνα με την Παρατήρηση 9.4.2 - 1 και τον Πίνακα 9.4.1 - 1, η συνάρτηση πρέπει να παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x=0$, επειδή στο σημείο αυτό από αύξουσα γίνεται φθίνουσα και ελάχιστο στο $x=\frac{4}{3}$, επειδή από φθίνουσα γίνεται αύξουσα (Σχ. 9.4.1 - 1).

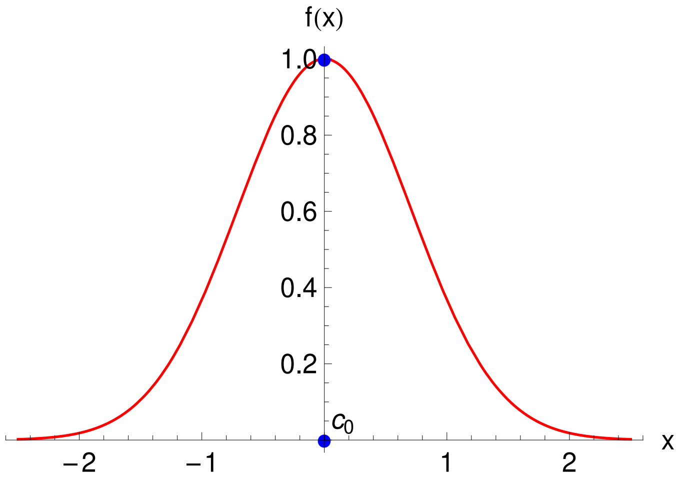
Θεώρημα 9.4.2 - 2. *Έστω η συνάρτηση $f|D$, τέτοια ώστε να υπάρχει η $f'(x)$ στο D και να είναι συνεχής, ενώ για ένα σημείο $x_0 \in D$ να ισχύει $f'(x_0)=0$ (κρίσιμο σημείο). Τότε, αν υπάρχει και η $f''(x)$ στο D και ισχύει $f''(x_0)<0$, αντίστοιχα $f''(x_0)>0$, η f παρουσιάζει στο x_0 μέγιστο, αντίστοιχα ελάχιστο.*

Παράδειγμα 9.4.2 - 2

Έστω η συνάρτηση
$$f(x)=e^{-x^2}.$$
Από τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης προφανώς προκύπτει ότι
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

Επίσης είναι
$$f'(x)=-2xe^{-x^2} \quad \text{με ρίζα (κρίσιμο σημείο)} \quad c_0=0.$$
Τότε, επειδή
$$f''(x)=-2\left(1-2x^2\right)e^{-x^2} \quad \text{και} \quad f''(c_0)=f''(0)=-2<0,$$
η f σύμφωνα με το Θεώρημα 9.4.2 - 2 θα παρουσιάζει στο σημείο $c_0=0$ μέγιστο (ολικό) με τιμή $f(c_0)=f(0)=1$ (Σχ. 9.4.2 - 1).

Πολλές φορές η ρίζα της 1ης παραγώγου είναι και ρίζα της 2ης παραγώγου κ.λπ. Στην περίπτωση αυτή ο έλεγχος της ύπαρξης ακρότατου γίνεται με το παρακάτω θεώρημα:



Σχήμα 9.4.2 - 1: Παράδειγμα 9.4.2 - 2: το διάγραμμα της συνάρτησης $f(x) = e^{-x^2}$.

Θεώρημα 9.4.2 - 3. *Έστω η συνάρτηση $f|D$ όπου D ανοικτό διάστημα, τέτοια ώστε να υπάρχουν οι παράγωγοι της f στο D μέχρι και τάξης $2\nu - 1$. Έστω επίσης ότι για κάποιο $x_0 \in D$ ισχύει ότι $f^{(k)}(x_0) = 0$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots, 2\nu - 1$. Αν η συνάρτηση $f^{(2\nu-1)}(x)$ είναι συνεχής στο D και υπάρχει η $f^{(2\nu)}(x)$ και είναι $f^{(2\nu)}(x_0) < 0$, αντίστοιχα $f^{(2\nu)}(x_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει στο σημείο x_0 μέγιστο, αντίστοιχα ελάχιστο.*

Παράδειγμα 9.4.2 - 3

Η συνάρτηση

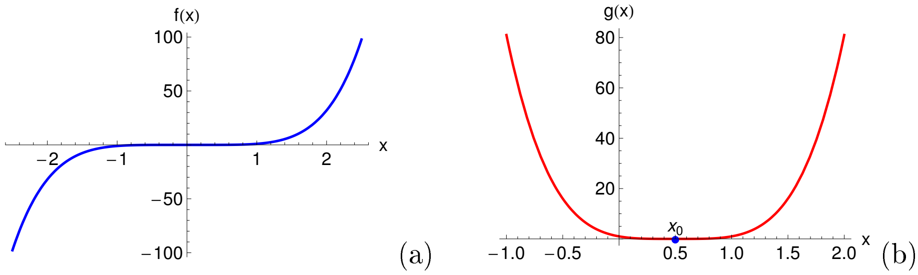
$$f(x) = x^5$$

δεν παρουσιάζει στο σημείο $x_0 = 0$ ακρότατο (Σχ. 9.4.2 - 2 a), επειδή $f^{(5)}(x_0) = 120$, δηλαδή η τάξη της μη μηδενικής τιμής της παραγώγου της f είναι 5 (περιττός αριθμός), οπότε δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα 9.4.2 - 3, ενώ η

$$g(x) = (2x-)^4$$

παρουσιάζει στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2}$ ακρότατο, επειδή είναι $g^{(4)}(x_0) = 384$, δηλαδή η τάξη της μη μηδενικής τιμής της παραγώγου είναι 4 (άρτιος αριθμός). Άρα το

Θεώρημα 9.4.2 - 3 εφαρμόζεται και, επειδή $g^{(4)}(x_0) = 384 > 0$, το ακρότατο είναι ελάχιστο (Σχ. 9.4.2 - 2 b).



Σχήμα 9.4.2 - 2: (α) Συνάρτηση $f(x) = x^5$ και (b) η $g(x) = (2x-1)^4$ με $x_0 = 0.5$.

9.4.3 Υπολογισμός σημείων καμπής, ασύμπτωτων ευθειών

Έστω τώρα ότι η συνάρτηση $f \,|\, D$ έχει 2ης τάξης παράγωγο στο D. Η μελέτη του προσήμου της f'' δίνει πρόσθετες πληροφορίες για τη γραφική παράσταση της f και συγκεκριμένα για την **καμπυλότητά** της (curvature ή concavity). Ειδικότερα τα σημεία στα οποία η 2η παράγωγος αλλάζει πρόσημο, ορίζουν τα λεγόμενα **σημεία καμπής** (inflection points) του διαγράμματος της f. Συγκεκριμένα στην περίπτωση αυτή ισχύουν:

i) Αν
$$f''(x) > 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in D, \tag{9.4.3 - 1}$$
σύμφωνα με το Θεώρημα 9.4.1 - 2, αν τεθεί $g(x) = f'(x)$ και $g'(x) = (f'(x))' = f''(x) > 0$, πρέπει η $g(x)$, δηλαδή η $f'(x)$ να είναι αύξουσα στο D και αντίστροφα. Τότε όμως, καθώς το x αυξάνει στο D, ο αντίστοιχος συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο σημείο $(x, f(x))$ θα αυξάνει επίσης. Αυτό έχει ως συνέπεια η γραφική παράσταση της f να βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη ευθεία ή όπως συνήθως λέγεται, η f στρέφει τα **κοίλα άνω** (concave upwards) στο D ή διαφορετικά ότι είναι **κυρτή**.

ii) Όμοια, αν
$$f''(x) < 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in D, \tag{9.4.3 - 2}$$

τότε η f στρέφει τα **κοίλα κάτω** (concave downwards) στο D ή διαφορετικά ότι είναι **κοίλη**.

Παρατηρήσεις 9.4.3 - 1

i) Προφανώς στα σημεία καμπής είναι $f''(x) = 0$, ενώ γενικά οι ρίζες της 2ης παραγώγου είναι πιθανά σημεία καμπής, δηλαδή υπάρχει περίπτωση οι ρίζες της 2ης παραγώγου να μην είναι σημεία καμπής.[21] Επομένως η συνθήκη $f''(x) = 0$ είναι *αναγκαία, αλλά όχι και ικανή*.

ii) Τα σημεία καμπής είναι επίσης δυνατόν να κατηγοριοποιηθούν από τον αντίστοιχο μηδενισμό ή μη της 1ης παραγώγου. Συγκεκριμένα, έστω ότι x_0 είναι ένα σημείο καμπής, οπότε $f''(x_0) = 0$. Τότε:

α. αν είναι επίσης $f'(x_0) = 0$, το x_0 λέγεται **σταθερό** (stationary) ή **σαγματικό** (saddle) **σημείο καμπής**, ενώ αν

β. $f'(x_0) \neq 0$, το σημείο x_0 λέγεται **μη σταθερό** (non-stationary) σημείο καμπής.

ii) Αν είναι $f''(x_0) = 0$, ενώ στο x_0 η f'' δεν αλλάζει πρόσημο, τότε το x_0 λέγεται **σημείο κυματισμού** (undulation ή hyperflex point) του διαγράμματος.[22]

Παράδειγμα 9.4.3 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^3\left(x^2 - 1\right)$$

με ρίζες

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0 \quad \text{με πολλαπλότητα} \quad 3 \quad \text{και} \quad x_3 = 1.$$

Η f είναι περιττή, οπότε το διάγραμμά της θα είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων O.

[21] Βλέπε Θεώρημα 9.4.2 - 3 και Παράδειγμα 9.4.2 - 3.

[22] Βλέπε σημείο $x_0 = 0.5$ στο Σχ. 9.4.2 - 2 b.

Η 1η παράγωγός της είναι

$$f'(x) = x^2\left(5x^2 - 3\right)$$

με ρίζες (κρίσιμα σημεία)

$$c_1 \approx -0.78, \quad c_2 = 0 \quad \text{με πολλαπλότητα} \quad 2 \quad \text{και} \quad c_3 \approx 0.78,$$

ενώ η 2η παράγωγός της

$$f''(x) = 2x\left(10x^2 - 3\right)$$

με ρίζες

$$d_1 \approx -0.6, \quad d_2 = 0 \quad \text{και} \quad d_3 \approx 0.6.$$

Τότε υπολογίζοντας τις τιμές της 2ης παραγώγου στα κρίσιμα σημεία, διαφορετικά εξετάζοντας τη μονοτονία της f, προκύπτει ότι:

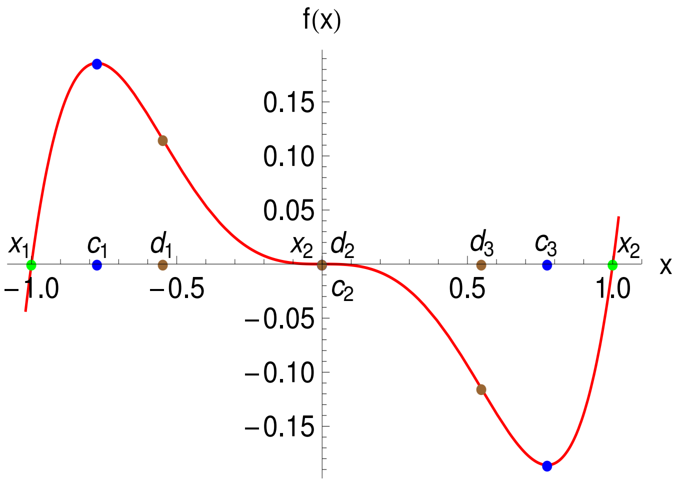
- η f παρουσιάζει στο σημείο $c_1 \approx -0.8$ μέγιστο, επειδή $f''(-0.8) < 0$, διαφορετικά επειδή η f από αύξουσα γίνεται φθίνουσα,
- στο $c_3 \approx 0.8$ ελάχιστο, επειδή $f''(0.8) > 0$, διαφορετικά επειδή η f από φθίνουσα γίνεται αύξουσα, ενώ
- για το σημείο 0 έχουμε $f''(0) = 0$, ενώ $f^{(3)}(0) = -24 < 0$ (περιττή τάξη), οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 9.4.2 - 3 δεν υπάρχει ακρότατο της f.

Από το πρόσημο της 2ης παραγώγου προκύπτει ότι το διάγραμμα της f έχει σημεία καμπής τα $d_1 \approx -0.6$, $d_2 = 0$ και $d_3 \approx 0.6$, επειδή η f'' αλλάζει πρόσημο στα σημεία αυτά και επιπλέον:

- στρέφει τα κοίλα κάτω στα διαστήματα $(-\infty, -0.6)$ και $(0, 0.6)$, επειδή στα αντίστοιχα διαστήματα είναι $f''(x) < 0$ (βλέπε σχέση 9.4.3 - 2), ενώ
- στα $(-0.6, 0)$ και $(0.6, \infty)$ προς τα άνω,, επειδή είναι $f''(x) > 0$ (Σχ. 9.4.3 - 1) και σχέση 9.4.3 - 1.
- Τέλος, επειδή το σημείο $d_2 = 0$ είναι ρίζα και της 1ης παραγώγου, σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 9.4.3 - 1 (iia) το σημείο αυτό θα είναι σταθερό ή σαγματικό σημείο καμπής.

Πίνακας 9.4.3 - 1: Παράδειγμα 9.4.3 - 1.

	$-\infty$	-1		-0.8		-0.6		0		0.6		0.8		1	$+\infty$
f'	+		+	○	-		-	○	-		-	○	+		+
f''	-		-		-	○	+	○	-	○	+		+		+
f	-	○	+		+		+	○	-		-		-	○	+
	↗		↗		↘		↘		↘		↘		↗		↗
				max								min			



Σχήμα 9.4.3 - 1: Παράδειγμα 9.4.3 - 1.

Ασύμπτωτες ευθείες

Δίνονται στη συνέχεια οι παρακάτω ορισμοί, που αφορούν τις λεγόμενες ασύμπτωτες (asymptotes) ευθείες του διαγράμματος μιας συνάρτησης:

Ορισμός 9.4.3 - 1 (οριζόντια ασύμπτωτη). *Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού της μορφής $(-\infty, \gamma)$, αντίστοιχα $(\gamma, +\infty)$. Τότε η ευθεία $y = ax + b$ θα λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη (horizontal asymptote) του διαγράμματος της f, όταν*

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0\,, \quad \textit{αντίστοιχα} \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Τότε από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{και} \quad b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] \tag{9.4.3 - 3}$$

Όμοια ορίζεται και η **πλάγια ασύμπτωτη** (oblique ή slant) ευθεία

$$y = ax + b, \quad \text{όταν} \quad a \neq 0,$$

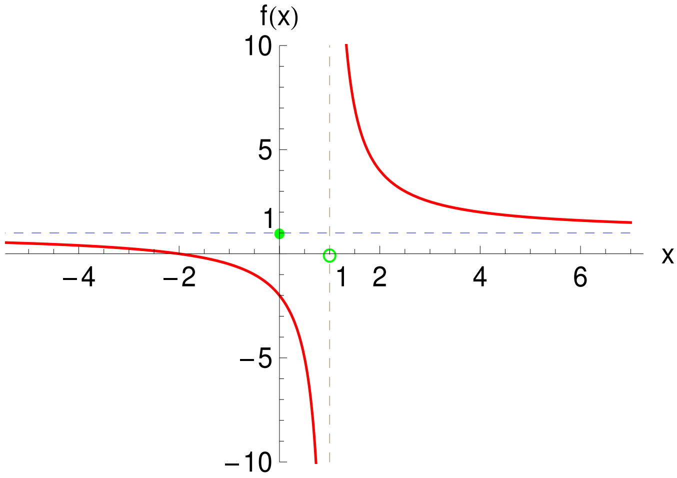
ενώ ισχύουν ανάλογοι τύποι υπολογισμού των a, b.

Ορισμός 9.4.3 - 2 (κατακόρυφη ασύμπτωτη ευθεία). *Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα τουλάχιστον ανοικτό διάστημα της μορφής (γ, δ). Τότε η ευθεία $x = \gamma$ αντίστοιχα $x = \delta$ θα λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη (vertical asymptote) του διαγράμματος της f, όταν*

$$\lim_{x \to \gamma+0} f(x) = +\infty \quad ή \quad \lim_{x \to \gamma+0} f(x) = -\infty, \tag{9.4.3 - 4}$$

αντίστοιχα

$$\lim_{x \to \delta+0} f(x) = +\infty \quad ή \quad \lim_{x \to \delta+0} f(x) = -\infty. \tag{9.4.3 - 5}$$



Σχήμα 9.4.3 - 2: Παράδειγμα 9.4.3 - 2: Συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$. Η διακεκομμένη καφέ $x = 1$ είναι η κάθετη και η διακεκομμένη μπλε $y = 1$ η οριζόντια ασύμπτωτη ευθεία.

Παράδειγμα 9.4.3 - 2

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

με πεδίο ορισμού $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Τότε η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f, επειδή

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) = +\infty,$$

ενώ

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1,$$

που σημαίνει ότι η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f (Σχ. 9.4.3 - 2).

Ασκήσεις

1. Να μελετηθούν και να παρασταθούν γραφικά οι παρακάτω συναρτήσεις $f(x)$:

$i)$	$3x^4+4x^3-36x^2$	$vii)$	$x-\dfrac{1}{x}$
$ii)$	$x^3-3x^2-144x+432$	$viii)$	$(1-x)\,e^{-x}$
$iii)$	$e^{-x}\sin x, \quad$ όταν $\quad x\in[0,2\pi]$	$ix)$	$x^2\ln x$
$iv)$	$\exp\left[-\dfrac{1}{x}\right]$	$x)$	$x\sqrt{1+x}$
$v)$	$\exp\left[-\dfrac{1}{x^2}\right]$	$xi)$	$\tan^{-1}\left(e^{-x}\right)$
$vi)$	$x-\ln(x-2)$	$xii)$	$\dfrac{\sin x}{x}$

2. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η αντίστροφη υπερβολική εφαπτομένη $\tanh^{-1} x$, όταν

$$\tanh^{-1} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\,.$$

3. Δύο αντίθετα ηλεκτρικά φορτία q_1 και q_2 είναι τοποθετημένα στα σημεία A και B αντίστοιχα, όπου $(AB)=d$ σταθερά. Στο σημείο M με $|AM|=x$ της ευθείας AB η ένταση E του ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{x^2}+\frac{q_2}{(d-x)^2}\right].$$

Να υπολογιστεί το σημείο εκείνο της ευθείας AB για το οποίο η ένταση E είναι ελάχιστη.

4. Το καλώδιο υποθαλάσσιου τηλέγραφου αποτελείται από δέσμη συρμάτων χαλκού με μονωτικό υλικό εξωτερικά (τομή κυκλική). Έστω x ο λόγος της ακτίνας της δέσμης προς το πάχος του μονωτικού. Τότε η ταχύτητα διάδοσης των σημάτων δίνεται από τη σχέση

$$v=-ax^2\,\ln x \quad \text{με} \quad a>0.$$

Να υπολογιστεί η τιμή του x, έτσι ώστε η ταχύτητα να είναι μέγιστη.

5. Η ισχύς P που παράγεται από ένα ηλεκτρικό στοιχείο σταθερής ηλεκτρεγερτικής δύναμης E και σταθερής εσωτερικής αντίστασης r, όταν διέρχεται ρεύμα διαμέσου σταθερής εξωτερικής αντίστασης R, είναι

$$P = \frac{E^2 R}{(r+R)^2}\,.$$

Να υπολογιστεί η τιμή του R, που καθιστά την ισχύ μέγιστη.

Απαντήσεις

1. (i) Ρίζες οι: 0 διπλή, 2 και 3. Κρίσιμα σημεία: 0 min, $\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)$ max και $\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{3}\right)$ min. Σημεία καμπής: $\frac{1}{2}\left(2 \pm \sqrt{2}\right)$.

(ii) Ρίζες οι: 3 διπλή και ± 12. Κρίσιμα σημεία: -6 max και 8 min. Σημείο καμπής: 1.

(iii) Ρίζες στο $[0, 2\pi]$ οι: 0, π, 2π. Είναι $f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$, οπότε τα κρίσιμα σημεία είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $\cos x - \sin x = 0$, δηλαδή τα: $\frac{\pi}{4}$ max και $\frac{5\pi}{4}$ min. Επίσης είναι: $f''(x) = -2e^{-x}\cos x$, οπότε τα σημεία καμπής προκύπτουν από την εξίσωση $\cos x = 0$, δηλαδή είναι τα σημεία: $\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{3\pi}{2}$.

(iv) Δεν υπάρχουν ρίζες. Είναι $f'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, ενώ $f''(x) = -\frac{e^{-\frac{1}{x}}\,(1+2x)}{x^4}$, οπότε σημείο καμπής είναι το: $\frac{1}{2}$. Οριζόντια ασύμπτωτη η $y = 1$ και κάθετη η $x = 0$.

(v) Όμοια δεν υπάρχουν ρίζες. Είναι $f'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$, οπότε η $f(x)$ γνήσια φθίνουσα για κάθε $x < 0$ και γνήσια αύξουσα για κάθε $x > 0$. Είναι $f''(x) = -2\,\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\,(-2+3x^2)}{x^6}$, οπότε τα σημεία καμπής είναι τα: $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Οριζόντια ασύμπτωτη η $y = 1$, ενώ είναι $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

(vi) Όμοια δεν υπάρχουν ρίζες. Είναι $f'(x) = \frac{x-3}{x-2}$ με κρίσιμο σημείο το 3 min. Επίσης είναι: $f''(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$, οπότε δεν υπάρχουν σημεία καμπής. Στα άκρα του πεδίου ορισμού ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

(vii) Ρίζες οι: ± 1. Είναι $f'(x) = \frac{1+x^2}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, οπότε η f είναι γνήσια αύξουσα. Επίσης είναι $f''(x) = -\frac{2}{x^3}$, οπότε δεν υπάρχουν σημεία καμπής. Στα άκρα του πεδίου ορισμού ισχύει ότι

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0-} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Κατακόρυφη ασύμπτωτη η ευθεία $x = 0$.

(viii) Ρίζα το 1. Είναι $f'(x) = e^{-x}(x-2)$, οπότε κρίσιμο σημείο είναι το 2 min. Επίσης είναι $f''(x) = e^{-x}(x-3)$ με σημείο καμπής το 3. Στα άκρα του πεδίου ορισμού ισχύει ότι

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$

(ix) Ρίζα το 1. Είναι $f'(x) = x(1 + 2\ln x)$, οπότε κρίσιμο σημείο είναι το: $e^{-1/2}$ min. Επίσης είναι $f''(x) = 3 + 2\ln x$ με σημείο καμπής το $e^{-3/2}$. Στα άκρα του πεδίου ορισμού ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

(x) Ρίζα το 0. Είναι $f'(x) = \frac{2+3x}{2\sqrt{1+x}}$, οπότε κρίσιμο σημείο είναι το: $-\frac{2}{3}$ min. Επίσης είναι $f''(x) = \frac{4+3x}{4(1+x)^{3/2}}$ με σημείο καμπής το $-\frac{4}{3}$. Στα άκρα του πεδίου ορισμού ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

(xi) Πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τιμών, επειδή $e^{-x} > 0$, το $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Είναι $f'(x) = -\frac{e^x}{1+e^{2x}} < 0$, οπότε η f είναι γνήσια φθίνουσα. Επίσης είναι $f''(x) = \frac{e^x\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$ με σημείο καμπής το 0. Στα άκρα του πεδίου ορισμού ισχύει ότι

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$

(xii) Συνάρτηση άρτια με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Στο σημείο $x = 0$ ισχύει (κανόνας de L'Hôspital): $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ max. Είναι

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \quad \text{και} \quad f''(x) = -\frac{2x\cos x - 2\sin x + x^2\sin x}{x^3},$$

που δεν λύνονται αλγεβρικά, οπότε δεν είναι δυνατόν να υπολογιστούν τα κρίσιμα σημεία και τα σημεία καμπής (ο υπολογισμός τους γίνεται μόνον προσεγγιστικά - βλέπε Μαθήματα *Εφαρμοσμένων Μαθηματικών* Κεφ. *Προσεγγιστική Λύση Εξισώσεων*).

2. Πεδίο ορισμού το $(-1, 1)$ και ρίζα το 0. Είναι $f'(x) = \frac{1}{1-x^2} > 0$, οπότε η f είναι γνήσια αύξουσα για κάθε $x \in (-1, 1)$. Επίσης είναι $f''(x) = \frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}$, οπότε σημείο καμπής είναι το 0. Στα άκρα του πεδίου ορισμού ισχύει ότι

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1-0} f(x) = +\infty.$$

3. Έστω $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, οπότε $E'(x) = 2k\,\frac{q_2}{(d-x)^3} - 2k\,\frac{q_1}{x^3}$. Υπενθυμίζεται ότι η εξίσωση $x^3 = a^3$ έχει μια μόνον πραγματική ρίζα την $x = a$. Επομένως, αν $E'(x) = 0$, τότε διαδοχικά έχουμε

$$\frac{x^3}{(d-x)^3} = \frac{q1}{q_2} \quad \text{ή} \quad \left(\frac{x}{d-x}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt[3]{q_1}}{\sqrt[3]{q_2}}\right)^3, \quad \text{οπότε κρίσιμο σημείο είναι το}$$

$$x_0 = \frac{d\,\sqrt[3]{q_1}}{\sqrt[3]{q_1} + \sqrt[3]{q_2}}.$$

Τότε είναι

$$E''(x_0) = 6k\,\frac{q_2}{(d-x)^4} + 6k\,\frac{q_1}{x^4}\bigg|_{x=x_0} = \frac{6k\left(\sqrt[3]{q_1} + \sqrt[3]{q_2}\right)^5}{d^4\,\sqrt[3]{q_1}\,\sqrt[3]{q_2}} > 0,$$

δηλαδή έχουμε ελάχιστο.

4. Έστω $v = v(x) = -ax^2\ln x$ με $a,\, x > 0$. Τότε $v'(x) = -ax\,(1 + 2\ln x)$, οπότε κρίσιμο σημείο το $x_0 = e^{-1/2}$. Τότε είναι

$$v''(x_0) = -a(3 + 2\ln x)\big|_{x=e^{-1/2}} = -2a < 0, \quad \text{δηλαδή έχουμε μέγιστο.}$$

5. Έστω $P = P(R) = \frac{E^2 R}{(r+R)^2}$, οπότε $P'(r) = \frac{E^2(r-R)}{(r+R)^3}$. Άρα το κρίσιμο σημείο είναι το $R_0 = r$. Τότε

$$P''(R) = \left.\frac{2E^2(R-2r)}{(r+R)^4}\right|_{R=r} = -\frac{E^2}{8r^3}\,, \quad \text{δηλαδή μέγιστο.}$$

9.5 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

[4] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Βιβλιογραφία για περαιτέρω μελέτη

Παπαδημητράκης, Μ. (2015). *Ανάλυση: Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής* *http://fourier.math.uoc.gr/ papadim/analysis_n.pdf*
Πανεπιστήμιο Κρήτης: Τμήμα Μαθηματικών.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://eclass.uoa.gr/courses/MATH130/ θέση Έγγραφα
- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/

- http://eom.springer.de/

Μάθημα 10

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

10.1 Εισαγωγικές έννοιες

Στο μάθημα αυτό θα δοθούν οι κυριότεροι κανόνες ολοκλήρωσης, που κύρια εμφανίζονται στις τεχνολογικές εφαρμογές. Διευκρινίζεται ότι ακολουθώντας μία αυστηρά μαθηματική σειρά το μάθημα αυτό κανονικά πρέπει να ακολουθεί αυτό του ορισμένου ολοκληρώματος, που δίνεται στο επόμενο κεφάλαιο.[1]

10.1.1 Παράγουσα συνάρτηση

Ορισμός 10.1.1 - 1 (αόριστο ολοκλήρωμα). *Έστω οι συναρτήσεις f και F με κοινό πεδίο ορισμού D, όπου $D \subseteq \mathbb{R}$. Τότε η F θα λέγεται ότι είναι μία παράγουσα (antiderivative) ή αρχική συνάρτηση (primitive integral) ή διαφορετικά ένα αόριστο ολοκλήρωμα (indefinite integral) της συνάρτησης f στο D και θα συμβολίζεται αυτό με*

$$\int f(x)dx = F(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in D \tag{10.1.1 - 1}$$

[1] Ο αναγνώστης για μια εκτενέστερη μελέτη των εννοιών και των κανόνων ολοκλήρωσης που θα δοθούν, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [2, 3], στο βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 7 και στη διεύθυνση *https://en.wikipedia.org/wiki/Antiderivative*

τότε και μόνον, όταν υπάρχει η παράγωγος της F στο D και ισχύει

$$F'(x) = f(x) \quad \textit{για κάθε} \quad x \in D. \tag{10.1.1 - 2}$$

Συνεπώς

$$\int f(x)dx = F(x) \quad \text{τότε και μόνον, όταν} \quad F'(x) = f(x) \tag{10.1.1 - 3}$$

για κάθε $x \in D$ και αντίστροφα.

Αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα 10.1.1 - 1. *Αν F και G είναι δύο παράγουσες της συνάρτησης f στο D, τότε αυτές θα διαφέρουν κατά μία σταθερά συνάρτηση.*

Σύμφωνα με το Θεώρημα 10.1.1 - 1 ο τύπος $(10.1.1 - 3)$ τελικά γράφεται

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad \text{για κάθε} \quad x \in D, \tag{10.1.1 - 4}$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά.

Στο παρακάτω παράδειγμα δίνονται τα αόριστα ολοκληρώματα ορισμένων συναρτήσεων, ενώ στον Πίνακα 10.1.1 - 1 των κυριότερων στοιχειωδών συναρτήσεων:

Παράδειγμα 10.1.1 - 1

- $$\int x^3\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{x^4}{4} + c\,, \quad \text{επειδή} \quad \left(\frac{x^4}{4} + c\right)' = x^3.$$

- $$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c\,, \quad \text{επειδή} \quad (\ln|x| + c)' = \frac{1}{x}\,, \quad \text{όταν} \quad x > 0.$$

- $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c\,, \quad \text{επειδή} \quad (\tan x + c)' = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

- $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c\,, \quad \text{επειδή} \quad \left(\tan^{-1} x + c\right)' = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Πίνακας 10.1.1 - 1: αόριστα ολοκληρώματα των κυριότερων στοιχειωδών συναρτήσεων.

α/α	$f(x)$	$F(x)$	α/α	$f(x)$	$F(x)$
1	$x^a;\ a \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$	7	e^x	e^x
2	$\sin x$	$-\cos x$	8	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
3	$\cos x$	$\sin x$	9	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
4	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x$	10	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\cot x$
5	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1} x$	11	$\cosh x$	$\sinh x$
6	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cos^{-1} x$	12	$\sinh x$	$\cosh x$

10.1.2 Ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος

Δίνονται στη συνέχεια με τη μορφή θεωρημάτων οι ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος.

Θεώρημα 10.1.2 - 1. *Αν f είναι μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο D και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε*

$$\int \lambda\, f(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx. \tag{10.1.2 - 1}$$

Θεώρημα 10.1.2 - 2. *Αν $f,\, g$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο D, τότε*

$$\int \left[f(x) + g(x)\right]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx. \tag{10.1.2 - 2}$$

Από τις (10.1.2 − 1) και (10.1.2 − 2) προκύπτει τότε η παρακάτω **γραμμική ιδιότητα**:

$$\int [kf(x) + \lambda g(x)]\, dx = k \int f(x)\, dx + \lambda \int g(x)\, dx, \qquad (10.1.2 - 3)$$

όταν $k,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Η γραμμική ιδιότητα γενικεύεται για ν το πλήθος συναρτήσεις.

Παράδειγμα 10.1.2 - 1

$$\begin{aligned}
\int \left(2x^2 + 5\sin x - e^x\right)\, dx &= 2\int x^2\, dx + 5\int \sin x\, dx - \int e^x\, dx \\
&= 2\,\frac{x^3}{3} + 5\left(-\cos x\right) - e^x + c \\
&= \frac{2\,x^3}{3} - 5\,\cos x - e^x + c.
\end{aligned}$$

Όμοια

$$\begin{aligned}
\int \left(2\tan x - \sqrt[3]{x} + \frac{4}{x}\right)\, dx &= 2\int \tan x\, dx + \int x^{1/3} dx + 4\int \frac{dx}{x} \\
&= 2\,\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + 4\ln|x| + c \\
&= \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{4}\, x^{\frac{4}{3}} + 4\ln|x| + c.
\end{aligned}$$

10.2 Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Δίνονται στη συνέχεια ορισμένες μέθοδοι ολοκλήρωσης, που απαιτούνται στη λύση των διαφόρων προβλημάτων, που κύρια εμφανίζονται στις διάφορες τεχνολογικές εφαρμογές. Στο εξής υποτίθεται ότι οι συναρτήσεις που εξετάζονται είναι ολοκληρώσιμες στο πεδίο ορισμού τους.

10.2.1 Ολοκλήρωση με δημιουργία του διαφορικού

Ο Πίνακας 10.1.1 - 1 των ολοκληρωμάτων της παραγράφου 10.1.2 δεν εφαρμόζεται, όταν η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι σύνθετη. Έχοντας υπόψη τον

Πίνακα των παραγώγων και τον αλυσιδωτό κανόνα παραγώγισης του Μαθήματος *Παράγωγος Συνάρτησης*, είναι δυνατόν να δημιουργήσουμε τον παρακάτω Πίνακα 10.2.1 - 1 με τα αόριστα ολοκληρώματα των κυριότερων σύνθετων συναρτήσεων.

Παράδειγμα 10.2.1 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \sqrt{2x-5}\, dx.$$

Λύση. Η ολοκληρωτέα συνάρτηση γράφεται $(2x-5)^{1/2} = f^{1/2}(x)$, όπου $f(x) = 2x-5$ και $f'(x) = 2$. Τότε εφαρμόζοντας τον τύπο 1 του Πίνακα 10.2.1 - 1 για $a = 1/2$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\int (2x-5)^{1/2}\, dx &= \frac{1}{2}\int \overbrace{(2x-5)'}^{f'(x)=2}(2x-5)^{1/2}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{(2x-5)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{3}(2x-5)^{3/2} + c.\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 10.2.1 - 2

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{5x+2}.$$

Λύση. Η ολοκληρωτέα συνάρτηση ανάγεται με κατάλληλο μετασχηματισμό στη μορφή $f'(x)/f(x)$, όπου $f(x) = 5x+2$ και $f'(x) = 5$ (δημιουργία σταθεράς). Τότε σύμφωνα με τον τύπο 3 του Πίνακα 10.2.1 - 1 έχουμε

$$\int \frac{dx}{3x+5} = \frac{1}{5}\int \frac{\overbrace{(5x+2)'}^{f'(x)=5}}{5x+2}\, dx = \frac{1}{5}\ln|5x+2| + c.$$

■

Πίνακας 10.2.1 - 1: αόριστα ολοκληρώματα των κυριότερων σύνθετων συναρτήσεων.

α / α	Συνάρτηση	Αόριστο ολοκλήρωμα
1	$f'(x)f^a(x);\;\; a \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\dfrac{f^{\,a+1}(x)}{a+1}$
2	$f'(x)e^{f(x)}$	$e^{f(x)}$
3	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert$
4	$f'(x)\sin f(x)$	$-\cos f(x)$
5	$f'(x)\cos f(x)$	$\sin f(x)$
6	$\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$	$\tan f(x)$
7	$-\dfrac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$	$\cot f(x)$
8	$\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$	$\tan^{-1} f(x)$
9	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$	$\sin^{-1} f(x)$
10	$-\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$	$\cos^{-1} f(x)$
11	$f'(x)\cosh f(x)$	$\sinh f(x)$
12	$f'(x)\sinh f(x)$	$\cosh f(x)$
13	$\dfrac{f'(x)}{\cosh^2 f(x)}$	$\tanh f(x)$
14	$-\dfrac{f'(x)}{\sinh^2 f(x)}$	$\coth f(x)$

Παράδειγμα 10.2.1 - 3

Όμοια το

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+4}.$$

Λύση. Όμοια η ολοκληρωτέα συνάρτηση, επειδή στον αριθμητή υπάρχει ήδη το x, ανάγεται στη μορφή $f'(x)/f(x)$, όπου $f(x) = x^2+4$ και $f'(x) = 2x$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο 3 του Πίνακα 10.2.1 - 1 έχουμε

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{\left(x^2+4\right)'}^{f'(x)=2x}}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)+c.$$

■

Παράδειγμα 10.2.1 - 4

Όμοια

$$\int \cos\omega x\,dx, \quad \text{όταν} \quad \omega > 0.$$

Λύση. Όμοια ανάγεται στη μορφή $f'(x)\cos\omega$, όπου $f(x) = \omega x$ και $f'(x) = \omega$ (δημιουργία σταθεράς). Τότε σύμφωνα με τον τύπο 5 του Πίνακα 10.2.1 - 1 έχουμε

$$\int \cos\omega x\,dx = \frac{1}{\omega}\int (\omega x)'\cos\omega x\,dx = \frac{1}{\omega}\sin\omega x + c.$$

■

Παράδειγμα 10.2.1 - 5

Όμοια είναι

$$\int \sin\omega x\,dx = \frac{1}{\omega}\int (\omega x)'\sin\omega x\,dx = -\frac{1}{\omega}\cos\omega x + c.$$

Παράδειγμα 10.2.1 - 6

Όμοια το

$$\int xe^{-x^2}\,dx.$$

Λύση. Η ολοκληρωτέα συνάρτηση γράφεται στη μορφή $f'(x)e^{f(x)}$, όπου $f(x) = -x^2$ και $f'(x) = -2x$, ενώ η $f'(x)$ είναι δυνατόν να δημιουργηθεί, επειδή ήδη υπάρχει το x. Άρα σύμφωνα με τον τύπο 2 του Πίνακα 10.2.1 - 1 έχουμε

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int(-2x)e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c.$$

■

Παρατήρηση 10.2.1 - 1

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος

$$\int e^{-x^2}dx$$

δεν γίνεται με τον παραπάνω τρόπο, επειδή απαιτεί τη δημιουργία της

$$f'(x) = -2x,$$

δηλαδή τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση με $-2x$, που σημαίνει ότι απαιτείται στην περίπτωση αυτή η δημιουργία μεταβλητής.

Παράδειγμα 10.2.1 - 7

Όμοια

$$\int \frac{dx}{9 + 4x^2}\,.$$

Λύση. Έχουμε ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης με σταθερά ως αριθμητή και συνάρτηση που είναι άθροισμα τετραγώνων στον παρονομαστή. Η περίπτωση αυτή ανάγεται στην

$$\frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}$$

με την παρακάτω διαδικασία: Αρχικά γράφεται ο παρονομαστής στη μορφή $1 + f^2(x)$ ως εξής:

$$9+4x^2 = 9\left(1 + \frac{4x^2}{9}\right) = 9\left[1 + \left(\frac{2x}{3}\right)^2\right] \quad \text{όπου } f(x) = \frac{2x}{3} \text{ και } f'(x) = \frac{2}{3}.$$

Άρα σύμφωνα με τον τύπο 8 του Πίνακα 10.2.1 - 1 είναι

$$\int \frac{dx}{9+3x^2} = \frac{1}{9}\,\frac{3}{2} \int \frac{\overbrace{\left(\frac{2x}{3}\right)'}^{f'(x)=2/3}\, dx}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2} = \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right) + c.$$

■

Παράδειγμα 10.2.1 - 8

Όμοια

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10}.$$

Λύση. Πρόκειται για ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης με σταθερά ως αριθμητή και τριώνυμο με ρίζες μιγαδικές στον παρονομαστή. Αρχικά μετασχηματίζεται ο παρονομαστής σε άθροισμα τετραγώνων σύμφωνα με τον τύπο

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}, \qquad (10.2.1 - 1)$$

δηλαδή

$$x^2+6x+10 = (x+3)^2+1,$$

οπότε σύμφωνα και με το Παράδειγμα 10.2.1 - 7 έχουμε

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+1} = \int \frac{\overbrace{(x+3)'}^{f'(x)=1}\, dx}{(x+3)^2+1} = \tan^{-1}(x+3)+c.$$

■

Παράδειγμα 10.2.1 - 9

Όμοια

$$\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+6x+10}.$$

Λύση. Πρόκειται για ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης με 1ου βαθμού πολυώνυμο στον αριθμητή και τριώνυμο με ρίζες μιγαδικές στον παρονομαστή. Αρχικά δημιουργείται στον αριθμητή η παράγωγος του παρονομαστή. Έχουμε

$$\left(x^2+6x+10\right)' = 2x+6,$$

οπότε ο αριθμητής γράφεται

$$2x + 1 = 2x + 6 - 5 = \left(x^2 + 6x + 10\right)' - 5.$$

Τότε σύμφωνα με τον τύπο 4 του Πίνακα 10.2.1 - 1 και το Παράδειγμα 10.2.1 - 8 είναι

$$\begin{aligned}
\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+6x+10} &= \int \frac{\left(x^2+6x+10\right)' - 5\,dx}{x^2+6x+10} \\
&= \int \frac{\left(x^2+6x+10\right)'\,dx}{x^2+6x+10} - 5\int \frac{dx}{x^2+6x+10} \\
&= \ln\left(x^2+6x+10\right) - 5\tan^{-1}(x+3) + c.
\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 10.2.1 - 10

Όμοια

$$\int \frac{(3x-2)\,dx}{x^2+6x+10}\,.$$

Λύση. Όμοια πρόκειται για ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης με 1ου βαθμού πολυώνυμο στον αριθμητή και τριώνυμο με ρίζες μιγαδικές στον παρονομαστή, οπότε σύμφωνα και με το Παράδειγμα 10.2.1 - 9, επειδή $\left(x^2+6x+10\right)' = 2x+6$, ο αριθμητής γράφεται

$$\begin{aligned}
3x - 2 &= 3\left(x - \frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2x}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(2x - \frac{4}{3}\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(2x + 6 - 6 - \frac{4}{3}\right) = \frac{3}{2}(2x+6) - 7.
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον τύπο 4 του Πίνακα 10.2.1 - 1 και το Παράδειγμα 10.2.1 - 9 είναι

$$\begin{aligned}
\int \frac{(3x-2)\,dx}{x^2+6x+10} &= \frac{3}{2}\int \frac{(2x+6)\,dx}{x^2+6x+10} - 11\int \frac{dx}{(x+3)^2+1} \\
&= \frac{3}{2}\ln\left(x^2+6x+10\right) - 11\tan^{-1}(x+1) + c.
\end{aligned}$$

■

Άσκηση

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$:

$i)$	$\dfrac{1}{\sqrt{5x+3}}$	$vii)$	$\dfrac{x}{2x+1}$
$ii)$	e^{-3x}	$viii)$	$\cosh 2x - 2\sinh 4x$
$iii)$	$\dfrac{x}{\sqrt{2+3x^2}}$	$ix)$	$\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$
$iv)$	$\dfrac{1}{\cos^2 2x}$	$x)$	$\dfrac{1}{x\ln^2 x}$
$v)$	$x\sin x^2$	$xi)$	$\dfrac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}$
$vi)$	$5^x \quad \left(a^x = e^{x\,\ln a}\right)$	$xii)$	$\tan 3x \quad \left(\tan 3x = \dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}\right).$

Απαντήσεις

i) $\frac{2}{5}\sqrt{3+5x}$, ii) $-\frac{1}{3}e^{-3x}$, iii) $\frac{\sqrt{2+3x^2}}{3}$, iv) $\frac{1}{2}\tan 2x$, v) $-\frac{1}{2}\cos x^2$, vi) $\frac{5^x}{\ln 5}$
vii) $\frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x+1-1}{2x+1} = \ldots$, οπότε $\frac{1+2x-\ln(1+2x)}{4}$, viii) $-\frac{1}{2}\cosh 4x + \frac{1}{2}\sinh 2x$,
ix) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)$, x) $-\frac{1}{\ln x}$, xi) $\frac{2}{3}\tan^{3/2} x$, xii) $-\frac{1}{3}\ln|\cos 3x|$.

10.2.2 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Πολλές φορές το πρόβλημα του υπολογισμού του αόριστου ολοκληρώματος μιας συνάρτησης $f(x)$ με πεδίο ορισμού, έστω D, απλουστεύεται, αν αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή x με μία νέα, έστω $u = u(x)$, που να είναι ορισμένη σε ένα κατάλληλο διάστημα D_1 της μεταβλητής u, έτσι ώστε το σύνολο των τιμών της συνάρτησης αυτής να είναι $u(D_1) = D$.

Στη μέθοδο αυτή, που είναι γνωστή ως **μέθοδος ολοκλήρωσης με αντικατάσταση** (integration by substitution), πρέπει να λαμβάνονται υπόψη τα εξής:

- Ο μετασχηματισμός πρέπει να αντιστρέφεται μονοσήμαντα, δηλαδή να λύνεται μονοσήμαντα ως προς x, και
- το ολοκλήρωμα που προκύπτει να είναι απλούστερο του αρχικού, δηλαδή να μην περιέχει ρίζες, αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις, κ.λπ.

Παράδειγμα 10.2.2 - 1

Έστω το ολοκλήρωμα

$$\int e^{-3x}\,dx.$$

Αν

$$u=-3x \quad \text{είναι} \quad x=-\frac{u}{3}, \quad \text{οπότε} \quad dx=d\left(-\frac{u}{3}\right)=\left(-\frac{u}{3}\right)'\,du=-\frac{1}{3}\,du,$$

τότε αντικαθιστώντας έχουμε

$$\begin{aligned}\int e^{-3x}\,dx &= \int e^{u}\,\overbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)du}^{dx}=-\frac{1}{3}\int e^{u}\,du\\ &= -\frac{1}{3}\,e^{u}+c=-\frac{1}{3}\,e^{-3x}+c.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 10.2.2 - 2

Όμοια το

$$\int e^{-x^2}\,dx.$$

Αν

$$u=-x^2 \quad \text{με} \quad u<0, \quad \text{τότε είναι} \quad x=\pm\sqrt{-u}.$$

Επομένως ο μετασχηματισμός δεν λύνεται μονοσήμαντα ως προς x και η μέθοδος δεν εφαρμόζεται.

Παράδειγμα 10.2.2 - 3

Όμοια το

$$I=\int \tan 5x\,dx.$$

Αν

$$u=5x \quad \text{είναι} \quad x=\frac{u}{5}, \quad \text{οπότε} \quad dx=d\left(\frac{u}{5}\right)=\left(\frac{u}{5}\right)'\,du=\frac{1}{5}\,du,$$

και αντικαθιστώντας έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int \tan 5x\,dx &= \int \tan u \overbrace{\left(\frac{1}{5}\right)du}^{dx} = \frac{1}{5}\int \tan u\,du \\
&= \frac{1}{5}\int \frac{\overbrace{\sin u\,du}^{(-\cos u)'du}}{\cos u} = -\frac{1}{5}\int \frac{(-\cos u)'du}{\cos u} \\
&= -\frac{1}{5}\ln|\cos u| + c = -\frac{1}{5}\ln|\cos 5x| + c.
\end{aligned}
$$

Άσκηση

Χρησιμοποιώντας κατάλληλη αντικατάσταση να υπολογιστούν τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα των συναρτήσεων $f(x)$:

$i)$ $\cos(\omega x + \phi)$ με $\omega > 0$ $\qquad iii)$ $\cot 2x$

$ii)$ $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$ $\qquad iv)$ $\dfrac{x}{\sqrt{1+4x^2}}$.

Απαντήσεις

i) Έστω $\omega x + \phi = u$, $\quad dx = \frac{du}{\omega}$ οπότε τελικά $I = \int \cos(\omega x + \phi)\,dx = \frac{\sin(\omega x+\phi)}{\omega}$

ii) Έστω $2x - 1 = u$, οπότε $I = \sqrt{2x-1}$, $\quad$ iii) $2x = u$, οπότε $I = \frac{1}{2}\ln|\sin 2x|$,

iv) $\frac{x}{\sqrt{1+4x^2}} = \frac{1}{2}\frac{(x^2)'}{\sqrt{1+4x^2}} = \ldots$, οπότε $I = \frac{1}{4}\sqrt{1+4x^2}$.

10.2.3 Παραγοντική ολοκλήρωση

Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g παραγωγίζονται στο $D \subseteq \mathbb{R}$ με D ανοικτό σύνολο. Εφαρμόζοντας τον κανόνα παραγώγισης γινομένου έχουμε

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης προκύπτει ότι

$$\int [f(x)g(x)]'\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + f(x)g'(x)\,dx$$

που σύμφωνα με τον Ορισμό 10.1.1 - 1 γράφεται

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx,$$

δηλαδή τελικά

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx. \qquad (10.2.3 - 1)$$

Η μέθοδος ολοκλήρωσης που προκύπτει από τον τύπο (10.2.3−1) είναι γνωστή ως η μέθοδος της **παραγοντικής** ή της **κατά μέρη ολοκλήρωσης** (integration by parts). Είναι προφανές ότι ο τύπος (10.2.3 − 1) εφαρμόζεται, όταν η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι ή είναι δυνατόν να θεωρηθεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων, αφού πρώτα μία από τις δύο συναρτήσεις γραφεί στη μορφή $g'(x)$, όπως αυτό περιγράφεται στα παρακάτω παραδείγματα όπου δίνονται οι περισσότερο χρησιμοποιούμενες περιπτώσεις εφαρμογής της παραγοντικής ολοκλήρωσης.

Γινόμενο πολυωνύμου με εκθετική συνάρτηση

Αρχικά δημιουργείται η παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης.

Παράδειγμα 10.2.3 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int x\,e^{-2x}\,dx.$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(10.2.3-1)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x}_{f(x)} \overbrace{e^{-2x}}^{g(x)}\,dx &= \int \underbrace{x}_{f(x)} \overbrace{\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)'}^{g'(x)}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}x\,e^{-2x} + \frac{1}{2}\int \underbrace{x'}_{f'(x)} \overbrace{e^{-2x}}^{g(x)}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}x\,e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) \\
&= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c.
\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 10.2.3 - 2

Όμοια το

$$\int x^2\,e^{-2x}\,dx.$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int x^2\,e^{-2x}\,dx &= -\frac{1}{2}\int x^2\left(e^{-2x}\right)'\,dx \\
&= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \frac{1}{2}\int \overbrace{\left(x^2\right)'}^{2x}\,e^{-2x}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \frac{1}{2}\cdot 2\int xe^{-2x} \\
&= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \int xe^{-2x}\,dx,
\end{aligned}$$

όταν σύμφωνα με το Παράδειγμα 10.2.3 - 1 είναι

$$\int x\, e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c.$$

Άρα

$$\int x^2 e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c.$$

■

Γινόμενο πολυωνύμου με τριγωνομετρική συνάρτηση

[2]Αρχικά δημιουργείται η παράγωγος της τριγωνομετρικής συνάρτησης.

Παράδειγμα 10.2.3 - 3

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int x^2\, \sin 3x\, dx.$$

[2]Ημιτόνου ή συνημιτόνου.

Λύση. Εφαρμόζοντας διαδοχικά λόγω του x^2 δύο φορές την παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin 3x \, dx &= \int x^2 \left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)' \, dx \\
&= -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{1}{3}\int (x^2)' \cos 2x \, dx \\
&= -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{3}\int x \cos 3x \, dx \quad \text{1η παραγοντική} \\
&= -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{3}\int x \left(\frac{\sin 3x}{3}\right)' \, dx \\
&= -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}x \sin 3x \, dx - \frac{1}{3}\int x' \sin 3x \, dx\right] \\
&= -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{9}x \sin 3x - \frac{2}{9}\int x' \sin 3x \, dx \\
&= -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{9}x \sin 3x - \frac{2}{9}\overbrace{\int \sin 3x \, dx}^{-\frac{\cos 3x}{3}} \\
&= -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{9}x \sin 3x + \frac{2}{27}\cos 3x + c.
\end{aligned}$$

■

Γινόμενο εκθετικής με τριγωνομετρική συνάρτηση

Δημιουργείται ανάλογα με την ευκολία που παρουσιάζεται η παράγωγος ή της τριγωνομετρικής ή της εκθετικής συνάρτησης και εφαρμόζεται δύο φορές ο τύπος (10.2.3−1). Στη 2η παραγοντική δημιουργείται πάντοτε η παράγωγος της ίδιας συνάρτησης με την 1η φορά.

Παράδειγμα 10.2.3 - 4

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int e^{-x} \sin 2x \, dx.$$

Λύση. Έστω ότι δημιουργείται η παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης. Τότε διαδοχικά έχουμε

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} = \int \underbrace{e^{-x}}_{f(x)} \overbrace{\sin 2x}^{g(x)}\, dx &= \int \overbrace{\left(-e^{-x}\right)'}^{f'(x)} \sin 2x\, dx \\
&= -e^{-x}\sin 2x + \int e^{-x} \overbrace{(\sin 2x)'}^{2\cos 2x}\, dx \\
&= -e^{-x}\sin 2x + 2\int e^{-x}\cos 2x\, dx \quad \text{1η παραγοντική} \\
&= -e^{-x}\sin 2x + 2\int \left(-e^{-x}\right)'\cos 2x\, dx \\
&= -e^{-x}\sin 2x + 2\left[-e^{-x}\cos 2x - \int e^{-x} \overbrace{(\cos 2x)'}^{-2\sin 2x}\, dx\right] \\
&= -e^{-x}\sin 2x - 2e^{-x}\cos 2x - 4\int e^{-x}\sin 2x\, dx \\
&= -e^{-x}\left(\sin 2x + 2\cos 2x\right) - 4\,\mathrm{I} \quad \text{2η παραγοντική.}
\end{aligned}
$$

Άρα

$$\mathrm{I} = -e^{-x}\left(\sin 2x + 2\cos 2x\right) - 4\,\mathrm{I},$$

οπότε λύνοντας ως προς I τελικά έχουμε

$$\int e^{-x}\sin 2x\, dx = -\frac{-e^{-x}\left(\sin 2x + 2\cos 2x\right)}{5} + c.$$

■

Ο υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος με το MATLAB γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 10.2.3 - 1 (αόριστου ολοκληρώματος)

```
>> syms x
>> int(exp(-x)*sin(2*x),x)
```

ενώ με το MATHEMATICA με την εντολή:

Πρόγραμμα 10.2.3 - 2 (αόριστου ολοκληρώματος)

```
Integrate[Exp[-x]Sin[2x],x]
```

Γινόμενο πολυωνύμου με λογαριθμική συνάρτηση

Αρχικά δημιουργείται η παράγωγος του πολυωνύμου.

Παράδειγμα 10.2.3 - 5

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int x^2 \ln x \, dx.$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x \, dx &= \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x \, dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^3 \overbrace{(\ln x)'}^{\frac{1}{x}} \, dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c. \end{aligned}$$

■

Γινόμενο πολυωνύμου με αντίστροφη τριγωνομετρική συνάρτηση

Αρχικά δημιουργείται η παράγωγος του πολυωνύμου.

Παράδειγμα 10.2.3 - 6

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \tan^{-1} 3x \, dx.$$

Λύση. Όμοια έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \tan^{-1} 3x\,dx &= \int x^0 \tan^{-1} 3x\,dx = \int \overbrace{x^1}^{f'(x)} \tan^{-1} 3x\,dx \\
&= x\tan^{-1} 3x - \int x\, \overbrace{\left(\tan^{-1} 3x\right)'}^{\frac{(3x)'}{1+(3x)^2}=\frac{3}{1+9x^2}}\,dx \\
&= x\tan^{-1} 3x - \int \frac{3x\,dx}{1+9x^2} \\
&= x\tan^{-1} 3x - \frac{1}{6}\int \frac{\left[9x^2+1\right]'\,dx}{1+9x^2} \\
&= x\tan^{-1} 3x - \frac{1}{6}\ln\left(1+9x^2\right) + c.
\end{aligned}$$

■

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$:

$i)$	$x^2 e^{-3x}$	$v)$	$\ln^2 x$
$ii)$	$x^2 \sin 2x$	$vi)$	$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$
$iii)$	$x\tan^{-1} x$	$vii)$	$\sin^{-1} 2x$
$iv)$	$e^{-2x}\sin 3x$	$viii)$	$x\cos^2 x$

2. Αν $a,\ \omega \neq 0$, δείξτε ότι

$$\int e^{ax}\sin\omega x\,dx = \frac{e^{ax}\left(a\sin\omega x - \omega\cos\omega x\right)}{a^2+\omega^2} + c.$$

Απαντήσεις

i) $-\frac{e^{-3x}}{27}\left(9x^2+6x+2\right)$, ii) $-\frac{1}{4}\left(2x^2-1\right)\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x$,
iii) $\frac{1}{2}\left(-x+\tan^{-1}x + x^2\tan^{-1}x\right)$, (iv) $-\frac{e^{-2x}}{13}\left(3\cos 3x + 2\sin 3x\right)$,
v) $x\left(2-2\ln x+\ln^2 x\right)$, vi) $-\sqrt{1+x^2} + x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$,
vii) $\frac{\sqrt{1-4x^2}}{2} + x\tan^{-1} 2x$, viii) αρχικά $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, οπότε $\frac{x^2}{4} + \frac{\cos 2x}{8} + \frac{x}{4}\sin 2x$.

10.2.4 Ολοκλήρωση με υποβιβασμό

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται κυρίως, όταν η ολοκληρωτέα συνάρτηση ή όρος αυτής είναι υψωμένη σε δύναμη και αποσκοπεί στην αναγωγή του υπολογισμού του αρχικού ολοκληρώματος σε υπολογισμό ολοκληρώματος με όρο υψωμένο σε βαθμό μικρότερο του αρχικού. Ο τύπος υπολογισμού που προκύπτει λέγεται τότε **αναγωγικός**.

Παράδειγμα 10.2.4 - 1

Έστω το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I}_\nu = \int x^\nu e^{-x}\, dx, \quad \text{όταν} \quad \nu = 1,\, 2,\, \ldots\, .$$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_\nu &= \int x^\nu e^{-x}\, dx = \int x^\nu \left(-e^{-x}\right)'\, dx \\
&= -x^\nu e^{-x} + \int (x^\nu)'\, e^{-x}\, dx \\
&= -x^\nu e^{-x} + \nu \int x^{\nu-1} e^{-x}\, dx.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\int x^\nu e^{-x}\, dx = -x^\nu e^{-x} + \nu \int x^{\nu-1} e^{-x}\, dx,$$

δηλαδή

$$\mathrm{I}_\nu = -x^\nu e^{-x} + \nu\, \mathrm{I}_{\nu-1}, \tag{10.2.4 - 1}$$

όταν $\nu = 1,\, 2,\, \ldots\, .$

Στον αναγωγικό τύπο $(10.2.4 - 1)$ το προς υπολογισμό ολοκλήρωμα I_ν υπολογίζεται συναρτήσει του όρου $-x^\nu e^{-x}$ και του ολοκληρώματος $I_{\nu-1} = \int x^{\nu-1} e^{-x} dx$, όπου ο όρος $x^{\nu-1}$ στην ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι κατά βαθμό μικρότερος του αρχικού όρου x^ν. Είναι προφανές ότι με διαδοχική εφαρμογή του τύπου υπολογίζεται τελικά το ολοκλήρωμα I_ν.

Εφαρμογή για $\nu = 3$

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_3 &= -x^3 e^{-x} + 3\mathrm{I}_2 \\
\mathrm{I}_2 &= -x^2 e^{-x} + 2\mathrm{I}_1 \\
\mathrm{I}_1 &= -x e^{-x} + \mathrm{I}_0 = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x\, e^{-x} - e^{-x},
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_3 &= \int x^3 e^{-x}\, dx = -x^3\, e^{-x} + 3\,\mathrm{I}_2 \\
&= -x^3\, e^{-x} + 3\left(-x^2\, e^{-x} + 2\,\mathrm{I}_1\right) \\
&= -x^3\, e^{-x} - 3\, x^2 e^{-x} + 6\,\mathrm{I}_1 \\
&= -x^3\, e^{-x} - 3\, x^2 e^{-x} + 6\left(-x\, e^{-x} - e^{-x}\right) \\
&= -\left(x^3 + 3x^2 + 6x + 6\right) e^{-x} + c.
\end{aligned}$$

Άσκηση

Αν $\nu = 2,\, 3,\, \ldots$, εκτός αν διαφορετικά ορίζεται, δείξτε τους παρακάτω αναγωγικούς τύπους

$$\begin{aligned}
\int \cos^{\nu} x\, dx &= \frac{\sin x\, \cos^{\nu-1} x}{\nu} + \frac{\nu - 1}{\nu} \int \cos^{\nu-2} x\, dx. \\
\int \ln^{\nu} x\, dx &= x\, \ln^{\nu} x - \nu \int \ln^{\nu-1} x\, dx, \quad \text{όταν} \quad \nu = 1,\, 2,\, \ldots\,. \\
\int x^{\nu}\, \sin \omega x\, dx &= -\frac{x^{\nu}\, \cos \omega x}{\omega} + \frac{\nu x^{\nu-1}\, \sin \omega x}{\omega^2} \\
&\quad -\frac{\nu(\nu-1)}{\omega^2} \int x^{\nu-2}\, \sin \omega x\, dx, \quad \text{όταν} \quad \omega \neq 0. \\
\int e^{x}\, \sin^{\nu} x\, dx &= \frac{e^{x}\, \sin^{\nu-1} x}{\nu^2 + 1} \left(\sin x - \nu\, \cos x\right) + \frac{\nu(\nu-1)}{\nu^2+1} \int e^{x}\, \sin^{\nu-2} x\, dx.
\end{aligned}$$

10.2.5 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Έστω ότι η ρητή συνάρτηση είναι της μορφής

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,, \tag{10.2.5 - 1}$$

όπου το πολυώνυμο $P(x)$ είναι βαθμού, έστω ν και το $Q(x)$ βαθμού m. Τότε διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις ολοκλήρωσης (partial function integration):

I. Ο βαθμός του αριθμητή να είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή

Υποθέτοντας ότι ο παρονομαστής $Q(x)$ έχει αναλυθεί σε γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων όρων,[3] η ρητή συνάρτηση $(10.2.5-1)$ είναι δυνατόν να αναλυθεί σε άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής:

i) ο παράγοντας με παρονομαστή $ax+b$ αναλύεται σε απλό κλάσμα της μορφής

$$\frac{A}{ax+b}\,, \tag{10.2.5 - 2}$$

ii) ο με παρονομαστή $(ax+b)^2$, αντίστοιχα $(ax+b)^3$, σε

$$\frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2}\,, \quad \text{αντίστοιχα} \tag{10.2.5 - 3}$$

$$\frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3}\,, \quad \text{κ.λπ.} \tag{10.2.5 - 4}$$

iii) ο με ax^2+bx+c σε

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,, \quad \text{κ.λπ.} \tag{10.2.5 - 5}$$

Η μέθοδος προσδιορισμού των συντελεστών A, B, C, ... που θα εξεταστεί στο μάθημα αυτό στηρίζεται στη σύγκριση των συντελεστών των ίσων δυνάμεων του x.

[3] Περιπτώσεις παραγόντων ανωτέρου βαθμού δεν θα εξεταστούν.

Ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία για τη γενική περίπτωση και τα σχετικά με αυτή θεωρήματα.

Παράδειγμα 10.2.5 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I} = \int \frac{x+2}{x^2+x-12}\,dx\,, \quad \text{όταν} \quad x \neq 3,\,-4.$$

Λύση. Σύμφωνα με την $(10.2.5-2)$ έχουμε

$$\frac{x+2}{x^2+x-12} = \frac{x+2}{(x-3)(x+4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4}\,. \tag{1}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (1) με τον παρονομαστή που αναλύεται, δηλαδή με $(x-3)(x+4)$, προκύπτει ότι

$$x+2 = A(x+4) + B(x-3). \tag{2}$$

Η (2) γράφεται

$$(A+B-1)x + 4A - 3B - 2 = 0$$

που για να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει

$$\begin{array}{rcrcl} A & + & B & = & 1 \\ 4A & - & 3B & = & 2, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad A = \frac{5}{7} \quad \text{και} \quad B = \frac{2}{7}\,.$$

Τελικά σύμφωνα και με την (1) έχουμε

$$\mathrm{I} = \frac{5}{7}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{2}{7}\int \frac{dx}{x+4} = \frac{5}{7}\ln|x-3| + \frac{2}{7}\ln|x+4| + c.$$

■

Παράδειγμα 10.2.5 - 2

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{(x+1)(x-1)^2}\,, \quad \text{όταν} \quad x \neq \pm 1.$$

Λύση. Σύμφωνα με τις $(10.2.5-2)$ - $(10.2.5-3)$ έχουμε

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}\,,$$

οπότε

$$1 = A(x-1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x+1). \tag{3}$$

Η (3) γράφεται

$$(A+B)x^2 + (-2A+C)x + (A-B+C-1) = 0$$

που για να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει

$$\begin{array}{rcrcrcl} A & + & B & & & = & 0 \\ -2A & & & + & C & = & 0 \\ A & - & B & + & C & = & 1, \end{array} \quad \text{οπότε } A = \frac{1}{4},\ B = -\frac{1}{4} \text{ και } C = \frac{1}{2}.$$

Τελικά

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\overbrace{\int (x-1)'(x-1)^{-2}\,dx}^{\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}} \\ &= \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + c. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 10.2.5 - 3

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I} = \int \frac{x\,dx}{(x-1)\left(x^2+4\right)}, \quad \text{όταν} \quad x \neq 1.$$

Λύση. Όμοια σύμφωνα με τις $(10.2.5-2)$ και $(10.2.5-5)$ έχουμε

$$\frac{x}{(x-1)\left(x^2+4\right)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4},$$

οπότε

$$x = A\left(x^2+4\right) + (Bx+C)(x-1). \tag{4}$$

Η (4) γράφεται

$$(A+B)x^2+(-B+C-1)x+(4A-C)=0$$

που για να ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, πρέπει

$$\begin{array}{rcrcrcl} A & + & B & & & = & 0 \\ & - & B & + & C & = & 1 \\ 4A & & & - & C & = & 0, \end{array} \quad \text{οπότε } A=-\frac{1}{5},\ B=\frac{1}{5} \text{ και } C=\frac{4}{5}. \tag{5}$$

Τελικά έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= -\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{5}\int\frac{x\,dx}{x^2+4}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^2+4} \\ &= -\frac{1}{5}\ln|x+1|+\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2, \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_1 &= \frac{1}{5}\int\frac{x\,dx}{x^2+4}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{\overbrace{\left(x^2+4\right)'}^{2x}\,dx}{x^2+4}=\frac{1}{10}\ln\left(x^2+4\right), \\ \mathrm{I}_2 &= \frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^2+4}=\frac{4}{5}\int\frac{dx}{4\left(\dfrac{x^2}{4}+1\right)}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{5}\cdot 2\int\frac{\left(\dfrac{x}{2}\right)'dx}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\frac{2}{5}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Άρα

$$\mathrm{I}=-\frac{1}{5}\ln|x+1|+\frac{1}{10}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{2}{5}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+c.$$

■

Ο υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος με το MATLAB γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 10.2.5 - 1 (αόριστου ολοκληρώματος)

```
>> syms x
>> int(x/((x-1)*(x^2+4)),x)
```

ενώ με το MATHEMATICA με την εντολή:

Πρόγραμμα 10.2.5 - 2 (αόριστου ολοκληρώματος)

```
Integrate[x/((x-1)*(x^2+4)),x]
```

II. Ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον βαθμό του παρονομαστή

Αρχικά στην $(10.2.5-1)$ γίνεται η διαίρεση των πολυωνύμων $P(x)$ και $Q(x)$, οπότε η περίπτωση αυτή ανάγεται τελικά στην περίπτωση I.

Παράδειγμα 10.2.5 - 4

Έστω το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x^3-1}{x^2-4}\,dx\,, \quad \text{όταν} \quad x \neq \pm 2.$$

Από τη διαίρεση του αριθμητή και του παρονομαστή και μετά την ανάλυση σε απλά κλάσματα έχουμε

$$\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{4x-1}{x^2-4} = x + \frac{7}{4}\,\frac{1}{x-2} + \frac{9}{4}\,\frac{1}{x+2}\,,$$

οπότε

$$\int \frac{x^3-1}{x^2-4}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{7}{4}\ln|x-2| + + \frac{9}{4}\ln|x+2| + c.$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα των παρακάτω ρητών συναρτήσεων $f(x)$:

$i)\quad \dfrac{x-1}{(x+1)(x-2)}$ $\qquad iv)\quad \dfrac{x^4}{x^2+2x+2}$

$ii)\quad \dfrac{1}{x\,(x^2+5)}$ $\qquad v)\quad \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$

$iii)\quad \dfrac{1}{(x-1)(x+2)^2}$ $\qquad vi)\quad \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,.$

Απαντήσεις

i) $\frac{2}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{3}\ln|x-2|$, ii) $\frac{1}{5}\ln|x|-\frac{1}{10}\ln\left(5+x^2\right)$,
iii) $\frac{1}{9}\left(-\frac{6}{x+2}+\ln|x-1|-\ln|x+2|\right)$, iv) $2x-x^2+\frac{x^3}{3}-4\tan^{-1}(x+1)$,
v) αν $\sqrt{x}=u$, τελικά $2\sqrt{x}-2\tan^{-1}\sqrt{x}$, vi) όμοια αν $e^{-x}=u$, τότε $x-\ln\left(1+e^{x}\right)$.

10.2.6 Ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Εξετάζονται μόνον οι μορφές:

$$\int \sin mx\,\cos nx\,dx,\qquad \int \sin mx\,\sin nx\,dx\qquad \text{και}\qquad \int \cos mx\,\cos nx\,dx$$

Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούνται οι παρακάτω τύποι της Τριγωνομετρίας:

$$\begin{aligned} 2\,\sin A\,\cos B &= \sin(A+B)+\sin(A-B), && (10.2.6\text{ - }1)\\ 2\,\sin A\,\sin B &= \cos(A-B)-\cos(A+B), && (10.2.6\text{ - }2)\\ 2\,\cos A\,\cos B &= \cos(A-B)+\cos(A+B). && (10.2.6\text{ - }3)\end{aligned}$$

Επίσης ισχύουν

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\quad \text{και}\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\,. \qquad (10.2.6\text{ - }4)$$

Παράδειγμα 10.2.6 - 1

Σύμφωνα με τον τύπο $(10.2.6-2)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int \sin x \sin 3x \, dx &= \frac{1}{2}\int [\cos(x-3x)-\cos(x+3x)]\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 4x)\ dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) \\ &= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + c.\end{aligned}$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$:

$i)$ $\sin^2 2x\ \cos 3x$ $\qquad$ $iii)$ $\sin 10x\ \sin 8x$

$ii)$ $\cos x\ \cos^2 4x$ $\qquad$ $iv)$ $\sin^3 x.$

Απαντήσεις

i) Αρχικά $\sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2}$, οπότε τελικά $-\frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{28}\sin 7x$,
ii) όμοια $\cos^2 4x = \frac{1+\cos 8x}{2}$, οπότε $\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{28}\sin 7x + \frac{1}{36}\sin 9x$,
iii) $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{36}\sin 18x$, iv) $\sin^3 x = \sin x\,\frac{1-\cos 2x}{2}$, οπότε τελικά $-\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x$.

10.2.7 Προσεγγιστικός υπολογισμός ολοκληρώματος

Στα περισσότερα προβλήματα των εφαρμογών το ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται με κανέναν μετασχηματισμό ή άλλη τροποποίηση της ολοκληρωτέας συνάρτησης. Η γενική αντιμετώπιση του προβλήματος, μέρος του οποίου θα μελετηθεί σε προσεχές εξάμηνο, είναι αντικείμενο μελέτης των Μαθηματικών και ο αναγνώστης παραπέμπεται για περαιτέρω μελέτη στη βιβλιογραφία. Στο μάθημα αυτό θα γίνει η προσέγγιση του ολοκληρώματος με αντικατάσταση της ολοκληρωτέας συνάρτησης ή όρου αυτής με το αντίστοιχο πολυώνυμο του Taylor ή του Maclaurin.

Παράδειγμα 10.2.7 - 1

Έστω το ολοκλήρωμα

$$\int e^{-x^2}\,dx.$$

Σύμφωνα με τον τύπο του Maclaurin το πολυώνυμο 4ου βαθμού που προσεγγίζει την ολοκληρωτέα συνάρτηση e^{-x^2} είναι

$$e^{-x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\,.$$

Επομένως

$$\int e^{-x^2}\,dx \approx \int \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\right)\,dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + c.$$

Παράδειγμα 10.2.7 - 2

Όμοια έστω το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\ln x}{x-1}\,dx, \quad \text{όταν} \quad x > 1.$$

Σύμφωνα με τον τύπο του Taylor με κέντρο, έστω $\xi = e$, το πολυώνυμο 1ου βαθμού που προσεγγίζει την ολοκληρωτέα συνάρτηση $\ln x$ είναι

$$\ln x \approx 1 + \frac{x-e}{e}\,.$$

Επομένως

$$\int \frac{\ln x}{x-1}\,dx \approx \int \frac{1}{x-1}\left(1 + \frac{x-e}{e}\right)\,dx = \frac{x}{e} + \frac{\ln(x-1)}{e} + c.$$

Άσκηση

Χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο του Maclaurin 5ου, αντίστοιχα 4ου βαθμού να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx\,, \quad \text{αντίστοιχα} \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx.$$

Απαντήσεις

Είναι $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, $\quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{24}$ κ.λπ.

10.3 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά.* Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[2] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

[3] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά.* Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Βιβλιογραφία για περαιτέρω μελέτη

Παπαδημητράκης, Μ. (2015). *Ανάλυση: Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής* *http://fourier.math.uoc.gr/ papadim/analysis_n.pdf*
Πανεπιστήμιο Κρήτης: Τμήμα Μαθηματικών.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://eclass.uoa.gr/courses/MATH141/ θέση Έγγραφα
- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 11

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

11.1 Εισαγωγικές έννοιες

Στο μάθημα αυτό θα δοθούν περιληπτικά οι σημαντικότερες έννοιες που αναφέρονται στο ορισμένο ολοκλήρωμα.[1]

Η αρχική μορφή της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος ως προσέγγιση του εμβαδού ενός γεωμετρικού σχήματος συναντάται το πρώτον στην αρχαιότητα κατά τον 3ον π.Χ. αιώνα με τον Αρχιμήδη, ο οποίος χρησιμοποίησε προσεγγιστικές μεθόδους για να υπολογίσει το εμβαδόν του κύκλου, της έλικας, κ.λπ. Στα μέσα του 19ου αιώνα γίνεται από τον Riemann μια προσπάθεια ορισμού της έννοιας με καθαρά μαθηματικούς όρους. Ο ορισμός αυτός γενικεύτηκε στη συνέχεια από μία σειρά άλλων επιστημόνων, η σημαντικότερη όμως γενίκευση της έννοιας έγινε από τον Lebesgue στις αρχές του 20ου αιώνα.

Το ορισμένο ολοκλήρωμα εκτός από τον υπολογισμό εμβαδών χρησιμοποιείται και σε μία σειρά άλλων εφαρμογών που καλύπτουν το σύνολο των θετικών επιστημών, μέρος των οποίων θα δοθούν στο μάθημα που ακολουθεί.

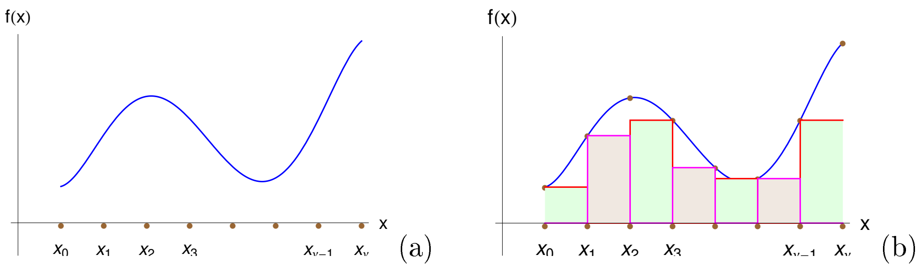
[1] Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [2, 3, 4] και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 8.

11.1.1 Ορισμός ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$, που υποτίθεται ότι είναι συνεχής για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα ότι ισχύει $f(x) > 0$. Αν το $[\alpha, \beta]$ υποδιαιρεθεί σε ν το πλήθος υποδιαστήματα από τα σημεία

$$\delta = \{\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta\}, \qquad (11.1.1 - 1)$$

τότε η υποδιαίρεση αυτή θα λέγεται στο εξής **διαμέριση** και θα συμβολίζεται με δ, ενώ τα x_0, x_1, ..., x_ν σημεία της διαμέρισης. Το πλάτος Δx_i των υποδιαστημάτων είναι τότε $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, όταν $i = 1, 2, \ldots, \nu$ (Σχ. 11.1.1 - 1a).



Σχήμα 11.1.1 - 1: (a) Το διάγραμμα της $f(x)$ και η διαμέριση δ του $[\alpha, \beta]$. (b) Άθροισμα $K(\delta, f)$.

Επειδή η συνάρτηση f έχει υποτεθεί συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, θα πρέπει να είναι συνεχής και σε κάθε υποδιάστημα της παραπάνω διαμέρισης. Σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής συνεχών συναρτήσεων[2] θα πρέπει να υπάρχει ένα σημείο σ_i, αντίστοιχα s_i, που η $f(x) \,|\, [x_{i-1}, x_i]$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$ να λαμβάνει μια ελάχιστη, αντίστοιχα μια μέγιστη τιμή σε αυτό. Τότε σύμφωνα με τα παραπάνω είναι δυνατόν να οριστούν:

i) το **κάτω άθροισμα** (Σχ. 11.1.1 - 1b)

$$K(\delta, f) = \sigma_1 \Delta x_1 + \sigma_2 \Delta x_2 + \ldots + \sigma_\nu \Delta x_\nu, \qquad (11.1.1 - 2)$$

ii) το **άνω άθροισμα** (Σχ. 11.1.1 - 2a)

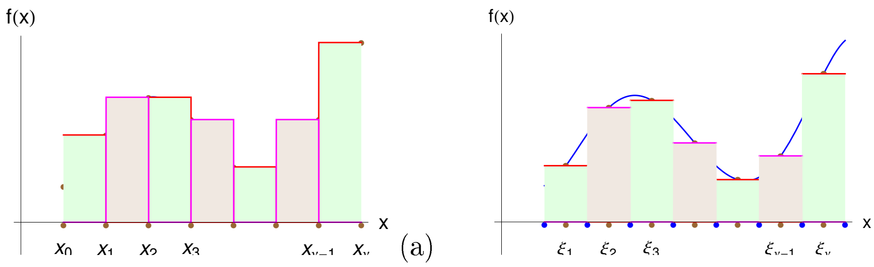
$$A(\delta, f) = s_1 \Delta x_1 + s_2 \Delta x_2 + \ldots + s_\nu \Delta x_\nu, \qquad (11.1.1 - 3)$$

[2] Βλέπε Μάθημα *Συνέχεια Συνάρτησης* - Θεώρημα 8.1.3 - 6.

iii) το **ενδιάμεσο άθροισμα** (Σχ. 11.1.1 - 2b)

$$E(\delta, f, \xi) \;=\; f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_\nu)\,\Delta x_\nu, \qquad (11.1.1 - 4)$$

όταν $\xi_i;\ i = 1,\, 2,\, \ldots,\, \nu$ είναι μία επιλογή ενδιάμεσων σημείων, δηλαδή $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i;\ i = 1,\, 2,\, \ldots,\, \nu$.



Σχήμα 11.1.1 - 2: (a) Άθροισμα $A(\delta, f)$ και (b) $E(\delta, f, \xi)$.

Είναι προφανές ότι σε κάθε διαμέριση του $[\alpha, \beta]$ αντιστοιχούν και διαφορετικά αθροίσματα των μορφών $(11.1.1-3)$ - $(11.1.1-4)$. Στην περίπτωση όμως που το πλάτος της διαμέρισης τείνει στο μηδέν, οι τιμές των παραπάνω αθροισμάτων τελικά συγκλίνουν. Συγκεκριμένα στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι ισχύει το παρακάτω θεμελιώδες θεώρημα:

Θεώρημα 11.1.1 - 1 (ορισμένου ολοκληρώματος). *Έστω $f\ |[\alpha, \beta]$ μία συνάρτηση συνεχής για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Τότε, όταν το πλάτος $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ όπου $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, \nu$, της διαμέρισης δ του $[\alpha, \beta]$ τείνει στο μηδέν, τα παραπάνω αθροίσματα $(11.1.1-3)$ - $(11.1.1-4)$ συγκλίνουν προς έναν μονοσήμαντα ορισμένο πραγματικό αριθμό, έστω $I(f)$, που είναι ανεξάρτητος από τη διαμέριση δ και την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ.*

Ορισμός 11.1.1 - 1 (ορισμένου ολοκληρώματος). *Ο πραγματικός αριθμός $I(f)$, στον οποίο σύμφωνα με το Θεώρημα 11.1.1 - 1 συγκλίνουν τα αθροίσματα $(11.1.1-3)$ - $(11.1.1-4)$, ορίζεται ως το ορισμένο ολοκλήρωμα[3] (definite*

[3] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Integral*

integral) ή ολοκλήρωμα του Riemann της f στο $[\alpha, \beta]$ και συμβολίζεται με

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = I(f). \qquad (11.1.1 - 5)$$

Τα σημεία α και β λέγονται τότε κάτω και άνω αντίστοιχα άκρα ολοκλήρωσης ή γενικά άκρα ολοκλήρωσης, ενώ το $[\alpha, \beta]$ διάστημα ολοκλήρωσης.

Παρατηρήσεις 11.1.1 - 1

I. Ειδικά ορίζεται ότι

$$\int_{a}^{a} f(x)\, dx = 0,$$

ενώ προφανώς ισχύει

$$\int_{a}^{\beta} f(x)\, dx = -\int_{\beta}^{a} f(x)\, dx.$$

II. Στην περίπτωση που το ένα άκρο ολοκλήρωσης, έστω το β, μεταβάλλεται, δηλαδή $\beta = x$, τότε με τον τύπο $(11.1.1 - 5)$ ορίζεται η συνάρτηση

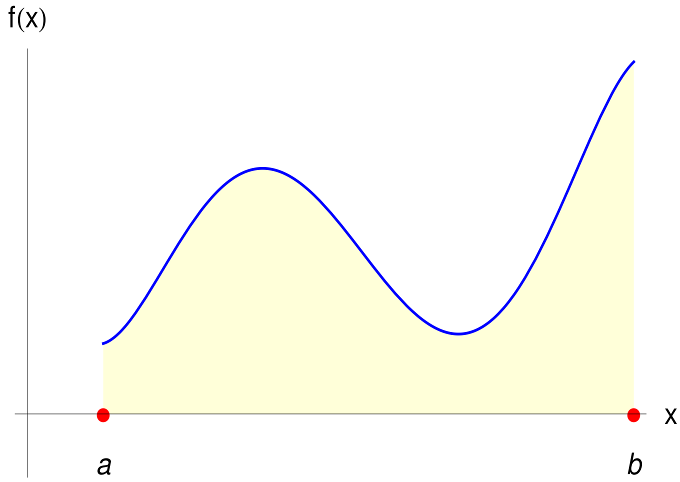
$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\, dt \qquad (11.1.1 - 6)$$

με πεδίο ορισμού, έστω D, όπου $D \subseteq [\alpha, \beta]$.

Σημείωση 11.1.1 - 1

Η μεταβλητή της ολοκλήρωσης και η μεταβλητή του άκρου ολοκλήρωσης δεν θα πρέπει να συμβολίζονται με το ίδιο γράμμα.

III. **Γεωμετρική ερμηνεία**: ο αριθμός $I(f)$, όταν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, παριστάνει το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τραπεζίου (Σχ. 11.1.1 - 3), που ορίζεται από τον άξονα των x, το διάγραμμα της συνάρτησης $y = f(x)$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.



Σχήμα 11.1.1 - 3: γεωμετρική ερμηνεία ορισμένου ολοκληρώματος.

11.1.2 Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

Δίνονται στη συνέχεια με τη μορφή θεωρημάτων χωρίς απόδειξη οι κυριότερες ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

Θεώρημα 11.1.2 - 1. *Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta\,]$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

Θεώρημα 11.1.2 - 2. *Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha,\beta\,]$, τότε*

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(x)+g(x)]\;dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx.$$

Από τα Θεωρήματα 11.1.2 - 1 - 11.1.2 - 2 προκύπτει ότι:

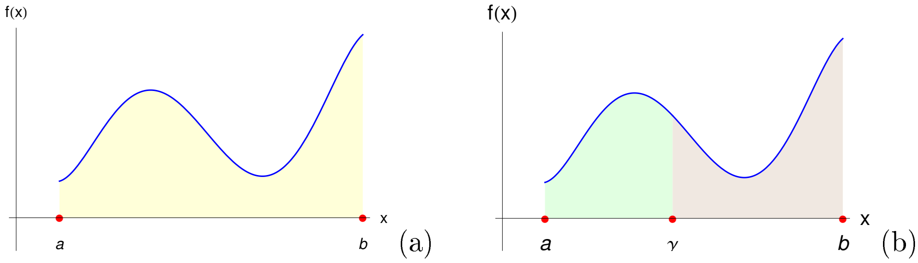
Πόρισμα 11.1.2 - 1 (γραμμική ιδιότητα). *Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha, \beta]$ και k, $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε*

$$\int_{\alpha}^{\beta} [kf(x) + \lambda g(x)]\, dx = k \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx + \lambda \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, dx.$$

Η γραμμική ιδιότητα γενικεύεται για ν το πλήθος συναρτήσεις.

Θεώρημα 11.1.2 - 3. *Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$. Τότε, αν γ (Σχ. 11.1.2 - 1) είναι ένα σημείο με $\alpha < \gamma < \beta$, ισχύει ότι*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\, dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\, dx.$$



Σχήμα 11.1.2 - 1: η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος 11.1.2 - 3.

Θεώρημα 11.1.2 - 4. *Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \geq 0.$$

Αν επιπλέον για ένα σημείο $\xi \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(\xi) > 0$, είναι[4]

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx > 0.$$

[4] Μια προφανής γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος προκύπτει από το (Σχ. 11.1.2 - 1a).

11.1.3 Θεωρήματα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Δίνονται στη συνέχεια χωρίς απόδειξη τα παρακάτω δύο βασικά θεωρήματα του Ολοκληρωτικού Λογισμού:

Θεώρημα 11.1.3 - 1. *Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha, \beta\,]$ και $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta\,]$, τότε*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \;\geq\; \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, dx$$

Θεώρημα 11.1.3 - 2 (μέσης τιμής). *Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha, \beta\,]$ και $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta\,]$, τότε*

$$m \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, dx \;\leq\; \int_{\alpha}^{\beta} f(x) g(x)\, dx \;\leq\; M \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, dx, \qquad (11.1.3 - 1)$$

όπου $m = \min_{x \in [\alpha, \beta\,]} f(x)$ και $M = \max_{x \in [\alpha, \beta\,]} f(x)$. Ειδικά, όταν $g(x) = 1$, είναι

$$m\,(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \;\leq\; M\,(\beta - \alpha). \qquad (11.1.3 - 2)$$

Οι ανισότητες (11.1.3−1) και (11.1.3−2) είναι δυνατόν να αντικατασταθούν από τις παρακάτω ισοδύναμες ισότητες:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) g(x)\, dx = f(\xi) \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, dx, \qquad (11.1.3 - 3)$$

αντίστοιχα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = f(\xi)(\beta - \alpha), \qquad (11.1.3 - 4)$$

όταν $\xi \in (\alpha, \beta)$.

11.2 Υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος

11.2.1 Θεώρημα υπολογισμού

Έχοντας υπόψη και τη σχέση (11.1.1−6) αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 11.2.1 - 1 (θεμελιώδες Απειροστικού Λογισμού). *Αν $f|[\alpha,\beta]$ είναι μια συνάρτηση συνεχής για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε η*

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$$

είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$F'(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in [\alpha,\beta]. \tag{11.2.1 - 1}$$

Το θεώρημα αυτό συνδέει την έννοια της παραγώγου και του ορισμένου ολοκληρώματος της $f(x)$.

11.2.2 Τύπος υπολογισμού ορισμένου ολοκληρώματος

Σύμφωνα με το Θεώρημα 11.2.1 - 1 αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα 11.2.2 - 1. *Αν $f|[\alpha,\beta]$ είναι μια συνάρτηση συνεχής για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και $F(x)$ ένα αόριστο ολοκλήρωμά της, τότε*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = F(x)\Big|_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha). \tag{11.2.2 - 1}$$

Το θεώρημα αυτό θα χρησιμοποιείται στο εξής για τον υπολογισμό των ορισμένων ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα 11.2.2 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα (Σχ. 11.2.2 - 1a)

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx.$$

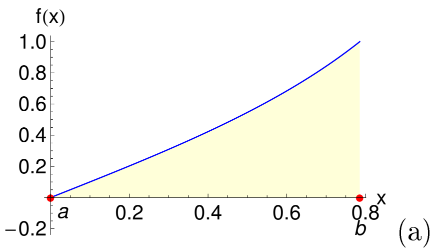
Λύση. Είναι

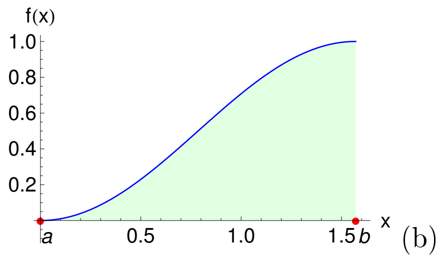
$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{(-\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c,$$

οπότε από τον τύπο (11.2.2 − 1) έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \tan x \, dx &= -\ln|\cos x| \Big|_0^{\pi/4} = -\left[\ln|\cos\frac{\pi}{4}| - \ln|\cos 0|\right] \\ &= -\left[\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1\right] = -\left(\ln 2^{-1/2} - 0\right) = -\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln 2. \end{aligned}$$

■





Σχήμα 11.2.2 - 1: Ολοκλήρωμα: (a) $\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$ και (b) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$.

Παράδειγμα 11.2.2 - 2

Όμοια το ολοκλήρωμα (Σχ. 11.2.2 - 1b)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx.$$

Λύση. Ισχύει ότι

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}\,,$$

οπότε

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int (2x)' \cos 2x \, dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + c. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx &= \left.\frac{x}{2}\right|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \frac{1}{4}\left(\overbrace{\sin 2\,\frac{\pi}{2}}^{0} - \overbrace{\sin 0}^{0}\right) = \frac{\pi}{4}\,. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 11.2.2 - 3

Όμοια το ολοκλήρωμα (Σχ. 11.2.2 - 2a)

$$\int_{-1}^{1} e^{-3x} \, dx.$$

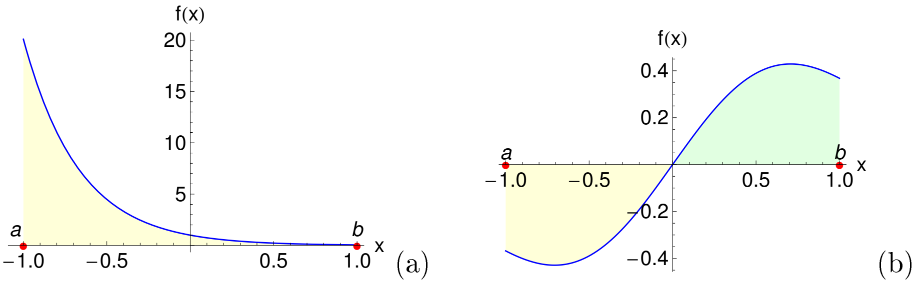
Λύση. Είναι

$$\int e^{-3x} \, dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} + c,$$

οπότε[5]

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} e^{-3x}\,dx &= -\frac{1}{3}\,e^{-3x}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{3}\left(e^{-3} - e^{-(-3)}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(e^{3} - e^{-3}\right) = \frac{2}{3}\sinh 3.\end{aligned}$$

■



Σχήμα 11.2.2 - 2: Ολοκλήρωμα: (a) $\int_{-1}^{1} e^{-3x}\,dx$ και (b) $\int_{-1}^{1} x\,e^{-x^2}\,dx$.

Παράδειγμα 11.2.2 - 4

Όμοια το ολοκλήρωμα (Σχ. 11.2.2 - 2b)

$$\int_{-1}^{1} x\,e^{-x^2}\,dx.$$

Λύση. Είναι

$$\int x\,e^{-x^2}\,dx = \int \frac{\left(-x^2\right)'}{-2}\,e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\,e^{-x^2} + c,$$

οπότε

$$\int_{-1}^{1} x\,e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\,e^{-x^2}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{2}\left(e^{-1^2} - e^{-(-1)^2}\right) = 0.$$

■

[5] Ισχύει ότι : $\sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$.

Παρατήρηση 11.2.2 - 1

Στο Παράδειγμα 11.2.2 - 4 η ολοκληρωτέα συνάρτηση $x\,e^{-x^2}$ είναι περιττή. Γενικότερα αποδεικνύεται στις περιπτώσεις αυτές ότι:

Πρόταση 11.2.2 - 1. *Αν η* **περιττή** *συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-a, a]$, τότε*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0. \tag{11.2.2 - 2}$$

Παράδειγμα 11.2.2 - 5

Όμοια το ολοκλήρωμα (Σχ. 11.2.2 - 3a)

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+4x^2}\,.$$

Λύση. Είναι

$$\int \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x)'}{1+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x) + c.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+4x^2} &= \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x)\Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2}\tan^{-1}2 - \frac{1}{2}\overbrace{\underbrace{\tan^{-1}}_{\text{συνάρτηση περιττή}}(-2)}^{-\tan^{-1}2} \\ &= \tan^{-1}2.\end{aligned}$$

■

Παρατήρηση 11.2.2 - 2

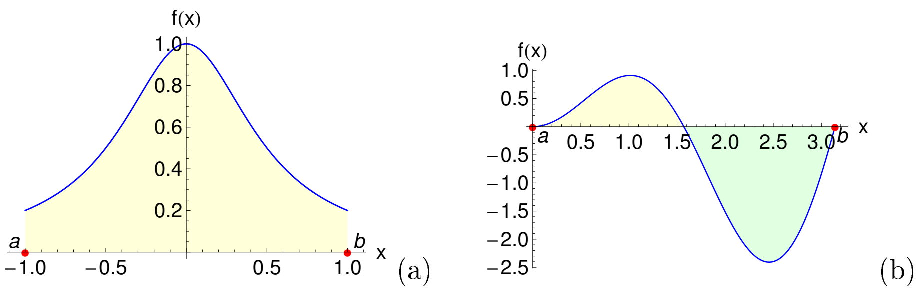
Στο Παράδειγμα 11.2.2 - 6 η ολοκληρωτέα συνάρτηση

$$\frac{1}{1+4x^2}$$

είναι άρτια. Γενικότερα αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 11.2.2 - 2. *Αν η* **άρτια** *συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-a, a]$, τότε*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx. \qquad (11.2.2 - 3)$$



Σχήμα 11.2.2 - 3: Ολοκλήρωμα: (a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+4x^2}$ και (b) $\int_{0}^{\pi} x \sin 2x\, dx$.

Παράδειγμα 11.2.2 - 6

Όμοια το ολοκλήρωμα (Σχ. 11.2.2 - 3b)

$$\int_{0}^{\pi} x \sin 2x\, dx.$$

Λύση. Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\int x \sin 2x\, dx = \int x \left(\frac{-\cos 2x}{-2}\right)' dx = \cdots = -\frac{1}{2}\, x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\,\sin 2x\,dx &= -\frac{1}{2}\,x\,\cos 2x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4}\,\sin 2x\Big|_0^{\pi}\\ &= -\frac{1}{2}\left(\pi\,\overbrace{\cos 2\pi}^{1} - 0\right) + \frac{1}{4}\left(\overbrace{\sin 2\pi}^{0} - \overbrace{\sin 0}^{0}\right) = -\frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

■

Παρατήρηση 11.2.2 - 3

Γενικά ισχύει

$$\cos(n\pi) = (-1)^n \quad \text{και} \quad \sin(n\pi) = 0 \qquad (11.2.2\text{ - }4)$$

για κάθε $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$.

Παράδειγμα 11.2.2 - 7

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi} e^{-x}\,\sin 5x\,dx.$$

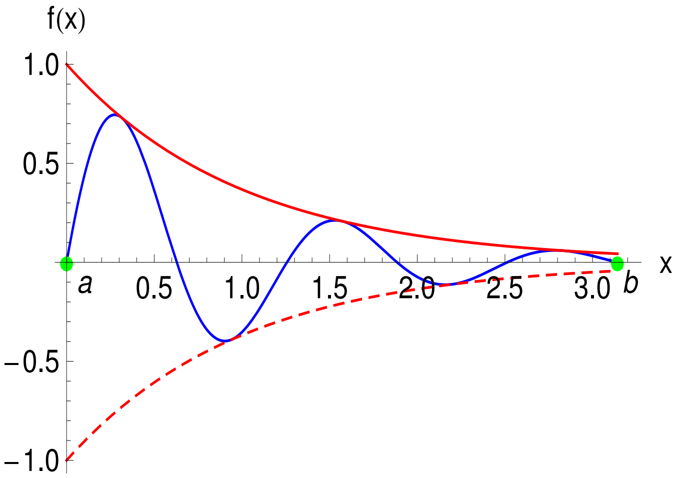
Λύση. Η γραφική παράσταση της ολοκληρωτέας συνάρτησης $e^{-x}\sin 5x$ (Σχ. 11.2.2 - 4), που χαρακτηρίζεται ως **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση**, προκύπτει από τις γραφικές παραστάσεις των:

- $\sin 5x$ ελεύθερη αρμονική ταλάντωση (Σχ. 11.2.2 - 5a), και
- e^{-x} απόσβεση (Σχ. 11.2.2 - 5b).

Εφαρμόζοντας 2 φορές την παραγοντική ολοκλήρωση[6] έχουμε

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\sin 5x\,dx &= \int \left(-e^{-x}\right)'\sin 5x\,dx = \cdots\\ &= -\frac{e^{-x}}{26}\left(5\cos 5x + \sin 5x\right) + c.\end{aligned}$$

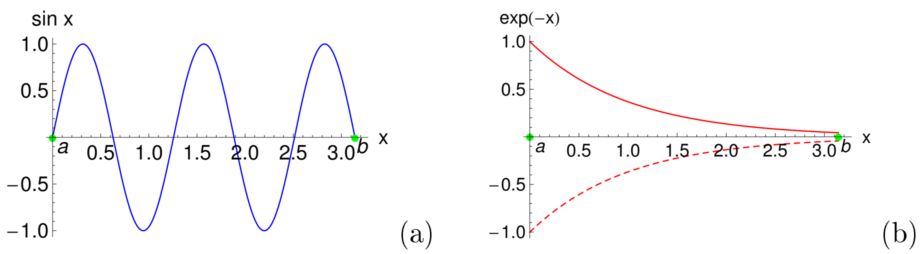
[6] Βλέπε Μάθημα *Αόριστο Ολοκλήρωμα - Παραγοντική ολοκλήρωση*.



Σχήμα 11.2.2 - 4: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $e^{-x}\sin 5x$ (**ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση**), όταν $x \in [0, \pi]$.

Άρα

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^{-x}\sin 5x\,dx &= -\frac{e^{-x}}{26}\left(5\cos 5x+\sin 5x\right)\Big|_0^{\pi}\\ &= -\frac{e^{-\pi}}{26}\left(5\overbrace{\cos 5\pi}^{-1}+\overbrace{\sin 5\pi}^{0}\right)\\ &\quad -\left[-\frac{e^{0}}{26}\left(5\overbrace{\cos 5\cdot 0}^{1}+\overbrace{\sin 5\cdot 0}^{0}\right)\right]\\ &= \frac{5}{26}\left(1+e^{-\pi}\right).\end{aligned}$$



Σχήμα 11.2.2 - 5: $x \in [0, \pi]$: (a) η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\sin 5x$ (**ελεύθερη αρμονική ταλάντωση**) και (b) της e^{-x} συνεχής και $-e^{-x}$ διακεκομμένη καμπύλη (**απόσβεση**).

Ο υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος με το MATLAB γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 11.2.2 - 1 (αόριστου ολοκληρώματος)

```
>> syms x
>> int(exp(-x)*sin(5*x),x,0,pi)
```

ενώ με το MATHEMATICA με την εντολή:

Πρόγραμμα 11.2.2 - 2 (αόριστου ολοκληρώματος)

```
Integrate[Exp[-x]Sin[5x],{x,),Pi}]
```

■

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-2x}\,dx$ vii) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos(2x+\pi/4)\,dx$

ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sinh x\,dx$ viii) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \sin(x+\pi/4)\,dx$

iii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \cosh 2x\,dx$ ix) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \tan x\,dx$

iv) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos 3x\,dx$ x) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x\,dx$

v) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sin 2x\,dx$ xi) $\displaystyle\int_{0}^{1} \tanh x\,dx$

vi) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$ xii) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos^2 5x\,dx$

2. Όμοια τα ολοκληρώματα

i) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-2x}\,dx$ vi) $\displaystyle\int_0^\pi e^{-x}\cos x\,dx$

ii) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2e^{-2x}\,dx$ vii) $\displaystyle\int_0^\pi e^{x}\sin 2x\,dx$

iii) $\displaystyle\int_{-1}^1 x\,2^x\,dx$ viii) $\displaystyle\int_1^e x^2\ln x\,dx$

iv) $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi x\cos 2x\,dx$ ix) $\displaystyle\int_0^1 \tan^{-1}2x\,dx$

v) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\sin 3x\,dx$ x) $\displaystyle\int_0^\pi x\sin^2 2x\,dx$

3. Δείξτε ότι

$$i)\quad \int_0^{2\pi} x^2\cos(nx)\,dx = \frac{4\pi}{n^2}\,;\quad n=1,\,2,\,\dots$$

$$ii)\quad \int_0^{2\pi} x^2\sin(nx)\,dx = -\frac{4\pi^2}{n}\,;\quad n=1,\,2,\,\dots$$

$$iii)\quad \int_0^{\pi} e^x\ \sin(nx)\,dx = \frac{n}{1+n^2}\left[1-(-1)^n\,e^\pi\right].$$

4. Χρησιμοποιώντας κατάλληλη τριγωνομετρική ταυτότητα δείξτε ότι

i) $\displaystyle\int_0^\pi \sin 2x\ \cos 4x\,dx = -\frac{4}{5}$ iii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\ \sin 2x\,dx = 0$

ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos 5x\ \cos 2x\,dx = 0$ iv) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 2x\ \cos 2x\,dx = 0.$

5. Δείξτε ότι

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+5} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{6}{5}\right)$

ii) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{9x^2+25} = \frac{2}{15}\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

iii) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x^2-6x+10} = \tan^{-1}3$

iv) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2\,dx}{x^2+4} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right).$

Απαντήσεις

1.

i) $\displaystyle\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2} \approx 0.432\,332$

ii) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^x-e^{-x}}{2}\,dx = \cosh x\Big|_{-1}^{1} = 0$

iii) όμοια με (ii) $\displaystyle\frac{1}{2}\sinh 2x\Big|_{-1}^{1} = \sinh 2$

iv) 0

v) $\displaystyle-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} = 1$

vi) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{\pi}{4}$

vii) $\displaystyle\frac{1}{2}\sin(2x+\pi/4)\Big|_0^{\pi} = 0$

viii) όμοια με (vii) $\displaystyle\frac{-\cos x+\sin x}{\sqrt{2}}\Big|_0^{2\pi} = 0$

ix) $\displaystyle\ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\ln 2}{2}$

x) $\displaystyle\frac{\ln 2}{2}$

xi) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sinh x}{\cosh x}\,dx = \ln|\cosh x| \approx 0.433\,781$

xii) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1+\cos 10x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$

2.

i) $\left[\left(-\frac{1}{4}-\frac{x}{2}\right)e^{-2x}\right]_0^1 = \frac{1}{4}-\frac{3}{4e^2} \approx 0.148\,499$

ii) $\left[-\frac{1}{4}\left(1+2x+2x^2\right)e^{-2x}\right]_0^1 = \frac{1}{4}-\frac{5}{4e^2} \approx 0.080\,830$

iii) ισχύει ότι $a^x = e^{x\ln a}$, όταν $a>0$, οπότε ισούται με

$$\left[\frac{2^x\left(-1+x\ln 2\right)}{\ln^2 2}\right]_{-1}^1 = \frac{-3+\ln 32}{2\ln^2 2} \approx 0.484\,684$$

iv) $\left[\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}\,x\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

v) $\left[-\frac{1}{27}\left(-2+9x^2\right)\cos 3x+\frac{2}{9}\,x\sin 3x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$

vi) $\left[\frac{e^{-x}}{2}\left(-\cos x+\sin x\right)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left(1+e^{-\pi}\right) \approx 0.521\,607$

vii) $\left[\frac{e^x}{5}\left(-2\cos 2x+\sin 2x\right)\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{5}\left(-1+e^{\pi}\right) \approx -8.856\,277$

viii) $\left[-\frac{x^3}{9}+\frac{1}{3}\,x^3\ln x\right]_1^e = \frac{1}{9}\left(1+2e^3\right) \approx 4.574\,564$

ix) $\left[x\,\tan^{-1}2x-\frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right)\right]_0^1 = \tan^{-1}2-\frac{\ln 5}{4} \approx 0.704\,789$

x) ισχύει ότι $\sin^2 2x = \dfrac{1-\cos 4x}{2}$, οπότε $\left[\frac{x^2}{4}-\frac{1}{32}\,\cos 4x-\frac{1}{8}\,x\,\sin 4x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}$.

3.

i) $\left[\frac{2x\cos nx}{n^2}+\frac{\left(-2+n^2x^2\right)\sin nx}{n^3}\right]_0^{2\pi} = \ldots = \frac{4\pi}{n^2}$

ii) $\left[\frac{2x\sin nx}{n^2}-\frac{\left(-2+n^2x^2\right)\cos nx}{n^3}\right]_0^{2\pi} = \ldots = -\frac{4\pi^2}{n}$

iii) ισχύει ότι $\sin n\pi = 0$ και $\cos n\pi = (-1)^n$, οπότε $\left[\frac{e^x\left(\sin nx-n\,\cos nx\right)}{1+n^2}\right]_0^{\pi} = \ldots$.

11.3 Προσέγγιση ολοκληρωμάτων ειδικής μορφής

Δίνονται στη συνέχεια τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα, που έχουν μεγάλη σημασία στα προβλήματα των εφαρμογών και των οποίων ο υπολογισμός δεν γίνεται με κανέναν από τους στοιχειώδεις κανόνες ολοκλήρωσης. Τα ολοκληρώματα αυτά είναι γνωστά ως **μη στοιχειώδη ολοκληρώματα** (nonelementary integrals) και ο υπολογισμός τους γίνεται μόνον κατά προσέγγιση.

11.3.1 Συνάρτηση σφάλματος

Η συνάρτηση σφάλματος[7] (error function) είναι σημαντική στη Στατιστική, η οποία λέγεται και ολοκλήρωμα πιθανότητας, στη θεωρία διάδοσης της θερμότητας και μετάδοσης σημάτων στη Φυσική, όπως επίσης και σε πολλές άλλες επιστήμες.

Ορισμός 11.3.1 - 1. *Η* **συνάρτηση σφάλματος** *ορίζεται από το ολοκλήρωμα*

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt. \tag{11.3.1 - 1}$$

Επομένως είναι μια συνάρτηση - ακριβέστερα μια περιττή συνάρτηση - του άνω άκρου ολοκλήρωσης (Σχ. 11.3.1 - 1a).

Αναπτύσσοντας τον όρο e^{-t^2} κατά Maclaurin έχουμε

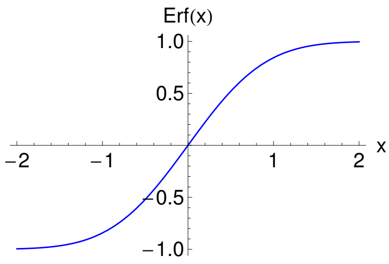
$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6} + \cdots ,$$

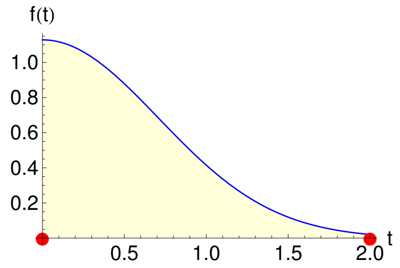
οπότε αντικαθιστώντας στην $(11.3.1 - 1)$ προκύπτει ότι

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 1\,!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2\,!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3\,!} + \ldots \right). \tag{11.3.1 - 2}$$

Οι τιμές της συνάρτησης σφάλματος δίνονται ή από πίνακες ή από τα μαθηματικά πακέτα MATHEMATICA ή MATLAB. Για παράδειγμα, αν $x = 2$,

[7] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Error_function*





Σχήμα 11.3.1 - 1: (a) Η συνάρτηση σφάλματος $\mathrm{erf}(x)$, όταν $x \in [-2, 2]$ και (b) Το εμβαδόν ισούται με την τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος $\mathrm{erf}(2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^2 e^{-t^2}\, dt$.

τότε είναι (Σχ. 11.3.1 - 1b)

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^2 e^{-t^2}\, dt \approx 0.995\,322.$$

11.3.2 Ολοκληρώματα του Fresnel

Τα ολοκληρώματα του Fresnel[8] (Fresnel integrals), που εμφανίζονται κυρίως σε προβλήματα της Οπτικής, ορίζονται ως εξής:

Ορισμός 11.3.2 - 1 (ημιτονικό). *Ορίζεται από το ολοκλήρωμα*[9] *(Σχ. 11.3.2 - 1a)*

$$\mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}\, t^2\right)\, dt. \qquad (11.3.2 - 1)$$

Αναπτύσσοντας κατά Maclaurin τον όρο $\sin t^2$ έχουμε

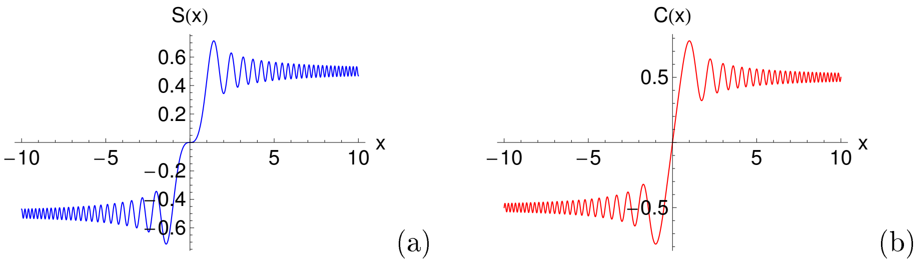
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\, t^2\right) = \frac{\pi}{2}\left(t^2 - \frac{t^6}{3\,!} + \frac{t^{10}}{5\,!} + \cdots\right),$$

[8] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_integral*

[9] Σύμφωνα με τον ορισμό που δίνεται στο βιβλίο των Abramowitz and Stegun [2] και χρησιμοποιείται στο MATHEMATICA. Επίσης ορίζεται ως $\mathrm{S}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin t^2\, dt$ σε Α. Μπράτσος [1] ή και $\mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin t^2\, dt$.

οπότε αντικαθιστώντας στην $(11.3.2-1)$ προκύπτει ότι

$$\mathrm{S}(x)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{x^3}{3\cdot 1\,!}-\frac{x^7}{7\cdot 3\,!}+\frac{x^{11}}{11\cdot 5\,!}-\frac{x^{15}}{15\cdot 7\,!}+\cdots\right). \qquad (11.3.2\text{ - }2)$$



Σχήμα 11.3.2 - 1: (a) Το ολοκλήρωμα Fresnel $S(x)$, όταν $x\in[-10,10]$ και (b) το $C(x)$.

Ορισμός 11.3.2 - 2 (συνημιτονικό). *Ορίζεται από το ολοκλήρωμα (Σχ. 11.3.2 - 1b)*

$$\mathrm{C}(x)=\int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}\,t^2\right)\,dt. \qquad (11.3.2\text{ - }3)$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι

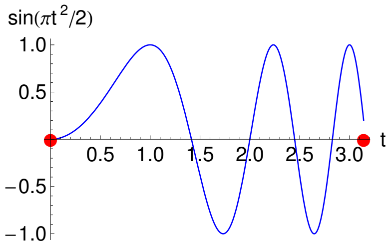
$$\mathrm{C}(x)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{1\,!}-\frac{x^5}{5\cdot 2\,!}+\frac{x^9}{9\cdot 4\,!}-\frac{x^{13}}{13\cdot 6\,!}+\cdots\right). \qquad (11.3.2\text{ - }4)$$

Οι τιμές των ολοκληρωμάτων του Fresnel επίσης δίνονται ή από πίνακες ή από τα μαθηματικά πακέτα.

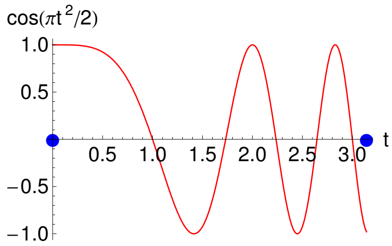
Αν για παράδειγμα $x=\pi$, τότε

$$\mathrm{S}(\pi)=\int_0^\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}\,t^2\right)\,dt\approx 0.598\,249 \quad (\Sigma\chi.11.3.2-1c)$$

$$\mathrm{C}(\pi)=\int_0^\pi \cos\left(\frac{\pi}{2}\,t^2\right)\,dt\approx 0.523\,699. \quad (\Sigma\chi.11.3.2-1d)$$



(c)



(d)

Σχήμα 11.3.2 - 2: (c) Η συνάρτηση $\sin\left(\frac{\pi}{2}\,t^2\right)$ και (d) η $\cos\left(\frac{\pi}{2}\,t^2\right)$, όταν $t \in [0, \pi]$.

11.3.3 Ημιτονικό ολοκλήρωμα

Το ημιτονικό ολοκλήρωμα[10] (sine integral) εμφανίζεται σε μία μεγάλη σειρά φυσικών προβλημάτων, όπως στη διάδοση σημάτων, σε φαινόμενα Gibbs, κ.λπ.

Ορισμός 11.3.3 - 1 (ημιτονικό ολοκλήρωμα). *Ορίζεται από το ολοκλήρωμα (Σχ. 11.3.3 - 1)*

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt. \tag{11.3.3 - 1}$$

Στις περισσότερες εφαρμογές το ένα άκρο ολοκλήρωσης είναι το άπειρο. Τότε είναι γνωστό και ως **ολοκλήρωμα του Dirichlet** (Dirichlet integral).

Αναπτύσσοντας τον όρο $\sin t$ κατά Maclaurin και ολοκληρώνοντας την (11.3.3 − 1) έχουμε

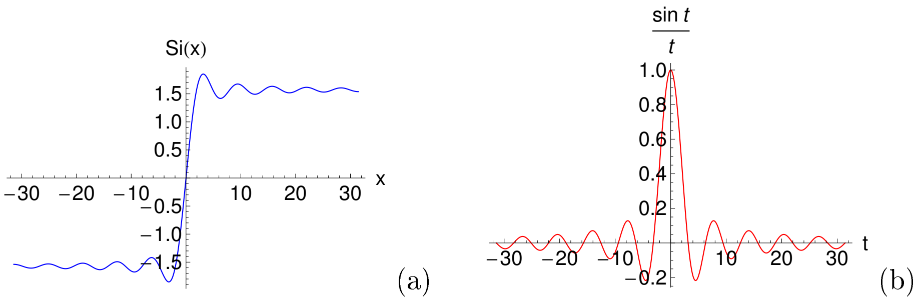
$$\mathrm{Si}(x) = \frac{x}{1\cdot 1!} - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} \pm \ldots . \tag{11.3.3 - 2}$$

Όμοια οι τιμές δίνονται ή από πίνακες ή από τα μαθηματικά πακέτα.

Ασκήσεις

1. Προσεγγίζοντας την εκθετική, αντίστοιχα την τριγωνομετρική συνάρτηση με το πολυώνυμο Maclaurin βαθμού 4, αντίστοιχα 5, να υπολογιστούν τα

[10] Βλέπε βιβλιογραφία και
https://en.wikipedia.org/wiki/Trigonometric_integral#Sine_integral



Σχήμα 11.3.3 - 1: (a) Το ημιτονικό ολοκλήρωμα $Si(x)$, όταν $x \in [-10\pi, 10\pi]$ και (b) το διάγραμμα της ολοκληρωτέας συνάρτησης $\frac{\sin t}{t}$.

παρακάτω ολοκληρώματα:

i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx$ ii) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx\,.$

2. Όμοια με το πολυώνυμο Maclaurin βαθμού 3 του ολοκληρώματος:

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin\left(\sin x\right)\,dx.$$

3. Όμοια με το πολυώνυμο Maclaurin βαθμού 3, αντίστοιχα 4 των ολοκληρωμάτων:

i) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sinh x}{x}\,dx$ ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^4}\,dx.$

4. Προσεγγίζοντας τη λογαριθμική συνάρτηση με το πολυώνυμο Taylor βαθμού 2 και κέντρο $\xi = e$, να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i)

$$\int_{1}^{e} \ln\left(\ln x\right)\,dx,$$

ii)

$$\int_{1}^{e} \frac{dx}{\ln x}\,. \tag{11.3.3 - 3}$$

Το ολοκλήρωμα (11.3.3–3) είναι γνωστό και ως το **λογαριθμικό ολοκλήρωμα** (logarithmic integral).

Απαντήσεις

1.

$$i)\quad e^{-x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\,,\quad \text{οπότε}\quad \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{23}{15}\,,$$

$$ii)\quad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\,,\qquad \int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \frac{1703}{1800} \approx 0.946\,111.$$

2. Είναι

$$\sin(\sin x) \approx x - \frac{x^3}{3}.\quad \text{Άρα}\quad \int_{0}^{\pi/2} \sin(\sin x)\,dx \approx \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^4}{192} \approx 0.726\,362.$$

3.

$$i)\quad \sinh x \approx x + \frac{x^3}{6}\,,\quad \text{οπότε}\quad \int_{0}^{1} \frac{\sinh x}{x}\,dx \approx \frac{13}{24}\,,$$

$$ii)\quad \sqrt{1-x^4} \approx 1 - \frac{x^4}{2}\,,\qquad \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^4}\,dx \approx \frac{9}{5}.$$

4.

$$i)\quad \ln(\ln x) \approx \frac{x-e}{e} - \frac{(x-e)^2}{e^2}\,,\quad \text{οπότε}$$

$$\int_{1}^{e} \ln(\ln x)\,dx \approx 2 - \frac{3}{2e} - \frac{5e}{6} + \frac{1}{3e^2} \approx -0.771\,942\,,$$

$$ii)\quad \tfrac{1}{\ln x} \approx 1 - \frac{x-e}{e} + \frac{3(x-e)^2}{2e^2}\,,\quad \text{οπότε}$$

$$\int_{1}^{e} \frac{dx}{\ln x} \approx -\frac{7}{2} + \frac{2}{e} + 2e - \frac{1}{2e^2} \approx 2.604\,655.$$

11.4 Γενικευμένα ολοκληρώματα

Είναι ήδη γνωστό ότι, όταν η $f \mid [\alpha, \beta]$ είναι μια συνάρτηση συνεχής για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ έχει έννοια και ορίζει μονοσήμαντα έναν πραγματικό αριθμό, που υπολογίζεται από τον τύπο

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = F(x)\Big|_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha),$$

όταν $F(x)$ το αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$, δηλαδή

$$\int f(x)\,dx = F(x).$$

Όμως στις διάφορες εφαρμογές υπάρχουν περιπτώσεις όπου το ένα ή και τα δύο άκρα ολοκλήρωσης δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της ολοκληρωτέας συνάρτησης, διαφορετικά το διάστημα ολοκλήρωσης είναι ανοικτό ή στο ένα ή και στα δύο άκρα. Αυτού του είδους τα ολοκληρώματα λέγονται **γενικευμένα**[11] (improper integral).

Οι κυριότερες περιπτώσεις που περισσότερο εμφανίζονται στις διάφορες εφαρμογές πρόκειται να μελετηθούν στη συνέχεια.

Ανάλογα με τη μορφή του διαστήματος ολοκλήρωσης διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

11.4.1 Γενικευμένα ολοκληρώματα του α' είδους

Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού $[a, +\infty)$, τέτοια ώστε η f να είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, x]$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$. Τότε έχει έννοια η

[11] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Improper_integral*

συνάρτηση[12]

$$\mathrm{I}(x) = \int_{a}^{x} f(t)\, dt \quad \text{για κάθε } x \in [a, +\infty). \tag{11.4.1 - 1}$$

Ορισμός 11.4.1 - 1. *Ορίζεται ως Γ.Ο. του* **α' είδους** *της f στο $[a, +\infty)$ το ολοκλήρωμα*

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx. \tag{11.4.1 - 2}$$

Ορισμός 11.4.1 - 2. *Το Γ.Ο.* $(11.4.1-2)$ *λέγεται ότι υπάρχει ή διαφορετικά ότι συγκλίνει τότε και μόνον, όταν υπάρχει το* $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{I}(x)$.

Στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx = \mathrm{I},$$

ενώ, όταν δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{I}(x)$, λέγεται ότι το Γ.Ο. $(11.4.1-2)$ δεν υπάρχει ή ότι αποκλίνει.

Όμοια είναι δυνατόν να οριστεί το Γ.Ο. α' είδους της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού $(-\infty, \beta\,]$, υποθέτοντας ότι f είναι ολοκληρώσιμη στο $[x, \beta\,]$ για κάθε $x \in (-\infty, \beta\,]$ με τη βοήθεια της συνάρτησης

$$\mathrm{J}(x) = \int_{x}^{\beta} f(t)\, dt \quad \text{για κάθε } x \in (-\infty, \beta\,]. \tag{11.4.1 - 3}$$

[12] Βλέπε Μάθημα *Ορισμένο Ολοκλήρωμα* - Παρατηρήσεις 11.1.1 - 1 ΙΙ τύπος $(11.1.1-6)$: στην περίπτωση που το ένα άκρο ολοκλήρωσης, έστω το β, μεταβάλλεται, δηλαδή $\beta = x$, τότε με τον τύπο $(11.1.1-5)$ ορίζεται η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\, dt$$

με πεδίο ορισμού, έστω D, όπου $D \subseteq [\alpha, \beta\,]$.

Τότε θα λέγεται ότι το Γ.Ο. $(11.4.1-3)$ υπάρχει ή διαφορετικά ότι συγκλίνει, όταν και μόνον, όταν υπάρχει το $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{J}(x)$, οπότε στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$\mathrm{J} = \int\limits_{-\infty}^{\beta} f(x)\, dx,$$

ενώ, όταν δεν υπάρχει το $\lim_{x\to-\infty} J(x)$, θα λέγεται ότι το Γ.Ο. $(11.4.1-3)$ δεν υπάρχει ή ότι αποκλίνει.

Έστω τώρα η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $(-\infty,\, +\infty)$, τέτοια ώστε η f να είναι ολοκληρώσιμη στο $[x,\, y]$ για κάθε $x,\, y \in (-\infty,\, +\infty)$.

Ορισμός 11.4.1 - 3. *Ορίζεται ως Γ.Ο. του α' είδους της f στο $\mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx. \tag{11.4.1 - 4}$$

Ορισμός 11.4.1 - 4. *Το Γ.Ο. $(11.4.1-4)$ λέγεται ότι υπάρχει ή διαφορετικά ότι συγκλίνει όταν και μόνον, όταν υπάρχουν τα Γ.Ο.*

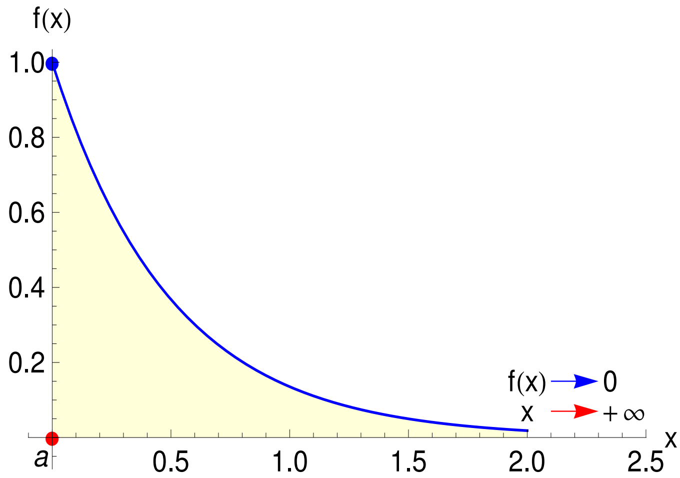
$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\, dx \quad \text{και} \quad \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\, dx \ \text{με}\ a \in \mathbb{R}, \tag{11.4.1 - 5}$$

ενώ ορίζεται ως η τιμή του ο πραγματικός αριθμός

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\, dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\, dx. \tag{11.4.1 - 6}$$

Ορισμός 11.4.1 - 5. *Το Γ.Ο. $(11.4.1-4)$ θα λέγεται ότι δεν υπάρχει ή ότι αποκλίνει, όταν τουλάχιστον ένα από τα Γ.Ο. $(11.4.1-5)$ δεν υπάρχει.*

Αποδεικνύεται ότι η ύπαρξη ή μη του Γ.Ο. $(11.4.1-4)$ είναι ανεξάρτητη από την εκλογή του σημείου a στην $(11.4.1-5)$.



Σχήμα 11.4.1 - 1: Το ολοκλήρωμα $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}dx$. Η μπλε καμπύλη ορίζει το διάγραμμα της e^{-2x} όπου προφανώς $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$.

Παράδειγμα 11.4.1 - 1

Να υπολογιστεί το Γ.Ο. (Σχ. 11.4.1 - 1)

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}dx.$$

Λύση. Αρχικά είναι

$$\begin{aligned}\int e^{-2x}\,dx &= \int \frac{(-2x)'}{-2}e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int \overbrace{(-2x)'\,e^{-2x}}^{f'(x)e^{f(x)}}dx \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2x} + c.\end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με τον Ορισμό 11.4.1 - 2 έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-2t}\,dt \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} e^{-2t}\Big|_0^x \\ &= -\frac{1}{2}\left(\overbrace{\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}}^{0}-1\right)=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι:

$$\int_0^{+\infty} e^{-s\,x}dx=\frac{1}{s}, \quad \text{όταν} \quad s>0. \tag{11.4.1 - 7}$$

■

Παρατήρηση 11.4.1 - 1

Το Γ.Ο. ολοκλήρωμα (Σχ. 11.4.1 - 2)

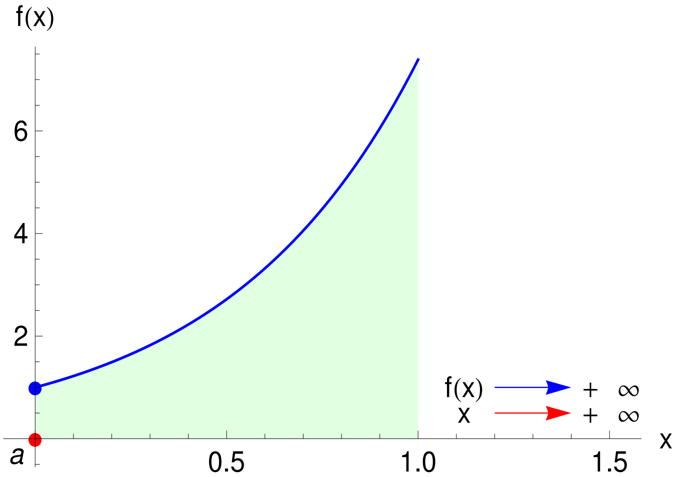
$$\int_0^{+\infty} e^{2x}dx.$$

δεν υπάρχει, επειδή

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{2x}\,dx &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{2t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} e^{2t}\Big|_0^x=\frac{1}{2}\left(\overbrace{\lim_{x\to+\infty} e^{2x}}^{+\infty}-1\right)=+\infty.\end{aligned}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει το Γ.Ο.

$$\int_0^{+\infty} e^{sx}dx, \quad \text{όταν} \quad s>0. \tag{11.4.1 - 8}$$



Σχήμα 11.4.1 - 2: Το ολοκλήρωμα $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{2x} dx$. Η μπλε καμπύλη ορίζει το διάγραμμα της e^{2x} όπου προφανώς $\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$.

Παράδειγμα 11.4.1 - 2

Να υπολογιστεί το Γ.Ο. (Σχ. 11.4.1 - 3)

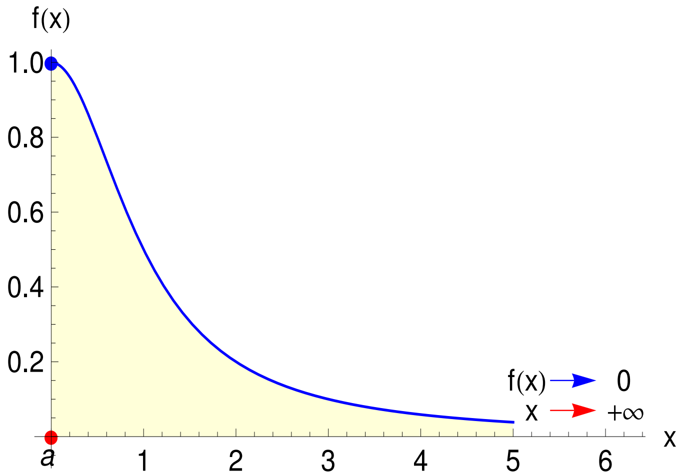
$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}\,.$$

Λύση. Αρχικά είναι

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \left(\text{μορφή} \quad \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\right) \quad \tan^{-1} x + c.$$

Επομένως σύμφωνα με τον Ορισμό 11.4.1 - 2 έχουμε

$$\begin{aligned}
\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{x\to+\infty} \int\limits_{0}^{x} \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \tan^{-1} t\Big|_{0}^{x} \\
&= \overbrace{\lim_{x\to+\infty} \tan^{-1} x}^{\frac{\pi}{2}} - \overbrace{\tan^{-1} 0}^{0} = \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$



Σχήμα 11.4.1 - 3: Το ολοκλήρωμα $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Η μπλε καμπύλη ορίζει το διάγραμμα της $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ όπου προφανώς $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Άρα

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\,. \tag{11.4.1 - 9}$$

Παρατήρηση 11.4.1 - 2

Σύμφωνα με τους ορισμούς των τριγωνομετρικών συναρτήσεων του Μαθήματος *Πραγματικές συναρτήσεις*

- η συνάρτηση $\tan x$ έχει πεδίο ορισμού το $D = \mathbb{R} - \left\{\pm \frac{\pi}{2}\,, \cdots \right\}$ και γενικά το $D = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$, όταν $k = 0, \pm 1, \ldots$ (Σχ. 11.4.1 - 4a), ενώ το πεδίο τιμών της είναι το $T = \mathbb{R}$.

  Γενικότερα η συνάρτηση

$$\begin{aligned} &\tan \omega x, \quad \text{όταν} \quad \omega > 0, \quad \text{έχει πεδίο ορισμού το} \\ &D = \mathbb{R} - \left\{\pm \frac{\pi}{2\omega}\,, \cdots \right\} \\ &\text{και τιμών το} \quad T = \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{11.4.1 - 10}$$

- Η αντίστροφη συνάρτηση $\tan^{-1} x = \arctan x$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έχει πεδίο τιμών το $T = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (Σχ. 11.4.1 - 4b). Τότε ισχύει ότι

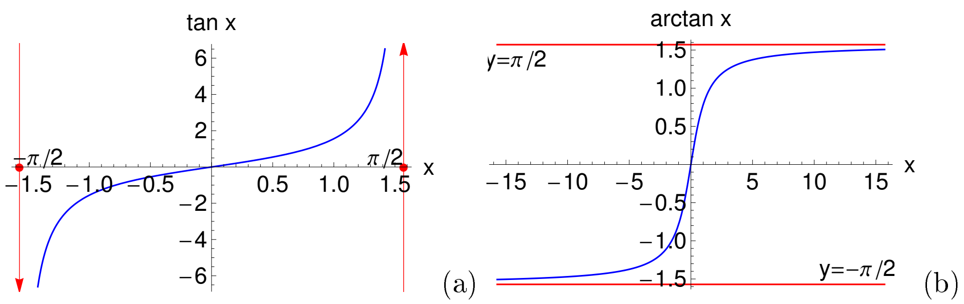
$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}. \qquad (11.4.1 - 11)$$

Γενικότερα η συνάρτηση

$$\begin{aligned} \tan^{-1} \omega x &= \arctan^{-1} \omega x, \quad \text{όταν} \quad \omega > 0, \quad \text{έχει} \\ &\quad \text{πεδίο ορισμού το} \quad D = \mathbb{R} - \left\{\pm \frac{\pi}{2\omega}, \cdots\right\} \\ &\quad \text{και τιμών το} \quad T = \mathbb{R}. \end{aligned} \qquad (11.4.1 - 12)$$

Άρα όμοια σύμφωνα με την $(11.4.1 - 11)$ και στην περίπτωση αυτή θα ισχύει ότι

$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} \omega x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} \tan^{-1} \omega x = \frac{\pi}{2}. \qquad (11.4.1 - 13)$$



Σχήμα 11.4.1 - 4: (a) Το διάγραμμα (μπλε καμπύλη) της $\tan x$, όταν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Οι κατακόρυφες ευθείες είναι οι ασύμπτωτες $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Προφανώς είναι $\lim_{x \to +\pi/2} \tan x = +\infty$ και $\lim_{x \to -\pi/2} \tan x = -\infty$, ενώ $\tan 0 = 0$. (b) Το διάγραμμα (μπλε καμπύλη) της $\tan^{-1} x = \arctan x$, όταν $x \in [-5\pi, 5\pi]$. Οι οριζόντιες ευθείες είναι οι ασύμπτωτες $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Τότε είναι $\lim_{x \to +\infty} \tan^{-1} x = +\frac{\pi}{2}$ και $\lim_{x \to -\infty} \tan x = -\frac{\pi}{2}$, ενώ $\tan^{-1} 0 = 0$.

Όμοια τότε αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{x\to-\infty}\int\limits_{x}^{0}\frac{d\,t}{1+t^2}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}t\Big|_{x}^{0}\\ &= \overbrace{\tan^{-1}0}^{0}-\overbrace{\lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}x}^{-\frac{\pi}{2}}=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Άρα

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\,. \qquad (11.4.1 - 14)$$

Συνδυάζοντας τις $(11.4.1-9)$ και $(11.4.1-14)$ και λαμβάνοντας υπόψη την $(11.4.1-6)$ προκύπτει ότι

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi. \qquad (11.4.1 - 15)$$

■

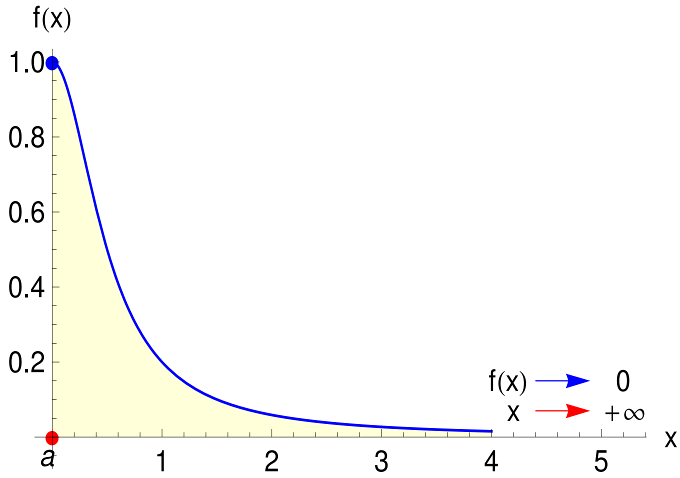
Παράδειγμα 11.4.1 - 3

Όμοια να υπολογιστεί το Γ.Ο. (Σχ. 11.4.1 - 5)

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+4x^2}\,.$$

Λύση. Αρχικά είναι

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{1+4x^2} &= \int\frac{dx}{1+(2x)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{(2x)'}{1+(2x)^2}\,dx\\ &\quad\left(\text{μορφή}\quad\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x)+c.\end{aligned}$$



Σχήμα 11.4.1 - 5: Το ολοκλήρωμα $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+4x^2}$. Η μπλε καμπύλη ορίζει το διάγραμμα της $f(x) = \frac{1}{1+4x^2}$ όπου προφανώς $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Άρα σύμφωνα με τον Ορισμό 11.4.1 - 2 έχουμε

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+4x^2} &= \lim_{x\to+\infty} \int\limits_0^{x} \frac{dt}{1+4t^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \tan^{-1}(2t)\Big|_0^x \\ &= \frac{1}{2} \overbrace{\lim_{x\to+\infty} \tan^{-1}(2x)}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \overbrace{\tan^{-1} 0}^{0} \\ &= \frac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

■

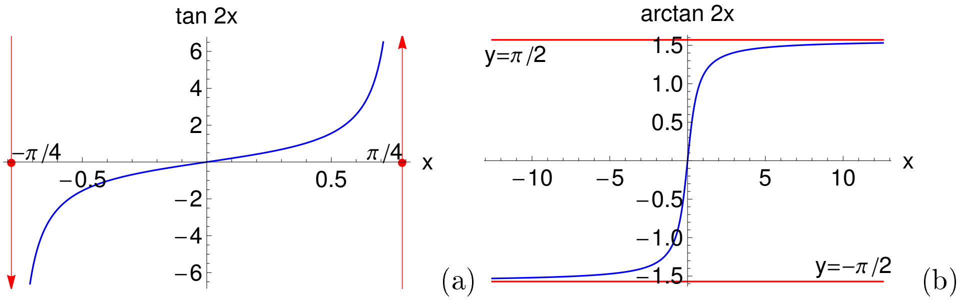
Παρατήρηση 11.4.1 - 3

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 11.4.1 - 2 και τις (11.4.1 − 10), αντίστοιχα (11.4.1 − 12)

- η συνάρτηση $\tan(2x)$ θα έχει πεδίο ορισμού $D = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{4}\right\}$ και τιμών όμοια το $T = \mathbb{R}$ (Σχ. 11.4.1 - 6a), αντίστοιχα

- η αντίστροφη συνάρτηση $\tan^{-1} 2x = \arctan 2x$ θα ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και θα έχει πεδίο τιμών το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (Σχ. 11.4.1 - 6b), ενώ σύμφωνα με την (11.4.1 − 13) θα ισχύει ότι

$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} 2x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} \tan^{-1} 2x = \frac{\pi}{2}\,.$$



Σχήμα 11.4.1 - 6: (a) Το διάγραμμα (μπλε καμπύλη) της $\tan 2x$, όταν $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Οι κατακόρυφες ευθείες είναι οι ασύμπτωτες $x = \pm\frac{\pi}{4}$ όπου $\lim_{x \to +\pi/4} \tan 2x = +\infty$ και $\lim_{x \to -\pi/4} \tan 2x = -\infty$. (b) Το διάγραμμα (μπλε καμπύλη) της $\tan^{-1} 2x = \arctan 2x$, όταν $x \in [-4\pi, 4\pi]$. Οι οριζόντιες ευθείες είναι οι ασύμπτωτες $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Προφανώς λόγω της (11.4.1 − 13) είναι $\lim_{x \to +\infty} \tan^{-1} 2x = +\frac{\pi}{2}$ και $\lim_{x \to -\infty} \tan 2x = -\frac{\pi}{2}$.

Παράδειγμα 11.4.1 - 4

Να υπολογιστεί το Γ.Ο. (Σχ. 11.4.1 - 7)

$$\int_0^{+\infty} x\, e^{-2x}\, dx.$$

Λύση. Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}
\int x\, e^{-2x}\, dx &= \int x \left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)' dx = -\frac{1}{2}\, x\, e^{-2x} + \frac{1}{2} \int x'\, e^{-2x} dx \\
&= -\frac{1}{2}\, x\, e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx \\
&= -\frac{1}{2}\, x\, e^{-2x} - \frac{1}{4}\, e^{-2x} + c.
\end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με τον Ορισμό 11.4.1 - 2 και τον κανόνα του de L'Hôpital έχουμε[13]

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} x\,e^{-2x}\,dx &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x t\,e^{-2t}\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} t\,e^{-2t}\Big|_0^x - \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty} e^{-2t}\Big|_0^x \\
&= -\frac{1}{2}\left(\overbrace{\lim_{x\to+\infty} x\,e^{-2x}}^{\text{de L'Hôspital}} - 0\right) - \frac{1}{4}\left(\overbrace{\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}}^{0} - 1\right) \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}}{x} + \frac{1}{4} \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{-2x}\right)'}{x'} + \frac{1}{4} \\
&= -\frac{1}{2}(-2)\overbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}}{1}}^{0} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

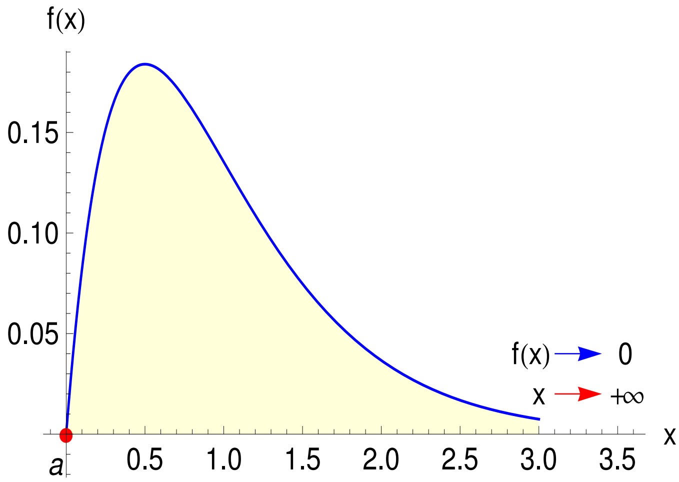
Όμοια αποδεικνύεται ότι

$$\int_0^{+\infty} x\,e^{-sx}dx = \frac{1}{s^2}, \quad \text{όταν} \quad s > 0. \qquad (11.4.1 - 16)$$

■

[13] Βλέπε Μάθημα *Παράγωγος Συνάρτησης - Υπολογισμός οριακών τιμών.*

Θεώρημα. *Αν* $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *και* $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, *όταν* $x_0 \in \mathbb{R}$ *ή* $x_0 = \pm\infty$, *τότε, αν ορίζεται το* $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, *ισχύει ότι* $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.



Σχήμα 11.4.1 - 7: Το ολοκλήρωμα $\int\limits_0^{+\infty} x\, e^{-2x} dx$. Η μπλε καμπύλη ορίζει το διάγραμμα της $x\, e^{-2x}$ όπου εφαρμόζοντας τον κανόνα του de L'Hôpital προκύπτει ότι $\lim_{x \to +\infty} x\, e^{-2x} = 0$.

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι

i) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1$

ii) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-5x}\, dx = \frac{1}{5}$

iii) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{1}{2}$

iv) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x e^{-3x}\, dx = \frac{1}{9}$.

2. Όμοια ότι γενικά ισχύει

$$\int\limits_0^{+\infty} x\, e^{-s\, x}\, dx = \frac{1}{s^2}, \quad \text{όταν} \quad s > 0.$$

3. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (11.4.1 − 13) δείξτε ότι

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + k^2} = \frac{\pi}{k}, \quad \text{όταν} \quad k > 0.$$

4. Να υπολογιστούν τα παρακάτω γενικευμένα ολοκληρώματα

$$i)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} \qquad\qquad ii)\quad \int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}\,.$$

5. Αν $a>0$, δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$$

συγκλίνει, όταν $p>1$ και απειρίζεται, όταν $p<1$.

6. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2}\,dx = 0.$$

Απαντήσεις

1. Ανάλογα με λυμένα παραδείγματα.

2. Είναι

$$\int x e^{-sx}\,dx = -\frac{e^{-sx}(1+sx)}{s^2}\,,$$

οπότε η λύση είναι ανάλογη του Παραδείγματος 11.4.1 - 4.

3. Όμοια ανάλογα με τα Παραδείγματα 11.4.1 - 2 και 11.4.1 - 3 λαμβάνοντας υπόψη τις Παρατηρήσεις 11.4.1 - 2 και 11.4.1 - 3.

4.

$$(i)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \tan^{-1}(1+x)\Big|_{-\infty}^{0} + \tan^{-1}(1+x)\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\pi,$$

$$(ii)\quad \int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}\Big|_{e}^{+\infty} = 1.$$

5. Προφανής.

6.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2}dx &= \int_{-\infty}^{0} x e^{-x^2}dx + \int_{0}^{+\infty} x e^{-x^2}dx \\ &= -\frac{e^{-x^2}}{2}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{-x^2}}{2}\Big|_{0}^{+\infty} = 0.\end{aligned}$$

11.4.2 Γενικευμένα ολοκληρώματα του β' είδους

Ανάλογα με την Παράγραφο 11.4.1, έστω ότι η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(a, \beta\,]$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[x, \beta\,]$ για κάθε $x \in (a, \beta\,]$, οπότε θα έχει έννοια στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση

$$\mathrm{I}(x) = \int_x^{\beta} f(t)\, dt \quad \text{για κάθε } x \in (a, \beta\,]. \tag{11.4.2 - 1}$$

Ορισμός 11.4.2 - 1. *Ορίζεται ως Γ.Ο. του* **β' είδους** *της f στο $(a, \beta\,]$ το ολοκλήρωμα*

$$\int_{a\,+}^{\beta} f(x)\, dx. \tag{11.4.2 - 2}$$

Ορισμός 11.4.2 - 2. *Το Γ.Ο. $(11.4.2-2)$ λέγεται ότι υπάρχει ή διαφορετικά ότι συγκλίνει τότε και μόνον, όταν υπάρχει το $\lim_{x \to a+} \mathrm{I}(x)$. Στην περίπτωση αυτή γράφεται*

$$\int_{a\,+}^{\beta} f(x)\, dx = \mathrm{I},$$

ενώ, όταν δεν υπάρχει το $\lim_{x \to a+} \mathrm{I}(x)$, λέγεται ότι το Γ.Ο. $(11.4.2-2)$ δεν υπάρχει ή ότι αποκλίνει.

Όμοια με τη βοήθεια της συνάρτησης

$$\mathrm{J}(x) = \int_a^{x} f(t)\, dt \quad \text{για κάθε } x \in [a, \beta). \tag{11.4.2 - 3}$$

είναι δυνατόν να οριστεί το Γ.Ο. β' είδους της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού $[a, \beta)$.

Έστω τώρα η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού (a, β) τέτοια, ώστε η f να είναι ολοκληρώσιμη στο $[x, y]$ για κάθε $x, y \in (a, \beta)$.

Ορισμός 11.4.2 - 3. *Ορίζεται ως Γ.Ο. του β' είδους της f στο (a, β) το ολοκλήρωμα*

$$\int_{a+}^{\beta-} f(x)\, dx. \tag{11.4.2 - 4}$$

Ορισμός 11.4.2 - 4. *Το Γ.Ο.* $(11.4.2-4)$ *λέγεται ότι υπάρχει ή διαφορετικά ότι συγκλίνει όταν και μόνον, όταν υπάρχουν τα Γ.Ο.*

$$\int_{a+}^{\xi} f(x)\, dx \quad \textit{και} \quad \int_{\xi}^{\beta-} f(x)\, dx \;\; \textit{με}\;\; \xi \in (a, \beta), \tag{11.4.2 - 5}$$

ενώ ορίζεται ως τιμή του ο πραγματικός αριθμός

$$\int_{a+}^{\xi} f(x)\, dx + \int_{\xi}^{\beta-} f(x)\, dx. \tag{11.4.2 - 6}$$

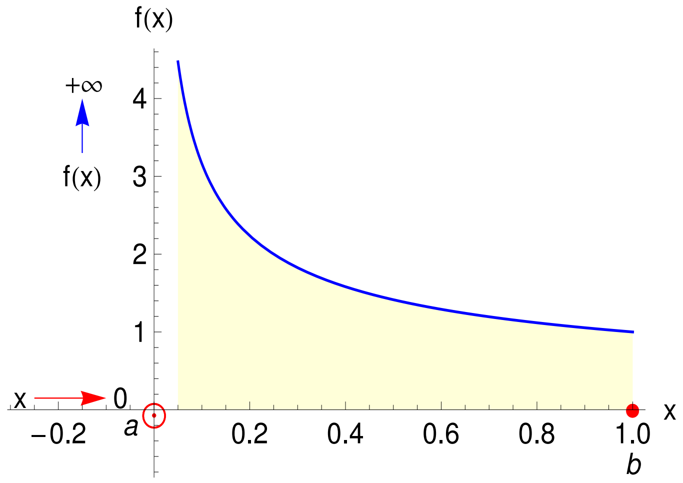
Ορισμός 11.4.2 - 5. *Το Γ.Ο.* $(11.4.2-4)$ *λέγεται ότι δεν υπάρχει ή ότι αποκλίνει, όταν τουλάχιστον ένα από τα Γ.Ο.* $(11.4.2-5)$ *δεν υπάρχει.*

Όμοια αποδεικνύεται ότι η ύπαρξη ή μη του Γ.Ο. $(11.4.2-4)$ είναι ανεξάρτητη από την εκλογή του σημείου ξ στην $(11.4.2-6)$.

Παράδειγμα 11.4.2 - 1

Σύμφωνα με τον Ορισμό 11.4.2 - 2 έχουμε (Σχ. 11.4.2 - 1)

$$\begin{aligned}
\int_{0+}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \int_{0+}^{1} x^{-1/2}\, dx = \lim_{x \to 0+} \int_{x}^{1} t^{-1/2}\, dt \\
&= \lim_{x \to 0+} \left. \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right|_{x}^{1} = \lim_{x \to 0+} \left. 2\sqrt{t}\, \right|_{x}^{1} \\
&= 2.
\end{aligned}$$



Σχήμα 11.4.2 - 1: Το ολοκλήρωμα $\int\limits_{0_+}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ όπου η καμπύλη ορίζει το διάγραμμα της $x^{-1/2}$, όταν $x \in [0.05, 1]$.

11.4.3 Γενικευμένα ολοκληρώματα μεικτού είδους

Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα Γ.Ο. που η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν ορίζεται σε ένα συγκεκριμένο σημείο στο ένα άκρο ολοκλήρωσης, ενώ το άλλο άκρο είναι το ∞.

Ειδικότερα έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $(a, +\infty)$ και σημείο $\xi \in (a, +\infty)$, τέτοιο ώστε τα Γ.Ο.

$$\int\limits_{a_+}^{\xi} f(x)\, dx \quad \text{και} \quad \int\limits_{\xi}^{+\infty} f(x)\, dx \tag{11.4.3 - 1}$$

να υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ ή το ένα να απειρίζεται θετικά ή αρνητικά ή και τα δύο να απειρίζονται θετικά ή αρνητικά.

Ορισμός 11.4.3 - 1. *Ορίζεται ως Γ.Ο.* **μεικτού είδους** *της f στο $(a, +\infty)$ το ολοκλήρωμα*

$$\int\limits_{a_+}^{+\infty} f(x)\, dx. \tag{11.4.3 - 2}$$

Ορισμός 11.4.3 - 2. *Το Γ.Ο.* $(11.4.3-2)$ *θα λέγεται ότι υπάρχει ή ότι συγκλίνει όταν και μόνον, όταν υπάρχουν τα Γ.Ο.*

$$\int_{a+}^{\xi} f(x)\,dx \quad \textit{και} \quad \int_{\xi}^{+\infty} f(x)\,dx \ \textit{με}\ \xi \in (a, +\infty), \tag{11.4.3 - 3}$$

ενώ ορίζεται ως η τιμή του ο πραγματικός αριθμός

$$\int_{a+}^{\xi} f(x)\,dx + \int_{\xi}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{11.4.3 - 4}$$

Ορισμός 11.4.3 - 3. *Το Γ.Ο.* $(11.4.3-2)$ *θα λέγεται ότι δεν υπάρχει ή ότι αποκλίνει, όταν τουλάχιστον ένα από τα Γ.Ο.* $(11.4.3-3)$ *δεν υπάρχουν.*

Αποδεικνύεται ότι η τιμή των Γ.Ο. $(11.4.3-3)$ είναι ανεξάρτητη από την εκλογή του σημείου ξ στην $(11.4.3-4)$. Όμοια ορίζεται το Γ.Ο. του μεικτού είδους της f στο $(-\infty, \beta)$.

Μία εφαρμογή των Γ.Ο. μεικτού είδους δίνεται στην παράγραφο που ακολουθεί.

11.4.4 Συνάρτηση γάμμα

Ορισμός 11.4.4 - 1 (συνάρτησης γάμμα). *Ορίζεται από το γενικευμένο ολοκλήρωμα μεικτού είδους (gamma function)*

$$\Gamma(a) = \int_{0_+}^{+\infty} e^{-x} x^{a-1}\,dx, \tag{11.4.4 - 1}$$

όταν $a > 0$ *ή όταν ο* a *είναι μιγαδικός αριθμός με* $\mathrm{Re}(a) > 0$.

Πρόκειται για μια συνάρτηση με πολλές εφαρμογές σε διάφορα προβλήματα των εφαρμοσμένων μαθηματικών.

Τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 11.4.3 - 2, αν $\xi = 1$, έχουμε

$$\Gamma(a) = \int_{0_+}^{+\infty} e^{-x} x^{a-1}\,dx = \int_{0+}^{1} e^{-x} x^{a-1}\,dx + \int_{1}^{+\infty} e^{-x} x^{a-1}\,dx.$$

Αποδεικνύεται ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα του δεξιού μέλους υπάρχουν, οπότε και το ολοκλήρωμα $(11.4.4-1)$ θα υπάρχει.

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση τελικά αποδεικνύεται ότι

$$\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a). \tag{11.4.4 - 2}$$

Από την $(11.4.4-2)$ προκύπτουν:

i)
$$\Gamma(n+1) = n\,! \quad \text{για κάθε } n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots \tag{11.4.4 - 3}$$

όπου προφανώς είναι $\Gamma(1) = 1$, δηλαδή η συνάρτηση γάμμα είναι δυνατόν να θεωρηθεί ως η **γενίκευση** της παραγοντικής συνάρτησης,

ii) επειδή
$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a} = \frac{\Gamma(a+2)}{a(a+1)} = \ldots = \frac{\Gamma(a+k+1)}{a(a+1)\ldots(a+k)} \tag{11.4.4 - 4}$$

όπου $a > 0$ και k ακέραιος, έτσι ώστε $a+k+1 > 0$, η $(11.4.4-4)$ με την $(11.4.4-3)$ δίνουν τη δυνατότητα να οριστεί η συνάρτηση $\Gamma(a)$ για $a \neq 0$ ή αρνητικού ακεραίου αριθμού (Σχ. 11.4.4 - 1).

Μία προσέγγιση της συνάρτησης γάμμα δίνεται από τον τύπο

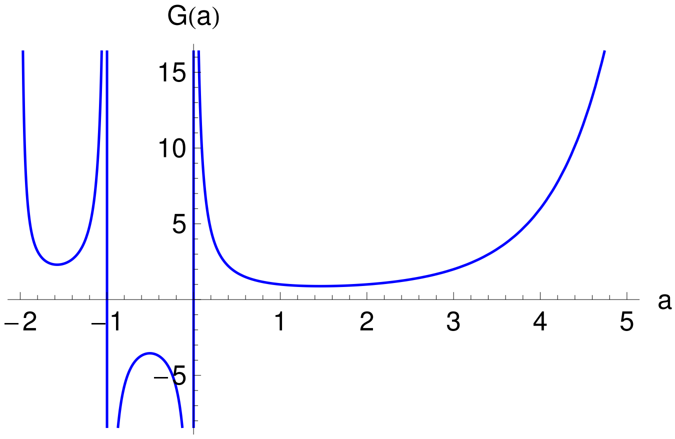
$$\Gamma(a+1) \approx \sqrt{2\pi a}\left(\frac{a}{e}\right)^2 \tag{11.4.4 - 5}$$

που είναι γνωστός ως **τύπος του Stirling**, ενώ μία ειδική τιμή της είναι η

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{11.4.4 - 6}$$

Παρατήρηση 11.4.4 - 1

Οι τιμές της συνάρτησης γάμμα δίνονται από πίνακες ή από τα μαθηματικά πακέτα MATHEMATICA και MATLAB.



Σχήμα 11.4.4 - 1: Η συνάρτηση γάμμα, όταν $a \in [-2, 5]$.

Εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος

Δίνονται στη συνέχεια μια σειρά εφαρμογών των ορισμένων ολοκληρωμάτων, που κύρια εμφανίζονται στον υπολογισμό διαφόρων χρήσιμων στις θετικές επιστήμες μεγεθών.

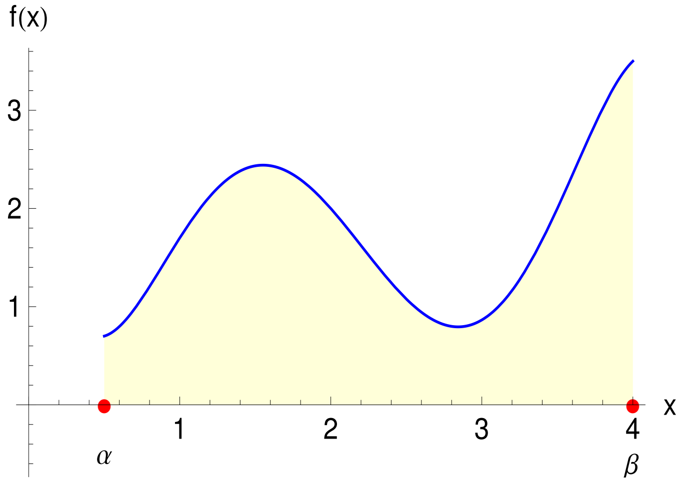
11.5 Εμβαδόν επίπεδου σχήματος

Ανάλογα με τις συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της εξίσωσης της καμπύλης από την οποία δημιουργείται το σχήμα, διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

11.5.1 Ορθογώνιες συντεταγμένες

Είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη ότι γεωμετρικά το ορισμένο ολοκλήρωμα παριστάνει εμβαδόν. Ως συνέπεια αυτής της γεωμετρικής ιδιότητάς του έχουμε τον παρακάτω ορισμό του εμβαδού:

Ορισμός 11.5.1 - 1 (εμβαδόν σχήματος). *Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Τότε το εμβαδόν που περικλείεται από τον x-άξονα, τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και την*



Σχήμα 11.5.1 - 1: Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, οπότε $E = \int_a^b f(x)\, dx$.

καμπύλη $y = f(x)$ δίνεται από τον τύπο (Σχ. 11.5.1 - 1)

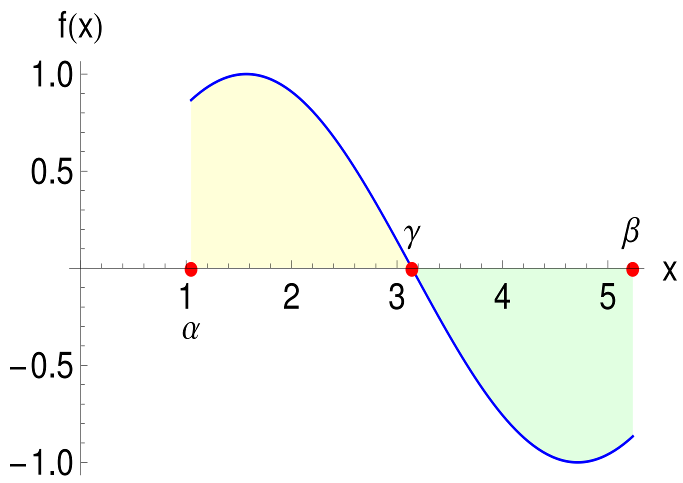
$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx. \tag{11.5.1 - 1}$$

Γενικότερα, όταν δεν είναι γνωστό το πρόσημο της $f(x)$, ισχύει ο παρακάτω ορισμός του εμβαδού:

Ορισμός 11.5.1 - 2. *Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$. Τότε το εμβαδόν που περικλείεται από τον x-άξονα, τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και την καμπύλη $y = f(x)$ δίνεται από τον τύπο (Σχ. 11.5.1 - 2)*

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\, dx. \tag{11.5.1 - 2}$$

Στις περιπτώσεις όπου το σχήμα περιορίζεται από δύο καμπύλες, τότε το εμβαδόν ορίζεται ως εξής:



Σχήμα 11.5.1 - 2: Είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \gamma]$ και $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\gamma, \beta]$. Τότε $E = \int_a^\gamma |f(x)|\,dx + \int_\gamma^\beta |f(x)|\,dx = \int_a^\gamma f(x)\,dx - \int_\gamma^\beta f(x)\,dx$.

Ορισμός 11.5.1 - 3 (γενίκευση εμβαδού σχήματος). *Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha, \beta]$. Τότε το εμβαδόν που περικλείεται από τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τις καμπύλες $f(x)$, $g(x)$ δίνεται από τον τύπο (Σχ. 11.5.1 - 3)*

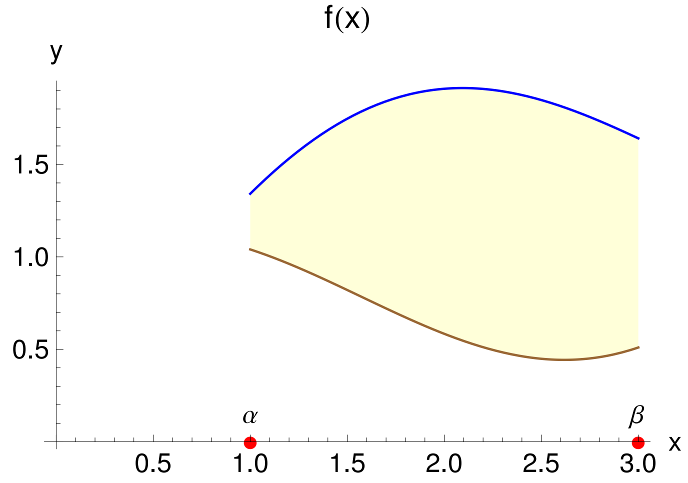
$$E = \int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|\,dx. \qquad (11.5.1 - 3)$$

Παρατήρηση 11.5.1 - 1 (εμβαδόν κύκλου)

Υπολογισμός του ολοκληρώματος $I = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

Έστω ότι ζητείται να υπολογιστεί το εμβαδόν του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα r, που όπως είναι γνωστό η εξίσωση των σημείων της περιφέρειάς του δίνεται από τον τύπο

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (11.5.1 - 4)$$



Σχήμα 11.5.1 - 3: Είναι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Τότε $E = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)]\, dx$.

Για τον υπολογισμό των άκρων ολοκλήρωσης στον τύπο $(11.5.1-3)$, πρέπει να προσδιοριστούν τα σημεία που ο κύκλος με εξίσωση $(11.5.1-4)$, τέμνει τον x-άξονα, δηλαδή όταν $y=0$. Τότε

$$x^2 = r^2 \quad \text{ή} \quad |x| = |r|, \quad \text{οπότε} \quad x = \pm r.$$

Άρα $x \in [-\alpha, \alpha]$.

Από την εξίσωση $(11.5.1-4)$ προκύπτει τότε ότι $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, οπότε έστω

$$y_1 = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{και} \quad y_2 = g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2},$$

όπου προφανώς είναι $y_1(x) \geq y_2(x)$.

Επομένως σύμφωνα με τον τύπο $(11.5.1-3)$ το ζητούμενο εμβαδόν E, που σύμφωνα με τον γνωστό τύπο της Γεωμετρίας είναι $E = \pi r^2$, θα ισούται με

$$\begin{aligned} E = \pi r^2 &= \int_{-r}^{r} [y_1(x) - y_2(x)]\, dx \\ &= \int_{-r}^{r} \left[\sqrt{r^2 - x^2} - \left(-\sqrt{r^2 - x^2}\right)\right] dx \\ &= 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx. \qquad (11.5.1 - 5) \end{aligned}$$

Από την $(11.5.1-5)$ προκύπτει ότι

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi a^2}{2}\,. \qquad (11.5.1 - 6)$$

Ο τύπος αυτός θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια του μαθήματος.

Παράδειγμα 11.5.1 - 1 (εμβαδόν έλλειψης)

Να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται από την έλλειψη (Σχ. 11.5.1 - 4)

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1. \qquad (11.5.1 - 7)$$

Λύση. Όμοια όπως και στην Παρατήρηση 11.5.1 - 1 ο προσδιορισμός των άκρων ολοκλήρωσης στον τύπο $(11.5.1-3)$ υπολογίζεται θέτοντας στην $(11.5.1-7)$ $y = 0$. Τότε

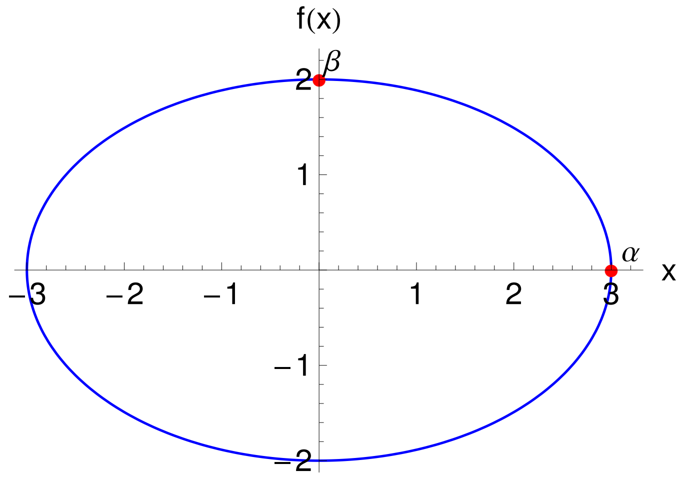
$$x^2 = \alpha^2 \quad \text{ή} \quad |x| = |\alpha|, \quad \text{οπότε} \quad x = \pm\alpha. \quad \text{Άρα} \quad x \in [-\alpha, \alpha].$$

Από την εξίσωση $(11.5.1-7)$ προκύπτει ότι

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \text{οπότε} \quad y = \pm\beta\sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}}\,.$$

Επομένως

$$y_1 = f(x) = \beta\sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}} \quad \text{και} \quad y_2 = g(x) = -\beta\sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2}}$$



Σχήμα 11.5.1 - 4: Η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

όπου προφανώς είναι $y_1(x) \geq y_2(x)$.

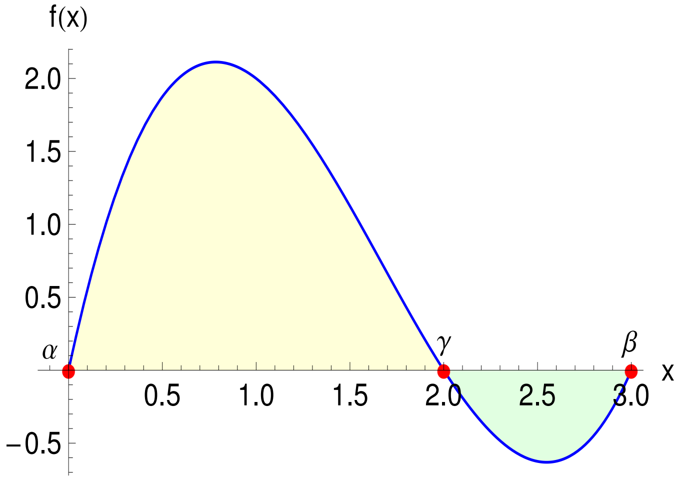
Τότε σύμφωνα με τον τύπο (11.5.1−3) το ζητούμενο εμβαδόν E θα ισούται με

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\alpha}^{\alpha} [y_1(x)-y_2(x)]\, dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}} - \left(-\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}\right)\right] dx \\ &= 2\beta \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}\, dx = \frac{2\beta}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\, dx \\ &\qquad \text{σύμφωνα με τον τύπο } (11.5.1-6) \\ &= \frac{2\beta}{\alpha}\,\frac{\pi\alpha^2}{2} = \pi\alpha\beta. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 11.5.1 - 2

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από το γράφημα της συνάρτησης $f(x)=x(x-2)(x-3)$ και τον x-άξονα (Σχ. 11.5.1 - 5).



Σχήμα 11.5.1 - 5: Παράδειγμα 11.5.1 - 2.

Πίνακας 11.5.1 - 1: Παράδειγμα 11.5.1 - 2.

	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
x	-	$+$	$+$	$+$	
$x-2$	-	-	$+$	$+$	
$x-3$	-	-	-	$+$	
$f(x)$	-	$+$	-	$+$	

Λύση. Το γράφημα της συνάρτησης τέμνει τον x-άξονα στα σημεία όπου

$$f(x)=0, \quad \text{δηλαδή τα} \quad x=0,\ 2,\ 3.$$

Επειδή δεν γνωρίζουμε το πρόσημο της $f(x)$, όταν $x\in[0,2]\cup[2,3]$ χρησιμοποιείται ο τύπος $(11.5.1-2)$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι

$$E=\int\limits_0^2 |f(x)|\,dx+\int\limits_2^3 |f(x)|\,dx. \tag{11.5.1 - 8}$$

Το πρόσημο της $f(x)$ υπολογίζεται στον Πίνακα 11.5.1 - 1.

Επομένως, επειδή

$$f(x)\geq 0, \quad \text{όταν} \quad x\in[0,2] \quad \text{και} \quad f(x)\leq 0, \quad \text{όταν} \quad x\in[2,3],$$

ο τύπος $(11.5.1-8)$ γράφεται

$$\begin{aligned} E &= \int_0^2 |f(x)|\,dx + \int_2^3 |f(x)|\,dx \\ &= \int_0^2 x(x-2)(x-3)\,dx \quad - \quad \int_2^3 x(x-2)(x-3)\,dx \\ &= \left[3x^2 - \frac{5x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^2 - \left[3x^2 - \frac{5x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_2^3 \\ &= \frac{8}{3} - \left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{37}{12}\,. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 11.5.1 - 3

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τις καμπύλες $y_1 = 2x^2 + 10$ και $y_2 = 4x + 16$, όταν $x \in [-2, 5]$ (Σχ. $11.5.1-6$).

Λύση. Αρχικά υπολογίζονται τα σημεία τομής των καμπυλών

$$y_1 = 2x^2 + 10 \quad \text{και} \quad y_2 = 4x + 16 \tag{11.5.1 - 9}$$

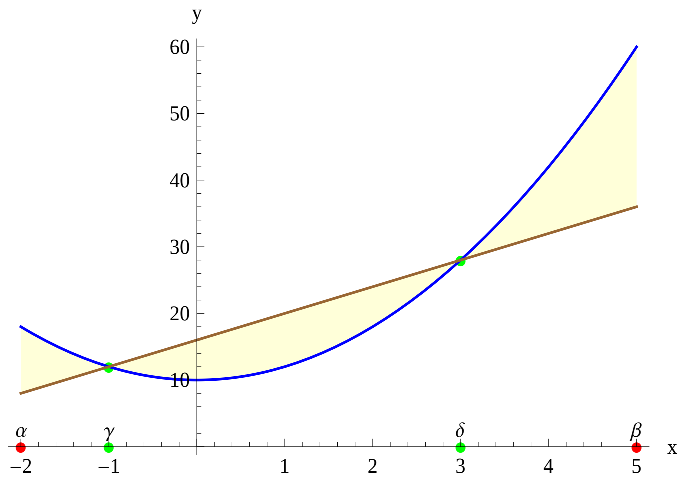
ως εξής:

$$y_1(x) = y_2(x), \quad \text{οπότε} \quad 2x^2 + 10 = 4x + 16, \quad \text{δηλαδή}$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0. \quad \text{Άρα} \quad x = -1,\ 3.$$

Έστω $\gamma(-1, 0)$ και $\delta(3, 0)$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(11.5.1-3)$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\begin{aligned} E &= \int_{-2}^{-1} |y_1(x) - y_2(x)|\,dx + \int_{-1}^{3} |y_1(x) - y_2(x)|\,dx \\ &\quad + \int_3^5 |y_1(x) - y_2(x)|\,dx. \end{aligned} \tag{11.5.1 - 10}$$



Σχήμα 11.5.1 - 6: Παράδειγμα 11.5.1 - 3.

Για να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα στην (11.5.1—10), πρέπει να απαλειφθούν τα απόλυτα. Αυτό γίνεται εξετάζοντας το πρόσημο της διαφοράς $y_1(x) - y_2(x)$.

Έστω

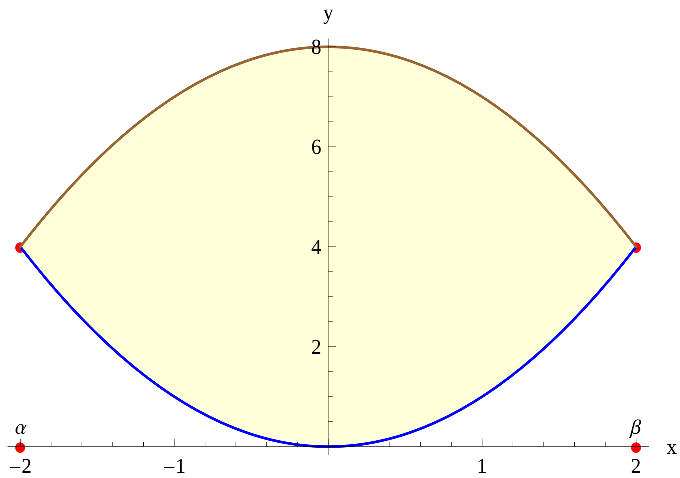
$$y_1(x) - y_2(x) \geq 0 \quad \text{ή λόγω της } (11.5.1-9) \quad (x+1)(x-3) \geq 0,$$

δηλαδή

$$x \leq -1 \quad \text{ή} \quad x \geq 3.$$

Τότε η (11.5.1 − 10) γράφεται

$$\begin{aligned}
E &= \int_{-2}^{-1} [y_1(x) - y_2(x)]\, dx + \int_{-1}^{3} [y_2(x) - y_1(x)]\, dx + \int_{3}^{5} [y_1(x) - y_2(x)]\, dx \\
&= \int_{-2}^{-1} \left(2x^2 - 4x - 6\right)\, dx + \int_{-1}^{3} \left(-2x^2 + 4x + 6\right)\, dx + \int_{3}^{5} \left(2x^2 - 4x - 6\right)\, dx \\
&= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} - 6x\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 6x\right]_{-1}^{3} + \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} - 6x\right]_{3}^{5} \\
&= \frac{14}{3} + \frac{64}{3} + \frac{64}{3} = \frac{142}{3}\,.
\end{aligned}$$



Σχήμα 11.5.1 - 7: Παράδειγμα 11.5.1 - 4. Η μπλε καμπύλη ορίζει την $y_1(x) = x^2$.

■

Παράδειγμα 11.5.1 - 4

Όμοια το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τις καμπύλες

$$y_1(x) = x^2 \quad \text{και} \quad y_2(x) = 8 - x^2 \quad (\Sigma\chi.\ 11.5.1 - 7).$$

Λύση. Τα κοινά σημεία τομής των δύο καμπυλών υπολογίζονται θέτοντας

$$y_1(x) = y_2(x), \quad \text{οπότε} \quad x^2 = 8 - x^2. \quad \text{Άρα} \quad x = \pm 2.$$

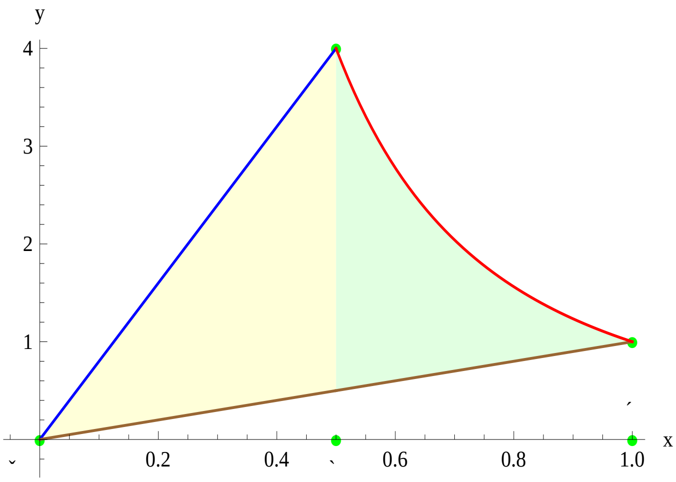
Στη συνέχεια υπολογίζεται το πρόσημο της διαφοράς $y_1(x) - y_2(x)$.

Έστω

$$y_1(x) - y_2(x) \geq 0 \quad \text{ή} \quad 2x^2 - 8 \geq 0, \quad \text{οπότε} \quad (x+2)(x-2) \geq 0.$$

Άρα

$$y_1(x) - y_2(x) \leq 0, \quad \text{όταν} \quad -2 \leq x \leq 2.$$



Σχήμα 11.5.1 - 8: Παράδειγμα 11.5.1 - 5. Η καφέ καμπύλη δείχνει το γράφημα της $y_2(x) = x$, η μπλε της $y_1 = 8x$ και η κόκκινη της $y_3(x) = \frac{1}{x^2}$.

Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(11.5.1 - 8)$ το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με

$$
\begin{aligned}
E &= \int_{-2}^{2} [y_2(x) - y_1(x)]\, dx = \int_{-2}^{2} \left(8 - 2x^2\right)\, dx \\
&= 8x - \frac{2x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{64}{3}\,.
\end{aligned}
$$

■

Παράδειγμα 11.5.1 - 5

Όμοια το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τις καμπύλες

$$y_1(x) = 8x, \quad y_2(x) = x \quad \text{και} \quad y_3(x) = \frac{1}{x^2} \quad (\Sigma\chi.\ 11.5.1 - 8).$$

Λύση. Τα κοινά σημεία και των τριών καμπυλών υπάρχουν μόνο για $x \geq 0$, ενώ η συνάρτηση $y_3(x)$ ορίζεται για $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Προφανώς οι καμπύλες (ευθείες) $y_1(x)$ και $y_2(x)$ τέμνονται στο σημείο $(0, 0)$, δηλαδή στην αρχή των αξόνων. Το κοινό σημείο, έστω A, της $y_1(x)$ και $y_3(x)$ υπολογίζεται θέτοντας

$$y_1(x) = y_3(x) \quad \text{ή} \quad 8x = \frac{1}{x^2}\,, \quad \text{οπότε} \quad x = \frac{1}{2}\,,$$

(οι άλλες δύο ρίζες δεν λαμβάνονται υπόψη), ενώ το κοινό σημείο, έστω B, της $y_2(x)$ και $y_3(x)$ θέτοντας

$$y_2(x) = y_3(x) \quad \text{ή} \quad x = \frac{1}{x^2}\,, \quad \text{οπότε} \quad x = 1$$

όπου όμοια οι άλλες δύο ρίζες δεν λαμβάνονται υπόψη.

Έστω $E = E_1 + E_2$ το ζητούμενο εμβαδόν. Επειδή το σημείο $x = 0$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της $y_3(x)$, το E δεν θα προκύψει από συνδυασμό της $y_3(x)$ με την $y_1(x)$ ή την $y_2(x)$ και άκρο ολοκλήρωσης το 0.

Επομένως

- το εμβαδόν E_1 θα πρέπει να ορίζεται από την $y_1(x) = 8x$ και την $y_2(x) = x$ με $x \in [0, 0.5]$, όπου προφανώς $y_1(x) \geq y_2(x)$, δηλαδή

$$E_1 = \int_0^{0.5} [y_1(x) - y_2(x)]\; dx = 7\int_0^{0.5} x\, dx = \frac{7}{8}$$

- και το εμβαδόν E_2 θα ορίζεται από την $y_3(x) = \frac{1}{x^2}$ και την $y_2(x) = x$ με $x \in [0.5, 1]$, όπου προφανώς $y_3(x) \geq y_2(x)$, δηλαδή

$$\begin{aligned} E_2 &= \int_{0.5}^{1} [y_3(x) - y_2(x)]\; dx = \int_{0.5}^{1} \left(\frac{1}{x^2} - x\right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{x} - \frac{x^2}{2}\right]_{0.5}^{1} = \frac{5}{8}\,. \end{aligned}$$

Άρα

$$E = E_1 + E_2 = \frac{3}{2}\,.$$

■

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του σχήματος που περικλείεται από

i) την παραβολή $y = 4x - x^2$ και τον x-άξονα,

ii) την καμπύλη $y = \ln x$, τον άξονα των x και την ευθεία $x = e$,

iii) την καμπύλη $y = x(x-1)(x-2)$ και τον x-άξονα,

iv) την καμπύλη $y^2 = x$ και τις ευθείες $y = 1$ και $y = 8$,

v) από μία ημιπερίοδο της ημιτονικής καμπύλης $y = \sin x$ και του x-άξονα,

vi) την καμπύλη $y = \tan x$, του άξονα των x και της ευθείας $x = \pi/3$,

vii) την υπερβολή $xy = m^2$, των κάθετων ευθειών $x = a$ και $x = 3a$ με $a > 0$ και του x-άξονα,

viii) την **καμπύλη Agnesi** με εξίσωση $y = a^2/\left(x^2 + a^2\right)$ και του x-άξονα,

ix) την καμπύλη $y = x^2$, την ευθεία $y = 8$ και τον y-άξονα,

x) από τις παραβολές $y^2 = 2px$ και $x^2 = 2py$,

xi) την παραβολή $y = x^2$ και την ευθεία $y = 3 - 2x$,

xii) τις παραβολές $y = x^2$, $y = x^2/2$ και της ευθείας $y = 2x$,

xiii) τις παραβολές $y = x^2/3$ και $y = 4 - 2x^2/3$.

2. Όμοια του σχήματος που περικλείεται από την καμπύλη $y = 1/\left(1 + x^2\right)$ και την παραβολή $y = x^2/2$.

3. Όμοια του σχήματος που περικλείεται από

i) τις καμπύλες $y = e^x$, $y = e^{-x}$ και την ευθεία $x = 1$,

ii) από την υπερβολή $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ και την ευθεία $x = 2a$.

4. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της **αστεροειδούς καμπύλης** με εξίσωση

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

5. Όμοια του σχήματος που περικλείεται από

i) την καμπύλη $y = a\cosh(x/a)$, του άξονα των y και της ευθείας $y = a\left(e^2 + 1\right)/2e$,

ii) την καμπύλη $a^2y^2 = x^2\left(a^2 - x^2\right)$.

6. Όμοια του σχήματος που περιέχεται στο εσωτερικό της καμπύλης

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^{2/3} = 1.$$

7. Όμοια του σχήματος που ορίζεται από

i) την ισοσκελή υπερβολή $x^2 - y^2 = 9$, του άξονα των x και της διαμέτρου που διέρχεται από το σημείο $(5, 4)$,

ii) την καμπύλη $y = 1/x^2$, του άξονα των x και της ευθείας $x = 1$, όταν $x > 1$,

iii) την καμπύλη $y^2 = x^3/(2a - x)$ και την ασυμπτωτική της ευθεία $x = 2a$ με $a > 0$.

8. Να υπολογιστεί το εμβαδόν των δύο τμημάτων στα οποία ο κύκλος $x^2 + y^2 = 8$ τέμνεται από την παραβολή $y^2 = 2x$.

9. Όμοια του σχήματος που περιέχεται μεταξύ του κύκλου $x^2 + y^2 = 16$ και της παραβολής $x^2 = 12(y - 1)$.

Απαντήσεις

1. i) Σημεία $x = 0,\ 4$. Σύμφωνα με τον τύπο $(11.5.1 - 1)$: $E = \frac{32}{3}$. ii) Σημεία $x = 1,\ e$ $E = 1$. iii) Σημεία $x = 0,\ 1,\ 2$. Σύμφωνα με τον τύπο $(11.5.1 - 2)$: $E = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. iv) Σημείο τομής $y = \sqrt{x}$ και $y = 1$ το 1. Όμοια με $y = 8$ το 64. Τότε

$$E = 8 \cdot 64 - \int_0^{64} \sqrt{x}\, dx - \left(1 - \int_0^1 \sqrt{x}\, dx\right) = \frac{511}{3}.$$

v) Σημεία $x = 0,\ \pi$. $E = 2$. vi) Σημεία $x = 0,\ \pi/3$. $E = \ln 2$. vii) Σημεία $x = a,\ 3a$. $E = m^2 \ln 3$. viii) Σημεία $x = 0,\ +\infty$. $E = a \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{a\pi}{2}$. ix) Σημεία $x = -2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}$. Συμμετρία ως προς τον y-άξονα. Σύμφωνα με τον τύπο $(11.5.1 - 2)$:

$$E = 2\left(2\sqrt{2} \cdot 8 - \int_0^{2\sqrt{2}} x^2\, dx\right) = \frac{64\sqrt{2}}{3}.$$

x) Σημεία $x = 0,\ 2\sqrt{2}$. Σύμφωνα με τον τύπο $(11.5.1 - 2)$: $E = 4\sqrt{2} - \frac{8\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.
xi) Σημεία $x = -3,\ 1$. Όμοια με τον τύπο $(11.5.1 - 2)$: $E = 20 - \frac{28}{3} = \frac{32}{3}$.

xii) Έστω $f_1(x)=\frac{x^2}{2}$, $\quad f_2(x)=x^2\text{quad}$ και $\quad f_3(x)=2x$. Τότε με τον τύπο $(11.5.1-2)$:

$$E=\int_0^2\left[f_2(x)-f_1(x)\right]\,dx+\int_2^4\left[f_3(x)-f_1(x)\right]\,dx=\frac{4}{3}+\frac{8}{3}=4.$$

xiii) Έστω $f_1(x)=\frac{x^2}{3}$ και $f_2(x)=4-\frac{2x^2}{3}$. Σημεία $x=-2,\,2$. Με τον τύπο $(11.5.1-2)$:

$$E=\int_0^2\left[f_2(x)-f_1(x)\right]\,dx=\frac{16}{9}-\frac{112}{9}=\frac{32}{3}\,.$$

2. Έστω $f_1(x)=\frac{1}{1+x^2}$ και $f_2(x)=\frac{x^2}{2}$. Σημεία $x=-1,\,1$. Με τον τύπο $(11.5.1-2)$:

$$E=\int_0^2\left[f_1(x)-f_2(x)\right]\,dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\approx 1.237\,463.$$

3. i) Έστω $f_1(x)=e^x$ και $f_2(x)=e^{-x}$. Σημεία $x=0$ και ευθεία $x=1$. Με τον τύπο $(11.5.1-2)$:

$$E=\int_0^1\left[f_1(x)-f_2(x)\right]\,dx=e-1-\frac{e-1}{e}\approx 1.086\,161.$$

ii) [14]Η υπερβολή τέμνει τον x-άξονα στα σημεία $x=\pm a$. Είναι $y=f(x)=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. Λόγω συμμετρίας είναι $E=4E_1$, όταν

$$\begin{aligned}E_1 &= \int_a^{2a} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\,ab\left[2\sqrt{3}-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right], \quad \text{οπότε}\\ E &= 2ab\left[2\sqrt{3}-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right]\approx 4.294\,287\,ab,\end{aligned}$$

όταν εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση αποδεικνύεται ότι

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{1}{2}a^2\ln\left[2\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right].$$

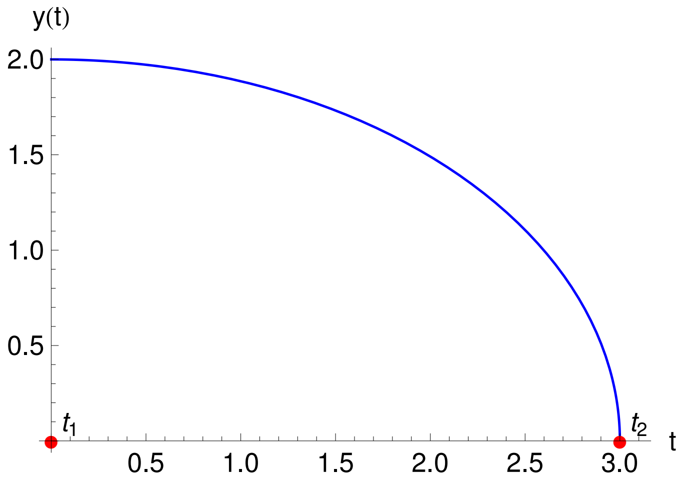
Ανάλογα και οι υπόλοιπες ασκήσεις.

11.5.2 Παραμετρική εξίσωση

Ορισμός 11.5.2 - 1. *Αν μία καμπύλη ορίζεται με παραμετρική εξίσωση της μορφής*

$$x=x(t)\quad \textit{και}\quad y=y(t),\quad \textit{όταν}\quad t\in\left[t_1,t_2\right],$$

[14]Βλέπε Μάθημα *Αναλυτική Γεωμετρία - Υπερβολή.*



Σχήμα 11.5.2 - 1: Παράδειγμα 11.5.2 - 1. Το πρώτο τεταρτημόριο της έλλειψης $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

τότε το εμβαδόν E του καμπυλόγραμμου τραπεζίου που ορίζεται από την καμπύλη, τις κάθετες ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα των x, ισούται με

$$E=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt, \tag{11.5.2 - 1}$$

όταν $y(t)\geq 0$ για κάθε $t\in[t_1,t_2]$ και οι τιμές t_1 και t_2 προκύπτουν από την εξίσωση $x=x\,(t)$.

Παράδειγμα 11.5.2 - 1

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της έλλειψης που εκφράζεται με την παραμετρική εξίσωση

$$x=\alpha\cos t \quad \text{και} \quad y=\beta\sin t. \tag{11.5.2 - 2}$$

Λύση. Λόγω της συμμετρίας της έλλειψης αρκεί να υπολογιστεί το εμβαδόν ενός τεταρτημορίου αυτής (Σχ. 11.5.2 - 1) και το αποτέλεσμα να πολλαπλασιαστεί επί 4.

Θέτοντας στην 1η εξίσωση ($x=\alpha\cos t$) της $(11.5.2-2)$ διαδοχικά $x=0$ και $x=a$ προκύπτουν ως όρια ολοκλήρωσης τα $t_1=\pi/2$ και $t_2=0$, ενώ είναι

$y > 0$ για κάθε $t \in [0, \pi/2]$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(11.5.2-1)$ είναι

$$\int_{\pi/2}^{0} \beta \sin\alpha\,(-\sin t)\,dt = \alpha\beta \int_{0}^{\pi/2} \sin^2 t\,dt = \frac{\pi\alpha\beta}{4}\,.$$

Άρα $\quad E = \pi\alpha\beta.$

Παρατήρηση 11.5.2 - 1

Ο παραπάνω τρόπος υπολογισμού του εμβαδού της έλλειψης με τη βοήθεια της παραμετρικής παράστασής της είναι εμφανώς ευκολότερος του αντίστοιχου τρόπου με τις ορθογώνιες συντεταγμένες (Παράδειγμα 11.5.1 - 1). Αυτό είναι μια απόδειξη της χρησιμότητας των παραμετρικών παραστάσεων των καμπυλών. ■

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του σχήματος που περιέχεται στο εσωτερικό της **αστεροειδούς καμπύλης**[15] (astroid curve) με παραμετρική εξίσωση (Σχ. 11.5.2 - 2)

$$x = a\cos^3 t \quad \text{και} \quad y = b\sin^3 t.$$

2. Όμοια του σχήματος που περικλείεται από

i) τον άξονα των x και ένα τόξο της **κυκλοειδούς καμπύλης**[16] (cycloid curve) με παραμετρική εξίσωση (Σχ. 11.5.2 - 3a)

$$x = a(t - \sin t) \quad \text{και} \quad y = a(1 - \cos t),$$

ii) τον κλάδο της καμπύλης με παραμετρική εξίσωση (γενίκευση της κυκλοειδούς καμπύλης)

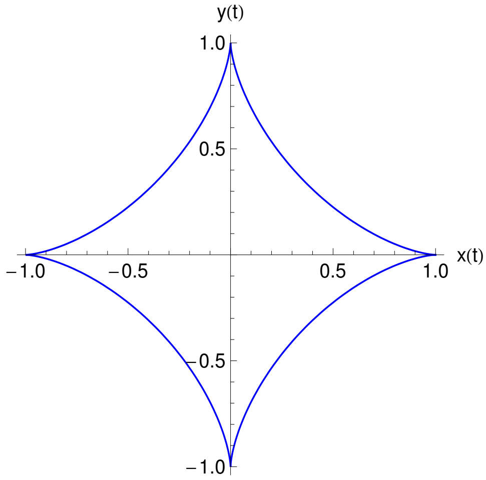
$$x = at - b\sin t \quad \text{και} \quad y = a - b\cos t, \quad \text{όπου } 0 < b \le a$$

και της εφαπτόμενής της στα χαμηλότερα σημεία της (Σχ. 11.5.2 - 3b),

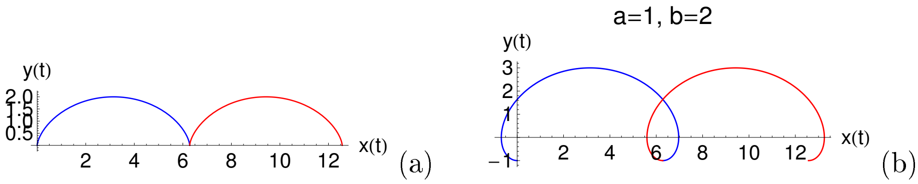
---

[15] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Astroid*
Επίσης *mathworld.wolfram.com/Astroid.html*

[16] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Cycloid*
Επίσης *mathworld.wolfram.com/Cycloid.html*



Σχήμα 11.5.2 - 2: Η αστεροειδής καμπύλη, όταν $a = b = 1$.



Σχήμα 11.5.2 - 3: (a) Η κυκλοειδής καμπύλη και (b) η γενίκευσή της.

iii) την **καρδιοειδή καμπύλη** με παραμετρική εξίσωση

$$x = a(2\cos t - \cos 2t) \quad \text{και} \quad y = a(2\sin t - \sin 2t).$$

Απαντήσεις

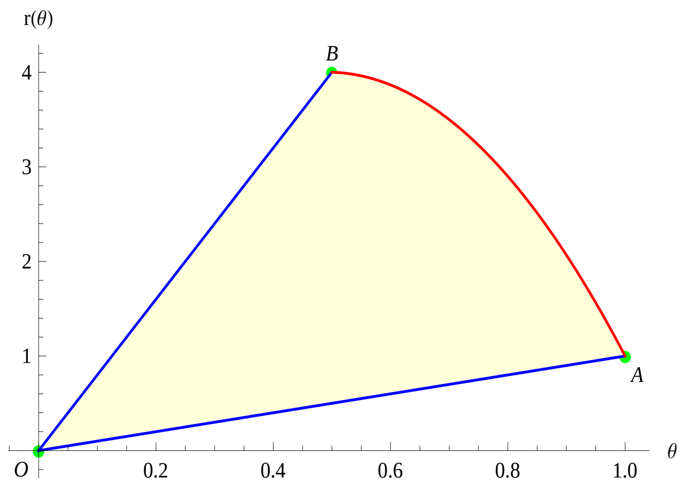
1. Σύμφωνα με την $(11.5.2-1)$ και λόγω συμμετρίας είναι

$$E = 4\int_0^{\pi/2}\left(-3ab\cos^2 t\sin^4 t\right)\,dt = \frac{3\pi ab}{8}\,.$$

2. i) Όμοια $E = \alpha^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,dt = 3a^2\pi$,

ii) $E = \int_0^{2\pi} (a - b\cos t)^2\,dt = \left(2a^2 + b^2\right)\pi$,

iii) $E = -2\alpha^2 \int_0^{2\pi} (\sin t - sin2t)\,(2\sin t - sin2t)\,dt = 12a^2\pi$.



Σχήμα 11.5.3 - 1: εμβαδόν σχήματος σε πολικές συντεταγμένες.

11.5.3 Πολικές συντεταγμένες

Ορισμός 11.5.3 - 1. *Έστω ότι*

$$r = r(\theta), \quad \textit{όταν} \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

είναι η εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες του τμήματος (Σχ. 11.5.3 - 1), που ορίζεται από την αρχή των αξόνων και τα σημεία $A\,(r, \theta_1)$ και $B\,(r, \theta_2)$. Τότε το εμβαδόν E του σχήματος AOB δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$E = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta)\, d\theta. \tag{11.5.3 - 1}$$

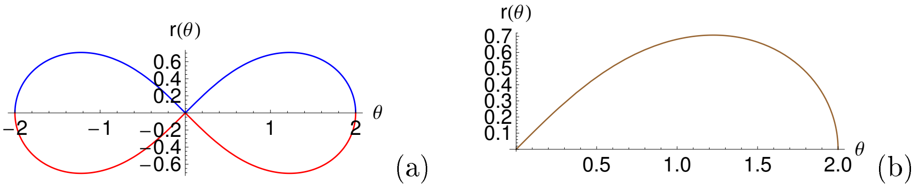
Παράδειγμα 11.5.3 - 1

Να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται από τους **λημνίσκους Bernoulli** (Bernoulli's lemniscate)[17] (Σχ. 11.5.3 - 2a) με εξίσωση

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

Λύση. Λόγω της συμμετρίας της καμπύλης υπολογίζεται μόνο το εμβαδόν

[17]Βλέπε: http : //en.wikipedia.org/wiki/Lemniscate_of_Bernoulli
και επίσης *mathworld.wolfram.com/Lemniscate.html*



Σχήμα 11.5.3 - 2: Ο λημνίσκος του Bernoulli $r^2 = 2\cos 2\theta$, όταν (a) $\theta \in [0, \pi]$ (μπλε) και $\theta \in [\pi, 2\pi]$ (κόκκινη καμπύλη). (b) $\theta \in [0, \pi/4]$.

του 1ου τεταρτημορίου (Σχ. 11.5.3 - 2b), οπότε

$$\frac{1}{4}E = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta \, d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{4}\,.$$

Άρα $\quad E = a^2$. ∎

Άσκηση

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του σχήματος που ορίζεται από την

i) καμπύλη $r = a \sin 3\theta$ (Σχ.11.5.3 - 3a),

ii) καμπύλη $r = 2a\cos 3\theta$ που είναι στο εξωτερικό του κύκλου με ακτίνα $r = 2a$, όταν $a > 0$ (Σχ.11.5.3 - 3b),

iii) καμπύλη $r = 2 + \cos\theta$,

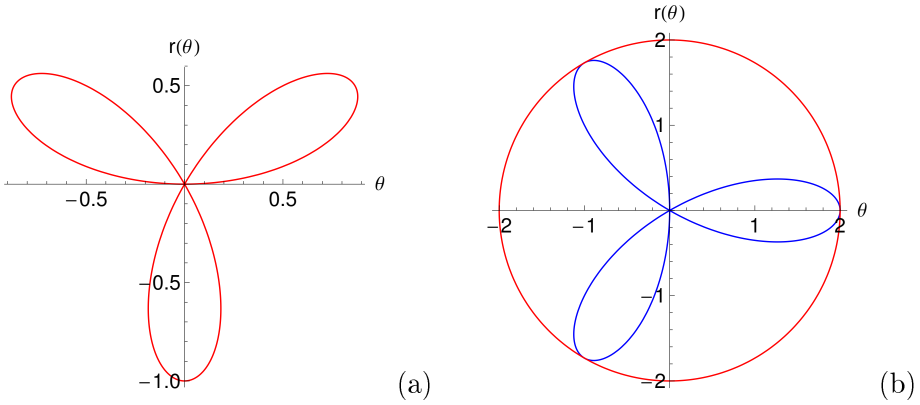
iv) παραβολή $r = a/\cos^2(\theta/2)$ και τις δύο ημιευθείες $\theta = \pi/4$ και $\theta = \pi/2$,

v) έλλειψη με εξίσωση $r = p/(1 + \varepsilon\cos\theta)$, όπου $\varepsilon < 1$.

Απαντήσεις

i) Σύμφωνα με την (11.5.3 − 1) είναι

$$E = a^2 \int_0^{\pi} \sin^2 3\theta \, d\theta = \frac{\pi a^2}{2}\,,$$



Σχήμα 11.5.3 - 3: Ασκήσεις Παραγράφου 11.5.3, όταν $a = 1$ και $\theta \in [0, \pi]$: (a) η (i) και (b) η (ii).

ii) Το εμβαδόν του κύκλου είναι $4\pi a^2$. Άρα το εμβαδόν του εσωτερικού μέρους είναι

$$E = 4\pi a^2 - a^2 \int_0^{\pi} \cos^2 3\theta \, d\theta = 2\pi a^2 .$$

Ανάλογα και οι υπόλοιπες ασκήσεις.

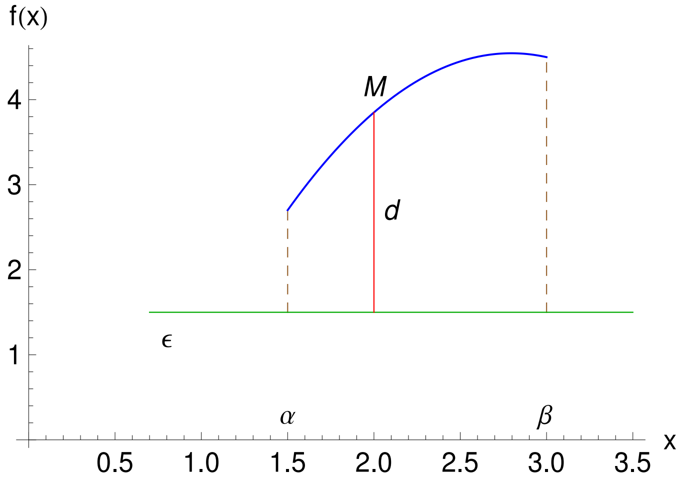
11.6 Εμβαδόν επιφάνειας από περιστροφή

[18]

11.6.1 Ορθογώνιες συντεταγμένες

Ορισμός 11.6.1 - 1. *Έστω ότι η συνάρτηση $f \,|\, [\alpha, \beta]$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Αν ϵ είναι μία ευθεία που δεν τέμνει το γράφημα της συνάρτησης $y = f(x)$ εκτός ίσως από τα σημεία α, β και $d = \delta(x)$ η απόσταση τυχόντος σημείου $M(x, f(x))$ του διαγράμματος της $f(x)$ από την ϵ (Σχ. 11.6.1 - 1), τότε το εμβαδόν E της επιφάνειας που προκύπτει από την περιστροφή του καμπυλόγραμμου τραπεζίου που ορίζεται*

[18] Βλέπε επίσης βιβλιογραφία και
https://en.wikipedia.org/wiki/Surface_of_revolution
Επίσης *mathworld.wolfram.com/Revolution.html*



Σχήμα 11.6.1 - 1: Ορισμός 11.6.1 - 1: η συνάρτηση $f(x)$ σε ορθογώνιες συντεταγμένες και ο άξονας περιστροφής ϵ (πράσινη ευθεία).

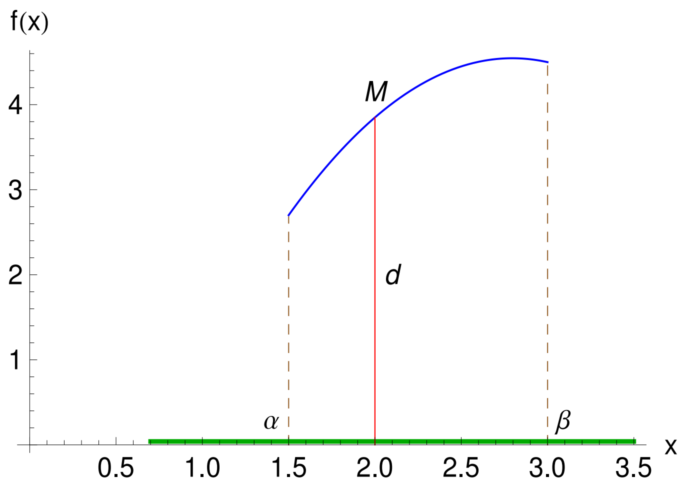
από το τόξο του διαγράμματος της $f(x)$, όταν $x \in [\alpha, \beta]$, τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ γύρω από την ευθεία ϵ δίνεται από τον τύπο

$$E = 2\,\pi \int_{\alpha}^{\beta} \delta(x) \sqrt{1 + \left[\frac{d\,f(x)}{dx}\right]^2}\, dx. \qquad (11.6.1 - 1)$$

Ο Ορισμός 11.6.1 - 1 στην περίπτωση που η ευθεία ϵ συμπίπτει με τον x-άξονα γράφεται ως εξής:

Ορισμός 11.6.1 - 2. *Έστω ότι η συνάρτηση $f\,|\,[\alpha, \beta]$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Αν $d = \delta(x) = f(x)$ η απόσταση τυχόντος σημείου $M(x, f(x))$ του διαγράμματος της $f(x)$ από τον x-άξονα (Σχ. 11.6.1 - 2), τότε το εμβαδόν E της επιφάνειας που προκύπτει από περιστροφή του καμπυλόγραμμου τραπεζίου που ορίζεται από το τόξο του διαγράμματος της $f(x)$, όταν $x \in [\alpha, \beta]$, τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ γύρω από τον x-άξονα δίνεται από τον τύπο*

$$E = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sqrt{1 + \left[\frac{df(x)}{dx}\right]^2}\, dx. \qquad (11.6.1 - 2)$$



Σχήμα 11.6.1 - 2: Ορισμός 11.6.1 - 2: η συνάρτηση $f(x)$ σε ορθογώνιες συντεταγμένες και ο x-άξονας περιστροφής (πράσινη ευθεία).

Σημείωση 11.6.1 - 1

Αν η εξίσωση της καμπύλης δίνεται διαφορετικά, τότε το εμβαδόν της επιφάνειας E δίνεται από τον τύπο $(11.6.1-2)$ αλλάζοντας κατάλληλα τις μεταβλητές.

Παράδειγμα 11.6.1 - 1

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που σχηματίζεται από περιστροφή γύρω από τον x-άξονα ενός βρόγχου της καμπύλης

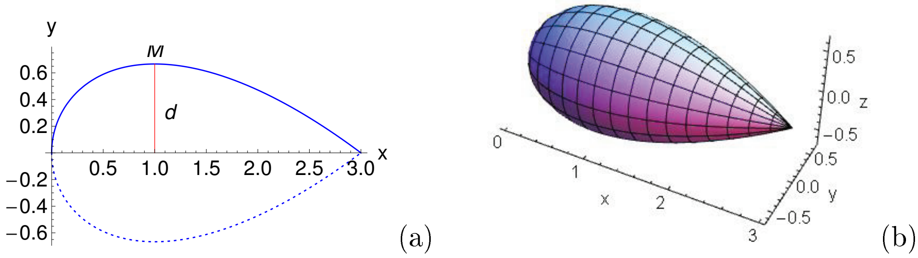
$$y^2 = \frac{1}{9}\, x(3-x)^2.$$

Λύση. Η καμπύλη τέμνει τον x-άξονα στα σημεία $x = 0,\, 3$. Για το άνω μέρος της καμπύλης (Σχ. 11.6.1 - 4a), όταν $0 \leq x \leq 3$, έχουμε

$$y = f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}\,(3-x),$$

ενώ

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}\,,$$



Σχήμα 11.6.1 - 3: Παράδειγμα 11.6.1 - 1: (a) Ο βρόχος της καμπύλης $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}\,(3-x)$ μπλε συνεχής και της $y = -\frac{1}{3}\sqrt{x}\,(3-x)$ μπλε διακεκομμένη καμπύλη και (b) η προκύπτουσα επιφάνεια εκ περιστροφής.

Τότε προφανώς είναι

$$d = \delta(x) = f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}\,(3-x)\,.$$

Αντικαθιστώντας στον τύπο $(11.6.1-2)$ το εμβαδόν της επιφάνειας είναι

$$E = 2\pi\,\frac{1}{6}\int\limits_0^3 (3-x)(x+1)\,dx = 3\pi.$$

■

Παράδειγμα 11.6.1 - 2

Όμοια το εμβαδόν της επιφάνειας, που σχηματίζεται από περιστροφή γύρω από τον άξονα $x = 1$ της καμπύλης

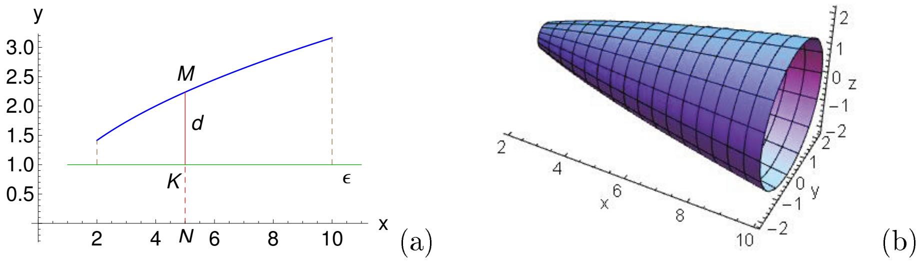
$$y = \sqrt{x}, \quad \text{όταν} \quad x \in [2, 10].$$

Λύση. Είναι

$$y = f(x) = \sqrt{x} \quad \text{και} \quad \sqrt{1 + \left[\frac{df(x)}{dx}\right]^2} = \frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}\,,$$

ενώ

$$d = \delta(x) = |MN| - |KN| = f(x) - 1 = \sqrt{x} - 1.$$



Σχήμα 11.6.1 - 4: Παράδειγμα 11.6.1 - 1: (a) Η καμπύλη $y = \sqrt{x}$ μπλε καμπύλη και ο άξονας περιστροφής $x = 1$ (πράσινη ευθεία). (b) Η προκύπτουσα επιφάνεια εκ περιστροφής.

Αντικαθιστώντας στον τύπο $(11.6.1 - 1)$ το εμβαδόν της επιφάνειας είναι

$$E = 2\pi \, \frac{1}{2} \int\limits_{2}^{10} \left(\sqrt{x} - 1\right) \frac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x}} \, dx \approx 71.811\,630.$$

■

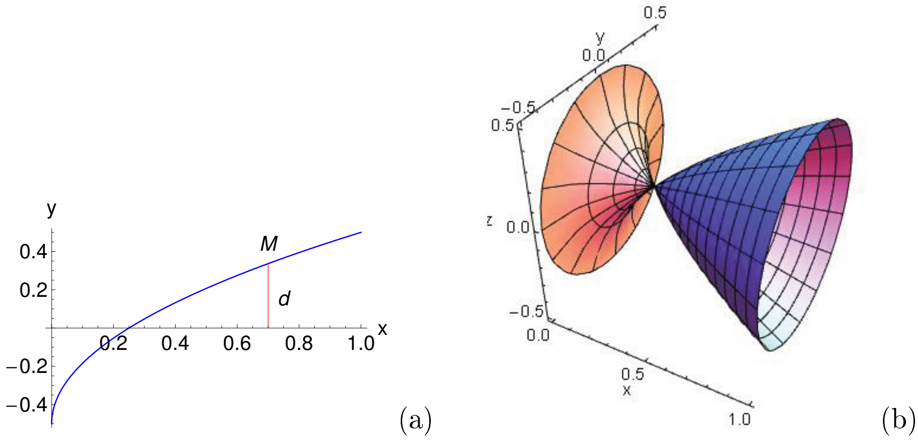
Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας, που σχηματίζεται από περιστροφή γύρω από τον x- άξονα ενός τόξου της καμπύλης (Σχ. 11.6.1 - 5)

$$y = \sqrt{x} - \frac{1}{2}, \quad \text{όταν} \quad x \in [0, 1].$$

2. Όμοια το εμβαδόν της επιφάνειας από περιστροφή γύρω από τον x- άξονα ενός τόξου της καμπύλης (Σχ. 11.6.1 - 6)

$$y = e^{-x}, \quad \text{όταν} \quad x \in [0, +\infty).$$



Σχήμα 11.6.1 - 5: Άσκηση 1 Παραγράφου 11.6.1: (a) Η καμπύλη $y = \sqrt{x} - \frac{1}{2}$ μπλε καμπύλη, όταν $x \in [0, 1]$ και (b) η προκύπτουσα επιφάνεια εκ περιστροφής γύρω από τον x-άξονα.

Απαντήσεις

1. Είναι $\delta(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{2}$. Άρα

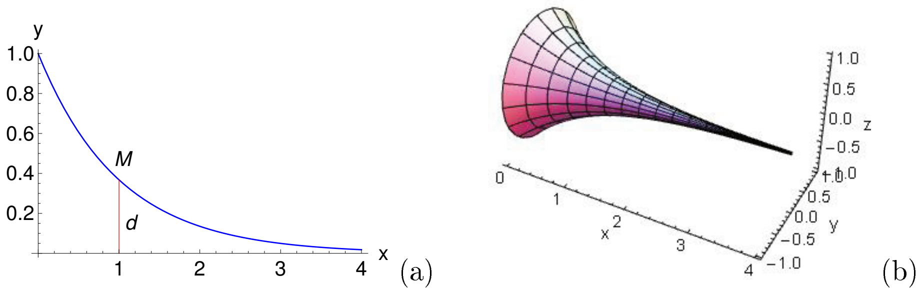
$$\begin{aligned} E &= 2\pi \left[\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{1+4x}}{2} - \frac{\sqrt{1+4x}}{2\sqrt{x}} \right) dx \right] \\ &= \frac{\pi}{6} (1+4x)^{3/2} \Big|_0^1 - \frac{\pi}{2} \left[\sqrt{x(1+4x)} + \frac{1}{2} \sinh^{-1}\left(2\sqrt{x}\right) \right] \Big|_0^1 \\ &\approx 0.684\,178. \end{aligned}$$

2. Είναι $\delta(x) = e^{-x}$. Με παραγοντική ολοκλήρωση

$$\begin{aligned} I &= \int e^{-x} \sqrt{1+e^{-2x}}\, dx = -\int \sqrt{1+e^{-2x}}\, d\,\overbrace{e^{-x}}^{u} = -\int \sqrt{1+u^2}\, d\,u \\ &= -\frac{1}{2} \left(u\sqrt{1+u^2} + \sinh^{-1} u \right) = -\frac{1}{2} \left[e^{-x} \sqrt{1+e^{-2x}} + \sinh^{-1}\left(e^{-x}\right) \right]. \end{aligned}$$

Τότε, επειδή $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, είναι

$$E = 2\pi \int e^{-x} \sqrt{1+e^{-2x}}\, dx = -\pi\, I \Big|_0^{+\infty} \approx 7.212.$$



Σχήμα 11.6.1 - 6: Άσκηση 2 Παραγράφου 11.6.1: (a) Η καμπύλη $y = e^{-x}$ μπλε καμπύλη, όταν $x \in [0,4]$ και (b) η προκύπτουσα επιφάνεια εκ περιστροφής γύρω από τον x-άξονα.

11.6.2 Παραμετρική εξίσωση

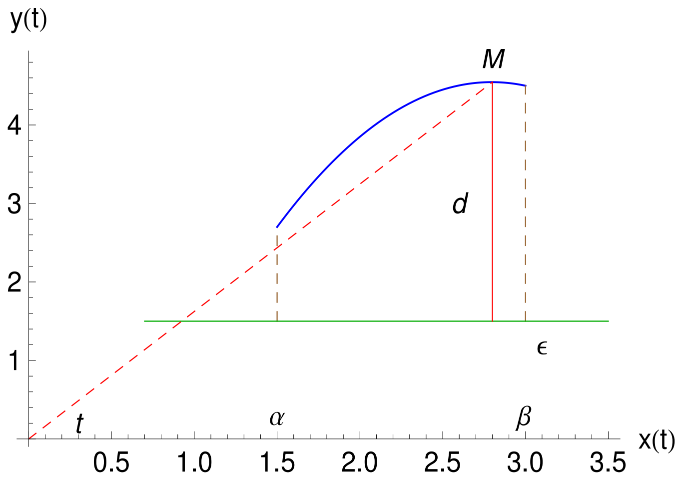
Στην περίπτωση που η συνάρτηση ορίζεται παραμετρικά, τότε ο Ορισμός 11.6.1 - 1 γράφεται:

Ορισμός 11.6.2 - 1. *Έστω ότι η συνάρτηση $f\,|\,[\alpha,\beta\,]$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για κάθε $x \in [\alpha,\beta\,]$ και έχει την παρακάτω παραμετρική εξίσωση:*

$$y = y(t) \quad \text{και} \quad x = x(t) \quad \text{για κάθε} \quad t \in [t_0, t_1]\,.$$

Αν ϵ είναι μία ευθεία που δεν τέμνει το γράφημα της συνάρτησης f εκτός ίσως από τα σημεία α, β και $d = \delta(t)$ η απόσταση τυχόντος σημείου $M(x(t), y(t))$ του διαγράμματος της f από την ϵ (Σχ. 11.6.2 - 1), τότε το εμβαδόν E της επιφάνειας που προκύπτει από την περιστροφή του καμπυλόγραμμου τραπεζίου που ορίζεται από το τόξο του διαγράμματος της f, όταν $t \in [t_0, t_1]$, τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ γύρω από την ευθεία ϵ δίνεται από τον τύπο

$$E = 2\,\pi \int_{t_0}^{t_1} \delta(t)\,\sqrt{\left[\frac{d\,x(t)}{d\,t}\right]^2 + \left[\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right]^2}\,d\,t. \tag{11.6.2 - 1}$$



Σχήμα 11.6.2 - 1: Ορισμός 11.6.2 - 1: η συνάρτηση $f(x)$ με παραμετρική εξίσωση και ο άξονας περιστροφής ϵ (πράσινη ευθεία).

Παράδειγμα 11.6.2 - 1

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που σχηματίζεται εκ περιστροφής του τόξου της **κυκλοειδούς** καμπύλης

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

γύρω από τον άξονα συμμετρίας της (Σχ. 11.6.2 - 2).

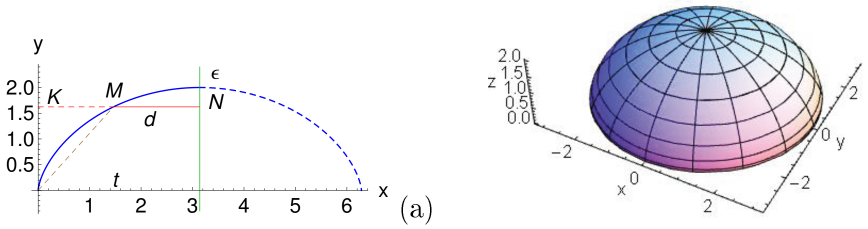
Λύση. Η επιφάνεια σχηματίζεται από περιστροφή της κυκλοειδούς, όταν $t \in [0, \pi]$ (Σχ. 11.6.2 - 2a), γύρω από τον άξονα ϵ με εξίσωση είναι $x = \pi a$.

Τότε

$$d = \delta(t) = |MN| = |KN| - |KM| = \pi a - a(t - \sin t), \qquad (11.6.2 - 2)$$

ενώ είναι

$$\begin{aligned} \sqrt{\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy(t)}{dt}\right]^2} &= \sqrt{(a - a\cos t)^2 + (a\sin t)^2} \\ &= a\sqrt{2}\,\sqrt{1 - \cos t}. \qquad (11.6.2 - 3) \end{aligned}$$



(a) (b)

Σχήμα 11.6.2 - 2: Παράδειγμα 11.6.2 - 1: (a) Η κυκλοειδής, όταν $a = 1$, $t \in [0, \pi]$ συνεχής μπλε, $t \in [\pi, 2\pi]$ διακεκομμένη μπλε καμπύλη και ο άξονας περιστροφής $x = \pi$ πράσινη ευθεία. (b) Η προκύπτουσα επιφάνεια εκ περιστροφής.

Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int \sqrt{1-\cos t}\, d\,t$

Ισχύει ότι

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}, \quad \text{οπότε} \quad 1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}\,.$$

Άρα, επειδή $t \in [0, \pi]$, έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{1-\cos t}\, d\,t = \int \sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\, d\,t = \sqrt{2}\int \sin\frac{t}{2}\, d\,t \\ &= 2\sqrt{2}\int \left(\frac{t}{2}\right)' \sin\frac{t}{2}\, d\,t = -2\sqrt{2}\,\cos\frac{t}{2}\,, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\sqrt{1-\cos t} = \sqrt{2}\,\sin\frac{t}{2}\,, \quad \text{ενώ} \qquad (11.6.2 - 4)$$

$$\int \sqrt{1-\cos t}\, d\,t = -2\sqrt{2}\,\cos\frac{t}{2}\,. \qquad (11.6.2 - 5)$$

Άρα σύμφωνα με την $(11.6.2-1)$ και τις $(11.6.2-2)$ - $(11.6.2-4)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
E &= 2\pi \int_0^{\pi} (\pi a - at + a\sin t)\left(2a\sin\frac{t}{2}\right) dt \\
&= 2\pi\, a \int_0^{\pi} \left[\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \overbrace{t\,\sin\left(\frac{t}{2}\right)}^{\text{παραγοντική}} + \overbrace{\sin t}^{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right] dt \\
&= 2\pi\, a \left[-2\pi\,\cos\frac{t}{2} - \left(-2t\,\cos\frac{t}{2} + 4\,\sin\frac{t}{2}\right) + \left(\sin\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\,\sin\frac{3t}{2}\right)\right]_0^{\pi} \\
&= 8\pi\left(\pi - \frac{4}{3}\right) a^2 \approx 7.233\,037\, a^2
\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 11.6.2 - 2

Έστω η περιφέρεια με παραμετρική εξίσωση

$$x = a\,\cos t \quad \text{και} \quad y = a\,\sin t, \quad \text{όταν} \quad t \in [0, 2\pi]. \qquad (11.6.2 - 6)$$

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που σχηματίζεται, όταν η περιφέρεια περιστραφεί γύρω από

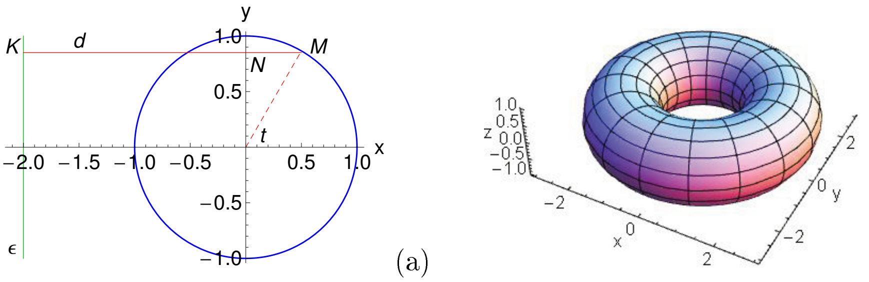
i) την ευθεία $x = -b$, όταν $b > a$, και

ii) τον x-άξονα.

Λύση.

i) **Περιστροφή γύρω από την ευθεία** $x = -b$
Η απόσταση $d = \delta(t)$, όταν t η πολική γωνία τυχόντος σημείου $M(x, y)$ της περιφέρειας του κύκλου, από τον άξονα περιστροφής $x = -b$ σύμφωνα με το Σχ. 11.6.2 - 3(i) ισούται με

$$d = \delta(t) = |KM| = |KN| + |MN| = b + a\,\cos t. \qquad (11.6.2 - 7)$$



(a) (b)

Σχήμα 11.6.2 - 3: (a) Η περιφέρεια ακτίνας $a = 1$ και ο άξονας περιστροφής $x = -2$ πράσινη ευθεία και (b) η προκύπτουσα επιφάνεια εκ περιστροφής.

Εφαρμόζοντας τον τύπο (11.6.2 − 1) με

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} = -a\,\sin t \quad \text{και} \quad \frac{d\,y(t)}{d\,t} = a\,\cos t,$$

οπότε

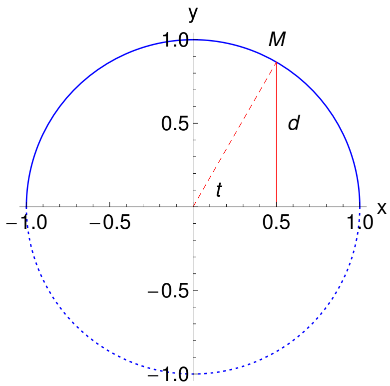
$$\sqrt{\left[\frac{d\,x(t)}{d\,t}\right]^2 + \left[\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right]^2} = \sqrt{(-a\,\sin t)^2 + (a\,\cos t)^2} = a, \tag{11.6.2 - 8}$$

σύμφωνα και με την (11.6.2 − 7) προκύπτει ότι

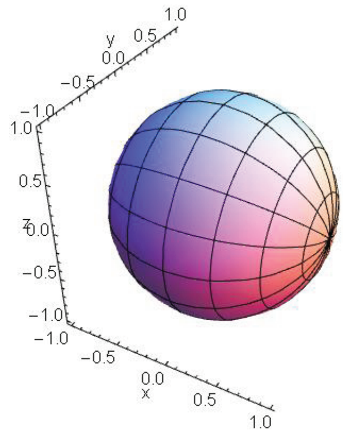
$$\begin{aligned} E &= 2\,\pi \int_0^{2\,\pi} \delta(t) \sqrt{\left[\frac{d\,x(t)}{d\,t}\right]^2 + \left[\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right]^2}\, d\,t \\ &= 2\,\pi \int_0^{2\,\pi} \delta(t)\, a\, d\,t = 2\,\pi\, a \int_0^{2\,\pi} (b + a\cos t)\, d\,t \\ &= 2\,\pi\, a\,(bt + a\sin t)\,\big|_0^{2\,\pi} = 4ab\pi^2. \end{aligned}$$

ii) **Περιστροφή γύρω από τον** x-άξονα

Σύμφωνα με το Σχ. 11.6.2 - 4(i) λόγω συμμετρίας αρκεί να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή του άνω μέρους ($t \in [0, \pi]$) της περιφέρειας με παραμετρική εξίσωση την (11.6.2−7) γύρω από τον x-άξονα.



(a)



(b)

Σχήμα 11.6.2 - 4: (a) Η περιφέρεια ακτίνας $a = 1$ και ο άξονας περιστροφής $x = -2$ πράσινη ευθεία και (b) η προκύπτουσα επιφάνεια εκ περιστροφής.

Τότε η απόσταση $d = \delta(t)$ τυχόντος σημείου $M(x, y)$ από τον άξονα περιστροφής $y = 0$ ισούται με

$$d = \delta(t) = y = a\,\sin t, \qquad (11.6.2 - 9)$$

οπότε από τους τύπους $(11.6.2-1)$ και $(11.6.2-8)$, όταν λόγω του άνω μέρους της περιφέρειας είναι $t \in [0, \pi])$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} E &= 2\,\pi \int_0^\pi \delta(t) \sqrt{\left[\frac{d\,x(t)}{d\,t}\right]^2 + \left[\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right]^2}\,d\,t \\ &= 2\,\pi \int_0^\pi \delta(t)\,a\,d\,t = 2\,\pi\,a^2 \int_0^\pi \sin t\,d\,t \\ &= 2\,\pi\,\alpha^2\,(-\cos t)\,\Big|_0^\pi = 4\pi\alpha^2. \end{aligned}$$

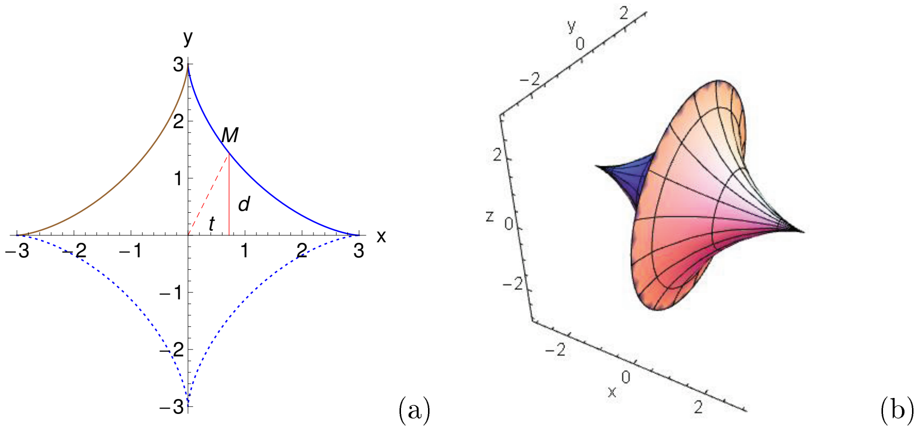
■

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που σχηματίζεται από περιστροφή γύρω από τον x-άξονα της **αστεροειδούς** καμπύλης (Σχ. 11.6.2 - 5) με παραμετρική εξίσωση

$$x = a\cos^3 t \quad \text{και} \quad y = a\sin^3 t, \quad \text{όταν} \quad a > 0.$$

2. Όμοια της επιφάνειας που σχηματίζεται από περιστροφή γύρω από τον x-άξονα της **καρδιοειδούς** καμπύλης (Σχ. 11.6.2 - 6) με παραμετρική εξίσωση



Σχήμα 11.6.2 - 5: Άσκηση 1 Παραγράφου 11.6.2: (a) Η αστεροειδής, όταν $a = 3$, $t \in [0, \pi/2]$ μπλε, $t \in [\pi/2, \pi]$ καφέ και $t \in [\pi, 2\pi]$ διακεκομμένη μπλε καμπύλη. (b) Η προκύπτουσα επιφάνεια εκ περιστροφής.

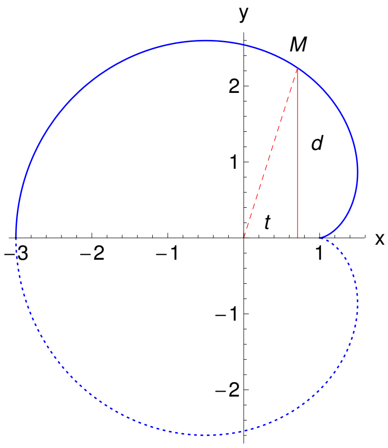
$$x = a(2\cos t - \cos 2t) \quad \text{και} \quad y = a(2\sin t - \sin 2t).$$

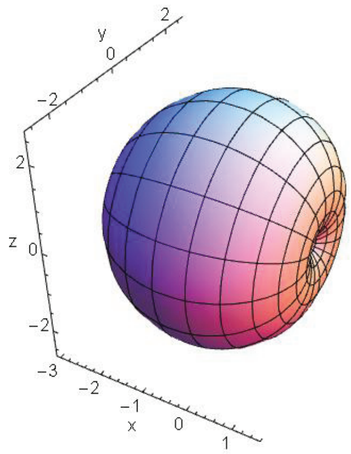
3. Να υπολογιστεί **προσεγγιστικά**[19] η επιφάνεια που σχηματίζεται εκ περιστροφής της έλλειψης

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

γύρω από τον (i) x-άξονα (Σχ. 11.6.2 - 7), (ii) y-άξονα (Σχ. 11.6.2 - 8).

[19] Βλέπε Σημείωση 11.6.2 - 1.





Σχήμα 11.6.2 - 6: Άσκηση 2 Παραγράφου 11.6.2: (a) Η καρδιοειδής, όταν $t \in [0, \pi]$ μπλε και $t \in [\pi, 2\pi]$ διακεκομμένη μπλε καμπύλη. (b) Η προκύπτουσα επιφάνεια εκ περιστροφής.

Σημείωση 11.6.2 - 1

Σε πολλές περιπτώσεις η ολοκλήρωση του τύπου $(11.6.2-1)$ λόγω του ριζικού είναι αδύνατη ή πολύπλοκη. Στις περιπτώσεις αυτές ο υπολογισμός γίνεται προσεγγιστικά και ειδικότερα στην περίπτωση αυτή με το 2ου βαθμού πολυώνυμο του Maclaurin. Για άλλες προσεγγίσεις ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

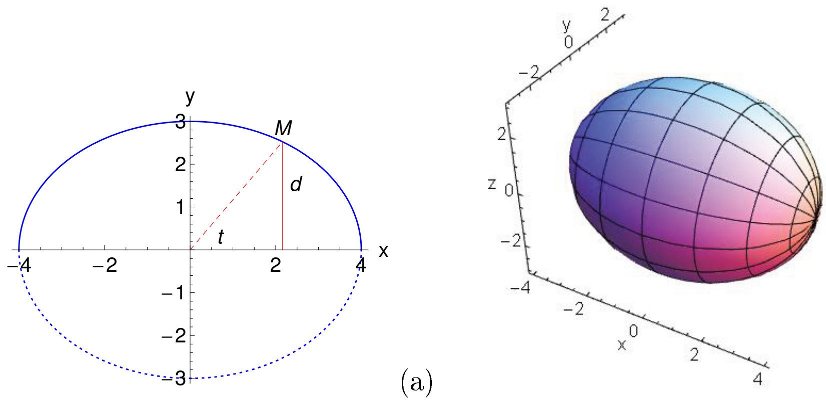
Απαντήσεις

1. Προφανώς $\delta(t) = a\sin^3 t$. Λόγω συμμετρίας αρκεί να υπολογιστεί η επιφάνεια που δημιουργείται, όταν $t \in [0, \pi]$. Είναι

$$\sqrt{\left[\frac{d\,x(t)}{d\,t}\right]^2 + \left[\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right]^2} = \frac{3}{2}\,a\,\sin 2t.$$

Επειδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση στον τύπο $(11.6.2-1)$ είναι περιττή, έχουμε

$$E = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{3}{2}\,a^2\,\sin^3 t\,\sin 2t\,d\,t = \frac{3}{5}\,a^2 \sin^5 t\,\Big|_0^{\pi/2} = \frac{12\pi a^2}{5}\,.$$



(a) (b)

Σχήμα 11.6.2 - 7: Άσκηση 3 i) Παραγράφου 11.6.2: (a) Η έλλειψη, όταν $a = 4$, $b = 3$, $t \in [0, \pi]$ μπλε και $t \in [\pi, 2\pi]$ διακεκομμένη μπλε καμπύλη. (b) Η προκύπτουσα επιφάνεια εκ περιστροφής.

2. Είναι $\delta(t) = 2\sin t - \sin 2t$. Όμοια λόγω συμμετρίας αρκεί να υπολογιστεί η επιφάνεια που δημιουργείται, όταν $t \in [0, \pi]$. Είναι

$$\sqrt{\left[\frac{d\,x(t)}{d\,t}\right]^2 + \left[\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right]^2} = 2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}.$$

Σύμφωνα με τους τύπους $(11.6.2 - 1)$ και $(11.6.2 - 5)$ έχουμε

$$E = 2\pi \int_0^{\pi} (2\sin t - \sin 2t)\left(2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\right) d\,t = \frac{128\pi}{5}\,.$$

3. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 11.6.2 - 1 είναι:

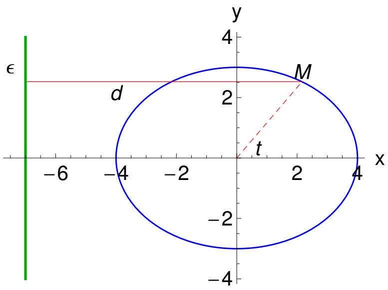
$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{\left[\frac{d\,x(t)}{d\,t}\right]^2 + \left[\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right]^2} = \sqrt{b^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} \\ &\approx b + \frac{\left(a^2 - b^2\right)t^2}{2b}\,. \end{aligned}$$

i) Είναι $\delta(t) = b\sin t$, οπότε

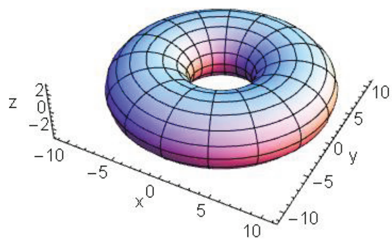
$$E \approx 2\pi \int_0^{\pi} \delta(t) f(t)\, d\,t = \frac{1}{2}\left(7\pi^2 + 8\right).$$

ii) Είναι $\delta(t) = c + a\cos t$, οπότε όμοια

$$E \approx 2\pi \int_0^{2\pi} \delta(t) f(t)\, d\,t = \frac{2}{9}\pi\left(98\pi^2 + 273\right).$$



(a)



(b)

Σχήμα 11.6.2 - 8: Άσκηση 3*ii*) Παραγράφου 11.6.2: (a) Η έλλειψη, όταν $a = 4$, $b = 3$, $t \in [0, 2\pi]$ μπλε καμπύλη και ο άξονας περιστροφής $x = -7$ πράσινη ευθεία. (b) Η προκύπτουσα επιφάνεια εκ περιστροφής.

11.7 Μήκος τόξου καμπύλης

Όμοια ανάλογα με τις συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της εξίσωσης της καμπύλης διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

11.7.1 Ορθογώνιες συντεταγμένες

Η εξίσωση της καμπύλης είναι της μορφής $y = f(x)$

Στην περίπτωση αυτή το μήκος της υπολογίζεται ως εξής:

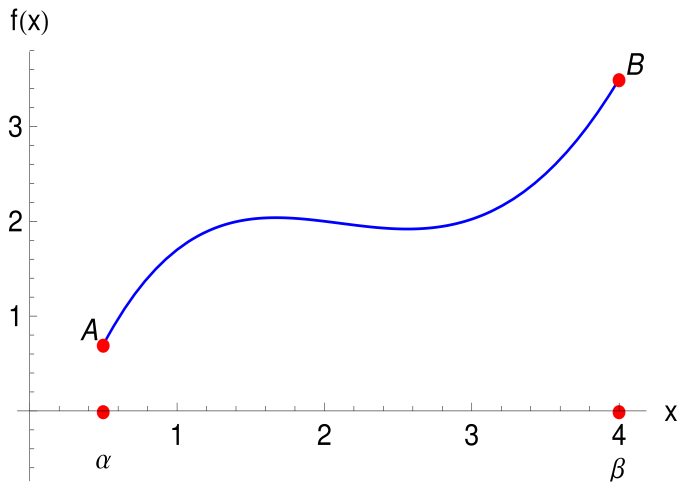
Ορισμός 11.7.1 - 1 (μήκος καμπύλης). *Έστω ότι η συνάρτηση* $f(x) \,|\, [\alpha, \beta]$ *είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για κάθε* $x \in [\alpha, \beta]$*. Τότε το μήκος* L *της καμπύλης που ορίζει η* $y = f(x)$ *από το σημείο* $A(\alpha, f(\alpha))$ *έως και το σημείο* $B(\beta, f(\beta))$ *(Σχ. 11.7.1 - 1) δίνεται από τον τύπο*

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left[\frac{df(x)}{dx}\right]^2}\, dx. \tag{11.7.1 - 1}$$

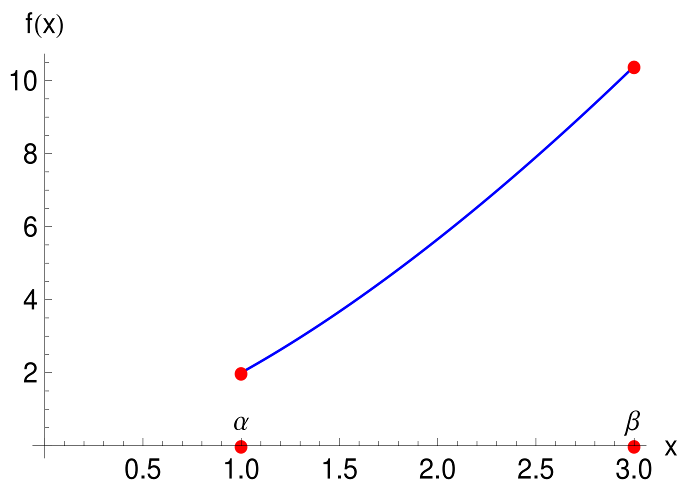
Παράδειγμα 11.7.1 - 1

Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης (Σχ. 11.7.1 - 2)

$$y = f(x) = 2\,x^{3/2}, \quad \text{όταν} \quad x \in [1, 3].$$



Σχήμα 11.7.1 - 1: Το τόξο AB της καμπύλης $y = f(x)$.



Σχήμα 11.7.1 - 2: Η καμπύλη $y = 2\,x^{3/2}$, όταν $x \in [1, 3]$.

Λύση. Εφαρμόζοντας τον τύπο (11.7.1 − 1) όπου

$$f'(x) = 2\,\frac{3}{2}\,x^{\frac{3}{2}-1} = 3\,x^{1/2}$$

έχουμε $\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + 9x}$.

Άρα

$$\begin{aligned} L &= \int_1^3 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_1^3 \sqrt{1 + 9x}\,dx = \int_1^3 (1 + 9x)^{1/2}\,dx \\ &= \frac{1}{9}\int_1^3 (1 + 9x)'(1 + 9x)^{1/2}\,dx = \frac{1}{9}\,\frac{(1 + 9x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^3 \\ &= \frac{4}{27}\left(28\,\sqrt{7} - 5\,\sqrt{10}\right) \approx 8.632541. \end{aligned}$$

Ο υπολογισμός του μήκους της καμπύλης με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές

Πρόγραμμα 11.7.1 - 1 (μήκος καμπύλης - ορθογώνιες συντεταγμένες)

```
f[x_] := 2 x^(3/2)
length1 = Simplify[1 + D[f[x], x]^2, x > 0];
Print["Integrable function : ", length1]
z = Integrate[Sqrt[length1], {x, 1, 3}];
Print["Length = ", z " = ", N[z]]
```

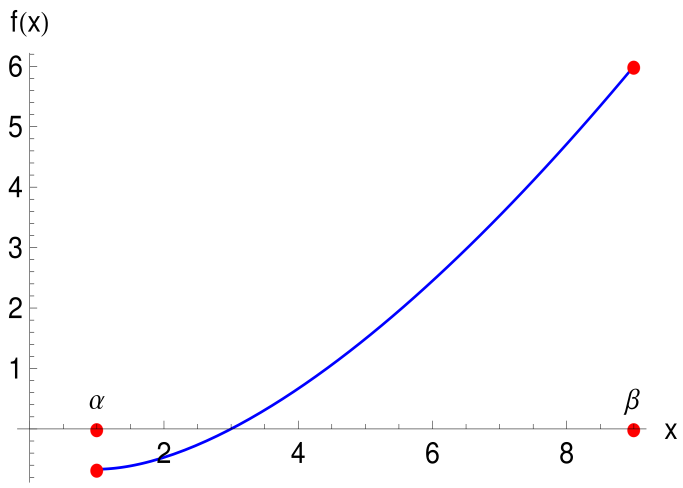
■

Παράδειγμα 11.7.1 - 2

Όμοια το μήκος της καμπύλης (Σχ. 11.7.1 - 3)

$$y = f(x) = \frac{1}{3}\,\sqrt{x}\,(x - 3), \quad \text{όταν} \quad x \in [1, 9].$$

Λύση. Όμοια εφαρμόζεται ο τύπος (11.7.1 − 1) όπου η $f'(x)$ υπολογίζεται



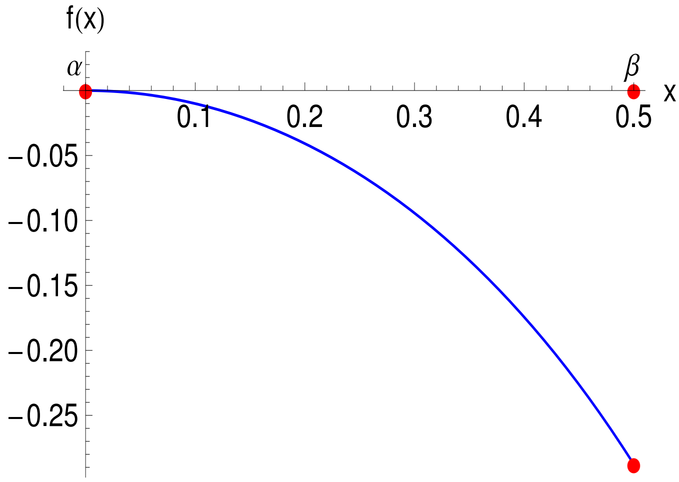
Σχήμα 11.7.1 - 3: Η καμπύλη $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}\,(x-3)$, όταν $x \in [1, 9]$.

ως εξής:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}\left[x^{1/2}(x-3)\right]' = \frac{1}{3}\left[\left(x^{1/2}\right)'(x-3) + x^{1/2}(x-3)'\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1}(x-3) + x^{1/2}\right] \\ &= \frac{1}{6}\,x^{-1/2}(x-3) + \frac{1}{3}\,x^{1/2} = \frac{x-1}{2\sqrt{x}}\,. \end{aligned}$$

Τότε

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2} = \sqrt{1+\left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{(x-1)^2}{4x}} = \frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,.$$



Σχήμα 11.7.1 - 4: Η καμπύλη $y = \ln\left(1 - x^2\right)$, όταν $x \in [0, 0.5]$.

Άρα

$$\begin{aligned} L &= \int_1^9 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_1^9 \frac{x+1}{2\sqrt{x}}\, dx = \int_1^9 \frac{x}{2\sqrt{x}}\, dx + \int_1^9 \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \\ &= \int_1^9 \frac{\sqrt{x}}{2}\, dx + \int_1^9 \frac{1}{2} x^{-1/2}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^9 x^{1/2}\, dx + \frac{1}{2}\int_1^9 x^{-1/2}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^9 + \frac{1}{2}\,\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^9 = \frac{1}{3}x^{3/2}\Big|_1^9 + x^{1/2}\Big|_1^9 = 9 + 3 - \frac{1}{3} - 1 = \frac{32}{3}\,. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 11.7.1 - 3

Όμοια το μήκος της καμπύλης (Σχ. 11.7.1 - 4)

$$y = f(x) = \ln\left(1 - x^2\right), \quad \text{όταν} \quad x \in [0, 0.5].$$

Λύση. Επειδή η συνάρτηση y είναι λογαριθμική, για να ορίζεται πρέπει

$$1 - x^2 > 0, \quad \text{δηλαδή} \quad (1+x)(1-x) > 0 \quad \text{και τελικά} \quad -1 < x < 1.$$

Επειδή το διάστημα $[0, 0.5]$ ανήκει στο πεδίο ορισμού $(-1, 1)$, το πρόβλημα ορίζεται.

Αρχικά υπολογίζουμε την παράγωγο της $f(x)$ ως εξής:

$$f'(x) = \frac{\left(1-x^2\right)'}{1-x^2} = \frac{-2x}{1-x^2}\,,$$

οπότε σύμφωνα με τον τύπο $(11.7.1-1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\left(1-x^2\right)^2+4x^2}{\left(1-x^2\right)^2}}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^2}}{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx \end{aligned} \tag{11.7.1 - 2}$$

Είναι ήδη γνωστό[20] ότι, όταν έχουμε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης όπου ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον βαθμό του παρονομαστή, αρχικά γίνεται η διαίρεση. Στην περίπτωση όμως του παραπάνω ολοκληρώματος, επειδή ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι του ίδιου βαθμού, για ευκολία τροποποιείται κατάλληλα ο αριθμητής ώστε να δημιουργηθεί ο παρονομαστής, δηλαδή

$$\begin{aligned} \frac{1+x^2}{1-x^2} &= \frac{-1+1+1+x^2}{1-x^2} = \frac{-\left(1-x^2\right)+2}{1-x^2} \\ &= \frac{-\left(1-x^2\right)}{1-x^2} + \frac{2}{1-x^2} = -1 + \frac{2}{1-x^2}\,. \end{aligned}$$

[20]Βλέπε Μάθημα *Αόριστο Ολοκλήρωμα - Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων.*

Επομένως σύμφωνα με την $(11.7.1-2)$ είναι

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (-1)\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1-x^2}\,dx = -x\Big|_0^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1-x^2}\,dx \\ &= -\frac{1}{2} + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1-x^2}\,dx. \end{aligned} \tag{11.7.1 - 3}$$

Το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους είναι η περίπτωση ολοκλήρωσης ρητής συνάρτησης όπου ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή και υπολογίζεται αναλύοντας τη ρητή συνάρτηση σε άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}\,,$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $(1-x)(1+x)$ προκύπτει

$$1 = A(1+x) + B(1-x), \quad \text{δηλαδή} \quad (A-B)x + A + B = 1$$

που για να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει

$$\begin{array}{rcrcl} A & - & B & = & 0 \\ A & + & B & = & 1, \end{array} \quad \text{οπότε} \quad A = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad B = \frac{1}{2}\,.$$

Τότε σύμφωνα και με την (11.7.1 − 3) έχουμε

$$\begin{aligned}
L &= -\frac{1}{2}+2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2}+2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}\right)dx \\
&= -\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x}+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1+x} \\
&= -\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{-(1-x)'dx}{1-x}+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(1+x)'dx}{1+x} \\
&= -\frac{1}{2}-\ln|1-x|\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\ln|1+x|\Big|_0^{\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}-\left[\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)-\ln 1\right]+\left[\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)-\ln 1\right] \\
&= -\frac{1}{2}-\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}-(-\ln 2)+\ln 3-\ln 2 \\
&= -\frac{1}{2}+\ln 3\approx 0.598\,612\,3.
\end{aligned}$$

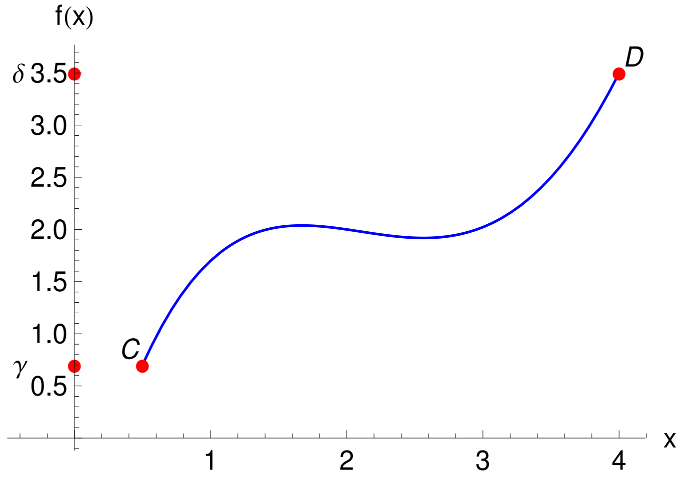
■

Η εξίσωση της καμπύλης είναι της μορφής $x=f(y)$

Τότε το μήκος υπολογίζεται ως εξής:

Ορισμός 11.7.1 - 2 (μήκος καμπύλης). *Έστω ότι η συνάρτηση $f(y)\,|\,[\gamma,\delta]$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για κάθε $y\in[\gamma,\delta]$. Τότε το μήκος L της καμπύλης που ορίζει η $x=f(y)$ από το σημείο $C(\gamma,f(\gamma))$ έως και το σημείο $D(\delta,f(\delta))$ (Σχ. 11.7.3 - 3) δίνεται από τον τύπο*

$$L=\int_\gamma^\delta\sqrt{1+[f'(y)]^2}\,dy=\int_\gamma^\delta\sqrt{1+\left[\frac{df(y)}{dy}\right]^2}\,dy. \qquad (11.7.1\text{ - }4)$$



Σχήμα 11.7.1 - 5: Το τόξο CD της καμπύλης $y = f(x)$.

Παράδειγμα 11.7.1 - 4

Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης (Σχ. 11.7.1 - 6)

$$x = f(y) = \frac{1}{2}\, y^2, \quad \text{όταν} \quad y \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

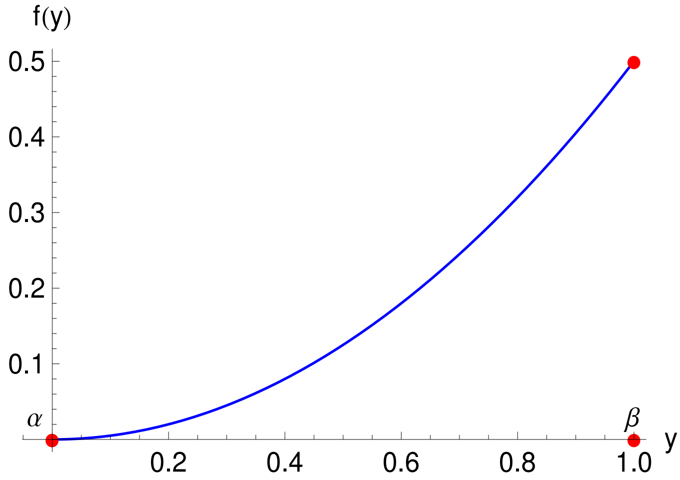
Λύση. Εφαρμόζοντας τον τύπο (11.7.1 − 4) όπου

$$f'(y) = \frac{1}{2}\, 2y = y$$

έχουμε $\sqrt{1 + [f'(y)]^2} = \sqrt{1 + y^2}$.

Άρα

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + y^2}\, dy. \qquad (11.7.1 - 5)$$



Σχήμα 11.7.1 - 6: Η καμπύλη $x = \frac{1}{2}\,y^2$, όταν $y \in [0, 1]$.

Υπολογισμός του ολοκληρώματος $I = \int \sqrt{1 + x^2}\,dx$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση διαδοχικά έχουμε

$$
\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{1 + x^2}\,dx = x\,\sqrt{1 + x^2} - \int x\,\left(\sqrt{1 + x^2}\right)'\,dx \\
&= x\,\sqrt{1 + x^2} - \int x\,\left[\left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]'\,dx \\
&= x\,\sqrt{1 + x^2} - \int x\,\left[\frac{1}{2}\,\frac{2x}{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]\,dx \\
&= x\,\sqrt{1 + x^2} - \int \frac{\overbrace{x^2}^{x^2+1-1}}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx \\
&= x\,\sqrt{1 + x^2} - I + \int dx\sqrt{1 + x^2}\,,
\end{aligned}
$$

οπότε

$$
2I = x\,\sqrt{1 + x^2} + \int dx\sqrt{1 + x^2} = x\,\sqrt{1 + x^2} + \sinh^{-1} x
$$

και τελικά

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1} x\right). \tag{11.7.1 - 6}$$

Σύμφωνα με την $(11.7.1-6)$ τότε προκύπτει ότι το μήκος της καμπύλης στην $(11.7.1-5)$ είναι

$$L = \frac{1}{2}\left(y\sqrt{1+y^2} + \sinh^{1} y\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \sinh^{-1} 1\right) \approx 1.147\,794.$$

■

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το μήκος του τόξου της:

i) ημικυβικής παραβολής $y^2 = x^3$ από την αρχή των συντεταγμένων μέχρι το σημείο $x = 4$,

ii) παραβολής $y = 2x^{1/2}$ από το σημείο $x = 0$ μέχρι το $x = 1$,

iii) καμπύλης $y = \ln x$ από το σημείο $x = \sqrt{3}$ μέχρι το $x = \sqrt{2}$,

iv) καμπύλης $x = -\ln\cos y$, όταν $y \in [0, \pi/3]$,

v) καμπύλης $x = y^2/4 - (\ln y)/2$ από το σημείο $y = 1$ μέχρι το $y = e$.

2. Όμοια το μήκος του κλειστού τμήματος της καμπύλης

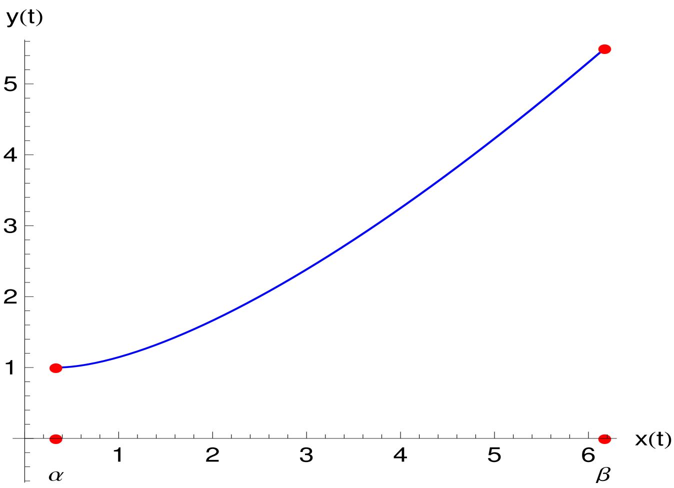
$$9ay^2 = x(x-3a)^2 \quad \text{με} \quad a > 0.$$

11.7.2 Παραμετρική εξίσωση

Όταν η εξίσωση της καμπύλης ορίζεται παραμετρικά, το μήκος της υπολογίζεται ως εξής:

Ορισμός 11.7.2 - 1 (μήκος καμπύλης παραμετρική εξίσωση). *Έστω ότι η εξίσωση της καμπύλης έχει την παραμετρική μορφή*

$$y = y(t) \quad \textit{και} \quad x = x(t) \quad \textit{για κάθε} \quad t \in [t_0, t_1]\,.$$



Σχήμα 11.7.2 - 1: Παράδειγμα 11.7.2 - 1: η καμπύλη με παραμετρική εξίσωση $x = x(t) = \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2}$, $y = y(t) = \frac{t^2}{2} + 1$, όταν $t \in [0, 3]$ ($\alpha = x(0)$, $\beta = x(3)$).

Τότε το μήκος L της καμπύλης στο διάστημα $[t_0, t_1]$ δίνεται από τον τύπο

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left[\frac{d\,x(t)}{d\,t}\right]^2 + \left[\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right]^2}\,d\,t. \tag{11.7.2 - 1}$$

Παράδειγμα 11.7.2 - 1

Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης (Σχ. 11.7.2 - 1) με παραμετρική εξίσωση

$$x = x(t) = \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2}, \quad y = y(t) = \frac{t^2}{2} + 1, \quad \text{όταν} \quad t \in [0, 3].$$

Λύση. Αρχικά είναι

$$\begin{aligned} \frac{d\,x(t)}{d\,t} &= \frac{1}{3}\,\frac{3}{2}\,(2t+1)^{\frac{3}{2}-1}(2t+1)' = \frac{1}{2}\,(2t+1)^{1/2} \cdot 2 = (2t+1)^{1/2} \\ \frac{d\,y(t)}{d\,t} &= t. \end{aligned}$$

Επειδή είναι $t_0 = 0$ και $t_1 = 3$, εφαρμόζοντας τον τύπο $(11.7.2-1)$ έχουμε

$$\sqrt{\left[\frac{d\,x(t)}{d\,t}\right]^2 + \left[\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right]^2} = \sqrt{(2t+1)+t^2} = \sqrt{(t+1)^2} = t+1.$$

Άρα σύμφωνα με την $(11.7.2-1)$ είναι

$$L = \int_0^3 (t+1)\,d\,t = \frac{t^2}{2} + t\Big|_0^3 = \frac{9}{2} + 3 = \frac{15}{2}\,.$$

Ο υπολογισμός του μήκους της καμπύλης με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές

Πρόγραμμα 11.7.2 - 1 (μήκος καμπύλης παραμετρική εξίσωση)

```
x[t_] := ((2 t + 1)^(3/2))/3
y[t_] := t^2/2 + 1
length1 = Simplify[Sqrt[D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2], t > 0];
Print["Integrable function : ", length1]
Print["Length = ", Integrate[length1, {t, 0, 3}]]
```

■

Άσκηση

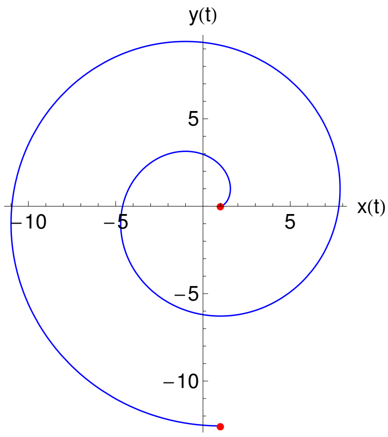
Αν $a > 0$, να υπολογιστεί το μήκος του τόξου της καμπύλης με εξίσωση

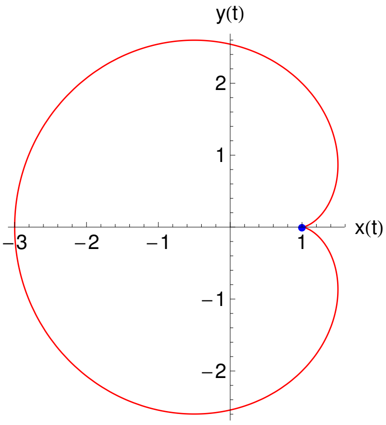
i) $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, όταν $t \in [0, 4\pi]$ (Σχ. 11.7.3 - 3a),

ii) $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$, όταν $t \in [0, 2\pi]$ (Σχ. 11.7.3 - 3b).

Απαντήσεις

i) Ολοκληρωτέα συνάρτηση σχέσης $(11.7.2-1)$: at, μήκος $L = 8\pi^2 a$,
ii) Όμοια: $2a\sqrt{2-2\cos t}$ όπου $2a\int\sqrt{2-2\cos t}\,d\,t = -4a\sqrt{2-2\cos t}\,\cot\frac{t}{2}$, μήκος $L = 16a$.





Σχήμα 11.7.2 - 2: Άσκηση Παραγράφου 11.7.2, όταν $a = 1$: (a) $x = \cos t + t\sin t$, $y = \sin t - t\cos t$, όταν $t \in [0, 4\pi]$. (b) $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$, όταν $t \in [0, 2\pi]$ (κλειστή καμπύλη).

11.7.3 Πολικές συντεταγμένες

Όταν η εξίσωση της καμπύλης ορίζεται σε πολικές συντεταγμένες, το μήκος της υπολογίζεται ως εξής:

Ορισμός 11.7.3 - 1 (μήκος καμπύλης πολικές συντεταγμένες). *Έστω ότι η εξίσωση της καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες είναι της μορφής*

$$r = r(\theta), \quad \text{όταν} \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2],$$

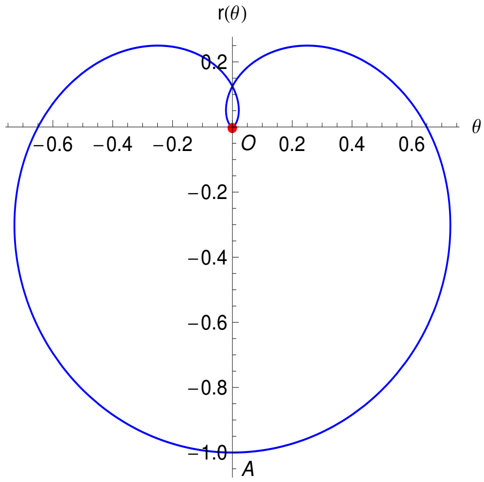
όπου θ_1 και θ_2 είναι οι τιμές της πολικής γωνίας στα άκρα σημεία του τόξου της καμπύλης. Τότε το μήκος L της καμπύλης στο τόξο $[\theta_1, \theta_2]$ δίνεται από τον τύπο

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta. \tag{11.7.3 - 1}$$

Παράδειγμα 11.7.3 - 1

Ζητείται το μήκος της καμπύλης με εξίσωση (Σχ. 11.7.3 - 1)

$$r = a\sin^3\frac{\theta}{3}, \quad \text{όταν} \quad \theta \in [0, 3\pi].$$



Σχήμα 11.7.3 - 1: Παράδειγμα 11.7.3 - 1: το τόξο της κλειστής καμπύλης $r = a\sin^3 \frac{\theta}{3}$, όταν $\theta \in [0, 3\pi]$ και $OA = a = 1$.

Λύση. Είναι
$$\frac{dr}{d\theta} = a\sin^2\frac{\theta}{3}\ \cos\frac{\theta}{3},$$
οπότε σύμφωνα με τον τύπο $(11.7.3-1)$ το συνολικό μήκος του τόξου της καμπύλης είναι

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2\ \sin^6\frac{\theta}{3} + a^2\ \sin^4\frac{\theta}{3}\ \cos^2\frac{\theta}{3}}\ d\theta \\ &= a\int_0^{3\pi} \sin^2\frac{\theta}{3}\ d\theta = \left[a\left(\frac{\theta}{2} - \frac{3}{4}\sin\frac{2\theta}{3}\right)\right]_0^{3\pi} = \frac{3a\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Ο υπολογισμός του μήκους της καμπύλης και η γραφική παράσταση με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές

Πρόγραμμα 11.7.3 - 1 (μήκος καμπύλης με πολικές συντεταγμένες)

```
r[x_] := a (Sin[x/3])^3
length1 = Simplify[Sqrt[(r[x])^2 + (D[r[x], x])^2], {a > 0, x > 0}];
Print["Integrable function : ", length1]
```

```
Print["Length = ", Integrate[length1, {x, 0, 3 Pi}]]

r[x_] := a (Sin[x/3])^3
data2 = {{0, 0}};
f1 = PolarPlot[r[x], {x, 0, 3 Pi}, AxesOrigin -> {0, 0},
   BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 12},
   AxesLabel -> {"\[Theta]", "r(\[Theta])"},
   PlotStyle -> {Blue, Thickness[0.004]}];
f2 = ListPlot[data2, PlotStyle -> Red, PlotMarkers -> "\!\(\*
StyleBox[\"\[FilledCircle]\",\nFontSize->9]\)", Axes -> False];
f3 = Show[{Graphics[Text[0, {0.05, -0.05}]],
    Graphics[Text[A, {0.05, -1.05}]]}];
fgr = Show[f1, f2, f3]
```

■

Παράδειγμα 11.7.3 - 2

Όμοια το μήκος της **έλικας του Αρχιμήδη** (Archimedes' spiral) με εξίσωση (Σχ. 11.7.3 - 2)

$$r = a\theta, \quad \text{όταν} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Λύση. Είναι

$$\frac{dr}{d\theta} = a,$$

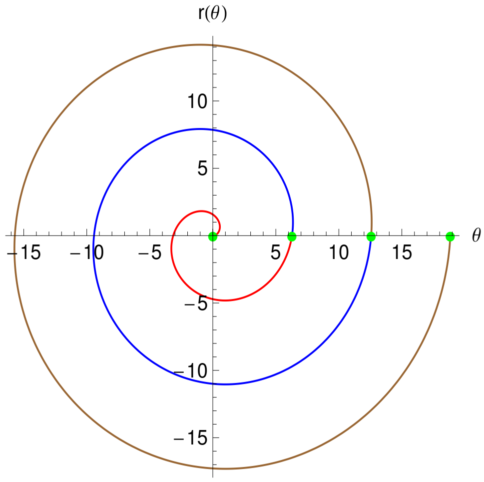
οπότε σύμφωνα με τον τύπο $(11.7.3 - 1)$ το συνολικό μήκος του τόξου της έλικας, όταν $\theta \in [0, 2\pi]$, είναι

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\theta^2 + a^2}\; d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\, a \left(2\pi\, \sqrt{1+4\pi^2} + \sinh^{-1} 2\pi\right) \approx 21.256\,290\, a, \end{aligned}$$

επειδή είναι γνωστό από την $(11.7.1 - 6)$ ότι

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2} \left(x\, \sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1} x\right).$$

■



Σχήμα 11.7.3 - 2: Παράδειγμα 11.7.3 - 2: η **έλικα του Αρχιμήδη**, όταν: $\theta \in [0, 2\pi]$ (1η περιστροφή κόκκινη καμπύλη), $\theta \in [2\pi, 4\pi]$ (2η μπλε καμπύλη), $\theta \in [4\pi, 6\pi]$ (3η καφέ καμπύλη) και $a = 1$.

Άσκηση

1. Να υπολογιστεί το συνολικό μήκος της **καρδιοειδούς καμπύλης**

$$r = a(1 + \cos\theta) \quad \text{με} \quad a > 0.$$

2. Όμοια το μήκος της **υπερβολικής σπειροειδούς** με εξίσωση

$$r\theta = 1, \quad \text{όταν} \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, 5\pi\right].$$

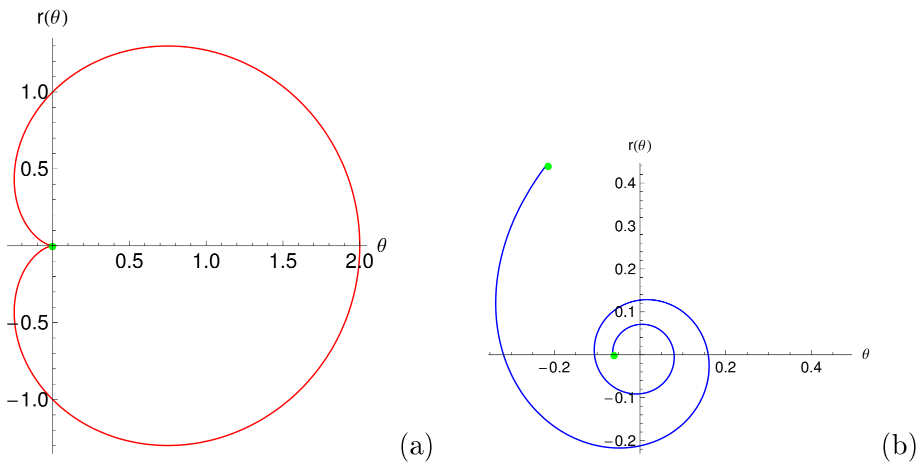
Απαντήσεις

i) Σύμφωνα με τη σχέση (11.7.3 − 1) το μήκος L είναι

$$L = \sqrt{2}\, a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos\theta}\, d\theta = \sqrt{2}\, a\, \sqrt{1 + \cos\theta}\, \tan\frac{\theta}{2}\bigg|_0^{2\pi} = 8a,$$

ii) Όμοια εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση στο αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα με

$$\frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)' \sqrt{1 + x^2}$$



Σχήμα 11.7.3 - 3: Άσκηση Παραγράφου 11.7.3, όταν: (a) (i) $\theta \in [0, 2\pi]$ και $a = 1$ **καρδιοειδής καμπύλη**, (b) (ii) $\theta \in [\pi/3, 5\pi]$ **υπερβολική σπειροειδής**.

τελικά έχουμε ότι

$$L = \int_{\pi/3}^{5\pi} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\, dx = \left[-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \sinh^{-1} x \right]_{\pi/3}^{5\pi} \approx 2.914\,657.$$

11.8 Όγκος στερεών από περιστροφή

[21]

11.8.1 Ορθογώνιες συντεταγμένες

Ορισμός 11.8.1 - 1. *Έστω ότι η συνάρτηση $f\,|\,[\alpha, \beta]$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Τότε ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του καμπυλόγραμμου τραπεζίου που ορίζεται από το τόξο του διαγράμματος της $f(x)$, όταν $x \in [\alpha, \beta]$, τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ γύρω από τον*

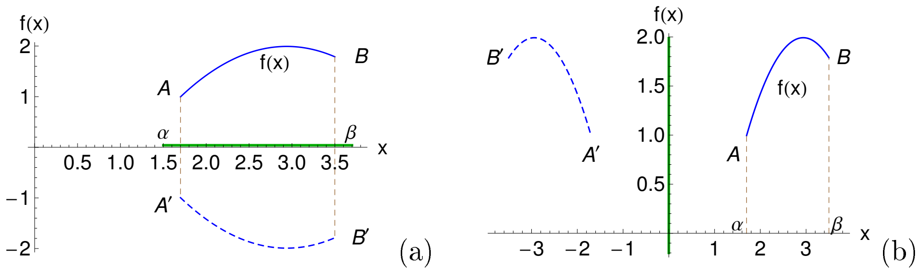
- *x-άξονα (Σχ. 11.8.1 - 1a), αντίστοιχα τον*
- *y-άξονα (Σχ. 11.8.1 - 1b)*

[21] Βλέπε βιβλιογραφία και *https://en.wikipedia.org/wiki/Solid_of_revolution*

δίνεται από τον τύπο

$$V_x = \pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} f^2(x)\,dx, \quad \textit{αντίστοιχα} \tag{11.8.1 - 1}$$

$$V_y = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} x f(x)\,dx. \tag{11.8.1 - 2}$$



Σχήμα 11.8.1 - 1: Ορισμός 11.8.1 - 1: (a) ο x-άξονας περιστροφής και (b) ο y-άξονας.

Στην περίπτωση που το διάγραμμα της συνάρτησης εκφράζεται στη μορφή $x = g(y)$, ο Ορισμός 11.8.1 - 1 γράφεται ως εξής:

Ορισμός 11.8.1 - 2. *Έστω ότι η συνάρτηση $g\,|\,[\gamma, \delta]$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για κάθε $y \in [\gamma, \delta]$. Τότε ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του καμπυλόγραμμου τραπεζίου που ορίζεται από το τόξο του διαγράμματος της $g(y)$, όταν $y \in [\gamma, \delta]$, τις ευθείες $y = \gamma$ και $y = \delta$ γύρω από τον*

- *y-άξονα, αντίστοιχα τον*
- *x-άξονα (Σχ. 11.8.1 - 1b)*

δίνεται από τον τύπο

$$V_y = \pi \int_{\gamma}^{\delta} g^2(y)\,dy, \quad \textit{αντίστοιχα} \tag{11.8.1 - 3}$$

$$V_x = 2\pi \int_{\gamma}^{\delta} y\, g(y)\,dy. \tag{11.8.1 - 4}$$

Οι $(11.8.1-3)$, αντίστοιχα $(11.8.1-4)$ προκύπτουν στην περίπτωση αυτή από την $(11.8.1-1)$, αντίστοιχα $(11.8.1-2)$ με εναλλαγή των συντεταγμένων x και y.

Παράδειγμα 11.8.1 - 1

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται από περιστροφή της ημιτονοειδούς καμπύλης

$$y = \sin x, \quad \text{όταν} \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

ως προς τον

i) x-άξονα (Σχ. 11.8.1 - 2),

ii) y-άξονα (Σχ. 11.8.1 - 3).

Λύση. Διαδοχικά έχουμε:

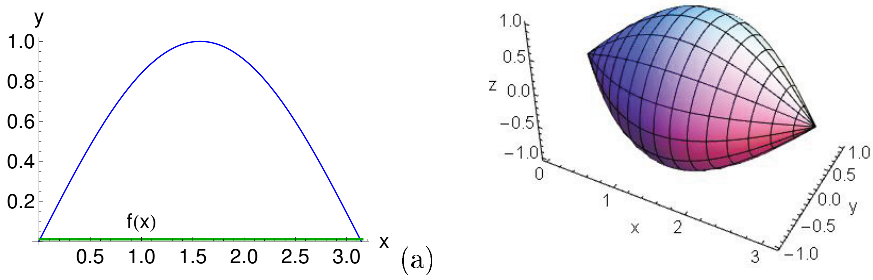
i) τύπος $(11.8.1-1)$

$$V_x = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi^2}{2}, \quad \text{και}$$

ii) τύπος $(11.8.1-2)$

$$V_y = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x\,dx = 2\pi\,\left[-x\cos x + \sin x\,\right]_0^{\pi} = 2\pi^2.$$

■



(a) (b)

Σχήμα 11.8.1 - 2: Παράδειγμα 11.8.1 - 1: (a) η συνάρτηση $y = \sin x$, όταν $x \in [0, \pi]$ (μπλε συνεχής καμπύλη) και η συμμετρική της (μπλε διακεκομμένη) ως προς τον x-άξονα περιστροφής. (b) Το στερεό εκ περιστροφής.

Παράδειγμα 11.8.1 - 2

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται από περιστροφή της καμπύλης

$$y = 1 - \sqrt{x}, \quad \text{όταν} \quad 0 \leq x \leq 2,$$

ως προς τον

i) x-άξονα (Σχ. 11.8.1 - 4),

ii) y-άξονα (Σχ. 11.8.1 - 5).

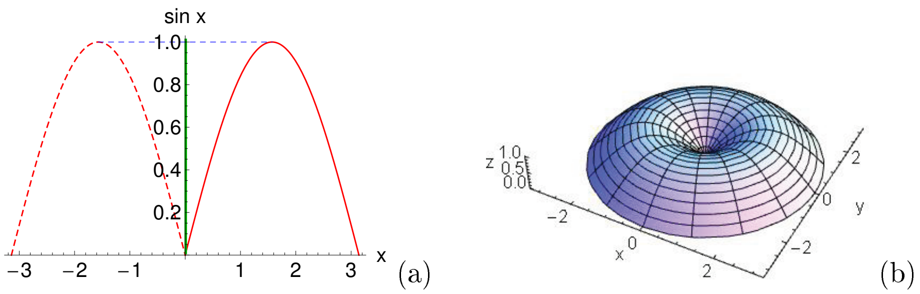
Λύση. Όμοια έχουμε:

i) τύπος $(11.8.1 - 1)$

$$V_x = \pi \int_0^{\pi} \left(1 - \sqrt{x}\right)^2 \, dx = \pi \left[x - \frac{4x^{3/2}}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 \approx 0.718\,683\,, \quad \text{και}$$

ii) τύπος $(11.8.1 - 2)$ με $x f(x) \leq 0$, όταν $x \in [1, 2]$

$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \int_0^1 x\left(1 - \sqrt{x}\right) \, dx - 2\pi \int_1^2 x\left(1 - \sqrt{x}\right) \, dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^{5/2}}{5} \right]_0^1 - 2\pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^{5/2}}{5} \right]_1^2 \approx 2.907\,492. \end{aligned}$$



Σχήμα 11.8.1 - 3: Παράδειγμα 11.8.1 - 1: (a) η συνάρτηση $y = \sin x$, όταν $x \in [0, \pi]$ (κόκκινη συνεχής καμπύλη) και η συμμετρική της (κόκκινη διακεκομμένη) ως προς τον y-άξονα περιστροφής. (b) Το στερεό εκ περιστροφής.

■

Γενίκευση Ορισμού 11.8.1 - 1

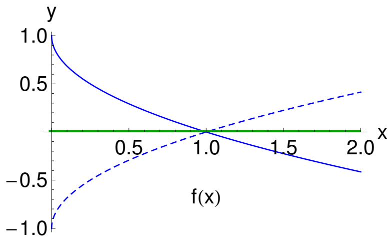
Ορισμός 11.8.1 - 3. *Έστω ότι οι συναρτήσεις f, $g \,|\, [\alpha, \beta]$ είναι παραγωγίσιμες με συνεχείς παραγώγους για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Τότε ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του καμπυλόγραμμου τραπεζίου που ορίζεται από το τόξο του διαγράμματος της $f(x) - g(x)$, όταν $x \in [\alpha, \beta]$, τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ γύρω από τον*

- *x-άξονα (Σχ. 11.8.1 - 6), αντίστοιχα τον*
- *y-άξονα*

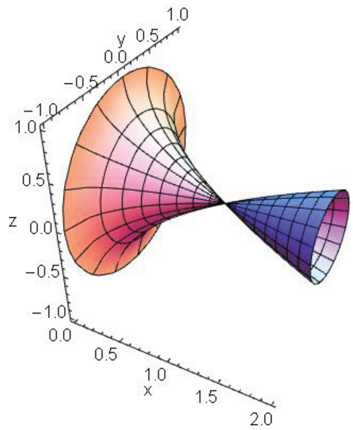
δίνεται από τον τύπο

$$V_x = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \left| f^2(x) - g^2(x) \right| dx, \quad \textit{αντίστοιχα} \tag{11.8.1 - 5}$$

$$V_y = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x \left| f(x) - g(x) \right| dx. \tag{11.8.1 - 6}$$



(a)



(b)

Σχήμα 11.8.1 - 4: Παράδειγμα 11.8.1 - 1: (a) η συνάρτηση $y = 1 - \sqrt{x}$, όταν $x \in [0, 2]$ (μπλε συνεχής καμπύλη) και η συμμετρική της (μπλε διακεκομμένη) ως προς τον x-άξονα περιστροφής. (b) Το στερεό εκ περιστροφής.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού, που σχηματίζεται

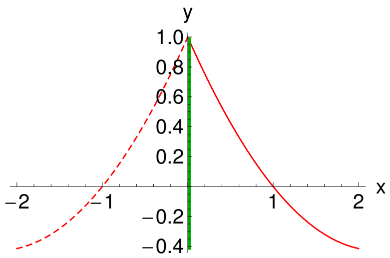
i) από περιστροφή γύρω από τον άξονα των x, της περιοχής που περιβάλλεται από τον άξονα των x και την παραβολή $y = ax - x^2$ με $a > 0$,

ii) από τον άξονα των x, της περιοχής που περιβάλλεται από την καμπύλη $y = a\cosh(x/a)$, τον άξονα x και τις ευθείες $x = \pm a$ με $a > 0$,

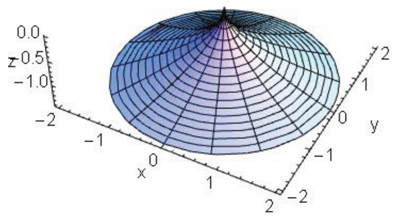
iii) από περιστροφή γύρω από τον άξονα των x, της περιοχής που περιβάλλεται από την ημικυβική παραβολή $y^2 = x^3$, τον άξονα των x και την ευθεία $x = 1$.

2. Να υπολογιστούν οι όγκοι των στερεών, που σχηματίζονται από περιστροφή της περιοχής, που περιβάλλεται από τις γραμμές $y = e^x$, $x = 0$ και $y = 0$ γύρω από τον άξονα των (i) x και (ii) y.

3. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής γύρω από την ευθεία $x = a$ και του τμήματος της παραβολής $y^2 = 4ax$ με $a > 0$, που τέμνεται από την παραπάνω ευθεία.



(a)



(b)

Σχήμα 11.8.1 - 5: Παράδειγμα 11.8.1 - 1: (a) η συνάρτηση $y = 1 - \sqrt{x}$, όταν $x \in [0,2]$ (κόκκινη συνεχής καμπύλη) και η συμμετρική της (κόκκινη διακεκομμένη) ως προς τον y-άξονα περιστροφής. (b) Το στερεό εκ περιστροφής.

4. Όμοια ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής γύρω από τον άξονα των x και της περιοχής που περιέχεται μεταξύ των παραβολών $y = x^2$ και $y = \sqrt{x}$.

Απαντήσεις

1. i) $V_x = \pi \int\limits_0^1 \left(x - x^2\right)^2 dx = \frac{\pi}{30}$. ii) Λόγω συμμετρίας $V_x = \pi \int\limits_0^1 \cosh^2 x \, dx = \pi(1 + \sin 1 \cos 1)$. iii) Λόγω συμμετρίας $V_x = \pi \int\limits_0^1 x^3 \, dx = \frac{\pi}{4}$.

2. x-άξονας: $V_x = \pi \int\limits_0^1 e^{2x} \, dx = \frac{\pi}{2}\left(e^2 - 1\right)$, y-άξονας: $V_y = 2\pi \int\limits_0^1 x e^x \, dx = \pi$.

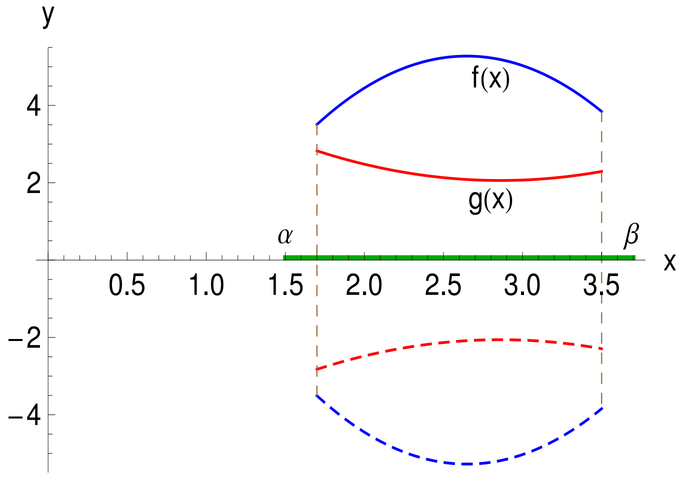
Ανάλογα οι Ασκήσεις **3**, **4**.

11.8.2 Παραμετρική εξίσωση

Ορισμός 11.8.2 - 1. *Έστω η συνάρτηση $f \,|\, [\alpha, \beta\,]$ με παραμετρική εξίσωση της μορφής*

$$x = x(t) \quad \textit{και} \quad y = y(t), \quad \textit{όταν} \quad t \in [t_0, t_1]\,,$$

όπου $y(t) \geq 0$, ενώ οι $y(t)$ και $x'(t)$ είναι συνεχείς για κάθε $t \in [t_0, t_1]$. Τότε ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της καμπύλης γύρω από τον



Σχήμα 11.8.1 - 6: Ορισμός 11.8.1 - 3 με τον x-άξονας περιστροφής.

i) x-άξονα (Σχ. 11.8.2 - 1a) είναι

$$V_x = \pi \int_{t_0}^{t_1} y(t)\, \left|x'(t)\right|\, dt, \quad \text{και} \tag{11.8.2 - 1}$$

ii) y-άξονα (Σχ. 11.8.2 - 1b) είναι

$$V_y = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} x(t)\, y(t)\, \left|x'(t)\right|\, dt. \tag{11.8.2 - 2}$$

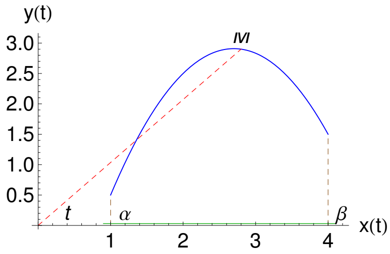
Παράδειγμα 11.8.2 - 1

Να υπολογιστεί ο όγκος που σχηματίζεται από περιστροφή της περιφέρειας με παραμετρική εξίσωση

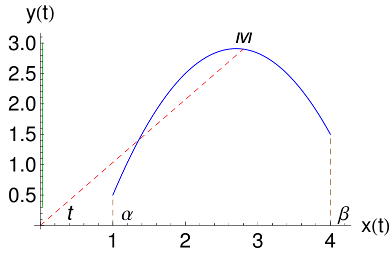
$$x(t) = a + r\cos t \quad \text{και} \quad y(t) = b + r\sin t,$$

δηλαδή κέντρου $K(a, b)$ και ακτίνας r, γύρω από τον

i) x- άξονα, όταν $t \in [0, \pi]$ (Σχ. 11.8.2 - 2a), και



(a)



(b)

Σχήμα 11.8.2 - 1: Ορισμός 11.8.2 - 1: (a) περιστροφή γύρω από τον x-άξονα (πράσινη ευθεία) και (b) y-άξονα.

i) y- άξονα, όταν $t \in [0, 2\pi]$ (Σχ. 11.8.2 - 3a).

Λύση.

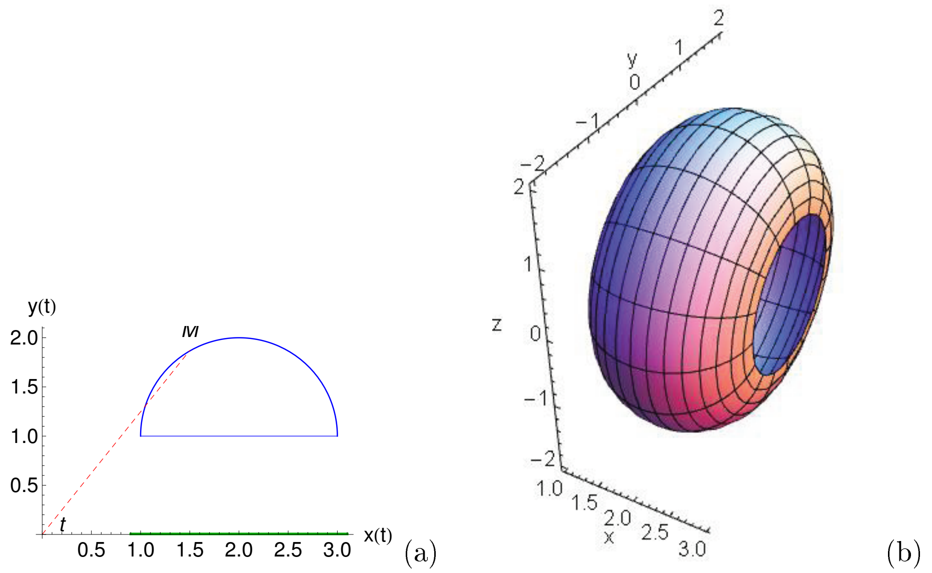
i) Σύμφωνα με τον τύπο $(11.8.2-1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int\limits_0^{\pi} y(t)\,\left|x'(t)\right|\,dt = \pi r \int\limits_0^{\pi} \sin t(b + r\sin t)\,d\theta \\ &= -\frac{\pi r}{4}\left[4b\cos t + r(-2t + \sin 2t)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\pi r(4b + \pi r). \end{aligned}$$

ii) Ανάλογα με τον τύπο $(11.8.2-2)$ έχουμε

$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \int\limits_0^{2\pi} x(t)y(t)\,\left|x'(t)\right|\,dt \\ &= -2\pi r \int\limits_0^{2\pi} \sin t(b + r\sin t)(a + r\sin t)\,d\theta \\ &= \frac{\pi r}{6}\left[12ab\cos t + r(-6at + 3b\cos 2t3r\sin t\right. \\ &\quad \left. +3a\sin 2t + r\sin 3t)\right]_0^{2\pi} = 2a\pi^2 r^2. \end{aligned}$$

Το Σχ. 11.8.2 - 2b, αντίστοιχα το Σχ. 11.8.2 - 3b γίνονται με τις παρακάτω εντολές του MATHEMATICA:



Σχήμα 11.8.2 - 2: Παράδειγμα 11.8.2 - 1: (a) το άνω μέρος της περιφέρειας $x(t) = 2 + \cos t$ και $y(t) = 1 + \sin t$, όταν $\theta \in [0, \pi/4]$ μπλε καμπύλη ($a = 2$, $b = 1$ και $r = 1$). (b) Το στερεό εκ περιστροφής γύρω από τον x-άξονα - πράσινη ευθεία σε σχήμα (a).

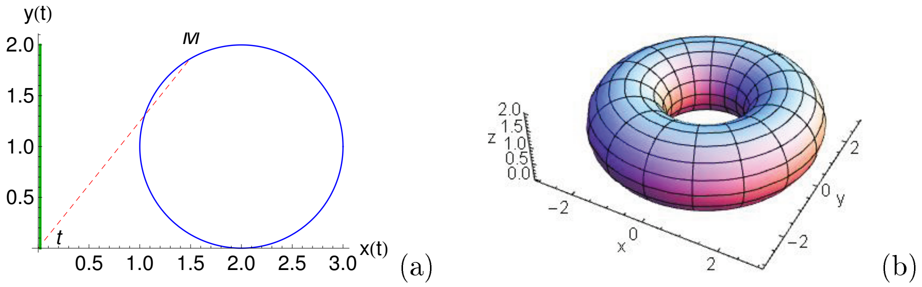
Πρόγραμμα 11.8.2 - 1 (στερεό εκ περιστροφής)

```
x[t_] := 2 + Cos[t]; y[t_] := 1 + Sin[t]
RevolutionPlot3D[{x[t], y[t]}, {t, 0, Pi}, Boxed -> False,
    RevolutionAxis -> {1, 0}, AxesLabel -> {"x", "y", "z"},
    BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 16}]
```

αντίστοιχα

```
x[t_] := 2 + Cos[t]; y[t_] := 1 + Sin[t]
RevolutionPlot3D[{x[t], y[t]}, {t, 0, Pi}, Boxed -> False,
    RevolutionAxis -> {0, 1}, AxesLabel -> {"x", "y", "z"},
    BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 16}]
```

■



Σχήμα 11.8.2 - 3: Παράδειγμα 11.8.2 - 1: (a) η περιφέρεια $x(t) = 2+\cos t$ και $y(t) = 1 + \sin t$, όταν $\theta \in [0, 2\pi]$ μπλε καμπύλη ($a = 2$, $b = 1$ και $r = 1$). (b) Το στερεό εκ περιστροφής γύρω από τον y-άξονα - πράσινη ευθεία σε σχήμα (a).

Ασκήσεις

1. Έστω η **κυκλοειδής καμπύλη** με παραμετρική εξίσωση

$$x(t) = a(t - \sin t) \quad \text{και} \quad y(t) = a(1 - \cos t), \quad \text{όταν} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού από περιστροφή της γύρω από τον

i) x- άξονα (Σχ. 11.8.2 - 4), και

i) y- άξονα, (Σχ. 11.8.2 - 5).

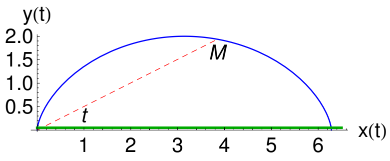
2. Έστω η **αστεροειδής καμπύλη** με παραμετρική εξίσωση

$$x(t) = a\cos^3 t \quad \text{και} \quad y(t) = b\sin^3 t, \quad \text{όταν} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{και} \quad a,\, b > 0.$$

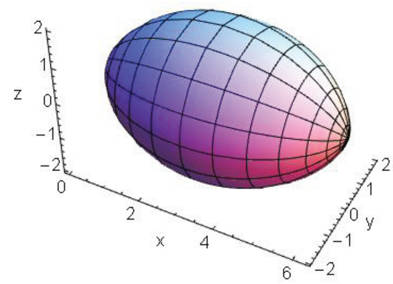
Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού από περιστροφή της γύρω από τον

i) x- άξονα (Σχ. 11.8.2 - 6), και

i) y- άξονα, (Σχ. 11.8.2 - 7).



(a)



(b)

Σχήμα 11.8.2 - 4: Άσκηση 1i Παραγράφου 11.8.2: (a) η κυκλοειδής $x(t) = a(t - \sin t)$ και $y(t) = a(1 - \cos t)$, όταν $\theta \in [0, 2\pi]$ μπλε καμπύλη ($a = 1$). (b) Το στερεό εκ περιστροφής γύρω από τον x-άξονα - πράσινη ευθεία σε σχήμα (a).

Απαντήσεις

1. i) Σύμφωνα με τον τύπο $(11.8.2 - 1)$ έχουμε

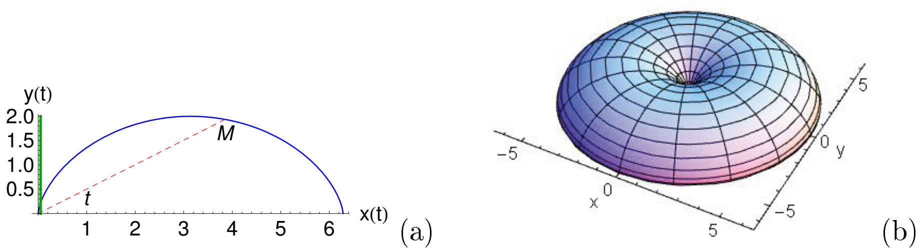
$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^{2\pi} y(t) \left| x'(t) \right| \, dt = \pi a^2 \int_0^{2\pi} (\cos t - 1)^2 \, dt \\ &= \frac{1}{4} \pi a^2 \left[6t - 8 \sin t + \sin 2t \right]_0^{2\pi} = 3\pi^2 a^2. \end{aligned}$$

ii) Όμοια με τον τύπο $(11.8.2 - 2)$ έχουμε

$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \int_0^{2\pi} x(t) y(t) \left| x'(t) \right| \, dt = 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (\cos t - 1)^2 (t - \sin t) \, dt \\ &= \frac{1}{12} \pi a^3 \left[-18 \cos t - 9 \cos 2t - 24 \sin t \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(9t^2 + \cos 3t \right) + 3t \sin 2t \right]_0^{2\pi} = 6\pi^3 a^3. \end{aligned}$$

2. i) Λόγω συμμετρίας αρκεί να υπολογιστεί, όταν $t \in [0, \pi]$. Σύμφωνα με τον τύπο $(11.8.2 - 1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^{\pi} y(t) \left| x'(t) \right| \, dt = 3\pi ab \int_0^{\pi} \cos^2 t \sin^4 t \, dt \\ &= \frac{1}{64} \pi ab \left[12t - 3 \sin 2t - 3 \sin 4t + \sin 6t \right]_0^{\pi} = \frac{3}{16} \pi^2 ab. \end{aligned}$$



Σχήμα 11.8.2 - 5: Άσκηση 1ii Παραγράφου 11.8.2: (a) όμοια η κυκλοειδής $x(t) = a(t - \sin t)$ και $y(t) = a(1 - \cos t)$, όταν $\theta \in [0, 2\pi]$ μπλε καμπύλη $(a = 1)$. (b) Το στερεό εκ περιστροφής γύρω από τον y-άξονα - πράσινη ευθεία σε σχήμα (a).

ii) Όμοια λόγω συμμετρίας αρκεί αρχικά να υπολογιστεί, όταν $t \in [0, \pi/2]$, οπότε με τον τύπο $(11.8.2-2)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \tilde{V}_y &= 2\pi \int_0^{\pi} x(t)y(t)\left|x'(t)\right| dt = 6\pi a^2 b \int_0^{\pi/2} \cos^5 t \sin^4 t \, dt \\ &= \frac{1}{420}\,\pi a^2 b \left[(249 + 220\cos 2t + 35\cos 4t + 35\cos 4t)\sin^5 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{16}{105}\,\pi\, a^2 b. \end{aligned}$$

Άρα

$$V_y = 2\tilde{V}_y = \frac{32}{105}\,\pi a^2 b.$$

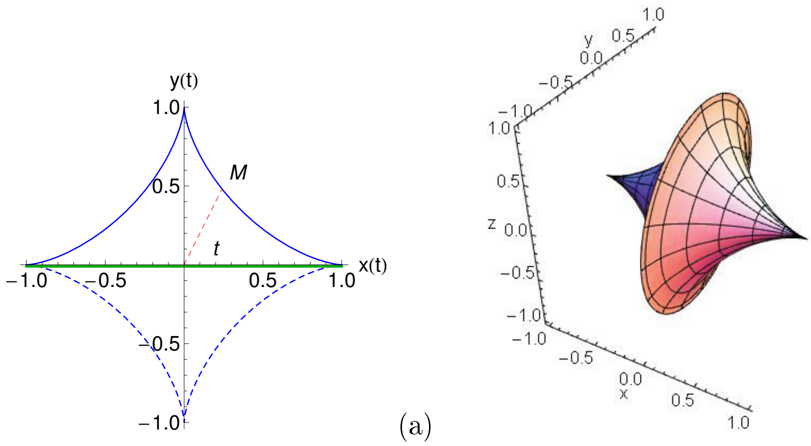
11.8.3 Πολικές συντεταγμένες

Ορισμός 11.8.3 - 1. *Έστω ότι η συνάρτηση $f\,|\,[\alpha, \beta\,]$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για κάθε $x \in [\alpha, \beta\,]$ και έχει εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες της μορφής*

$$r = r(\theta), \quad \text{όταν} \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]\,,$$

όπου θ_1 και θ_2 είναι οι τιμές της πολικής γωνίας στα άκρα σημεία του τόξου της καμπύλης (Σχ. 11.8.3 - 1). Τότε ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του κυκλικού τόξου με $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ δίνεται από τον τύπο

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^3(\theta)\, \sin\theta \, d\theta. \tag{11.8.3 - 1}$$



(a) (b)

Σχήμα 11.8.2 - 6: Άσκηση 2i Παραγράφου 11.8.2: (a) η αστεροειδής $x(t) = a\cos^3 t$ και $y(t) = b\cos^3 t$, όταν $\theta \in [0,\pi]$ μπλε συνεχής, $\theta \in [\pi, 2\pi]$ μπλε διακεκομμένη καμπύλη $(a = b = 1)$. (b) Το στερεό εκ περιστροφής γύρω από τον x-άξονα - πράσινη ευθεία σε σχήμα (a).

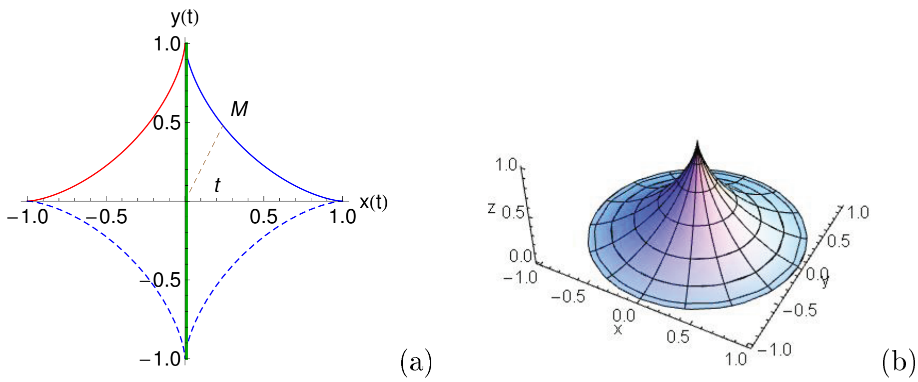
Σημείωση 11.8.3 - 1

Ο τύπος $(11.8.3-1)$ χρησιμοποιείται επίσης όταν πρόκειται για τον όγκο από περιστροφή γύρω από τον πολικό άξονα μιας κλειστής καμπύλης.

Παράδειγμα 11.8.3 - 1

Να υπολογιστεί ο όγκος που σχηματίζεται από περιστροφή της καμπύλης

$$r(\theta) = a\sin 2\theta, \quad \text{όταν} \quad \theta \in [0, \pi/2]$$



Σχήμα 11.8.2 - 7: Άσκηση 2i Παραγράφου 11.8.2: (a) η αστεροειδής $x(t) = a\cos^3 t$ και $y(t) = b\cos^3 t$, όταν $\theta \in [0, \pi]$ μπλε συνεχής, $\theta \in [\pi, 2\pi]$ μπλε διακεκομμένη καμπύλη ($a = b = 1$). (b) Το άνω μέρος του στερεού εκ περιστροφής γύρω από τον y-άξονα - πράσινη ευθεία σε σχήμα (a).

γύρω από τον πολικό άξονα.

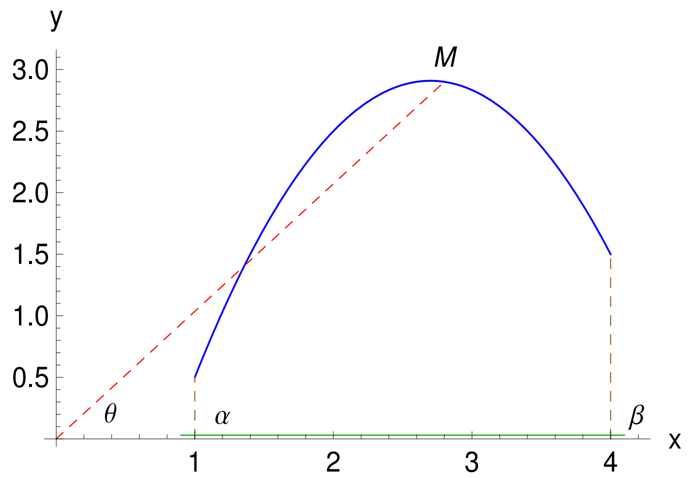
Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο $(11.8.3 - 1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3}\pi \int_0^{\pi/2} r^3(\theta)\,\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^3 2\theta\,\sin\theta\,d\theta \\ & \quad (\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta) \\ &= \frac{16}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\,\cos^3\theta\,d\theta \\ &= \frac{8}{105}\pi a^3 \left[(9 + 5\cos 2\theta)\sin^5\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{32}{105}\pi a^3. \end{aligned}$$

■

Άσκηση

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής γύρω από τον πολικό άξονα των καμπυλών



Σχήμα 11.8.3 - 1: Ορισμός 11.8.1 - 3 με τον πολικό άξονα περιστροφής (πράσινη ευθεία).

i) $r(\theta) = a(1 + \cos\theta)$ - **καρδιοειδής καμπύλη**, όταν $\theta[0, \pi]$, και

ii) $r(\theta) = a\cos^2\theta$, όταν $\theta[0, \pi/2]$.

Απαντήσεις

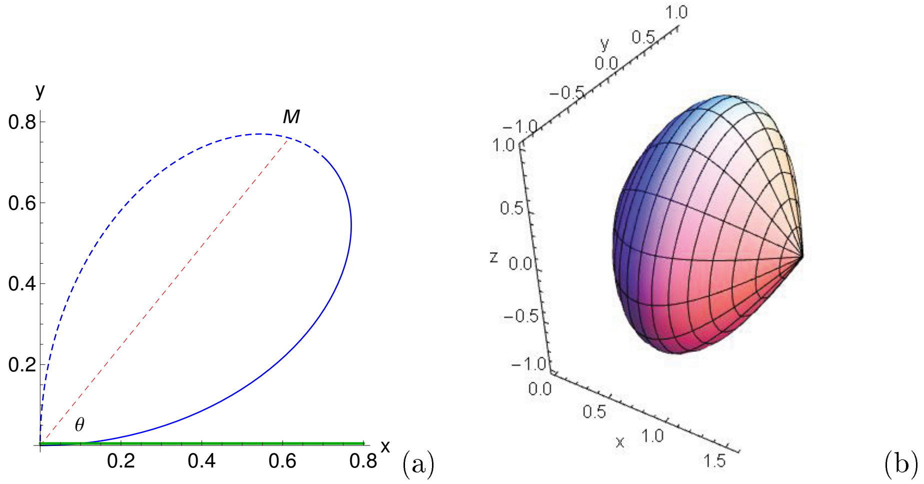
Σύμφωνα με τον τύπο $(11.8.3 - 1)$ έχουμε

i)

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3}\pi \int_0^{\pi} r^3(\theta)\, \sin\theta\, d\theta = \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta)^3 \sin\theta\, d\theta \\ &= -\frac{1}{48} a^3 \pi \left[(56\cos\theta + 28\cos 2\theta + 8\cos 3\theta + \cos 4\theta\right]_0^{\pi} = \frac{8}{3}\pi a^3. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3}\pi \int_0^{\pi} r^3(\theta)\, \sin\theta\, d\theta = \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi} \cos^6\theta\, \sin\theta\, d\theta \\ &= -\frac{2}{21} a^3 \pi \cos^7\theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{21}\pi a^3. \end{aligned}$$



Σχήμα 11.8.3 - 2: Παράδειγμα 11.8.3 - 1: (a) η καμπύλη $r(\theta) = \sin 2\theta$, όταν $\theta \in [0, \pi/4]$ μπλε συνεχής και $\theta \in [\pi/4, \pi/2]$ μπλε διακεκομμένη. (b) Το στερεό εκ περιστροφής γύρω από τον πολικό άξονα - πράσινη ευθεία σε (a).

11.9 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[2] Abramowitz, M. & Stegun, I. (1965). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover, Chapter 7, page 297. ISBN 978–048–661–272–0.

[3] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

[4] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Βιβλιογραφία για περαιτέρω μελέτη

Παπαδημητράκης, Μ. (2015). *Ανάλυση: Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής* *http : //fourier.math.uoc.gr/ papadim/analysis_n.pdf*
Πανεπιστήμιο Κρήτης: Τμήμα Μαθηματικών.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://eclass.uoa.gr/courses/MATH141/ θέση Έγγραφα
- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm

- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Μάθημα 12

ΣΕΙΡΕΣ

12.1 Ακολουθίες αριθμών

Κρίνεται σκόπιμο να δοθεί περιληπτικά πριν από τη μελέτη των σειρών η έννοια της ακολουθίας αριθμών. Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4].

12.1.1 Ορισμός ακολουθίας

Ορισμός 12.1.1 - 1. *Κάθε συνάρτηση της μορφής*

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{E} : \nu \longrightarrow a(\nu), \tag{12.1.1 - 1}$$

όπου $\mathbb{N}$ *το σύνολο των φυσικών αριθμών και* Ε *ένα μη κενό σύνολο λέγεται* **ακολουθία** *στοιχείων του συνόλου* Ε.

Στην (12.1.1−1) τα πρότυπα, δηλαδή οι φυσικοί αριθμοί, λέγονται **δείκτες**, ενώ οι εικόνες τους **όροι** της ακολουθίας. Η έκφραση $a(\nu)$ θα συμβολίζεται συνήθως στο εξής με a_ν και θα λέγεται ο ν-οστός ή ο γενικός όρος της ακολουθίας, δηλαδή

$$a_\nu = a(\nu) \quad \text{για κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Επίσης μια ακολουθία θα συμβολίζεται με (a_ν), $\nu \in \mathbb{N}$ ή αναλυτικά a_ν; $\nu = 1,\, 2,\, \ldots$, ενώ θα χρησιμοποιείται και ο όρος *η ακολουθία* a_ν; $\nu \in \mathbb{N}$.

Στην ειδική περίπτωση που το σύνολο $\mathrm{E} \subseteq \mathbb{R}$, τότε η ακολουθία a_ν λέγεται ακολουθία των πραγματικών αριθμών. Άρα:

Ορισμός 12.1.1 - 2. *Ορίζεται ως* **ακολουθία των πραγματικών αριθμών** *κάθε μονοσήμαντη απεικόνιση του συνόλου* $\mathbb{N}$ *των φυσικών αριθμών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών* $\mathbb{R}$.

Στο εξής θα εξεταστούν μόνον οι ακολουθίες των πραγματικών αριθμών.

Άμεση συνέπεια του Ορισμού 12.1.1 - 2 είναι ότι το πεδίο ορισμού και τιμών μιας ακολουθίας, έστω $a_\nu = a(\nu)$; $\nu \in \mathbb{N}$, είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι είναι υποσύνολο του αντίστοιχου πεδίου ορισμού και τιμών της συνάρτησης $f(x)$, $x \in D \subseteq \mathbb{R}$, όπως αυτό φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 12.1.1 - 1

Έστω η ακολουθία με γενικό όρο

$$a_\nu = \frac{\nu}{\nu^2 + 1} \quad \text{για κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Δίνοντας στο ν διαδοχικά τις τιμές $1,\, 2,\, \ldots,\, \nu,\, \ldots$ προκύπτουν οι παρακάτω όροι της ακολουθίας:

$$\frac{1}{2},\, \frac{1}{5},\, \ldots,\, \frac{\nu}{\nu^2 + 1},\, \ldots .$$

Τότε η αντίστοιχη συνάρτηση θα έχει τύπο

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{με πεδίο ορισμού και τιμών το} \quad \mathbb{R}.$$

Παρατηρήσεις 12.1.1 - 1

- Άμεσα προκύπτει ότι μία ακολουθία είναι ορισμένη, όταν δίνεται ο γενικός της όρος a_ν, όπως στο Παράδειγμα 12.1.1 - 1.
- Μία ακολουθία είναι επίσης ορισμένη, όταν δίνονται
  - επαρκείς όροι της, όπως $1^2,\, 2^2,\, 3^2,\, \ldots$, οπότε εύκολα προκύπτει ότι ορίζεται η ακολουθία $a_\nu = \nu^2$; $\nu \in \mathbb{N}$,

- ένας αναγωγικός τύπος ή αναδρομική σχέση, που επιτρέπει τον υπολογισμό του όρου a_ν από τον $a_{\nu-1}$ ή γενικότερα από ορισμένους προηγούμενούς του, όπως

$$a_\nu = a_{\nu-1} + \frac{1}{\nu-1}\,; \quad \nu = 2,\, 3,\, \ldots, \quad \text{όταν} \quad a_1 = -\frac{1}{4}\,.$$

- Είναι δυνατόν σε ορισμένες περιπτώσεις οι τιμές του δείκτη ν να αρχίζουν από το 0 ή από κάποιο δείκτη $\nu_0 > 1$, όπως

$$a_\nu = \frac{1}{\nu+1}\,; \quad \nu = 0,\, 1,\, \ldots, \quad \text{ή} \quad b_\nu = \frac{\nu}{\nu-3}\,; \quad \nu = 4,\, 5,\, \ldots\,.$$

- Οι τιμές του δείκτη ν, ενώ **αρχίζουν** από κάποια τιμή, πρέπει τελικά να **τείνουν στο άπειρο**, διαφορετικά δεν ορίζεται ακολουθία.

  Επομένως ο τύπος

$$a_\nu = \frac{1}{\nu+1}\,; \quad \nu = 1,\, 2,\, \ldots \quad \textbf{ορίζει} \text{ ακολουθία, ενώ ο}$$

$$b_\nu = \frac{1}{\nu+1}\,; \quad \nu = 1,\, 2,\, \ldots,\, 10 \quad \textbf{δεν ορίζει}.$$

12.1.2 Πράξεις μεταξύ ακολουθιών

Έστω (a_ν), (b_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ δύο ακολουθίες. Τότε ορίζονται για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ οι παρακάτω πράξεις:

Ισότητα	$(a_\nu) = (b_\nu)$, όταν $a_\nu = b_\nu$.
Πρόσθεση	$(a_\nu) + (b_\nu) = (a_\nu + b_\nu)$.
Γινόμενο	$(a_\nu)\,(b_\nu) = (a_\nu b_\nu)$.
Πηλίκο	$\dfrac{(a_\nu)}{(b_\nu)} = \left(\dfrac{a_\nu}{b_\nu}\right)$ με $b_\nu \neq 0$.
Γινόμενο με πραγματικό αριθμό	$\lambda\,(a_\nu) = (\lambda a_\nu)$; $\lambda \in \mathbb{R}$.
Απόλυτη τιμή	$\lvert(a_\nu)\rvert = (\lvert a_\nu\rvert)$.
Τετραγωνική ρίζα	$\sqrt{(a_\nu)} = \left(\sqrt{a_\nu}\right)$, και ανάλογα
Ρίζα k-τάξης με $k \geq 2$	$\sqrt[k]{(a_\nu)} = \left(\sqrt[k]{a_\nu}\right)$.

Παρατήρηση 12.1.2 - 1

Οι πράξεις της πρόσθεσης και του γινομένου γενικεύονται επαγωγικά για πεπερασμένο πλήθος ακολουθιών.

12.1.3 Φραγμένη ακολουθία

Ορισμός 12.1.3 - 1. *Η ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι* **άνω φραγμένη** *τότε και μόνον, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός s, τέτοιος ώστε $\alpha_\nu \leq s$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.*

Ο αριθμός s, καθώς και κάθε άλλος πραγματικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος από τον s, θα λέγεται ένα άνω φράγμα της ακολουθίας.

Ορισμός 12.1.3 - 2. *Η ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι* **κάτω φραγμένη** *τότε και μόνον, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός σ, τέτοιος ώστε $\sigma \leq a_\nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.*

Ο αριθμός σ, καθώς και κάθε άλλος πραγματικός αριθμός που είναι μικρότερος από τον σ, θα λέγεται τότε ένα κάτω φράγμα της ακολουθίας.

Ορισμός 12.1.3 - 3. *Η ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι* **φραγμένη** *τότε και μόνον, όταν είναι άνω και κάτω φραγμένη, δηλαδή αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί σ, s με $\sigma \leq s$, τέτοιοι ώστε $\sigma \leq a_\nu \leq s$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.*

Άρα μία ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη τότε και μόνον, όταν υπάρχει κλειστό διάστημα $[\sigma, s]$ στο οποίο ανήκουν όλοι οι όροι της.

Παράδειγμα 12.1.3 - 1

Η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{1}{\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

είναι φραγμένη, επειδή

$$0 \leq a_\nu = \frac{1}{\nu} \leq 1,$$

δηλαδή όλοι οι όροι της ανήκουν στο διάστημα $[0, 1]$.

Ορισμός 12.1.3 - 4. *Η ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι* **απόλυτα φραγμένη** *τότε και μόνον, όταν υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός, τέτοιος ώστε $|a_\nu| \leq \theta$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.*

Το θ θα λέγεται τότε ένα απόλυτο φράγμα της ακολουθίας. Είναι φανερό ότι αν ο θ είναι ένα απόλυτο φράγμα, τότε και κάθε άλλος θετικός αριθμός $\varphi > \theta$ είναι επίσης ένα απόλυτο φράγμα της. Γενικότερα ισχύει:

Πρόταση 12.1.3 - 1. *Μία φραγμένη ακολουθία είναι απόλυτα φραγμένη και αντίστροφα.*

Σύμφωνα με την πρόταση αυτή στο εξής ο όρος *φραγμένη* και *απόλυτα φραγμένη* ακολουθία θα χρησιμοποιούνται με την ίδια σημασία.

Παράδειγμα 12.1.3 - 2

Η ακολουθία
$$a_\nu = \frac{\nu^2 \cos 5\nu + \sqrt{\nu} \sin 2\nu}{\nu^2 + 1}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$
είναι απόλυτα φραγμένη, επειδή
$$|a_\nu| \leq \frac{\left|\nu^2 \cos 5\nu + \sqrt{\nu} \sin 2\nu\right|}{\nu^2 + 1} \leq \frac{\nu^2 + \sqrt{\nu}}{\nu^2 + 1} \leq \frac{2\nu^2}{\nu^2 + 1} < 2,$$
δηλαδή $|a_\nu| < 2$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε προφανώς είναι $-2 \leq a_\nu \leq 2$, δηλαδή η ακολουθία a_ν είναι επίσης και φραγμένη σύμφωνα με τον Ορισμό 12.1.3 - 3.

12.1.4 Μονοτονία ακολουθίας

Δίνεται στη συνέχεια η έννοια της μονοτονίας μιας ακολουθίας.

Έστω (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ μία ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε θα λέγεται ότι η ακολουθία είναι:

Ορισμός 12.1.4 - 1 **αύξουσα** *τότε και μόνον, όταν ισχύει $a_\nu \leq a_{\nu+1}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.*

Ορισμός 12.1.4 - 2 **γνήσια αύξουσα** *τότε και μόνον, όταν ισχύει $a_\nu < a_{\nu+1}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.*

Παράδειγμα 12.1.4 - 1

Η ακολουθία
$$a_\nu = \nu^2 + 1\,; \quad \nu \in \mathbb{N}$$
είναι γνήσια αύξουσα, επειδή
$$a_1 = 2 \,<\, a_2 = 5 \,<\, \ldots\,.$$

Ορισμός 12.1.4 - 3 **φθίνουσα** *τότε και μόνον, όταν ισχύει* $a_\nu \geq a_{\nu+1}$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 12.1.4 - 4 **γνήσια φθίνουσα** *τότε και μόνον, όταν ισχύει* $a_\nu > a_{\nu+1}$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 12.1.4 - 2

Η ακολουθία
$$a_\nu = \frac{1}{\nu^2 + 1}\,; \quad \nu \in \mathbb{N}$$
είναι γνήσια φθίνουσα, επειδή
$$a_1 = \frac{1}{2} \,>\, a_2 = \frac{1}{5} \,>\, \ldots\,.$$

Ορισμός 12.1.4 - 5 **σταθερή** *τότε και μόνον, όταν ισχύει* $a_{\nu+1} = a_\nu$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 12.1.4 - 3

Η ακολουθία $a_\nu = 5; \quad \nu \in \mathbb{N}$ είναι σταθερή, επειδή $a_1 = 5 \,=\, a_2 = 5 \,=\ldots\,.$

Μία ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ που ανήκει σε μία από τις κατηγορίες ορισμών 12.1.4 - 1 ή 12.1.4 - 3 θα λέγεται **μονότονη** ακολουθία, ενώ όταν ανήκει στις 12.1.4 - 2 ή 12.1.4 - 4 θα λέγεται **γνήσια μονότονη** ακολουθία.

Παρατηρήσεις 12.1.4 - 1

1. Κάθε γνήσια μονότονη ακολουθία είναι και μονότονη. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε.

2. Αν η ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα, τότε $a_\nu \geq \alpha_1$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, δηλαδή η (a_ν) είναι κάτω φραγμένη με ένα κάτω φράγμα τον πρώτο όρο της, όπως αυτό ισχύει στο Παράδειγμα 12.1.4 - 1, όπου ένα κάτω φράγμα της είναι ο αριθμός 2.

Όμοια, αν η ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα, τότε $a_\nu \leq \alpha_1$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, δηλαδή η (a_ν) είναι άνω φραγμένη με ένα άνω φράγμα τον πρώτο όρο της, όπως αυτό ισχύει στο Παράδειγμα 12.1.4 - 2, όπου ένα άνω φράγμα της είναι ο αριθμός 1/2..

3. Για να καθοριστεί το είδος της μονοτονίας μιας ακολουθίας (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ τις περισσότερες φορές ακολουθείται μία από τις παρακάτω μεθόδους:

i) εξετάζεται το πρόσημο της διαφοράς

$$\Delta_\nu = a_{\nu+1} - a_\nu .$$

Παράδειγμα 12.1.4 - 4

Η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{\nu}{\nu+1}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

είναι γνήσια αύξουσα, επειδή

$$\Delta_\nu = a_{\nu+1} - a_\nu = \frac{\nu+1}{\nu+2} - \frac{\nu}{\nu+1} = \frac{2}{(\nu+1)(\nu+2)} > 0\,,$$

δηλαδή $a_{\nu+1} > a_\nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

ii) Αν οι όροι της a_ν διατηρούν πρόσημο, τότε συνήθως συγκρίνεται ο λόγος $a_{\nu+1}/a_\nu$ με τη μονάδα, οπότε από τη σύγκριση αυτή εξάγονται συμπεράσματα για τη μονοτονία της ακολουθίας,

iii) υπολογίζεται μεταξύ δύο ή τριών πρώτων όρων της ακολουθίας μία σχέση, από την οποία προκύπτει μία ένδειξη μονοτονίας και έπειτα, με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής, αποδεικνύεται η ανισοτική σχέση, η οποία καθορίζει τελικά το είδος της μονοτονίας της ακολουθίας.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι 4 πρώτοι όροι των παρακάτω ακολουθιών (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$:

$i)\quad \dfrac{1}{\nu}$ $\qquad$ $iii)\quad (-1)^\nu \dfrac{1+\sqrt{\nu}}{\nu}$

$ii)\quad \dfrac{\nu}{\sqrt{\nu^2+1}}$ $\qquad$ $iv)\quad \dfrac{2^\nu}{\nu\,!}\,.$

Στη συνέχεια να υπολογιστούν τα φράγματά των.

2. Να υπολογιστούν οι 5 πρώτοι όροι της ακολουθίας, που ορίζεται από τον αναδρομικό τύπο

$$a_\nu = 1 + \frac{1}{a_{\nu-1}}\,;\ \nu = 2,\,3,\,\ldots, \quad \text{όταν} \quad a_1 = -\frac{3}{5}\,.$$

3. Να υπολογιστούν οι 4 πρώτοι όροι των παρακάτω ακολουθιών (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$:

$i)\quad \dfrac{\nu \sin 2\nu}{\nu^2+1}$ $\qquad$ $iii)\quad \dfrac{\sin\nu + \cos^4 3\nu}{\nu^4}$

$ii)\quad \dfrac{\nu^3}{5\nu^2+\cos^2\nu}$ $\qquad$ $iv)\quad \dfrac{\nu+5}{2^\nu}\,.$

4. Στην προηγούμενη άσκηση να εξεταστεί ποιες ακολουθίες είναι μονότονες και να καθοριστεί το είδος μονοτονίας τους.

12.1.5 Ορισμός σύγκλισης ακολουθιών

Ορισμός 12.1.5 - 1. *Θα λέγεται ότι μία ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$* **συγκλίνει** *στον πραγματικό αριθμό a ή τείνει στον αριθμό a ή το όριό της είναι ο αριθμός a και αυτό θα συμβολίζεται με*[1]

$$a_\nu \to a \quad ή \quad \lim_{\nu->+\infty} a_\nu = a \quad \text{ή εν συντομία στο εξής} \quad \lim a_\nu = a,$$

τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, δηλαδή δείκτης που εξαρτάται γενικά από το ε, τέτοιος ώστε να ισχύει

$$|a_\nu - a| < \varepsilon \quad \text{για κάθε } \nu \geq \nu_0(\varepsilon). \qquad (12.1.5 - 1)$$

[1] Ο συμβολισμός lim είναι η συγκοπή της λέξης *limes*, που σημαίνει *όριο* και στο εξής, όταν χρησιμοποιείται, θα σημαίνει $\lim_{\nu\to+\infty}$, εκτός και αν διαφορετικά ορίζεται.

Στην ειδική περίπτωση που είναι $a = 0$, δηλαδή $\lim a_\nu = 0$, η ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ θα λέγεται **μηδενική**.

Από τον Ορισμό 12.1.5 - 1 προκύπτει τότε ότι:

Πρόταση 12.1.5 - 1. *Αν* $\lim a_\nu = a$, *τότε η ακολουθία* $\delta_\nu = (a_\nu - a)$; $\nu \in N$ *είναι μηδενική και αντίστροφα, δηλαδή*

$$\lim a_\nu = a \iff \lim\,(a_\nu - a) = 0. \tag{12.1.5 - 2}$$

Παράδειγμα 12.1.5 - 1

Η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{1}{\nu}\,, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

είναι μηδενική, επειδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, που είναι μεγαλύτερος από το $1/\varepsilon$.

Πράγματι, αν

$$\nu_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 = \nu_0(\varepsilon),$$

τότε για κάθε $\nu \geq \nu_0(\varepsilon)$ θα είναι

$$\nu > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{\nu} < \varepsilon,$$

δηλαδή

$$|a_\nu| = \frac{1}{\nu} < \varepsilon, \quad \text{οπότε} \quad a_\nu = \frac{1}{\nu} \to 0.$$

Παράδειγμα 12.1.5 - 2

Η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{\nu^2 - \nu}{\nu^2 + 1}\,, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει στο 1, επειδή σύμφωνα με την Πρόταση 12.1.5 - 1 είναι

$$|a_\nu - 1| = \left|\frac{\nu^2 - \nu}{\nu^2 + 1} - 1\right| = \frac{\nu + 1}{\nu^2 + 1} \leq \frac{2}{\nu} < \varepsilon \quad \text{με} \quad \varepsilon > 0,$$

οπότε $\nu > 2/\varepsilon$. Τότε υπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, που είναι μεγαλύτερος από το $2/\varepsilon$ και αυτό επειδή, αν είναι

$$\nu_0 = \text{ακέραιο μέρος του} \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1 = \nu_0(\varepsilon),$$

τότε για κάθε $\nu \geq \nu_0(\varepsilon)$ θα είναι

$$\nu > \frac{2}{\varepsilon} \quad \text{ή} \quad \frac{2}{\nu} < \varepsilon, \quad \text{δηλαδή} \quad |a_\nu - 1| < \varepsilon,$$

οπότε $\lim a_\nu = 1$.

Παράδειγμα 12.1.5 - 3

Να δειχθεί ότι η ακολουθία

$$a_\nu = (-1)^\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

δεν συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

Λύση. Αν με την εις άτοπον απαγωγή υποτεθεί ότι συγκλίνει προς έναν αριθμό, έστω x, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα και για $\varepsilon = 1/2$, θα υπάρχει δείκτης $\nu_0 \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε

$$|(-1)^\nu - x| \leq \frac{1}{2} \quad \text{για κάθε} \quad \nu \geq \nu_0.$$

Τότε όμως, επειδή $\nu_0 < \nu_0 + 1$ είναι

$$|(-1)^\nu_0 - x| < \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \left|(-1)^{\nu_0+1} - x\right| < \frac{1}{2},$$

οπότε έχουμε

$$\left|(-1)^{\nu_0+1} - (-1)^\nu_0\right| \leq \left|(-1)^{\nu_0+1} - x\right| + |(-1)^\nu_0 - x| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

δηλαδή $\left|(-1)^{\nu_0+1} - (-1)^\nu_0\right| < 1$, ενώ προφανώς $\left|(-1)^{\nu_0+1} - (-1)^\nu_0\right| = 2$.

Άρα η υπόθεση ότι η ακολουθία συγκλίνει οδηγεί σε άτοπο, που σημαίνει ότι η a_ν δεν συγκλίνει στο $\mathbb{R}$. ∎

12.1.6 Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Δίνονται στη συνέχεια με τη μορφή προτάσεων οι κυριότερες ιδιότητες των συγκλινουσών ακολουθιών:

Πρόταση 12.1.6 - 1. *Το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας* (a_ν)*;* $\nu \in \mathbb{N}$ *είναι* **μονοσήμαντα** *ορισμένο.*

Πρόταση 12.1.6 - 2. *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε, δηλαδή υπάρχουν φραγμένες ακολουθίες που δεν συγκλίνουν.*

Πρόταση 12.1.6 - 3. *Το γινόμενο μηδενικής ακολουθίας επί φραγμένη είναι μηδενική ακολουθία.*

Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει:

Πόρισμα 12.1.6 - 1. *Αν* $\lim a_\nu = a$ *και* $k \in \mathbb{R}$*, τότε*

$$\lim (ka_\nu) = ka. \tag{12.1.6 - 1}$$

Πρόταση 12.1.6 - 4. *Αν η* $(b_\nu)\,, \nu \in \mathbb{N}$ *είναι μια μηδενική ακολουθία και η ακολουθία* $(a_\nu)\,, \nu \in \mathbb{N}$ *φράσσεται από την ακολουθία* $(b_\nu)\,, \nu \in \mathbb{N}$ *από κάποιο δείκτη και μετά, έστω* ν_1*, δηλαδή αν ισχύει*

$$|a_\nu| \leq k\,|b_\nu| \quad \textit{με} \quad k > 0 \quad \textit{για κάθε} \quad \nu \geq \nu_1,$$

τότε η $(a_\nu)\,, \nu \in \mathbb{N}$ *είναι επίσης μηδενική ακολουθία.*

Παράδειγμα 12.1.6 - 1

Έστω η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{5\sin^2\nu}{\nu^2+\nu+1}\,.$$

Τότε, επειδή σύμφωνα με την Πρόταση 12.1.6 - 4 είναι

$$|a_\nu| = \left|\frac{5\sin^2\nu}{\nu^2+\nu+1}\right| = \frac{5\left|\sin^2\nu\right|}{|\nu^2+\nu+1|} \leq \frac{5}{\nu^2+\nu+1} < \overbrace{5}^{k}\ \overbrace{\frac{1}{\nu}}^{b_\nu}$$

και ισχύει ότι $\lim b_\nu = \frac{1}{\nu} = 0$, θα πρέπει και $\lim a_\nu = 0$.

Πόρισμα 12.1.6 - 2. *Αν* $|a_\nu| \leq |b_\nu|$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$ *και η* (b_ν) *είναι μηδενική ακολουθία, τότε και η ακολουθία* (a_ν) *είναι μηδενική.*

Πρόταση 12.1.6 - 5. *Αν*

$$b_\nu \leq a_\nu \leq \gamma_\nu \quad \text{για κάθε} \quad \nu \geq \nu_0 \quad \text{και} \quad \lim b_\nu = \lim \gamma_\nu = a,$$

τότε θα πρέπει και $\lim a_\nu = a$ (**ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες**).

Πρόταση 12.1.6 - 6. *Αν δύο ακολουθίες* (a_ν) *και* (b_ν)*;* $\nu \in \mathbb{N}$ *συγκλίνουν και ισχύει* $a_\nu < b_\nu$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$*, τότε* $a_\nu \leq b_\nu$.

Πόρισμα 12.1.6 - 3. *Αν* $\lim a_\nu = a$ *και* $a_\nu < s$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$*, τότε* $a \leq s$.

Πόρισμα 12.1.6 - 4. *Αν* $\lim a_\nu = a$ *και* $\sigma < a_\nu$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$*, τότε* $\sigma \leq a$.

12.1.7 Πράξεις μεταξύ συγκλινουσών ακολουθιών

Όμοια δίνονται στη συνέχεια οι δυνατές πράξεις μεταξύ συγκλινουσών ακολουθιών με τη μορφή των παρακάτω προτάσεων:

Πρόταση 12.1.7 - 1 (όριο αθροίσματος). *Αν* $\lim a_\nu = a$ *και* $\lim b_\nu = b$*, τότε υπάρχει το* $\lim (a_\nu + b_\nu)$ *και ισχύει*

$$\lim (a_\nu + b_\nu) = a + b. \tag{12.1.7 - 1}$$

Παρατηρήσεις 12.1.7 - 1

i) Η ισχύς της Πρότασης 12.1.7 - 1 επεκτείνεται και στην περίπτωση ενός πεπερασμένου πλήθους συγκλινουσών ακολουθιών, δηλαδή ισχύει

$$\begin{aligned} &\lim (a_{1_\nu} + a_{2_\nu} + \ldots + a_{k_\nu}) \\ &= \lim a_{1_\nu} + \lim a_{2_\nu} + \ldots + \lim a_{k_\nu}, \end{aligned} \tag{12.1.7 - 2}$$

ενώ δεν ισχύει αν το πλήθος των προσθετέων δεν είναι πεπερασμένο, δηλαδή άπειρο.

ii) Το αντίστροφο της Πρότασης 12.1.7 - 1 δεν ισχύει πάντοτε, δηλαδή: *αν το άθροισμα δύο ακολουθιών είναι συγκλίνουσα ακολουθία, αυτό δεν συνεπάγεται πάντοτε ότι καθεμιά από αυτές είναι συγκλίνουσα ακολουθία.* Είναι επίσης δυνατόν στην περίπτωση αυτή να μη συγκλίνει ούτε η μία ούτε η άλλη ακολουθία.

Πρόταση 12.1.7 - 2 (όριο διαφοράς). *Αν* $\lim a_\nu = a$ *και* $\lim b_\nu = b$, *τότε υπάρχει το* $\lim (a_\nu - b_\nu)$ *και ισχύει*

$$\lim (a_\nu - b_\nu) = a - b. \qquad (12.1.7 - 3)$$

Πρόταση 12.1.7 - 3 (όριο γινομένου). *Αν* $\lim a_\nu = a$ *και* $\lim b_\nu = b$, *τότε υπάρχει το* $\lim (a_\nu \, b_\nu)$ *και ισχύει*

$$\lim (a_\nu \, b_\nu) = ab. \qquad (12.1.7 - 4)$$

Παρατηρήσεις 12.1.7 - 2

i) Η Πρόταση 12.1.7 - 3 επεκτείνεται και στην περίπτωση ενός πεπερασμένου πλήθους συγκλινουσών ακολουθιών, δηλαδή

$$\lim (a_{1_\nu} \, a_{2_\nu} \, \cdots \, a_{k_\nu}) = \lim a_{1_\nu} \, \lim a_{2_\nu} \, \cdots \, \lim a_{k_\nu}. \qquad (12.1.7 - 5)$$

Ειδικότερα, αν οι k-ακολουθίες είναι **ίσες**, δηλαδή

$$a_{i_\nu} = a_\nu; \quad i = 1, \, 2, \, \ldots, \, k \quad \text{και} \quad \lim a_\nu = a,$$

τότε ισχύει

$$\lim (a_\nu)^k = (\lim a_\nu)^k = a^k \quad \text{για κάθε} \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (12.1.7 - 6)$$

ii) Η $(12.1.7 - 5)$ δεν ισχύει αν το πλήθος των παραγόντων δεν είναι πεπερασμένο.

iii) Το αντίστροφο της Πρότασης 12.1.7 - 3 δεν ισχύει γενικά.

Από τις Προτάσεις 12.1.7 - 1 και 12.1.7 - 3 προκύπτει ότι:

Πόρισμα 12.1.7 - 1. *Αν* $\lim a_\nu = a$ *και* $\lim b_\nu = b$, *τότε*

$$\lim \left(k a_\nu + \lambda b_\nu \right) = k a_\nu + \lambda b_\nu \tag{12.1.7 - 7}$$

για κάθε $k,\, \lambda \in \mathbb{R}$ *(**γραμμική ιδιότητα**).*

Η γραμμική ιδιότητα γενικεύεται ως εξής:
αν $\lim a_{i_\nu} = a_i$ και $k_i \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lim \left(k_1 a_{1_\nu} + k_2 a_{2_\nu} + \ldots + k_\nu a_{k_\nu} \right)$$

$$= k_1 \lim a_{1_\nu} + k_2 \lim a_{2_\nu} + \ldots + k_\nu \lim a_{k_\nu},$$

Πρόταση 12.1.7 - 4 (όριο πηλίκου). *Αν* $\lim a_\nu = a$ *και* $\lim b\nu = b \neq 0$ *όπου* $b_\nu \neq 0$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$, *τότε υπάρχει το* $\lim \left(a_\nu / b_\nu \right)$ *και ισχύει*

$$\lim \frac{a_\nu}{b_\nu} = \frac{\lim a_\nu}{\lim b_\nu} = \frac{a}{b}\,. \tag{12.1.7 - 8}$$

Παράδειγμα 12.1.7 - 1

Έστω η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{\nu^2 + \nu + 5}{3\nu^2 + 1}\,,$$

που γράφεται επίσης ως εξής:

$$a_\nu = \frac{1 + \frac{1}{\nu} + \frac{5}{\nu^2}}{3 + \frac{1}{\nu^2}}\,.$$

Τότε, επειδή η ακολουθία

- $\dfrac{1}{\nu}$ (Παράδειγμα 12.1.5 - 1) συγκλίνει στο μηδέν, και
- η $\dfrac{1}{\nu^2}$ σύμφωνα με την Πρόταση 12.1.7 - 3, επειδή

$$\frac{1}{\nu^2} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{1}{\nu}\,, \quad \text{είναι επίσης μηδενική,}$$

σύμφωνα με τις Προτάσεις 12.1.7 - 1 και 12.1.7 - 4 έχουμε ότι:

$$\lim a_\nu = \lim \frac{\nu^2+\nu+5}{3\nu^2+1} = \frac{\lim\left(1+\frac{1}{\nu}+\frac{5}{\nu^2}\right)}{\lim\left(3+\frac{1}{\nu^2}\right)}$$

$$= \frac{1+\lim\left(\frac{1}{\nu}\right)+5\lim\left(\frac{1}{\nu^2}\right)}{3+\lim\left(\frac{1}{\nu^2}\right)} = \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3}\,.$$

Παρατηρήσεις 12.1.7 - 3

i) Το αντίστροφο της Πρότασης 12.1.7 - 4 δεν ισχύει πάντοτε, δηλαδή η ύπαρξη του ορίου $\lim\left(a_\nu/b_\nu\right)$ δεν συνεπάγεται πάντοτε την ύπαρξη ενός από τα $\lim a_\nu$ ή $\lim b_\nu$.

ii) Σύμφωνα με την Πρόταση 12.1.7 - 4, αν $a_\nu = 1$ και $b_\nu \neq 0$ με $\lim b_\nu = b \neq 0$, τότε από τον τύπο $(12.1.7-6)$ έχουμε

$$\frac{1}{(b_\nu)^k} = \frac{1}{b^k}\,. \qquad (12.1.7 - 9)$$

Συνδυάζοντας τις $(12.1.7-6)$ και $(12.1.7-9)$ προκύπτει ότι:

Πόρισμα 12.1.7 - 2. *Αν* $a_\nu \neq 0$ *και* $\lim a_\nu = a \neq 0$, *τότε ισχύει*

$$\lim\,(a_\nu)^k = a^k \quad \text{για κάθε} \quad k = \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots\,. \qquad (12.1.7 - 10)$$

Η $(12.1.7-10)$ αποτελεί γενίκευση της $(12.1.7-6)$.

Πρόταση 12.1.7 - 5 (όριο απόλυτης τιμής). *Αν* $\lim a_\nu = a$, *τότε υπάρχει το* $\lim|a_\nu|$ *και ισχύει*

$$\lim|a_\nu| = |a|. \qquad (12.1.7 - 11)$$

Παρατηρήσεις 12.1.7 - 4

i) Το αντίστροφο της Πρότασης 12.1.7 - 5 δεν ισχύει, όταν $a \neq 0$, δηλαδή:

αν $\quad \lim |a_\nu| = |a| \neq 0,\quad$ **δεν** συνεπάγεται ότι και $\quad \lim a_\nu = a$

και αυτό επειδή είναι δυνατόν μία ακολουθία να συγκλίνει απόλυτα, χωρίς όμως η ίδια να συγκλίνει.

Ειδικά, όταν $a = 0$, ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία:

$$\lim a_\nu = 0 \iff -\lim a_\nu = 0 \iff \lim |a_\nu| = 0. \qquad (12.1.7 - 12)$$

Πρόταση 12.1.7 - 6 (όριο ρίζας). *Αν* $\lim a_\nu = a$, *τότε*

$$\lim \sqrt{|a_\nu|} = \sqrt{|a|} = \sqrt{\lim a_\nu}. \qquad (12.1.7 - 13)$$

Παρατήρηση 12.1.7 - 1

Από την Πρόταση 12.1.7 - 6 προκύπτει ότι τα σύμβολα

$$\lim \quad \text{και} \quad \sqrt{\ }$$

επιτρέπεται να εναλλάσσονται αριστερά από την ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$.

Η γενίκευση της Πρότασης 12.1.7 - 6 διατυπώνεται ως εξής:

Πρόταση 12.1.7 - 7 (γενίκευση ρίζας). *Αν* $a_\nu \geq 0$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$ *και* $\lim a_\nu = a$, *τότε*

$$\lim \sqrt[k]{a_\nu} = \sqrt[k]{\lim a_\nu} \quad \text{με} \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (12.1.7 - 14)$$

Από την Πρόταση 12.1.7 - 7 προκύπτει ότι:

Πόρισμα 12.1.7 - 3. *Αν* $a > 0$, *τότε, αν*

$$a_\nu = a, \quad \text{είναι} \quad a_\nu = \lim \sqrt[\nu]{a} = 1, \quad \text{ενώ, αν}$$

$$a_\nu = \nu, \qquad \lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1.$$

Σε συμπλήρωση των παραπάνω προτάσεων δίνονται στη συνέχεια οι εξής:

Πρόταση 12.1.7 - 8. *Έστω η ακολουθία*

$$a_\nu = \omega^\nu \,; \quad \nu \in \mathbb{N} \quad \mu\varepsilon \quad |\omega| < 1.$$

Τότε $\quad \lim a_\nu = 0.$

Πρόταση 12.1.7 - 9. *Αν* $\omega \in \mathbb{R}$ *και* $|\omega| < 1$, *τότε*

$$\lim a_\nu = \nu^k \omega^\nu = 0 \,; \quad \nu \in \mathbb{N} \quad \mu\varepsilon \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Πρόταση 12.1.7 - 10. *Έστω μία ακολουθία* (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ *με* $a_\nu \neq 0$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$. *Τότε, αν*

$$\left| \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \right| < 1, \quad \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \quad \lim a_\nu = 0.$$

Πρόταση 12.1.7 - 11. *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *ισχύει ότι*

$$\lim \frac{x^\nu}{\nu\,!} = 0.$$

Σχετικά τώρα με τη σύγκλιση μονότονων ακολουθιών δεχόμαστε ότι ισχύει:

Αξίωμα 12.1.1. *Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό.*

Το αξίωμα αυτό, αν και αφορά μόνο τις μονότονες ακολουθίες, δίνει μία ικανή συνθήκη ύπαρξης του ορίου ακολουθίας. Επίσης εξασφαλίζει την ύπαρξη στο $\mathbb{R}$ του ορίου μιας ακολουθίας με ορισμένες προϋποθέσεις, αλλά δεν δίνει καμία ένδειξη για τον υπολογισμό του.

Άμεσες συνέπειες του αξιώματος είναι οι επόμενες δύο προτάσεις:

Πρόταση 12.1.7 - 12. *Αν μία ακολουθία* (a_ν)*;* $\nu \in \mathbb{N}$ *είναι αύξουσα και έχει ως ένα άνω φράγμα τον αριθμό* s*, τότε είναι συγκλίνουσα και ισχύει* $\lim a_\nu \leq s$*.*

Πρόταση 12.1.7 - 13. *Αν μία ακολουθία* (a_ν)*;* $\nu \in \mathbb{N}$ *είναι φθίνουσα και έχει ως ένα κάτω φράγμα τον αριθμό* σ*, τότε είναι συγκλίνουσα και ισχύει* $\sigma \leq \lim a_\nu$*.*

12.1.8 Ο αριθμός e

Αποδεικνύεται σύμφωνα με τους ορισμούς της Παραγράφου 12.1.5 ότι η ακολουθία

$$a_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

είναι γνήσια αύξουσα, ενώ η ακολουθία

$$b_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

είναι γνήσια φθίνουσα.

Επίσης αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$2 = \alpha_1 \leq a_\nu < b_\nu \leq b_1 = 4. \tag{12.1.8 - 1}$$

Τότε σύμφωνα με το Αξίωμα 12.1.1 για τις οριακές τιμές των ισχύει:

$$2 \leq \lim a_\nu \leq \lim b_\nu = 4. \tag{12.1.8 - 2}$$

Αλλά

$$\frac{\lim a_\nu}{\lim b_\nu} = \lim \frac{a_\nu}{b_\nu} = \lim\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) = 1. \tag{12.1.8 - 3}$$

Από τις $12.1.8 - 1)$ και $12.1.8 - 3)$ προκύπτει ότι $\quad \lim a_\nu = \lim b_\nu$.

Ορισμός 12.1.8 - 1 (αριθμού e). *Ο αριθμός* e *ορίζεται ως η κοινή οριακή τιμή των ακολουθιών* (a_ν)*;* $\nu \in \mathbb{N}$ *και* (b_ν)*;* $\nu \in \mathbb{N}$*, δηλαδή*

$$e = \lim\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu = \lim\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1} \tag{12.1.8 - 4}$$

όπου ισχύει ότι

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} \leq \ e \ \leq \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}. \qquad (12.1.8 - 5)$$

Ο αριθμός e, που συμβολισμός του εισήχθη από τον Euler το 1736, παίζει σπουδαίο ρόλο στα Μαθηματικά και κυρίως τα Εφαρμοσμένα, ενώ αποδεικνύεται στην Ανάλυση ότι δεν είναι ρητός, ούτε αλγεβρικός, δηλαδή δεν αποτελεί ρίζα καμιάς αλγεβρικής εξίσωσης (κατά συνέπεια δεν είναι άρρητος), αλλά, όπως και ο αριθμός π, μη αλγεβρικός ή **υπερβατικός** αριθμός.[2] Μία προσέγγισή του στα 3 δεκαδικά ψηφία είναι $e \approx 2.718$.

Ασκήσεις

1. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω ακολουθίες (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$:

$i)\quad \dfrac{\nu}{\nu^4+\nu+1} \qquad iii)\quad \left(5+\dfrac{1}{\nu}\right)^2$

$ii)\quad \sqrt{\nu^2+4}-\sqrt{\nu^2+1} \qquad iv)\quad \left(\dfrac{9\nu^2+5}{4\nu^2+\nu+1}\right)^{1/3}.$

2. Δείξτε ότι αν μία ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη, τότε και η ακολουθία (a_ν/ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη και συγκλίνει στο μηδέν.

3. Δείξτε ότι

$$\lim\left(\sqrt{(a+\nu)(b+\nu)}\ -\ \nu\right) = \frac{a+b}{2}.$$

4. Δείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι μηδενικές:

$i)\quad \dfrac{\sin\nu+\cos^2\nu}{\sqrt{\nu}} \qquad iii)\quad \nu\left(\sqrt{\nu^4+5}-\nu^2\right)$

$ii)\quad \sqrt[3]{\nu+1}-\sqrt[3]{\nu} \qquad iv)\quad \dfrac{2^\nu\nu\,!}{(3\nu)^\nu}.$

5. Σύμφωνα με την (12.1.8−4) υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών

[2]Το ότι είναι υπερβατικός αποδείχθη από τον Hermite και η ανακάλυψη αυτή θεωρείται ως μία από τις σπουδαιότερες ανακαλύψεις των Μαθηματικών. Το 1882 ο Lindemann απέδειξε ότι και ο αριθμός π είναι υπερβατικός και κατά συνέπεια *το άλυτο του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη*.

με γενικούς όρους:

$i)\quad \left(1+\dfrac{1}{5\nu}\right)^{\nu} \qquad ii)\quad \left(1-\dfrac{1}{\nu}\right)^{\nu} \qquad iii)\quad \left(\dfrac{3\nu+1}{3\nu-1}\right)^{\nu}.$

6. Δείξτε ότι

$$\lim \sqrt[\nu]{\nu^2+\nu} = 1.$$

12.2 Σειρές αριθμών

12.2.1 Ορισμός σειράς

Έστω (a_n); $n \in \mathbb{N}$ μία ακολουθία πραγματικών αριθμών.[3] Τότε ορίζονται επαγωγικά τα παρακάτω αθροίσματα:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ &\text{και γενικά} \\ s_{n+1} &= s_n + a_{n+1} \quad \text{για κάθε } n = 1,\, 2,\, \ldots\,. \end{aligned}$$

Τα παραπάνω αθροίσματα είναι μονοσήμαντα ορισμένα και ορίζουν μία νέα ακολουθία, έστω (s_n); $n \in \mathbb{N}$, που είναι τα αθροίσματα των όρων της (a_n); $n \in \mathbb{N}$, που έχει γενικό όρο τον $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Η ακολουθία (s_n); $n \in \mathbb{N}$, που συμβολίζεται με $a_1 + a_2 + \ldots$ ή συντομότερα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \tag{12.2.1 - 1}$$

θα λέγεται **σειρά** (series) των πραγματικών αριθμών a_n.[4]

Κάθε άθροισμα s_n λέγεται τότε και **μερικό άθροισμα** ή **τμήμα** (partial sum) της σειράς $(12.2.1-1)$, ενώ οι πραγματικοί αριθμοί a_n θα λέγονται **όροι** της σειράς.

Ανάλογα με τις Παρατηρήσεις 12.2.1 - 1 για τις ακολουθίες έχουμε και για την περίπτωση των σειρών τα εξής:

---

[3] Στο εξής για διάκριση με τον αντίστοιχο δείκτη των ακολουθιών ο δείκτης στις σειρές θα συμβολίζεται με n.

[4] Βλέπε βιβλιογραφία και: *https://en.wikipedia.org/Series_(mathematics)*

Παρατηρήσεις 12.2.1 - 1

- Άμεσα προκύπτει ότι μία σειρά είναι ορισμένη, όταν δίνεται ο γενικός της όρος a_ν, όπως για παράδειγμα, αν

$$a_n = \frac{1}{n+1}, \quad \text{τότε} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots .$$

- Μία σειρά είναι επίσης ορισμένη, όταν δίνονται επαρκείς όροι της, όπως 1^2, 2^2, 3^2, …, οπότε εύκολα προκύπτει ότι πρόκειται για τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2.$$

- Είναι δυνατόν σε ορισμένες περιπτώσεις οι τιμές του δείκτη n να αρχίζουν από το 0, δηλαδή

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots \tag{12.2.1 - 2}$$

όπως για παράδειγμα στη σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \ldots$$

ή από κάποιο δείκτη n_0 με $n_0 > 1$, όπως

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n}{n-2} = 3 + 2 + \frac{5}{3} + \ldots$$

όπου $n_0 = 3$.

- Οι τιμές του δείκτη n, ενώ **αρχίζουν** από κάποια τιμή, πρέπει τελικά να **τείνουν στο άπειρο**, διαφορετικά δεν ορίζεται σειρά.

Επομένως ο τύπος

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1} \quad \textbf{ορίζει} \text{ σειρά, ενώ ο}$$

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{n}{n^2+1} \quad \textbf{δεν ορίζει} \quad (\text{άθροισμα αριθμών}).$$

Παραδείγματα σειρών

Δίνονται στη συνέχεια μερικά γνωστά στον αναγνώστη παραδείγματα σειρών με το αντίστοιχο μερικό άθροισμα, όπου αυτό είναι δυνατόν να υπολογιστεί, τονίζοντας ότι στις περισσότερες περιπτώσεις ο υπολογισμός του τελικού τύπου του μερικού αθροίσματος είναι πολύ δύσκολος ή και αδύνατος.

Αρμονική σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}. \tag{12.2.1 - 3}$$

με μερικό άθροισμα της μορφής

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n. \tag{12.2.1 - 4}$$

Το μερικό άθροισμα της γεωμετρικής σειράς δίνεται από τον τύπο

$$s_n = \frac{1-\omega^n}{1-\omega}, \quad \text{όταν} \quad \omega \neq 1, \tag{12.2.1 - 5}$$

Δεκαδική σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\psi_n}{10^n} = \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \ldots \tag{12.2.1 - 6}$$

όπου ψ_0 ακέραιος αριθμός, και ψ_1, $\psi_2, \ldots$ ψηφία, δηλαδή ακέραιοι αριθμοί με $0 \leq \psi_n \leq 9$ για κάθε $n = 1,\, 2,\, \ldots$.

12.2.2 Ορισμός σύγκλισης

Ορισμός 12.2.2 - 1. *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *λέγεται ότι* **συγκλίνει** *στον πραγματικό αριθμό* s *και συμβολίζεται αυτό με* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s$ *τότε και μόνον, όταν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων* s_n *συγκλίνει στον αριθμό* s, *δηλαδή είναι*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n &= s, \ \textit{όταν} \\ \lim_{n\to+\infty} s_n &= \lim_{n\to+\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = s. \end{aligned} \tag{12.2.2 - 1}$$

Ο αριθμός s θα λέγεται και **άθροισμα** της σειράς.

Διευκρινίζεται στο σημείο αυτό, ότι σε αντίθεση με το άθροισμα πεπερασμένου πλήθους πραγματικών αριθμών που είναι πάντοτε ένας μονοσήμαντα ορισμένος πραγματικός αριθμός, το άθροισμα μιας σειράς ενδέχεται

- να υπάρχει, αλλά να μην είναι δυνατόν να υπολογιστεί το άθροισμά της,
- να μην υπάρχει.

Ορισμός 12.2.2 - 2. *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *λέγεται ότι* **απειρίζεται** *θετικά, αντίστοιχα αρνητικά και συμβολίζεται αυτό με* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$, *αντίστοιχα* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\infty$ *τότε και μόνον, όταν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων* s_n *απειρίζεται θετικά, αντίστοιχα αρνητικά, δηλαδή*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} s_n &= \lim_{n\to+\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n) \qquad (12.2.2 - 2) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = +\infty, \ \textit{αντίστοιχα} \ -\infty. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή λέγεται επίσης ότι η σειρά συγκλίνει **κατ' εκδοχή**.

Παράδειγμα 12.2.2 - 1

Η αρμονική σειρά $(12.2.1-4)$, δηλαδή η

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \text{με μερικό άθροισμα} \quad s_n = 1 + \frac{1}{2} + + \ldots + \frac{1}{n}$$

αποδεικνύεται ότι απειρίζεται θετικά.[5]

Ορισμός 12.2.2 - 3. *Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ λέγεται ότι* **αποκλίνει** *ή* **κυμαίνεται** *τότε και μόνον, όταν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων s_n δεν συγκλίνει προς έναν συγκεκριμένο πραγματικό αριθμό, ούτε απειρίζεται θετικά ή αρνητικά.*

Σύγκλιση γεωμετρικής σειράς

Για τη γεωμετρική σειρά μερικό άθροισμα s_n της μορφής $(12.2.1-4)$, δηλαδή

$$s_n = \frac{1-\omega^n}{1-\omega}\,, \quad \text{όταν} \;\; \omega \neq 1,$$

διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις: αν

i) $|\boldsymbol{\omega}| < \mathbf{1}$, τότε σύμφωνα με την Πρόταση 12.1.7 - 8 είναι $\lim \omega^n = 0$, οπότε

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n = \frac{1}{1-\omega}\,. \qquad (12.2.2 \text{ - } 3)$$

Παράδειγμα 12.2.2 - 2

Σύμφωνα με την $(12.2.2-3)$ είναι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\,.$$

ii) $\boldsymbol{\omega} \geq \mathbf{1}$, τότε απειρίζεται θετικά, επειδή η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι αύξουσα και μη φραγμένη.

[5] Βλέπε βιβλιογραφία.

Παράδειγμα 12.2.2 - 3

Η γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \quad \text{με} \quad \omega = 2 > 1 \quad \text{απειρίζεται θετικά.}$$

iii) $\boldsymbol{\omega \leq -1}$, αποκλίνει. Η γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \quad \text{με} \quad \omega = -1 \quad \text{αποκλίνει.}$$

Σύγκλιση δεκαδικής σειράς

Αποδεικνύεται ότι η δεκαδική σειρά συγκλίνει πάντοτε.

12.2.3 Ιδιότητα σύγκλισης

Εύκολα αποδεικνύεται η παρακάτω γραμμική ιδιότητα, που αφορά συγκλίνουσες σειρές:

Θεώρημα 12.2.3 - 1. *Αν* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a$ *και* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = b$, *τότε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\varkappa a_n + \lambda b_n) = \varkappa a + \lambda b \quad \text{για κάθε } \varkappa,\ \lambda \in \Re.$$

12.3 Σύγκλιση σειράς αριθμών

12.3.1 Αναγκαία συνθήκη σύγκλισης

Αρχικά δίνεται ο παρακάτω ορισμός, που καθορίζει τη μονοτονία των μερικών αθροισμάτων της σειράς:

Ορισμός 12.3.1 - 1. *Η ακολουθία* s_n *των μερικών αθροισμάτων της σειράς* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *λέγεται ότι είναι τελικά* **μονότονη** *τότε και μόνον, όταν τελικά όλοι οι όροι της σειράς είναι μη αρνητικοί ή μη θετικοί αριθμοί.*

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 12.3.1 - 1. *Μία σειρά που τελικά όλοι οι όροι της είναι μη αρνητικοί, αντίστοιχα μη θετικοί αριθμοί συγκλίνει, όταν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι φραγμένη και απειρίζεται, όταν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι μη φραγμένη.*

Θεώρημα 12.3.1 - 2 (αναγκαία συνθήκη). *Αν*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a, \quad \textit{τότε} \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = 0.$$

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει πάντοτε, όπως αυτό φαίνεται στην αρμονική σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \text{όπου} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

ενώ είναι ήδη γνωστό ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Παρατήρηση 12.3.1 - 1

Τα συμπεράσματα του Θεωρήματος 12.3.1 - 2 θα χρησιμοποιηθούν ως κριτήριο σύγκλισης του γραμμικού φάσματος της σειράς Fourier.[6]

12.3.2 Κριτήριο σύγκρισης

Θεώρημα 12.3.2 - 1. *Αν* $|a_n| \leq c_n$ *τελικά για όλους τους δείκτες και επιπλέον η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ *συγκλίνει, τότε και η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *συγκλίνει.*

---

[6] Βλέπε *Μαθήματα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών - Σειρά Fourier.*

Παράδειγμα 12.3.2 - 1

Η σειρά
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\ldots$$
συγκλίνει, επειδή
$$\frac{1}{n\cdot 2^n}<\frac{1}{2^n}$$
και η γεωμετρική σειρά
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{συγκλίνει, επειδή} \quad \omega=\frac{1}{2}<1.$$

Θεώρημα 12.3.2 - 2. *Αν ισχύει $a_n \geq c_n \geq 0$ τελικά για όλους τους δείκτες και επιπλέον η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ απειρίζεται θετικά, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ θα απειρίζεται θετικά.*

Παράδειγμα 12.3.2 - 2

Η σειρά
$$\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\ldots+\frac{\ln n}{n}+\ldots$$
αποκλίνει, επειδή $\ln n > \frac{1}{n}$ και η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει.

12.3.3 Κριτήρια σύγκλισης των Cauchy και d'Alembert

Είναι προφανές ότι τα Θεωρήματα 12.3.2 - 1 και 12.3.2 - 2 της Παραγράφου 12.3.2 έχουν περιορισμένες εφαρμογές, επειδή δεν είναι πάντοτε δυνατόν να προσδιοριστούν οι κατάλληλες σειρές για σύγκριση.

Δίνονται στη συνέχεια τα παρακάτω δύο κριτήρια, που κύρια εφαρμόζονται στον έλεγχο της σύγκλισης των σειρών:

Θεώρημα 12.3.3 - 1 (κριτήριο ριζών του Cauchy). *Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ μία σειρά και*
$$\theta=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}. \tag{12.3.3 - 1}$$
Τότε, αν

i) $\theta<1$ *η σειρά συγκλίνει προς πεπερασμένο αριθμό,* *ii)* $\theta > 1$ *η σειρά δεν συγκλίνει προς πεπερασμένο αριθμό,*

iii) $\theta = 1$ *δεν είναι γνωστό αν η σειρά συγκλίνει.*

Παράδειγμα 12.3.3 - 1

Η σειρά

$$\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n+\ldots$$

συγκλίνει, επειδή

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}\\ &= \frac{1}{2}=\theta<1.\end{aligned}$$

Θεώρημα 12.3.3 - 2 (κριτήριο πηλίκων d'Alembert).[7] *Έστω* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *μία σειρά με* $a_n \neq 0$ *τελικά για όλους τους δείκτες και*

$$\theta = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad (12.3.3 - 2)$$

Τότε, αν

i) $\theta < 1$ *η σειρά συγκλίνει προς πεπερασμένο αριθμό,*

ii) $\theta > 1$ *η σειρά δεν συγκλίνει προς πεπερασμένο αριθμό,*

iii) $\theta = 1$ *το κριτήριο δεν εφαρμόζεται.*

Παράδειγμα 12.3.3 - 2

Η σειρά

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\ldots+\frac{2n-1}{3^n}+\ldots$$

συγκλίνει, επειδή

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2(n+1)-1}{3^{n+1}}}{\frac{2n-1}{3^n}}-1=\frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{2n-1}\\ &= \frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}=\theta<1.\end{aligned}$$

[7] Πολλές φορές λέγεται και κριτήριο του λόγου.

Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο σύγκρισης να εξεταστεί αν συγκλίνουν οι παρακάτω σειρές:

$i)\quad \frac{2}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\ldots \qquad iii)\quad 2+\frac{2^2}{2}+\ldots+\frac{2^n}{n}+\ldots$

$ii)\quad \frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)^2}+\ldots \qquad iv)\quad 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots.$

2. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές, που οι γενικοί τους όροι a_n είναι:

$i)\quad \frac{n}{2^n} \qquad v)\quad \frac{n\,!}{5^n}$

$ii)\quad \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad vi)\quad e^{-n^2}$

$iii)\quad \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n \qquad vii)\quad \ln^n n$

$iv)\quad \frac{n\,!}{n^2} \qquad viii)\quad \frac{3^n\, n\,!}{n^n}$

12.4 Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων

12.4.1 Απλή σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων

Γενικεύοντας τον Ορισμό 12.1.1 - 2 της ακολουθίας των πραγματικών αριθμών,[8] έστω ότι οι όροι της ακολουθίας $(a_\nu)\,;\,\nu\in\mathbb{N}$ έχουν τη μορφή

$$\frac{x}{1^2},\,\frac{x}{2^2},\ldots,\frac{x}{\nu^2},\ldots \quad \text{ή} \quad e^{-x^1},\,e^{-x^2},\ldots,e^{x^\nu},\ldots, \quad \text{κ.λπ.}$$

Είναι προφανές ότι στην περίπτωση αυτή κάθε όρος της ακολουθίας και κατά συνέπεια και ο γενικός της όρος $(a_\nu)\,;\,\nu\in\mathbb{N}$, θα εξαρτάται εκτός του ν και από το x, δηλαδή θα είναι $a_\nu=a_\nu(x)$; $\nu\in\mathbb{N}$. Τότε όμως στους όρους της

---

[8]

Ορισμός. *Ορίζεται ως* ακολουθία των πραγματικών αριθμών *κάθε μονοσήμαντη απεικόνιση του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.*

ακολουθίας πρέπει εκτός από τις τιμές του δείκτη ν να είναι γνωστό και το πεδίο ορισμού, έστω $\mathcal{D}$, της μεταβλητής x.

Εφόσον το x είναι πραγματικός αριθμός, οι παραπάνω ακολουθίες $a_\nu(x);\ \nu \in \mathbb{N}$ θα λέγονται στο εξής ακολουθίες πραγματικών συναρτήσεων ή απλά **ακολουθίες συναρτήσεων** και για διάκριση από τις αντίστοιχες ακολουθίες των πραγματικών αριθμών θα συμβολίζονται με

$$f_\nu(x); \qquad \nu \in \mathbb{N}, \quad \text{όταν} \quad x \in \mathcal{D} \quad \text{ή απλά}$$

$$f_\nu | \mathcal{D} \qquad \text{για κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Η έννοια της σύγκλισης μιας ακολουθίας συναρτήσεων μεταφέρεται ανάλογα και στην περίπτωση αυτή με τη διαφορά ότι το όριο, εφόσον υπάρχει, θα είναι συνάρτηση και θα λέγεται **οριακή τιμή** ή και **όριο** της ακολουθίας $f_\nu \,|\, \mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Τότε ο Ορισμός 12.1.1 - 2 διατυπώνεται ως εξής:[9]

Ορισμός 12.4.1 - 3. *Η ακολουθία $f_\nu \,|\, \mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ λέγεται ότι* ***συγκλίνει κατά σημείο*** *ή διαφορετικά ότι* ***συγκλίνει απλά*** *προς τη συνάρτηση f, όταν για κάθε $x \in \mathcal{D}$ ισχύει*

$$\lim_{\nu \to +\infty} f_\nu(x) = f(x) \qquad (12.4.1 - 1)$$

ή ισοδύναμα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\varepsilon, x) > 0$, έτσι ώστε

$$|f_\nu(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \textit{για κάθε } x \in \mathcal{D} \textit{ και } \nu \geq \mathbb{N}.$$

---

[9]

Ορισμός. *Θα λέγεται ότι μία ακολουθία $(a_\nu);\ \nu \in \mathbb{N}$* ***συγκλίνει*** *στον πραγματικό αριθμό a ή τείνει στον αριθμό a ή το όριό της είναι ο αριθμός a και αυτό θα συμβολίζεται με $a_\nu \to a$ ή $\lim_{\nu -> +\infty} a_\nu = a$ ή επίσης $\lim a_\nu = a$ τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, δηλαδή δείκτης που εξαρτάται γενικά από το ε, τέτοιος ώστε να ισχύει*

$$|a_\nu - a| < \varepsilon \quad \textit{για κάθε } \nu \geq \nu_0(\varepsilon).$$

Στην ειδική περίπτωση που είναι $a = 0$, δηλαδή $\lim a_\nu = 0$, η ακολουθία $(a_\nu);\ \nu \in \mathbb{N}$ θα λέγεται **μηδενική**.

Έστω τώρα ότι ο γενικός όρος f_n μιας σειράς περιέχει εκτός από το n και μία ανεξάρτητη μεταβλητή, έστω x με $x \in \mathcal{D}$. Τότε η προκύπτουσα σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \quad \text{με } x \in \mathcal{D} \tag{12.4.1 - 2}$$

λέγεται **σειρά συναρτήσεων**.

Ορισμός 12.4.1 - 4. *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *λέγεται ότι* **συγκλίνει** *για κάθε* $x \in \mathcal{D}$ *τότε και μόνον, όταν*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f(x). \tag{12.4.1 - 3}$$

Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση $f(x)$ λέγεται **άθροισμα** της σειράς.

Στο σημείο αυτό πρέπει να εξεταστεί κατά πόσο ιδιότητες της παραπάνω ακολουθίας συναρτήσεων $f_\nu \,|\, \mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, όπως η

- συνέχεια,
- ολοκλήρωση, και
- η παραγώγιση

μεταβιβάζονται και στην οριακή συνάρτηση, δηλαδή την f.

Πριν δοθεί απάντηση στα ερωτήματα αυτά, αναφέρονται μερικά παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση του θέματος.

Συνέχεια

Παράδειγμα 12.4.1 - 1

Έστω η ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων

$$f_\nu(x) = (1+x)^\nu \quad \text{με } \; -1 \leq x \leq 0.$$

Τότε για κάθε x με $x \neq 0$ είναι

$$\lim_{\nu \to +\infty} f_\nu(x) = \lim_{\nu \to +\infty} (1+x)^\nu = 0 = f(x),$$

ενώ

$$f(0) = \lim_{\nu \to +\infty} f_\nu(0) = 1.$$

Άρα η οριακή συνάρτηση της παραπάνω ακολουθίας έχει τη μορφή

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{αν} \quad x = 0, \end{cases}$$

που εύκολα διαπιστώνεται ότι δεν είναι συνεχής στο $x = 0$.

Παράδειγμα 12.4.1 - 2

Όμοια, έστω η ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων

$$f_\nu(x) = \frac{x^{2\nu}}{(1+x^2)^\nu} \quad \text{με } x \in \mathbb{R}.$$

Τότε, επειδή η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ ορίζει μια γεωμετρική πρόοδο με λόγο

$$\omega = \frac{x^2}{1+x^2} < 1,$$

θα πρέπει σύμφωνα με τον τύπο $(12.2.2-3)$ να ισχύει

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n \\ &= f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\omega} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{1+x^2}} = 1 + x^2 & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Επομένως για την οριακή συνάρτηση της σειράς ισχύει ότι

$$f(0) = 0 \neq 1 = \lim_{x \to 0} f(x),$$

δηλαδή δεν είναι συνεχής.

Από τα Παραδείγματα 12.4.1 - 1 και 12.4.1 - 2 προκύπτει ότι *μία συγκλίνουσα σειρά συνεχών συναρτήσεων είναι δυνατόν να έχει άθροισμα μη συνεχή συνάρτηση*.

Ολοκλήρωση

Παράδειγμα 12.4.1 - 3

Έστω η ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων

$$f_\nu(x) = \nu x \left(1 - x^2\right)^\nu \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι, αν $0 \leq x \leq 1$, είναι

$$\lim_{\nu \to +\infty} f_\nu(x) = 0 = f_\nu(0).$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu \to +\infty} \int_0^1 f_\nu(x)\, dx &= \lim_{\nu \to +\infty} \left\{ \nu \int_0^1 x \left(1 - x^2\right)^\nu dx \right\} \\
&= - \lim_{\nu \to +\infty} \frac{\nu}{2} \left. \frac{\left(1 - x^2\right)^{\nu+1}}{\nu + 1} \right|_0^1 \\
&= \lim_{\nu \to +\infty} \frac{\nu}{2(\nu + 1)} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Αλλά

$$\int_0^1 \left[\lim_{\nu \to +\infty} f_\nu(x) \right] dx = \int_0^1 0\, dx = 0,$$

δηλαδή

$$\lim_{\nu \to +\infty} \int_0^1 f_\nu(x)\, dx \neq \int_0^1 \left[\lim_{\nu \to +\infty} f_\nu(x) \right] dx$$

που σημαίνει ότι *η τιμή του ολοκληρώματος της οριακής συνάρτησης δεν είναι ίση με την οριακή τιμή του ολοκληρώματος της ακολουθίας των συναρτήσεων*.

Παραγώγιση

Παράδειγμα 12.4.1 - 4

Έστω η ακολουθία των συναρτήσεων

$$f_\nu(x) = \frac{\sin(\nu x)}{\nu} \quad \text{με } x \in \Re.$$

Τότε

$$\lim_{\nu\to+\infty} |f_\nu(x)| = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{|\sin \nu x|}{\nu} \leq \lim_{\nu\to+\infty} \left(\frac{1}{\nu}\right) = 0 = f(x).$$

Αλλά $f'_\nu(x) = \cos \nu x$, ενώ είναι γνωστό ότι η οριακή τιμή

$$\lim_{\nu\to+\infty} f'_\nu(x) = \lim_{\nu\to+\infty} \cos \nu x$$

δεν ορίζεται.[10] Άρα όμοια με τις παραπάνω δύο άλλες περιπτώσεις έχουμε επίσης ότι *η τιμή της παραγώγου της οριακής συνάρτησης δεν είναι ίση με την οριακή τιμή της παραγώγου της ακολουθίας των συναρτήσεων.*

Από τα Παραδείγματα 12.4.1 - 1 έως και 12.4.1 - 4 άμεσα προκύπτει ότι **δεν** μεταβιβάζονται πάντοτε ιδιότητες των συγκλινουσών συναρτήσεων στην οριακή συνάρτηση. Προκειμένου να δοθεί απάντηση στο ερώτημα με ποιες συνθήκες γίνεται η μεταβίβαση των ιδιοτήτων και στην οριακή συνάρτηση, απαιτείται ο ορισμός μιας σύγκλισης ισχυρότερης εκείνης της απλής. Η σύγκλιση αυτή δίνεται στην παράγραφο που ακολουθεί.

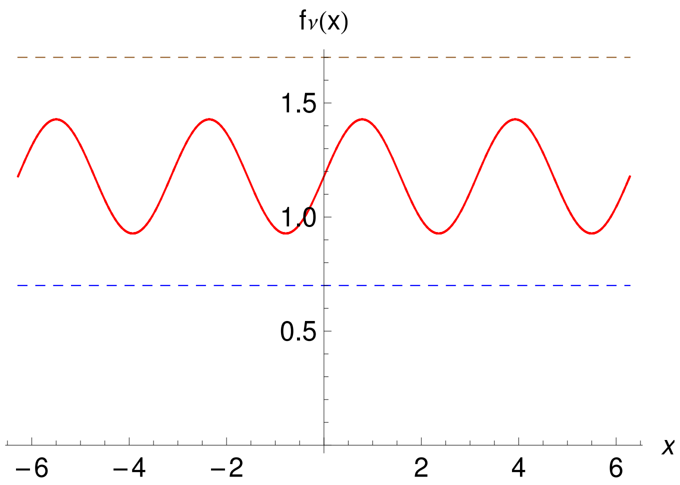
12.4.2 Ομαλή σύγκλιση ακολουθιών και σειρών συναρτήσεων

Ομαλή σύγκλιση ακολουθιών

Ορισμός 12.4.2 - 1. *Μία ακολουθία συναρτήσεων $f_\nu | \mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ λέγεται ότι συγκλίνει* **ομαλά** *ή* **ομοιόμορφα** *(uniform convergent) προς τη συνάρτηση f επί του συνόλου $\mathcal{D}$ και συμβολίζεται αυτό με $f_\nu \Rightarrow f$ τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει αριθμός $N = N(\varepsilon)$, που εξαρτάται μόνον από το ε, έτσι ώστε*

$$|f_\nu(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{D} \text{ με } \nu \geq \mathrm{N}. \tag{12.4.2 - 1}$$

[10] Βλέπε Μάθημα *Συνέχεια Συνάρτησης - Ασυνέχεια του 2ου είδους.*



Σχήμα 12.4.2 - 1: ομαλή σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων. Η κόκκινη καμπύλη είναι το διάγραμμα της $f_\nu(x)$; $\nu \geq \mathbb{N}$, η διακεκομμένη καφέ της $f(x) + \varepsilon$ και η διακεκομμένη μπλε της $f(x) - \varepsilon$.

Από τον Ορισμό 12.4.2 - 1 προκύπτουν τα εξής:

- η σχέση $|f_\nu(x) - f(x)| < \varepsilon$ ισοδυναμεί με

$$f(x) - \varepsilon < f_\nu(x) < f(x) + \varepsilon.$$

  Άρα η γραφική παράσταση της $f_\nu(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{D}$ και $\nu \in \mathbb{N}$ περιέχεται μεταξύ των ευθειών $f(x) - \varepsilon$ και $f(x) + \varepsilon$ (Σχ. 12.4.2 - 1).

- Συγκρίνοντας με τον Ορισμό 12.4.1 - 3 της απλής σύγκλισης προκύπτει ότι, αν η ακολουθία $f_\nu \,|\, \mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει ομαλά, τότε θα συγκλίνει και απλά, χωρίς να ισχύει το αντίστροφο πάντοτε. Κατά συνέπεια η ομαλή σύγκλιση είναι **ισχυρότερη** της απλής.

Επίσης προκύπτουν οι παρακάτω προτάσεις:

Πρόταση 12.4.2 - 1. *Αν η ακολουθία συναρτήσεων $f_\nu \,|\, \mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει ομαλά προς τη συνάρτηση f, τότε και η ακολουθία $|f_\nu| \,|\, \mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει ομαλά προς τη συνάρτηση $|f|$ επί του $\mathcal{D}$.*

Πρόταση 12.4.2 - 2. *Έστω ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_\nu \,|\, \mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει ομαλά προς τη συνάρτηση f επί του $\mathcal{D}$ όπου $f(\mathcal{D}) \subseteq [a, b]$. Αν g είναι μία συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$, τότε η ακολουθία των σύνθετων συναρτήσεων $g \circ f_\nu \,|\, D$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει ομαλά προς τη σύνθετη συνάρτηση $g \circ f$ επί του $\mathcal{D}$.*

Σύμφωνα με την Πρόταση 12.4.2 - 2 για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, αν

$$\begin{array}{rclrcl} g(x) & = & |x|, \quad \text{τότε} & g\left(f_\nu\right) & = & \left|f_\nu\right|, \\ g(x) & = & x^a & g\left(f_\nu\right) & = & f_\nu^a \quad \text{με} \quad f_\nu \geq 0 \quad \text{και} \quad a \in \mathbb{N}, \\ g(x) & = & \sin x & g\left(f_\nu\right) & = & \sin\left(f_\nu\right), \\ g(x) & = & e^x & g\left(f_\nu\right) & = & e^{f_\nu}, \\ g(x) & = & \ln x & g\left(f_\nu\right) & = & \ln f_\nu \quad \text{με} \quad f_\nu > 0, \quad \text{κ.λπ.} \end{array}$$

έχουμε την υπό ορισμένες συνθήκες ομαλή σύγκλιση των αντίστοιχων σύνθετων συναρτήσεων.

Ομαλή σύγκλιση σειρών

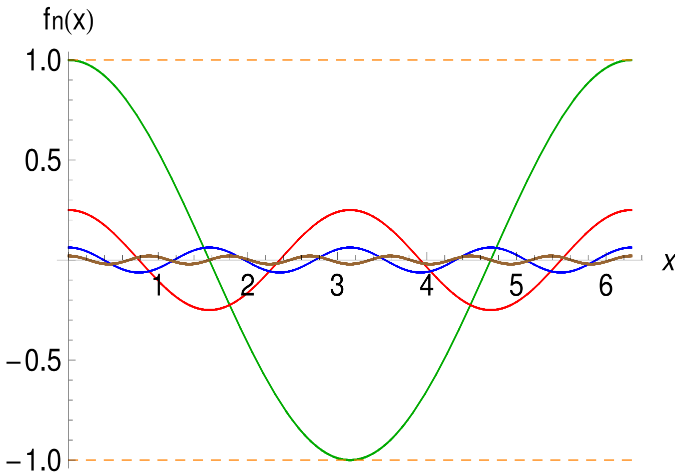
Ορισμός 12.4.2 - 2. *Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ θα συγκλίνει* **ομαλά** *επί του D τότε και μόνον, όταν η ακολουθία (s_n); $n \in \mathbb{N}$ των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει ομαλά επί του D.*

Δίνονται στη συνέχεια τα περισσότερο χρησιμοποιούμενα στις εφαρμογές κριτήρια, που εξασφαλίζουν την ομαλή σύγκλιση μιας σειράς. Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

Θεώρημα 12.4.2 - 1 (κριτήριο του Weierstrass). *Έστω η ακολουθία συναρτήσεων f_ν για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ορισμένη επί του $\mathcal{D}$ και a_ν για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ μία ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια, ώστε*

$$|f_\nu(x)| \leq a_\nu \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathcal{D} \quad \text{και} \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Τότε, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει, η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ θα συγκλίνει ομαλά και απόλυτα επί του D.



Σχήμα 12.4.2 - 2: Παράδειγμα 12.4.2 - 1: διάγραμμα $f_1(x)$ πράσινη, $f_2(x)$ κόκκινη, $f_4(x)$ μπλε και $f_7(x)$ καφέ καμπύλη, όταν $x \in [0, 2\pi]$.

Παράδειγμα 12.4.2 - 1

Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \quad \text{με γενικό όρο} \quad f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2} \quad (\Sigma\chi.\ 12.4.2 - 2)$$

συγκλίνει ομαλά και απόλυτα επί του διαστήματος $[0, 2\pi]$, επειδή

$$0 \leq \left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

συγκλίνει.

Παράδειγμα 12.4.2 - 2

Έστω η σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{με} \quad |x| < 1.$$

Επειδή $|x|<1$, η σειρά συγκλίνει απλά (γεωμετρική σειρά με λόγο $|\omega|<1$) και το άθροισμά της ισούται με

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,.$$

Εξετάζεται τώρα, αν συγκλίνει και ομαλά. Είναι

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \;-\; \frac{1}{1-x}\right| = \left|x^{n+1}+x^{n+2}+\ldots\right|$$

όπου, όταν $0<x<1$, είναι $\left|x^{n+1}+x^{n+2}+\ldots\right| > x^{n+1}$. Άρα

$$s_n = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \;-\; \frac{1}{1-x}\right| \geq x^{n+1} \geq 1$$

για κάθε $x\in(0,1)$, δηλαδή η σύγκλιση δεν είναι ομαλή.

Θεώρημα 12.4.2 - 2 (κριτήριο d'Alembert). *Έστω η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \tag{12.4.2 - 2}$$

όπου για τις συναρτήσεις $f_n\,|\,\mathcal{D}$ ισχύει ότι

$$0<|f_n(x)|\leq \theta_n \quad \textit{για κάθε} \quad n\in\mathbb{N} \quad \textit{και} \quad x\in D,$$

όταν θ_n σταθεροί θετικοί αριθμοί. Τότε, αν υπάρχει k με $0<k<1$ τέτοιος, ώστε

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| \leq k \tag{12.4.2 - 3}$$

τελικά για όλους τους δείκτες, η σειρά $(12.4.2-2)$ συγκλίνει ομαλά επί του $\mathcal{D}$.

Τα παρακάτω θεωρήματα αναφέρονται στη μεταβίβαση ιδιοτήτων στην οριακή συνάρτηση μιας ακολουθίας, αντίστοιχα μιας σειράς συναρτήσεων.

Ομαλή σύγκλιση και συνέχεια

Θεώρημα 12.4.2 - 3. *Έστω ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_\nu|\mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει ομαλά επί του $\mathcal{D}$ προς τη συνάρτηση f. Αν καθεμιά από τις συναρτήσεις f_ν είναι συνεχής σε ένα σημείο, έστω x_0 με $x_0 \in \mathcal{D}$, τότε και η συνάρτηση f θα είναι συνεχής στο x_0.*

Παρατηρήσεις 12.4.2 - 1

i) Σύμφωνα με το Θεώρημα 12.4.2 - 3 ισχύει

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{\nu\to+\infty} f_\nu(x)\right] &= \lim_{x\to x_0}[f(x)] = f\left(x_0\right) \\ &= \lim_{\nu\to+\infty} f_\nu\left(x_0\right) \qquad (12.4.2 - 4) \\ &= \lim_{\nu\to+\infty}\left[\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right].\end{aligned}$$

ii) Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε.

Πόρισμα 12.4.2 - 1. *Αν η σειρά των συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει ομαλά προς μία συνάρτηση f επί του $\mathcal{D}$ και κάθε όρος της σειράς είναι μία συνεχής συνάρτηση στο σημείο x_0 με $x_0 \in \mathcal{D}$, τότε και η συνάρτηση f θα είναι συνεχής στο x_0.*

Παρατήρηση 12.4.2 - 1

Μία άμεση συνέπεια του παραπάνω πορίσματος είναι ότι επιτρέπεται στην περίπτωση της ομαλής σύγκλισης η εισαγωγή του συμβόλου του ορίου εντός του αθροίσματος της σειράς, δηλαδή

$$\lim_{x\to x_0}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n\left(x_0\right). \qquad (12.4.2 - 5)$$

Ομαλή σύγκλιση και ολοκλήρωση

Θεώρημα 12.4.2 - 4. *Έστω ότι η ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων $f_\nu|\mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει ομαλά επί του $\mathcal{D}$, όπου $\mathcal{D} = [a, b]$, προς* *τη συνάρτηση f. Τότε ισχύει*

$$\lim_{\nu \to +\infty} \int_a^b f_\nu(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx. \qquad (12.4.2 - 6)$$

Παρατήρηση 12.4.2 - 2

Σύμφωνα με το Θεώρημα 12.4.2 - 4 θα ισχύει

$$\lim_{\nu \to +\infty} \int_a^b f_\nu(x)\, dx = \int_a^b \left[\lim_{\nu \to +\infty} f_\nu(x)\right] dx = \int_a^b f(x)\, dx. \qquad (12.4.2 - 7)$$

Πόρισμα 12.4.2 - 2. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ των συνεχών συναρτήσεων επί του $\mathcal{D} = [a, b]$ συγκλίνει ομαλά επί του $\mathcal{D}$ προς τη συνάρτηση $f(x)$, τότε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right] dx = \int_a^b f(x)\, dx. \qquad (12.4.2 - 8)$$

Άρα όμοια επιτρέπεται στην περίπτωση της ομαλής σύγκλισης η εισαγωγή του συμβόλου $\lim_{\nu \to +\infty}$, αντίστοιχα του $\sum_{n=1}^{+\infty}$ εντός του συμβόλου της ολοκλήρωσης.

Ομαλή σύγκλιση και παραγώγιση

Θεώρημα 12.4.2 - 5. *Αν μία ακολουθία συναρτήσεων $f_\nu \,|\, \mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει σε ένα σημείο x_0 με $x_0 \in \mathcal{D}$ όπου $\mathcal{D} = (a, b)$, υπάρχει η παράγωγος των όρων της ακολουθίας στο $\mathcal{D}$ και επιπλέον η ακολουθία των όρων της συγκλίνει ομαλά προς μία συνάρτηση, έστω $p(x)$ επί του $\mathcal{D}$, τότε*

i) η ακολουθία των συναρτήσεων $f_\nu \,|\, \mathcal{D}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει ομαλά προς μία συνάρτηση, έστω f,

ii) υπάρχει η παράγωγος f' της οριακής συνάρτησης και ισχύει

$$f'(x) = p(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathcal{D}. \qquad (12.4.2 - 9)$$

Παρατήρηση 12.4.2 - 3

Σύμφωνα με το Θεώρημα 12.4.2 - 5 ισχύει

$$\left[\lim_{\nu\to+\infty} f_\nu(x)\right]' = \lim_{\nu\to+\infty} f'_\nu(x) = f'(x). \tag{12.4.2 - 10}$$

Πόρισμα 12.4.2 - 3. *Αν*

i) η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ συγκλίνει για ένα $x_0 \in \mathcal{D}$ όπου $\mathcal{D} = (a, b)$,

ii) υπάρχει η παράγωγος $f'_n(x)$; $n = 1, 2, \ldots$ για κάθε $x \in \mathcal{D}$,

iii) η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$ συγκλίνει ομαλά επί του $\mathcal{D}$,

τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομαλά προς μία συνάρτηση, έστω $f(x)$ επί του $\mathcal{D}$, της οποίας υπάρχει η παράγωγος $f'(x)$ και ισχύει

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = f'(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathcal{D}. \tag{12.4.2 - 11}$$

Η σχέση $(12.4.2 - 11)$ γράφεται

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{d\, f_n(x)}{dx}\right] \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathcal{D} \tag{12.4.2 - 12}$$

και αποτελεί γενίκευση για σειρές συναρτήσεων της ήδη γνωστής σχέσης για αθροίσματα

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{k} f_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{k} \frac{d\, f_n(x)}{dx}\,.$$

Επομένως και στην περίπτωση αυτή ισχύει ανάλογη παρατήρηση για την εισαγωγή του τελεστή παραγώγισης d/dx στους όρους της ακολουθίας, αντίστοιχα της σειράς συναρτήσεων.

12.4.3 Τριγωνομετρική σειρά

Ορισμός 12.4.3 - 1. *Η σειρά*

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots \\ = & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \, , \end{aligned} \qquad (12.4.3 - 1)$$

όταν $x \in \mathbb{R}$ και a_0, a_n, $b_n \in \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ οι συντελεστές, λέγεται **τριγωνομετρική σειρά**.

Είναι προφανές ότι κάθε όρος της τριγωνομετρικής σειράς είναι μια περιοδική συνάρτηση. Σύμφωνα με το κριτήριο του Weierstrass (Θεώρημα 12.4.2 - 1), αν η σειρά

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\,|\,a_n\,| + |\,b_n\,|\,) \qquad (12.4.3 - 2)$$

συγκλίνει, τότε και η τριγωνομετρική σειρά θα συγκλίνει ομαλά προς μια όμοια περιοδική συνάρτηση, έστω $f(x)$, δηλαδή

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = f(x). \qquad (12.4.3 - 3)$$

Αποδεικνύεται ότι, αν η $f(x)$ είναι μία περιοδική συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο, έστω $T = 2\pi$, που είναι δυνατό να παρασταθεί με τη μορφή της τριγωνομετρικής σειράς $(12.4.3 - 1)$, τότε οι συντελεστές δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \quad \text{και για κάθε} \quad n \in \mathbb{N} \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \end{aligned} \qquad (12.4.3 - 4)$$

Παρατήρηση 12.4.3 - 4

Λόγω της περιοδικότητας της f το διάστημα ολοκλήρωσης $[-\pi, \pi]$ στους τύπους $(12.4.3 - 4)$ είναι δυνατό να αντικατασταθεί με κάθε άλλο διάστημα πλάτους 2π, όπως $[0, 2\pi]$, κ.λπ., όταν αυτό εξυπηρετεί στον υπολογισμό των συντελεστών της σειράς.

Σύμφωνα και με την Παρατήρηση 12.4.3 - 4 γενικότερα αποδεικνύεται ότι, αν T είναι η θεμελιώδης περίοδος της περιοδικής συνάρτησης $f\,|\,\mathcal{D}$, όταν D διάστημα του πεδίου ορισμού της f πλάτους T, τότε οι συντελεστές της τριγωνομετρικής σειράς $(12.4.3 - 1)$ δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int\limits_{\mathcal{D}} f(x)\,dx, \quad \text{και για κάθε} \quad n\in\mathbb{N} \\ a_n &= \frac{2}{T}\int\limits_{\mathcal{D}} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)\,dx, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int\limits_{\mathcal{D}} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)\,dx, \end{aligned} \qquad (12.4.3 - 5)$$

που λέγονται επίσης και **τύποι του Euler**. Η σειρά $(12.4.3 - 1)$ είναι επίσης γνωστή και ως η **σειρά Fourier** για την περιοδική συνάρτηση f με συντελεστές Fourier που δίνονται από τους τύπους $(12.4.3 - 5)$.

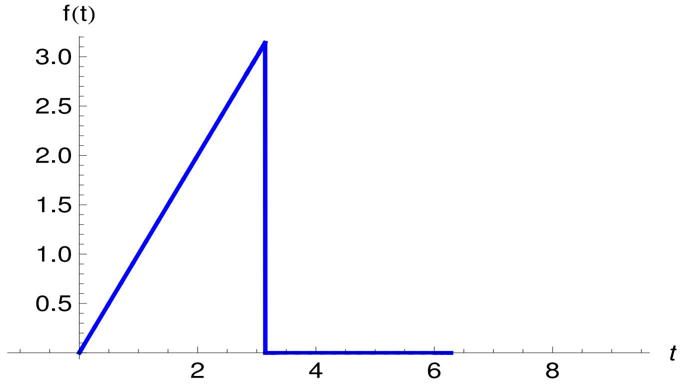
Παράδειγμα 12.4.3 - 1

[11] Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση (Σχ. 12.4.3 - 1)

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{20}{\pi}x, & \text{όταν} \quad 0 \leq x < \pi \\ 0, & \text{όταν} \quad \pi \leq x < 2\pi \end{cases} \qquad \text{με } f(x+2\pi) = f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Σύμφωνα με τους τύπους $(12.4.3 - 5)$ έχουμε

[11] Για εφαρμογές βλέπε Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 2.



Σχήμα 12.4.3 - 1: Παράδειγμα 12.4.3 - 1: η συνάρτηση $f(x)$ στη θεμελιώδη περίοδο.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{20}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\,dx = 10, \\
b_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{20}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{20}{\pi^2}\left.\frac{\cos(nx)+nx\sin(nx)}{n^2}\right|_0^{\pi} = \frac{20}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right], \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{20}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{20}{\pi^2}\left.\frac{\sin(nx)-nx\cos(nx)}{n^2}\right|_0^{\pi} = -\frac{20}{n\pi}\cos(n\pi) = -\frac{20}{n\pi}(-1)^n,
\end{aligned}
$$

οπότε η αντίστοιχη σειρά Fourier είναι

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 5 - 4.05\cos x - 0.45\cos 3x - 0.16\cos 5x - \ldots \\
&\quad +6.37\sin x - 3.18\sin 2x + 2.12\sin 3x - \ldots .
\end{aligned}
$$

Ασκήσεις

1. Να μελετηθεί ως προς την ομαλή σύγκλιση η παρακάτω ακολουθία συναρτήσεων:

$$f_\nu(x) = \frac{\nu\, x}{1+\nu^2 x^2} \quad \text{για κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

2. Όμοια ως προς την ομαλή σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2 x}\,, \quad \text{όταν} \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Δείξτε ότι

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}\,.$$

4. Να αναπτυχθούν σε σειρά Fourier οι παρακάτω περιοδικές συναρτήσεις $f(x)$, που ο περιορισμός τους στη θεμελιώδη περίοδο είναι:

$i)$ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad -\pi \leq x < \pi \\ 0 & \text{αν} \quad \pi \leq x < 3\pi \end{cases}$

$ii)$ $f(x) = x\,; \quad 0 \leq x < 1$

$iii)$ $f(x) = e^x\,; \quad 0 \leq x < 1$

$iv)$ $f(x) = |\sin x|.$

12.4.4 Δυναμοσειρές

Ορισμός 12.4.4 - 1. *Κάθε σειρά της μορφής*[12]

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \textit{αντίστοιχα} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n \qquad (12.4.4 - 1)$$

με συντελεστές τους πραγματικούς αριθμούς a_n*;* $n = 1, 2, \ldots$ *και* $x \in \mathbb{R}$ *λέγεται* **δυναμοσειρά** *(power series) ή* **ακέραια** *σειρά με κέντρο το* 0*, αντίστοιχα το* x_0.

Σχετικά με τη σύγκλιση των δυναμοσειρών ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

[12] Βλέπε βιβλιογραφία και: https://en.wikipedia.org/wiki/Power_series

Θεώρημα 12.4.4 - 1. *Έστω η δυναμοσειρά*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n, \quad \textit{αντίστοιχα η} \tag{12.4.4 - 2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n . \tag{12.4.4 - 3}$$

Αν σύμφωνα με το κριτήριο σύγκλισης των ριζών είναι

$$d = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

ή το κριτήριο του λόγου

$$d = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \tag{12.4.4 - 4}$$

τότε, αν

i) $d = 0$, *οι δυναμοσειρές συγκλίνουν για κάθε* $x \in \mathbb{R}$,

ii) $d = +\infty$, *η δυναμοσειρά*

- $(12.4.4 - 2)$ *συγκλίνει μόνον, όταν* $x = 0$, *αντίστοιχα η*
- $(12.4.4 - 3)$, *όταν* $x = x_0$,

iii) $d \neq 0, +\infty$, *έστω*

$$r = \frac{1}{d} \quad (\textbf{τύπος των Cauchy-Hadamard}). \tag{12.4.4 - 5}$$

Τότε η δυναμοσειρά $(12.4.4 - 2)$*:*

- *συγκλίνει για κάθε* $x \in (-r, r)$,
- *δεν συγκλίνει, όταν* $|x| > r$, *ενώ για*
- $x = \pm r$ *δεν είναι γνωστό αν συγκλίνει.*

Η δυναμοσειρά $(12.4.4 - 3)$*:*

- *συγκλίνει για κάθε* $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$,

- *δεν συγκλίνει, όταν* $|x - x_0| > r$, *ενώ για*
- $x - x_0 = \pm r$ *δεν είναι γνωστό αν συγκλίνει.*

Παρατηρήσεις 12.4.4 - 2

Αν είναι:

- $d \neq 0, +\infty$, τότε ο θετικός αριθμός $r = 1/d$ ορίζει την **ακτίνα** σύγκλισης της δυναμοσειράς, ενώ το $(-r, r)$, αντίστοιχα το $(x_0 - r, x_0 + r)$ το **διάστημα** σύγκλισης,
- $d = 0$, είναι $r = +\infty$ το $\mathbb{R}$,
- $d = +\infty$, ορίζεται ότι είναι $r = 0$, αντίστοιχα $r = x_0$, ενώ το διάστημα σύγκλισης συμπίπτει με το σημείο 0, αντίστοιχα το x_0.

Παράδειγμα 12.4.4 - 1

Έστω η σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n\,!}\,,$$

που ορίζει μια δυναμοσειρά της μορφής

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x - x_0)^n \quad \text{με κέντρο} \quad x_0 = 1 \quad \text{και} \quad a_n = \frac{1}{n\,!}\,.$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου έχουμε

$$d = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)\,!}}{\frac{1}{n\,!}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

όταν

$$(n+1)\,! = 1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n+1) \quad \text{και} \quad n\,! = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = +\infty$ και η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 12.4.4 - 2

Έστω η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n},$$

που ορίζει μια δυναμοσειρά της μορφής

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \, x^n \quad \text{με κέντρο} \quad x_0 = 0 \quad \text{και} \quad a_n = \frac{1}{n}.$$

Όμοια εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου έχουμε

$$d = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = 1$ και το διάστημα σύγκλισης το $(-1, 1)$.

Στο άκρο $x = -1$ η δυναμοσειρά αποδεικνύεται ότι συγκλίνει, ενώ στο άκρο $x = 1$ απειρίζεται (αρμονική σειρά).

Παράδειγμα 12.4.4 - 3

Έστω η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)^2},$$

που όμοια ορίζει μια δυναμοσειρά της μορφής

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \, (x - x_0)^n \quad \text{με κέντρο} \quad x_0 = -2 \quad \text{και} \quad a_n = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Όμοια με το κριτήριο του λόγου έχουμε

$$d = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{1}{(n+1+1)^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^2 = 1,$$

οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = 1$ και το διάστημα σύγκλισης το

$$(x_0 - r, x_0 + r) = (2 - 1, 2 + 1), \quad \text{δηλαδή το} \quad (1, 3).$$

Στο άκρο $x = 1$, αντίστοιχα $x = 3$ έχουμε τις σειρές των αριθμών

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{(n+1)^2}\,, \quad \text{αντίστοιχα} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{(n+1)^2}$$

οπότε εφαρμόζοντας το κριτήριο πηλίκων του d'Alembert έχουμε

$$\begin{aligned} \theta &= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+2)^2}}{\frac{3^n}{(n+1)^2}} = 3 \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^2 \\ &= 3 > 1, \end{aligned}$$

δηλαδή απειρίζεται. Όμοια απειρίζεται και η άλλη σειρά, επειδή $\tilde{\theta} = 5 > 1$.

Παράδειγμα 12.4.4 - 4

Έστω η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (x+1)^n\,,$$

που όμοια ορίζει μια δυναμοσειρά της μορφής

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\,(x - x_0)^n \quad \text{με κέντρο} \quad x_0 = -1 \quad \text{και} \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Τότε σύμφωνα με το κριτήριο της ρίζας είναι

$$d = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = 1$ και το διάστημα σύγκλισης

$$(x_0 - r, x_0 + r) = (-1-1, -1+1), \quad \text{δηλαδή το} \quad (-2, 0) \quad \text{κ.λπ.}$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύει το παρακάτω θεώρημα παραγώγισης και ολοκλήρωσης δυναμοσειρών:

Θεώρημα 12.4.4 - 2. *Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)\,|\,\mathcal{D}$ αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά της μορφής*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x - x_0)^n$$

και ότι r είναι η ακτίνα σύγκλισής της. Τότε η f

i) είναι συνεχής στο διάστημα $\mathcal{D} = (x_0 - r, x_0 + r)$,

ii) παραγωγίζεται στο $\mathcal{D}$ *και ισχύει*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\ a_n\,(x - x_0)^{n-1}\,, \tag{12.4.4 - 6}$$

iii) ολοκληρώνεται σε κάθε υποδιάστημα, έστω $[a, b]$ *του* $\mathcal{D}$ *και ισχύει*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x - x_0)^n\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b (x - x_0)^n\ dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left[\frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}\right]_a^b \qquad (12.4.4 - 7) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\left[(b - x_0)^{n+1} - (a - x_0)^{n+1}\right].\end{aligned}$$

Άσκηση

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω δυναμοσειρές που οι γενικοί τους όροι a_n είναι:

$i)$	x^n	$v)$	$\dfrac{x^n}{(n!)^2}$
$ii)$	$\dfrac{2^n}{n^2}\,x^n$	$vi)$	$\dfrac{(x-5)^n}{n\,3^n}$
$iii)$	$\dfrac{2^n}{n\,!}\,x^n$	$vii)$	$\dfrac{(x+3)^n}{n^2}$
$iv)$	$\dfrac{n^3}{3^n}\,x^n$	$viii)$	$n^n\,(x-1)^n.$

12.4.5 Σειρά Taylor

Είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη από το Μάθημα *Παράγωγος Συνάρτησης* ότι, αν $f\,|\,(a, b)$ είναι μια συνάρτηση που έχει παραγώγους μέχρι και ν-τάξη, τότε ισχύει ο παρακάτω **τύπος του Taylor**:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1\,!}(x-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2\,!}(x-\xi)^2 \\ &\quad + \ldots + \frac{f^{(\nu)}(\xi)}{\nu\,!}(x-\xi)^{\nu}. \end{aligned} \tag{12.4.5 - 1}$$

Στην (12.4.5−1) το 2ο μέλος είναι ένα πολυώνυμο ν - βαθμού, που προσεγγίζει την f, ενώ οι αριθμοί $f(\xi)$, $f'(\xi)$, $\ldots$, $f^{(\nu)}(\xi)$ είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου.

Στην περίπτωση όπου $\xi = 0$, ο τύπος $(12.4.5-1)$ γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!}x + \frac{f''(0)}{2\,!}x^2 \\ &\quad + \ldots + \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu\,!}x^{\nu} \end{aligned} \tag{12.4.5 - 2}$$

και είναι γνωστός ως **τύπος του Maclaurin**, με συντελεστές τους αριθμούς $f(0)$, $f'(0)$, $\ldots$, $f^{(\nu)}(0)$.

Αν θεωρήσουμε ότι οι παραπάνω τύποι του Taylor, αντίστοιχα του Maclaurin, ορίζουν την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων δυναμοσειρών με κέντρο $x_0 = \xi$, αντίστοιχα $x_0 = 0$, τότε, αν $\nu \to +\infty$, ορίζονται οι:

σειρά Taylor

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1\,!}\,(x-\xi) + \ldots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n\,!}\,(x-\xi)^n + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n\,!}\,(x-\xi)^n, \end{aligned} \tag{12.4.5 - 3}$$

σειρά Maclaurin

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}\,x^n + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}\,x^n. \end{aligned} \tag{12.4.5 - 4}$$

Παρατηρήσεις 12.4.5 - 3

i) Σε αντίθεση με την οριακή συνάρτηση των σειρών συναρτήσεων ή των δυναμοσειρών που δεν είναι γνωστή και ούτε είναι δυνατόν τις περισσότερες φορές να υπολογιστεί, στη σειρά Taylor, αντίστοιχα Maclaurin η οριακή συνάρτηση **είναι γνωστή**.

ii) Ο έλεγχος της σύγκλισης των παραπάνω σειρών γίνεται με το Θεώρημα 12.4.4 - 1.

Παράδειγμα 12.4.5 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = e^x$$

όπου εύκολα υπολογίζεται ότι

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad \text{με} \quad f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \quad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Τότε η σειρά Maclaurin $(12.4.5 - 4)$ γράφεται

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \ldots + \frac{x^n}{n\,!} + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n\,!}\,. \end{aligned} \tag{12.4.5 - 5}$$

Η σειρά $(12.4.5 - 5)$ είναι μια δυναμοσειρά της μορφής

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{με κέντρο} \quad x_0 = 0 \quad \text{και} \quad a_n = \frac{1}{n\,!}\,,$$

οπότε εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου έχουμε

$$d = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)\,!}}{\frac{1}{n\,!}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

όταν

$$(n+1)\,! = 1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n+1) \quad \text{και} \quad n\,! = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = +\infty$ και η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση e^x αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 12.4.5 - 3-(ii), αν $x = 1$, έχουμε την παρακάτω προσέγγιση του αριθμού e:

$$e = 2 + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \ldots + \frac{1}{n\,!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n\,!}\,.$$

Παράδειγμα 12.4.5 - 2

Αποδεικνύεται ότι για τη σειρά Maclaurin του $\sin x$ ισχύει

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \ldots + (-1)^{n+1}\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!} + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!}\,. \qquad (12.4.5 - 6)\end{aligned}$$

Η $(12.4.5 - 6)$ είναι όμοια μια δυναμοσειρά της μορφής

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{με κέντρο} \quad x_0 = 0 \quad \text{όπου,}$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)\,!} \quad \text{και} \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{(n+1)+1}}{[2(n+1)+1]\,!} = \frac{(-1)^{n+2}}{(2n+3)\,!}\,,$$

όταν

$$\begin{aligned}(2n+1)\,! &= 1 \cdot 2 \cdots 2n \cdot (2n+1) \quad \text{και} \\ (2n+3)\,! &= 1 \cdot 2 \cdots 2n \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (2n+3)\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου έχουμε

$$d = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)\,!}}{\frac{(-1)^{n+2}}{(2n+3)\,!}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = +\infty$ και η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση $\sin x$ αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 12.4.5 - 3

Ανάλογα με το Παράδειγμα 12.4.5 - 2 αποδεικνύεται ότι για τη σειρά Maclaurin του $\cos x$, που δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned}\cos x &= 1-\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^4}{4\,!}-\ldots+(-1)^{n+1}\,\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{x^{2n}}{(2n)\,!}\end{aligned}$$

με

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)\,!} \quad \text{και} \quad a_{n+1}=\frac{(-1)^{(n+1)+1}}{[2(n+1)]\,!}=\frac{(-1)^{n+2}}{(2n+2)\,!}\,,$$

όταν

$$\begin{aligned}(2n+1)\,! &= 1\cdot 2\cdots(2n-1)\cdot(2n) \quad \text{και}\\ (2n+2)\,! &= 1\cdot 2\cdots 2n\cdot(2n+1)\cdot(2n+2),\end{aligned}$$

είναι

$$d=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)\,!}}{\frac{(-1)^{n+2}}{(2n+2)\,!}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=0.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $r=+\infty$ και η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση $\cos x$ αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 12.4.5 - 4

Η σειρά Maclaurin της συνάρτησης

$$\frac{1}{1-x}$$

δίνεται από τον τύπο

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n,$$

που είναι της μορφής

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{με κέντρο} \quad x_0 = 0 \quad \text{και} \quad a_n = 1.$$

Τότε από το κριτήριο του λόγου έχουμε

$$d = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1,$$

οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = 1$ και η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in (-1, 1)$.

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι η σειρά Maclaurin της

$$\frac{1}{1+x}$$

που δίνεται από τον τύπο

$$\frac{1}{1-x} \;=\; 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n,$$

όμοια συγκλίνει για κάθε $x \in (-1, 1)$.

Παράδειγμα 12.4.5 - 5

Η σειρά Taylor της συνάρτησης $\ln x$ με κέντρο το σημείο $\xi = 1$ δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} \ln x &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + \ldots \\ &= \sum_{n=1}^{n} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}, \quad \text{όταν} \quad x > 0. \end{aligned} \tag{12.4.5 - 7}$$

Η $(12.4.5 - 7)$ είναι μια δυναμοσειρά της μορφής

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \, (x - x_0)^n \quad \text{με κέντρο} \quad x_0 = 1 \quad \text{και} \quad a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου έχουμε

$$d = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}}{n}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = 1$ και η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x με

$$x \in (1 - x_0, 1 + x_0), \quad \text{δηλαδή} \quad x \in (0, 2).$$

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι οι παρακάτω σειρές Maclaurin έχουν τα αντίστοιχα διαστήματα σύγκλισης:

i)

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \dots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}x^n \dots \quad \text{με } x \in (-1,1]$$

ii)

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \dots$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}x^n - \dots \quad \text{με } x \in (-1,1].$$

2. Όμοια με το Παράδειγμα (12.4.5 − 1), δείξτε ότι η σειρά Maclaurin

$$a^x = e^{x\,\ln a} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x\,\ln a)^n}{n\,!}$$

συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν $a > 0$.

13

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

12.5 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.* Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά.* Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

[4] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά.* Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://eclass.uoa.gr/courses/MATH130/ θέση Έγγραφα
- http://eclass.uoa.gr/courses/MATH141/ θέση Έγγραφα
- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Παράρτημα Α

ΣΕΙΡΑ FOURIER

Α.1 Εισαγωγικές έννοιες

Οι περιοδικές συναρτήσεις συναντώνται συχνά σε διάφορα προβλήματα εφαρμογών. Η προσπάθεια να εκφραστούν οι συναρτήσεις αυτές με όρους απλών περιοδικών συναρτήσεων, όπως είναι οι συναρτήσεις του ημιτόνου και του συνημιτόνου, έχει μεγάλη σημασία στη μελέτη των συναρτήσεων αυτών, στη λύση διάφορων μορφών διαφορικών εξισώσεων, σε προβλήματα προσεγγίσεων κ.λπ. Αποδεικνύεται στα Μαθηματικά ότι στην περίπτωση των περιοδικών συναρτήσεων, η προσέγγιση αυτή είναι η καλύτερη δυνατή (best approximation), δηλαδή η οποιαδήποτε άλλης μορφής προσέγγιση της συνάρτησης έχει μεγαλύτερο σφάλμα. Η υλοποίηση της προσπάθειας αυτής, που ξεκίνησε από τον Fourier, συνεχίζεται ακόμα και σήμερα, συμβάλλοντας στη λύση πολλών προβλημάτων από τις παραπάνω περιπτώσεις.[1]

Κρίνεται απαραίτητο στο σημείο αυτό να γίνει μια υπενθύμιση ορισμένων μαθηματικών εννοιών απαραίτητων στη συνέχεια του μαθήματος.

Α.1.1 Περιοδική συνάρτηση

Ορισμός **Α.1.1 - 1 (περιοδικής συνάρτησης).** *Μια συνάρτηση $f(t)$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει $\tau \in \mathbb{R}$ με $\tau \neq 0$, έτσι ώστε να*

[1] Ο αναγνώστης για περαιτέρω μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [3, 5] και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 2.

ισχύει

$$f(t+\tau)=f(t) \quad \text{για κάθε} \quad t\in\mathbb{R}. \tag{A.1.1 - 1}$$

Ο ελάχιστος θετικός αριθμός τ για τον οποίο ισχύει η $(A.1.1-1)$ λέγεται **θεμελιώδης περίοδος** και συμβολίζεται συνήθως με T, ενώ ο αριθμός τ λέγεται απλά **περίοδος**.

Παράδειγμα A.1.1 - 1

Η συνάρτηση

$$f(t)=|\sin\omega t| \quad \text{όπου} \quad \omega>0$$

είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T=\pi/\omega$, ενώ η

$$f(t)=t, \quad \text{όταν} \quad -\pi\le t<\pi \quad \text{και} \quad f(t+2\pi)=f(t) \quad \text{για κάθε} \quad t\in\mathbb{R}$$

είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T=2\pi$.

Στις περιπτώσεις που η συνάρτηση δεν ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$, ο παραπάνω ορισμός γράφεται:

Ορισμός A.1.1 - 2. *Μια συνάρτηση $f(t)$ με πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}$ λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει $\tau\in\mathbb{R}$ με $\tau\neq 0$, έτσι ώστε να ισχύει*

$$f(t+\tau)=f(t) \quad \text{για κάθε} \quad t,\, t+\tau\in\mathcal{D}.$$

A.1.2 Ιδιότητες περιοδικών συναρτήσεων

Σχετικά με τις περιοδικές συναρτήσεις ισχύουν:

i) το διάγραμμα μιας περιοδικής συνάρτησης σε μία περίοδο λέγεται **κύμα** ή **κυματομορφή**,

ii) αν η μεταβλητή μιας περιοδικής συνάρτησης συμβολίζει το διάστημα, τότε η περίοδός της λέγεται **μήκος κύματος** και συμβολίζεται με λ,

iii) κάθε περιοδική συνάρτηση $f(t)$ με θεμελιώδη περίοδο T γίνεται περιοδική με θεμελιώδη περίοδο 2π, θέτοντας

$$t = \frac{2\pi}{T}x\,, \qquad \text{(A.1.2 - 1)}$$

iv) αν T είναι η θεμελιώδης περίοδος, τότε ορίζεται ως **συχνότητα** ν ο αριθμός

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad \text{(A.1.2 - 2)}$$

και ως **κυκλική συχνότητα** ο

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\,, \qquad \text{(A.1.2 - 3)}$$

Ορισμός A.1.2 - 1. *Ορίζεται ως* **αρμονική** *κάθε συνάρτηση της μορφής*

$$f(t) = a\cos(\omega t + \theta) \quad \text{ή} \quad f(t) = a\sin(\omega t + \theta). \qquad \text{(A.1.2 - 4)}$$

Ιδιότητες αρμονικής συνάρτησης

Σχετικά με την αρμονική συνάρτηση ισχύουν:

α) το διάγραμμά της είναι μία ημιτονοειδής καμπύλη ή, όπως συνήθως λέγεται, **αρμονικό κύμα**,

β) έχει κυκλική συχνότητα ω με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi/\omega$,

γ) έχει πλάτος a, που παριστάνει και τη μέγιστη τιμή της f,

δ) έχει φάση $\omega t + \theta$ με αρχική γωνία θ.

Επίσης ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

Πρόταση A.1.2 - 1. *Το άθροισμα δύο ή περισσοτέρων αρμονικών συναρτήσεων με την ίδια κυκλική συχνότητα, έστω ω, είναι επίσης αρμονική συνάρτηση με την ίδια κυκλική συχνότητα.*

Παράδειγμα Α.1.2 - 1

Εφαρμόζοντας την Πρόταση Α.1.2 - 1 για $\omega = 1$ στις αρμονικές συναρτήσεις $f(t) = \sin t$ και $g(t) = \sqrt{3}\cos t$ προκύπτει ότι η

$$h(t) = \sin t + \sqrt{3}\cos t = 2\left(\frac{1}{2}\sin t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\right) = 2\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right),$$

είναι όμοια μία αρμονική συνάρτηση με την ίδια κυκλική συχνότητα $\omega = 1$.

Πρόταση Α.1.2 - 2. *Το άθροισμα δύο ή περισσότερων αρμονικών συναρτήσεων, που η καθεμιά έχει κυκλική συχνότητα ακέραιο πολλαπλάσιο μιας συχνότητας, έστω ω_0, είναι μία περιοδική - γενικά μη αρμονική - συνάρτηση με συχνότητα τη μικρότερη συχνότητα των αρμονικών συναρτήσεων.*

Πρόταση Α.1.2 - 3. *Το άθροισμα δύο ή περισσότερων αρμονικών συναρτήσεων, που οι συχνότητές τους έχουν ανά δύο πηλίκο ρητό αριθμό, είναι περιοδική - γενικά μη αρμονική - συνάρτηση.*

Α.2 Σειρά Fourier

Α.2.1 Ορισμός της σειράς

Σύμφωνα και με τον Ορισμό 12.4.3 - 1 της Παραγράφου 12.4.3 έχουμε ότι:

Ορισμός Α.2.1 - 1 (τριγωνομετρική σειρά). *Ορίζεται ως τριγωνομετρική σειρά κάθε σειρά της μορφής*

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_0}{2} &+ (\alpha_1\cos t + \beta_1\sin t) + \ldots + (\alpha_n\cos nt + \beta_n\sin nt) + \ldots \\ &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n\cos nt + \beta_n\sin nt)\,, \qquad \text{(Α.2.1 - 1)}\end{aligned}$$

όταν $t \in \mathbb{R}$ και $\alpha_0,\ \alpha_n,\ \beta_n \in \mathbb{R}$; $n = 1,\ 2,\ \ldots$ οι **συντελεστές** *της σειράς.*

Από τον Ορισμό Α.2.1 - 1 προκύπτουν τα εξής:

- κάθε όρος της σειράς είναι μία περιοδική συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$,

- αν η σειρά $(A.2.1-1)$ συγκλίνει[2] **ομαλά** στο $\mathbb{R}$, θα πρέπει σύμφωνα με την Παράγραφο A.1.1, η ιδιότητα της περιοδικότητας να μεταβιβάζεται και στην οριακή συνάρτηση, έστω $f(t)$, δηλαδή η $f(t)$ να είναι όμοια μία περιοδική συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο ίση με T.

Παρατηρήσεις A.2.1 - 1

Τα βασικά ερωτήματα που δημιουργούνται στην περίπτωση της τριγωνομετρικής σειράς είναι:

i) ποιες συνθήκες πρέπει να επαληθεύονται, έτσι ώστε μία περιοδική συνάρτηση να αναπτύσσεται σε τριγωνομετρική σειρά,

ii) ο υπολογισμός των συντελεστών της σειράς $(A.2.1-1)$.

A.2.2 Θεώρημα σειράς Fourier

Δίνεται τώρα η απάντηση στο ερώτημα (i) των Παρατηρήσεων A.2.1 - 1 με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος:

Θεώρημα A.2.2 - 1 (σειράς Fourier). *Έστω $f(t)$ μία περιοδική συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο $T=2\pi$ που είναι κατά τμήματα συνεχής στο διάστημα $[-\pi,\pi]$ και για την οποία υπάρχουν τόσο η αριστερά όσο και η δεξιά πλευρική παράγωγος σε κάθε σημείο του διαστήματος αυτού. Τότε η σειρά Fourier $(A.2.1-1)$, που οι συντελεστές της δίνονται από τις σχέσεις $(A.2.3-1)$ - $(A.2.3-3)$, συγκλίνει ομαλά στο $\mathbb{R}$ και το άθροισμά της είναι η $f(t)$, εκτός από ένα σημείο, έστω t_0, που η $f(t)$ είναι ασυνεχής και που το άθροισμά της είναι ο μέσος όρος του αριστερού και του δεξιού ορίου της στο t_0, δηλαδή*

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{t\to t_0-0} f(t)+\lim_{t\to t_0+0} f(t)\right]. \tag{A.2.2 - 1}$$

[2] Βλέπε Μάθημα *Σειρές - Ομαλή σύγκλιση*.

A.2.3 Υπολογισμός της σειράς Fourier

Σχετικά με το ερώτημα (ii) των Παρατηρήσεων A.2.1 - 1 αποδεικνύεται ότι αν η $f(t)$ είναι μία περιοδική συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$ τέτοια, ώστε να είναι δυνατό να παρασταθεί με τη μορφή της τριγωνομετρικής σειράς $(A.2.1 - 1)$, δηλαδή επαληθεύει τις υποθέσεις του Θεωρήματος A.2.2 - 1, τότε οι συντελεστές της υπολογίζονται από τους τύπους

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \tag{A.2.3 - 1}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \tag{A.2.3 - 2}$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \tag{A.2.3 - 3}$$

για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.

Η σειρά $(A.2.1 - 1)$ λέγεται τότε **σειρά Fourier**[3] (Fourier series) για την περιοδική συνάρτηση f με συντελεστές Fourier τους $(A.2.3 - 1)$ - $(A.2.3 - 3)$. Οι τύποι $(A.2.3 - 1)$ - $(A.2.3 - 3)$, που δίνουν τους συντελεστές της σειράς $(A.2.1 - 1)$, λέγονται και **τύποι του Euler**.

Λόγω της περιοδικότητας της f το διάστημα ολοκλήρωσης $[-\pi, \pi]$ είναι δυνατό να αντικατασταθεί με κάθε άλλο διάστημα πλάτους 2π, όπως $[0, 2\pi]$, κ.λπ., όταν αυτό εξυπηρετεί στον υπολογισμό των συντελεστών της σειράς.

Έστω τώρα ότι η συνάρτηση $f(t)$ έχει μία τυχούσα θεμελιώδη περίοδο T και πληροί τις υποθέσεις του Θεωρήματος A.2.2 - 1. Θέτοντας

$$t = \frac{T}{2\pi} x, \quad \text{δηλαδή} \quad x = \frac{2\pi}{T} t$$

και, υποθέτοντας ότι $t \in \left[\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, θα είναι $x \in [-\pi, \pi]$, ενώ η f, όταν θεωρηθεί ως συνάρτηση του x, θα είναι όμοια περιοδική με θεμελιώδη περίοδο 2π, ο

[3] Βλέπε βιβλιογραφία και *http://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series*

τύπος $(A.2.3-1)$ γράφεται

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left[\left(\frac{T}{2\pi}\right)x\right]\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\frac{2\pi}{T}\,dt = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt.$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι οι συντελεστές Fourier στην περίπτωση αυτή δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\,d\,t,\\
\alpha_n &= \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\,d\,t,\ \text{ όταν }\ n=1,\,2,\,\ldots \qquad \text{(A.2.3 - 4)}\\
\beta_n &= \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\,d\,t,\ \text{ όταν }\ n=1,\,2,\,\ldots
\end{aligned}$$

και λέγονται επίσης τύποι του Euler για τους συντελεστές της σειράς Fourier, που αντιστοιχεί στην περιοδική συνάρτηση $f(t)$ με θεμελιώδη περίοδο T. Τότε η σειρά Fourier έχει τη μορφή

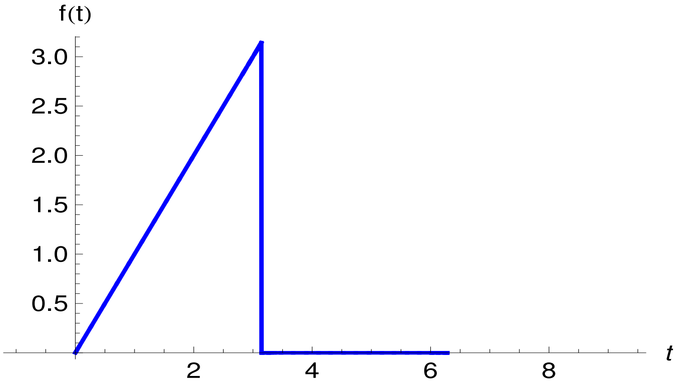
$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\alpha_n\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + \beta_n\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\right]. \qquad \text{(A.2.3 - 5)}$$

Όμοια, λόγω της περιοδικότητας της f στους τύπους $(A.2.3-4)$ είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί κάθε διάστημα ολοκλήρωσης πλάτους T, όπως $[0, T]$, κ.λπ.

Παράδειγμα A.2.3 - 1

Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση (Σχ. A.2.3 - 1)

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{όταν } \quad 0 \le t < \pi \\ 0, & \text{όταν } \quad \pi \le t < 2\pi \end{cases} \qquad \text{και } \ f(t+\mathbf{2}\pi) = f(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$



Σχήμα A.2.3 - 1: Παράδειγμα A.2.3 - 1: η συνάρτηση $f(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο, δηλαδή όταν $t \in [0, 2\pi]$.

Λύση. Η θεμελιώδης περίοδος είναι $T = 2\pi$. Τότε σύμφωνα με τους τύπους $(A.2.3-4)$ έχουμε [4, 5]

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \frac{\pi}{2}\,,\\
\alpha_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]'\,dt\\
&= \frac{1}{n\pi}\,t\,\sin(nt)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} t'\,\sin(nt)\,d\,t\\
&= 0 - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,d\,t = \frac{1}{n^2\pi}\cos(nt)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right],
\end{aligned}
$$

[4]**Παραγοντική ολοκλήρωση** - περίπτωση γινομένου πολυωνύμου με τριγωνομετρική συνάρτηση: αρχικά δημιουργείται η παράγωγος της τριγωνομετρικής συνάρτησης. Βλέπε επίσης Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 7.

[5]Υπενθυμίζεται ότι: $\cos(n\pi) = (-1)^n$ και $\sin(n\pi) = 0$ για κάθε $n = 1,\, 2,\, \ldots$.

$$\begin{aligned}\beta_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt \quad \text{(όμοια)}\\ &= \frac{1}{\pi}\left.\frac{\sin(nt)-nt\cos(nt)}{n^2}\right|_0^{\pi} = -\frac{1}{n}\cos(n\pi) = -\frac{1}{n}(-1)^n\end{aligned}$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots$.

Άρα σύμφωνα με την $(A.2.3-5)$ η αντίστοιχη σειρά Fourier είναι

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos t + \sin t - \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{2}{2\pi}\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t\\ &\quad -\frac{1}{4}\sin 4t - \frac{2}{25\pi}\cos 5t + \frac{1}{5}\sin 5t - \frac{1}{6}\sin 6t\\ &\quad -\frac{2}{49\pi}\cos 7t + \frac{1}{7}\sin 7t - \dots\\ &\approx 0.7854 - 0.6366\cos t + \sin t - 0.5\sin 2t\\ &\quad -0.0710\cos 3t + 0.3333\sin 3t - 0.25\sin 4t\\ &\quad -0.0255\cos 5t + 0.2\sin 5t - 0.1667\sin 6t\\ &\quad -0.0130\cos 7t + 0.1429\sin 7t - \dots . \qquad \text{(A.2.3 - 6)}\end{aligned}$$

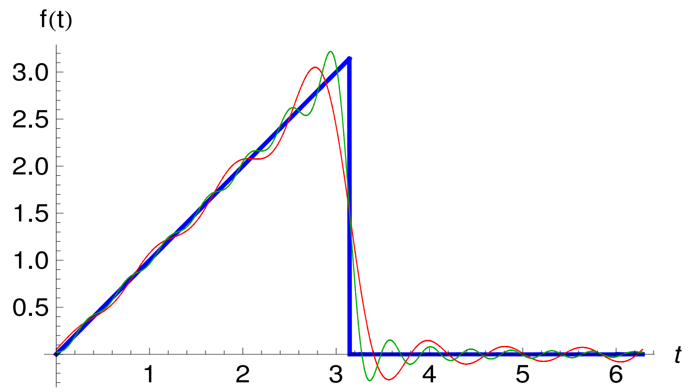
Στο σημείο ασυνέχειας $t_0 = \pi$ σύμφωνα με το Θεώρημα A.2.2 - 1 - τύπος $(A.2.2-1)$ - το άθροισμα της σειράς ισούται με

$$f(t_0) = \frac{1}{2}\left[\lim_{t\to\pi-0} f(t) + \lim_{t\to\pi+0} f(t)\right] = \frac{1}{2}(\pi+0) = \frac{\pi}{2}\,. \qquad \text{(A.2.3 - 7)}$$

Στο Σχ. A.2.3 - 2 δίνεται το διάγραμμα της $f(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο (έντονη μπλε καμπύλη), το διάγραμμα του αθροίσματος S_5 των 5 πρώτων όρων της $(A.2.3-6)$ - κόκκινη καμπύλη, όπου

$$\begin{aligned}S_5(t) &= 0.7854 - 0.6366\cos t + \sin t - 0.5\sin 2t - 0.0710\cos 3t\\ &\quad +0.3333\sin 3t - 0.25\sin 4t - 0.0255\cos 5t + 0.2\sin 5t\end{aligned}$$

και του αθροίσματος S_{14} (πράσινη καμπύλη). Από το Σχ. A.2.3 - 2 προκύπτει ότι, ενώ για $t \in (0, 2\pi)$ το διάγραμμα του αθροίσματος των n πρώτων όρων



Σχήμα Α.2.3 - 2: Παράδειγμα Α.2.3 - 1: διάγραμμα της $f(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο (μπλε), αθροίσματος S_5 κόκκινη και S_{14} πράσινη καμπύλη.

πρέπει να τείνει στο διάγραμμα της f, όταν το n αυξάνει, στο σημείο π - σημείο ασυνέχειας - δημιουργούνται κύματα, που εξακολουθούν να υπάρχουν και όταν το άθροισμα των όρων της σειράς αυξάνει. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως **φαινόμενο Gibbs**. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα διαγράμματα των S_5 και S_{14} διέρχονται από το σημείο $(t_0, f(t_0))$, όπου η $f(t_0)$ δίνεται από την $(A.2.3-7)$.

Ο υπολογισμός των συντελεστών με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές:

Πρόγραμμα Α.2.3 - 1 (συντελεστές σειράς Fourier)

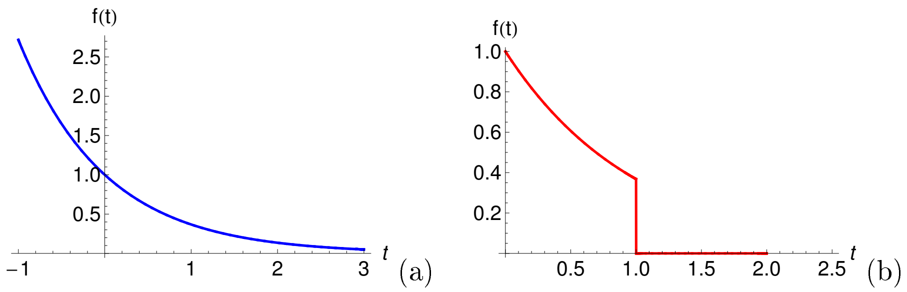
```
T = 2*Pi;a0 = Integrate[(2/T) t, {t, 0, Pi}]
an = Integrate[(2/T)*t*Cos[n t],{t,0,Pi}]
/.{Cos[n Pi]->(-1)^n,Sin[n Pi]->0}
bn = Integrate[(2/T)*t*Sin[n t],{t,0,Pi}]
/.{Cos[n Pi]->(-1)^n,Sin[n Pi]-> 0}
```

■

Παράδειγμα Α.2.3 - 2

Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση (Σχ. Α.2.3 - 3)

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{όταν} \quad 0 \le t < 1 \\ 0, & \text{όταν} \quad 1 \le t < 2 \end{cases} \quad \text{και } g(t+\mathbf{2}) = g(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$



Σχήμα Α.2.3 - 3: Παράδειγμα Α.2.3 - 2: (a) η συνάρτηση e^{-t}, όταν $t \in \mathbb{R}$, (b) η συνάρτηση $g(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο, δηλαδή όταν $t \in [0, 2]$.

Λύση. Η θεμελιώδης περίοδος είναι $T = 2$. Τότε σύμφωνα με τους τύπους $(A.2.3 - 4)$ έχουμε[6]

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{2}{2}\int_0^2 g(t)\,dt = \int_0^1 g(t)\,dt + \int_1^2 g(t)\,dt = \int_0^1 e^{-t}\,dt = \frac{e-1}{e}\,, \\ \alpha_n &= \int_0^1 g(t)\cos(n\pi t)\,dt = \int_0^1 e^{-t}\cos(n\pi t)\,dt = I \end{aligned} \tag{A.2.3 - 8}$$

[6]**Παραγοντική ολοκλήρωση** - περίπτωση γινομένου εκθετικής με τριγωνομετρική συνάρτηση: εφαρμόζεται δύο φορές η παραγοντική ολοκλήρωση, δημιουργώντας στην 1η παραγοντική την παράγωγο της ευκολότερης από τις δύο συναρτήσεις (στην περίπτωση αυτή της εκθετικής) και όμοια και στη 2η παραγοντική ολοκλήρωση.

όπου

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 e^{-t}\cos(n\pi t)\,dt = \int_0^1 \left[-e^{-t}\right]'\cos(n\pi t)\,dt \\
&= -\,e^{-t}\cos(n\pi t)\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-t}\,[\cos(n\pi t)]'\,dt \\
&= -\left[e^{-1}\cos(n\pi) - 1\right] - n\pi\int_0^1 e^{-t}\sin(n\pi t)\,dt \\
&= -\left[(-1)^n e^{-1} - 1\right] - n\pi\int_0^1 \left[-e^{-t}\right]'\sin(n\pi t)\,dt \\
&= -\left[(-1)^n e^{-1} - 1\right] + n\pi\, e^{-t}\sin(n\pi t)\Big|_0^1 \\
&\quad -n\pi\int_0^1 e^{-t}\,[\sin(n\pi t)]'\,dt \\
&= -\left[(-1)^n e^{-1} - 1\right] + 0 - n^2\pi^2\int_0^1 e^{-t}\cos(n\pi t)\,dt \\
&= -\left[(-1)^n e^{-1} - 1\right] + 0 - n^2\pi^2\, I.
\end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$\alpha_n = \frac{e-(-1)^n}{e\,(1+n^2\pi^2)} \quad \text{για κάθε} \quad n = 1,\,2,\,\ldots\,.$$

Όμοια

$$\beta_n = \int_0^1 g(t)\sin(n\pi t)\,dt = \int_0^1 e^{-t}\sin(n\pi t)\,dt,$$

οπότε

$$\beta_n = \frac{n\pi\,\left[e-(-1)^n\right]}{e\,(1+n^2\pi^2)} \quad \text{για κάθε} \quad n = 1,\,2,\,\ldots\,.$$

Επομένως σύμφωνα με την $(A.2.3-5)$ η αντίστοιχη σειρά Fourier είναι

$$\begin{aligned} g(t) &= 0.3161 + 0.1259\cos \pi t + 0.3954\sin \pi t + 0.0156\cos 2\pi t \\ &\quad +0.0981\sin 2t + 0.01522\cos 3\pi t + 0.1435\sin 3\pi t \\ &\quad +0040\cos 4\pi t + 0.0400\sin 4\pi t + \ldots . \qquad \text{(A.2.3 - 9)} \end{aligned}$$

Στο σημείο ασυνέχειας $t_0 = 1$ σύμφωνα με το Θεώρημα Α.2.2 - 1 - τύπος $(A.2.2-1)$ - το άθροισμα της σειράς ισούται με

$$\begin{aligned} g(t_0) &= \frac{1}{2}\left[\lim_{t\to 1-0} g(t) + \lim_{t\to 1+0} g(t)\right] = \frac{1}{2}\left(e^{-1}+0\right) \\ &= \frac{e^{-1}}{2} \approx 0.1840. \qquad \text{(A.2.3 - 10)} \end{aligned}$$

Στο Σχ. Α.2.3 - 4 δίνεται το διάγραμμα της $g(t)$, όταν $t \in [0,4]$ (έντονη μπλε καμπύλη), το διάγραμμα του αθροίσματος S_3 των 3 πρώτων όρων της $(A.2.3-9)$ - κόκκινη καμπύλη - και του S_{14} - πράσινη καμπύλη. Όπως και στο Σχ. Α.2.3 - 2 από το Σχ. Α.2.3 - 4 προκύπτει ότι, ενώ για $t \in (0,4)$ το διάγραμμα του αθροίσματος των n πρώτων όρων πρέπει να τείνει στο διάγραμμα της g, όταν το n αυξάνει, στα σημεία ασυνέχειας $t_i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ δημιουργούνται κύματα, που εξακολουθούν να υπάρχουν και όταν το άθροισμα των όρων της σειράς αυξάνει (φαινόμενο Gibbs). Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι τα διαγράμματα των S_3 και S_{14} διέρχονται από το σημείο $(t_0, g(t_0))$, όταν $t_0 = 1$ και $g(t_0) \approx 0.1840$ σύμφωνα με την $(A.2.3-10)$. Όμοια και από τα άλλα σημεία ασυνέχειας $(t_i, g(t_i))$ με $t_i = 0,\ 2,\ 3,\ 4$.

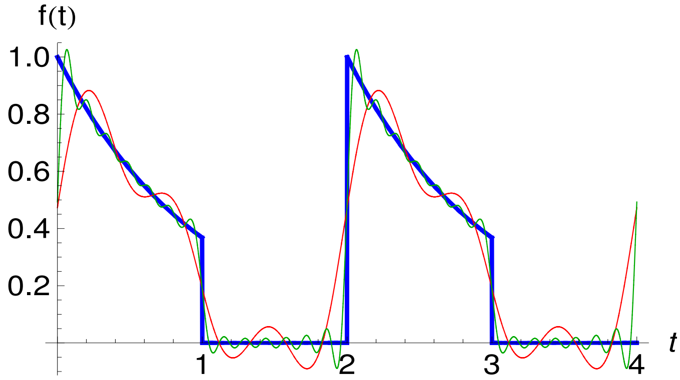
■

Παράδειγμα Α.2.3 - 3

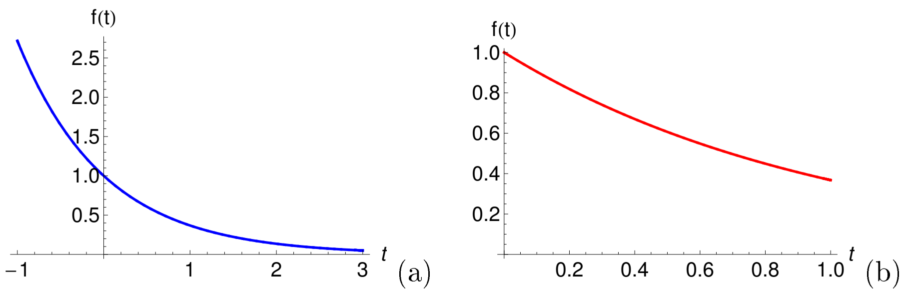
Όμοια η περιοδική συνάρτηση (Σχ. Α.2.3 - 5)

$$\tilde{g}(t) = e^{-t}, \quad \text{όταν} \quad 0 \le t < 1 \quad \text{και} \quad \tilde{g}(t+\mathbf{1}) = \tilde{g}(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Η θεμελιώδης περίοδος είναι $T = 1$. Τότε σύμφωνα με τους τύπους $(A.2.3-4)$ και ανάλογους υπολογισμούς με αυτούς του Παραδείγματος Α.2.3 - 2 τελικά έχουμε



Σχήμα A.2.3 - 4: Παράδειγμα A.2.3 - 2: διάγραμμα της $g(t)$ όταν $t \in [0, 4]$ μπλε καμπύλη, αθροίσματος S_3 κόκκινη και S_{14} πράσινη.



Σχήμα A.2.3 - 5: Παράδειγμα A.2.3 - 3: (a) η συνάρτηση e^{-t}, όταν $t \in \mathbb{R}$, (b) η συνάρτηση $\tilde{g}(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο, δηλαδή όταν $t \in [0, 1]$.

$$\alpha_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 \tilde{g}(t)\,dt = 2\int_0^1 \tilde{g}(t)\,dt = 2\int_0^1 e^{-t}\,dt = 2\left(1-\frac{1}{e}\right),$$

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 \tilde{g}(t)\cos(2n\pi t)\,dt = 2\int_0^1 e^{-t}\cos(2n\pi t)\,dt \\ &= \left.\frac{2\,e^{-t}\left[-\cos(2n\pi t)+2n\pi\sin(2n\pi t)\right]}{1+4n^2\pi^2}\right|_0^1 = \frac{2(e-1)}{e\,(1+4n^2\pi^2)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 \tilde{g}(t)\sin(2n\pi t)\,dt = 2\int_0^1 e^{-t}\sin(2n\pi t)\,dt \\ &= -\left.\frac{2\,e^{-t}\left[2n\pi\cos(2n\pi t)+\sin(2n\pi t)\right]}{1+4n^2\pi^2}\right|_0^1 = \frac{4n\pi(e-1)}{e\,(1+4n^2\pi^2)}\end{aligned}$$

για κάθε $n = 1,\,2,\,\ldots\,.$

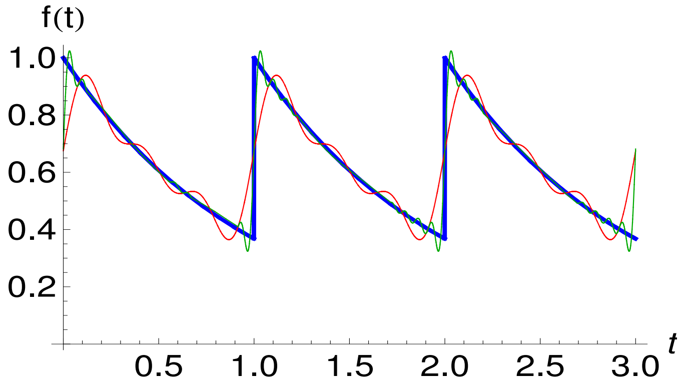
Άρα σύμφωνα με την $(A.2.3-5)$ η αντίστοιχη σειρά Fourier είναι

$$\begin{aligned}g(t) &= 0.6321 + 0.0312\cos 2\pi t + 0.1962\sin 2\pi t + 0.0080\cos 4\pi t \\ &\quad +0.0100\sin 4t + 0.0036\cos 6\pi t + 0.0669\sin 6\pi t \\ &\quad +0020\cos 8\pi t + 0.0502\sin 8\pi t + \ldots\,. \qquad \text{(A.2.3 - 11)}\end{aligned}$$

Στο σημείο ασυνέχειας $t_0 = 1$ σύμφωνα με το Θεώρημα A.2.2 - 1 - τύπος $(A.2.2-1)$ - το άθροισμα της σειράς ισούται με

$$\tilde{g}\,(t_0) = \frac{1}{2}\left[\lim_{t\to 1-0}\tilde{g}(t) + \lim_{t\to 1+0}\tilde{g}(t)\right] = \frac{1}{2}\left(e^{-1}+0\right) = \frac{e^{-1}}{2} \approx 0.1840.$$

Στο Σχ. A.2.3 - 6 δίνεται το διάγραμμα της $\tilde{g}(t)$, όταν $t \in [0,3]$ (έντονη μπλε καμπύλη), το διάγραμμα του αθροίσματος S_3 των 3 πρώτων όρων της $(A.2.3-11)$ - κόκκινη καμπύλη - και του S_9 - πράσινη καμπύλη. Από το Σχ. A.2.3 - 6 όμοια προκύπτει ότι, ενώ για $t \in (0,3)$ το διάγραμμα του αθροίσματος των n πρώτων όρων πρέπει να τείνει στο διάγραμμα της $\tilde{g}$, όταν



Σχήμα A.2.3 - 6: Παράδειγμα A.2.3 - 3: διάγραμμα της $\tilde{g}(t)$ όταν $t \in [0,3]$ μπλε καμπύλη, αθροίσματος S_3 κόκκινη και S_9 πράσινη.

το n αυξάνει, στα σημεία ασυνέχειας 0, 1, 2, 3 δημιουργούνται επίσης κύματα, που εξακολουθούν να υπάρχουν και όταν το άθροισμα των όρων της σειράς αυξάνει (φαινόμενο Gibbs). Επίσης τα διαγράμματα των S_3 και S_9 διέρχονται από τα σημεία ασυνέχειας $(t_i, g(t_i))$ με $t_i = 0,\ 1,\ 2,\ 3$.

■

Παράδειγμα A.2.3 - 4

Όμοια η περιοδική συνάρτηση (Σχ. A.2.3 - 7)

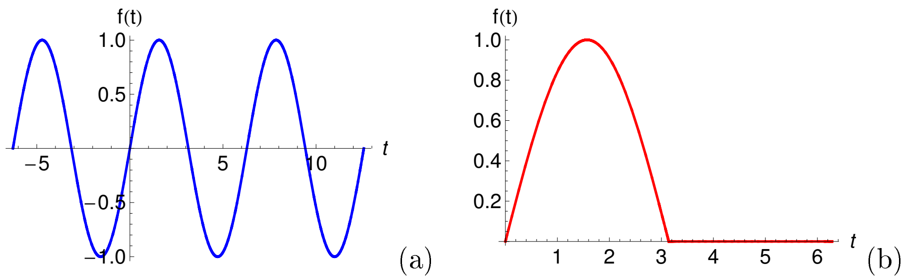
$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{όταν} \quad 0 \leq t < \pi \\ 0, & \text{όταν} \quad \pi \leq t < 2\pi \end{cases} \quad \text{και} \quad \tilde{f}(t + \mathbf{2}\pi) = \tilde{f}(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

(**ημιανόρθωση**).

Λύση. Η θεμελιώδης περίοδος είναι $T = 2\pi$. Όμοια με τους τύπους $(A.2.3-4)$ και γνωστούς τύπους της Τριγωνομετρίας[7] τελικά έχουμε[8]

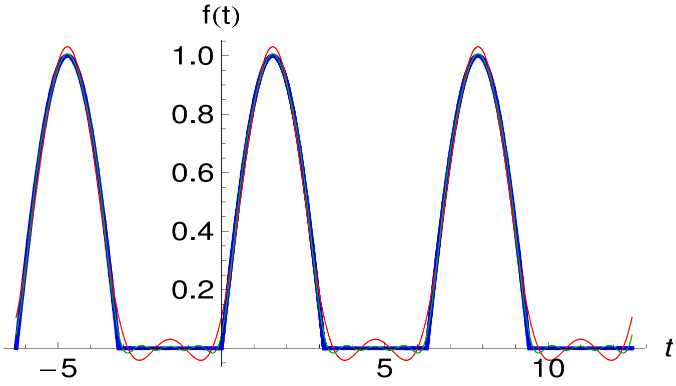
[7] $2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B), \quad 2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B).$

[8] Όταν στους τύπους υπολογισμού των συντελεστών α_n και β_n προκύψουν παραστάσεις, που δεν ορίζονται για κάποιες τιμές του n, τότε ο υπολογισμός των αντίστοιχων συντελεστών γίνεται χωριστά αντικαθιστώντας στους τύπους $(A.2.3-4)$ τις τιμές αυτές, όπως στις περιπτώσεις των συντελεστών α_1 και β_1.



Σχήμα A.2.3 - 7: Παράδειγμα A.2.3 - 4: (a) η συνάρτηση $\sin t$, όταν $t \in [-2\pi, 4\pi]$, (b) η συνάρτηση $\tilde{f}(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο, δηλαδή όταν $t \in [0, 2\pi]$.

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{2}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \tilde{f}(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \tilde{f}(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin t\, dt = \frac{2}{\pi}\,, \\
\alpha_1 &= \frac{2}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \tilde{f}(t) \cos\left(\frac{2\pi t}{2\pi}\right)\, dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin t \cos t\, dt = 0, \\
\alpha_n &= \frac{2}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \tilde{f}(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{2\pi}\right)\, dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin t\ \cos(nt)\, dt \\
&= \left. \frac{\cos t\ \cos(nt) + n\ \sin t\ \sin(nt)}{\pi\,(n^2 - 1)} \right|_0^{\pi} \\
&= -\frac{1 + (-1)^n}{\pi\pi\,(n^2 - 1)} \quad \text{για κάθε} \quad n = 2,\, 3,\, \ldots\,, \\
\beta_1 &= \frac{2}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \tilde{f}(t) \sin\left(\frac{2\pi t}{2\pi}\right)\, dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin^2 t\, dt = \frac{1}{2}\,, \\
\beta_n &= \frac{2}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \tilde{f}(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{2\pi}\right)\, dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin t\ \sin(nt)\, dt \\
&= \left. \frac{-n \sin t\ \cos(nt) + \cos t\ \sin(nt)}{\pi\,(n^2 - 1)} \right|_0^{\pi} \\
&= 0 \quad \text{για κάθε} \quad n = 2,\, 3,\, \ldots\,.
\end{aligned}
$$



Σχήμα A.2.3 - 8: Παράδειγμα A.2.3 - 4: διάγραμμα της $\tilde{f}(t)$ όταν $t \in [-2\pi, 4\pi]$ μπλε καμπύλη, αθροίσματος S_3 κόκκινη και S_7 πράσινη.

Άρα σύμφωνα με την $(A.2.3-5)$ η αντίστοιχη σειρά Fourier είναι

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t) &= 0.3183 + 0.5\sin t - 0.2122\cos 2t - 0.0424\sin 4t \\ &\quad -0.0182\cos 6t - 0.0101\cos 8t - \ldots . \qquad \text{(A.2.3 - 12)}\end{aligned}$$

Στο Σχ. A.2.3 - 8 δίνεται το διάγραμμα της $\tilde{f}(t)$ στο διάστημα $[-2\pi, 4\pi]$ (έντονη μπλε καμπύλη), το διάγραμμα του αθροίσματος S_3 των 3 πρώτων όρων της $(A.2.3-12)$ - κόκκινη καμπύλη - και του S_7 - πράσινη καμπύλη. Η $\tilde{f}(t)$ δεν έχει σημεία ασυνέχειας, οπότε δεν εμφανίζεται το φαινόμενο Gibbs.

■

A.2.4 Γραμμικά φάσματα

Ο γενικός όρος της σειράς Fourier, που αντιστοιχεί σε μία περιοδική συνάρτηση $f(t)$ με θεμελιώδη περίοδο T, σύμφωνα με τον τύπο $(A.2.3-5)$ γράφεται

$$\alpha_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) = \alpha_n\cos(n\omega t) + \beta_n \sin(n\omega t), \quad \text{(A.2.4 - 1)}$$

όπου $n = 1,\, 2,\, \ldots$ και $\omega = 2\pi/T$.

Έστω $\beta_n \neq 0$ και $\tan\varphi_n = \alpha_n/\beta_n$ για κάθε $n = 1,\, 2,\, \ldots$, όπου $-\pi \le \varphi_n < \pi$. Χρησιμοποιώντας κατάλληλους τριγωνομετρικούς μετασχηματισμούς στην

$(A.2.4-1)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\alpha_n \cos(n\omega t) + \beta_n \sin(n\omega t) &= \beta_n \left[\frac{\alpha_n}{\beta_n}\cos(n\omega t) + \sin(n\omega t)\right] \\
&= \beta_n \left[\tan\varphi_n \cos(n\omega t) + \sin(n\omega t)\right] \\
&= \frac{\beta_n}{\cos\varphi_n}\left[\sin\varphi_n \cos(n\omega t) + \cos\varphi_n \sin(n\omega t)\right] \\
&= \beta_n \sqrt{1+\tan^2\varphi_n}\, \sin(n\omega t + \varphi_n) \\
&= \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}\, \sin(n\omega t + \varphi_n).
\end{aligned}$$

[9]Έστω $C_n = \left(\alpha_n^2 + \beta_n^2\right)^{1/2}$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, ενώ για $n = 0$ θέτουμε $C_0 = |a_0|/2$. Τότε η αντίστοιχη σειρά Fourier της $f(t)$ γράφεται

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \qquad \text{(A.2.4 - 2)}$$

και λέγεται **σειρά του ημιτόνου**.

Όμοια θέτοντας στον γενικό όρο όπου $\tan\theta_n = \beta_n/\alpha_n$ με $\alpha_n \neq 0$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και $-\pi \leq \varphi_n < \pi$, προκύπτει η παρακάτω σειρά της f

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega t - \theta_n) \qquad \text{(A.2.4 - 3)}$$

που λέγεται **σειρά του συνημιτόνου**.

Τότε $|C_n \sin(n\omega t + \varphi_n)| \leq C_n$, αντίστοιχα, $|C_n \cos(n\omega t - \theta_n)| \leq C_n$ για κάθε $n = 0, 1, \ldots$, δηλαδή οι συντελεστές C_n δείχνουν το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης κάθε όρου της σειράς. Οι συντελεστές αυτοί λέγονται **αρμονικοί πλάτους** και το διάγραμμά τους **γραμμικό φάσμα πλάτους** (line spectrum). Είναι προφανές τότε ότι από τη μελέτη του γραμμικού φάσματος προκύπτει η ταχύτητα σύγκλισης της σειράς στην f. Οι γωνίες φ_n, αντίστοιχα, θ_n; $n = 1, 2, \ldots$ ορίζουν τότε τους **αρμονικούς φάσης** και το διάγραμμά τους λέγεται **γραμμικό φάσμα φάσης** (phase spectrum).

[9]Ισχύει ότι: $\cos\varphi_n = 1/\sqrt{1+\tan^2\varphi_n}$.

Πρέπει να τονιστεί στο σημείο αυτό ότι, εφόσον ισχύει το Θεώρημα Α.2.2 - 1, οπότε η σειρά Fourier συγκλίνει στην $f(t)$, τα πλάτη C_n πρέπει διαρκώς να μειώνονται και τελικά να συγκλίνουν στο μηδέν, διαφορετικά σύμφωνα με το Θεώρημα 12.3.1 - 2 η ακολουθία $C_n;\, n = 0,\, 1,\, \ldots$ να είναι **μηδενική**.

Παράδειγμα Α.2.4 - 1

Από τη σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης του Παραδείγματος Α.2.3 - 1 με στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στα 5 δεκαδικά ψηφία προκύπτει ότι για τους όρους περιττής τάξης είναι:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{|a_0|}{2} = 0.78540, \quad C_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 1.18545, \\ C_3 &= \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = 0.34076, \quad C_5 = \sqrt{a_5^2 + b_5^2} = 0.20161 \\ C_7 &= \sqrt{a_7^2 + b_7^2} = 0.14345, \quad \ldots, \end{aligned}$$

ενώ για τους όρους άρτιας τάξης

$$C_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = |b_2| = 0.5, \quad C_4 = |b_4| = 0.25, \quad C_6 = |b_6| = 0.1667, \, \ldots .$$

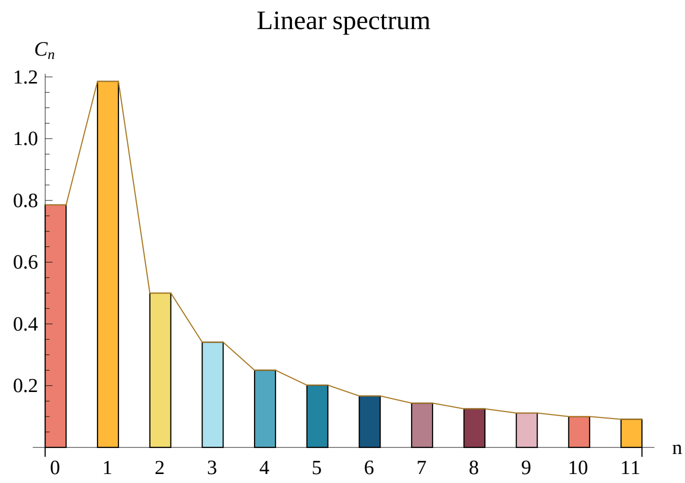
Το αντίστοιχο γραμμικό φάσμα πλάτους δίνεται στο Σχ. Α.2.4 - 1. Από τη μελέτη του διαγράμματος προκύπτει ότι η αντίστοιχη σειρά Fourier συγκλίνει αργά προς την f. Επίσης δίνονται το κυκλικό διάγραμμα κατανομής (pie chart) στο Σχ. Α.2.4 - 2 και φάσης στο Σχ. Α.2.4 - 3.

Ο υπολογισμός των αρμονικών πλάτους με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές:[10]

Πρόγραμμα Α.2.4 - 1 (σειράς Fourier αρμονικοί πλάτους)

```
f[t_]:= Piecewise[{{t, 0 <= t < Pi}, {0, Pi <= t < 2 Pi}}]
T  = 2*Pi;
a0 = (2/T) Integrate[f[t],{t, 0, 2*Pi}];
C0 = Abs[a0]/2;Print["Co=", N[C0]];
Do[n = i; x = (2/T) Integrate[f[t]*Cos[2*n*Pi*t/T],
          {t, 0, 2*Pi}];
```

[10] Για MATHEMATICA βλέπε Don [4].



Σχήμα A.2.4 - 1: Παράδειγμα A.2.4 - 1: το γραμμικό φάσμα πλάτους (linear spectrum).

```
y = (2/T) Integrate[f[t]*Sin[2*n*Pi*t/T],
{t, 0, 2*Pi}];
z = Sqrt[x^2 + y^2];
Print["C", i,"=",N[z], {i, 1, 7}];
```

Παράδειγμα A.2.4 - 2

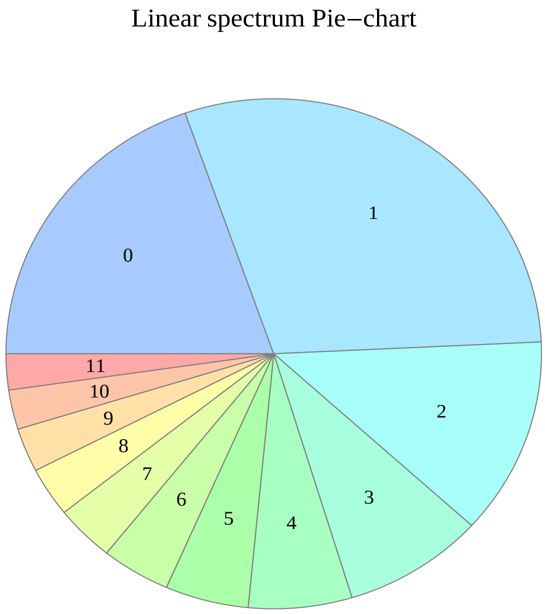
Από τη σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης του Παραδείγματος A.2.3 - 2 με στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στα 5 δεκαδικά ψηφία προκύπτει ότι για τους όρους περιττής τάξης είναι:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{|a_0|}{2} = 0.31606, \quad C_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 0.41490, \\ C_3 &= \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = 0.14433, \quad C_4 = \sqrt{a_4^2 + b_4^2} = 0.05014, \quad \ldots, \end{aligned}$$

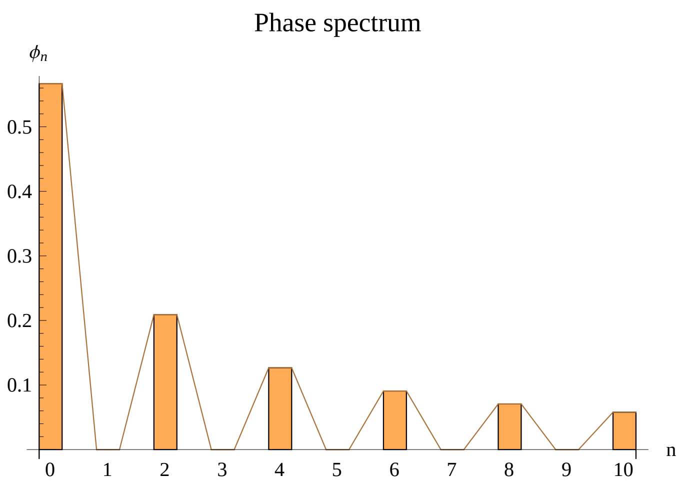
ενώ για τους όρους άρτιας τάξης

$$C_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 0.09935, \quad C_4 = 0.05014, \quad C_6 = 0.03349, \quad \ldots .$$

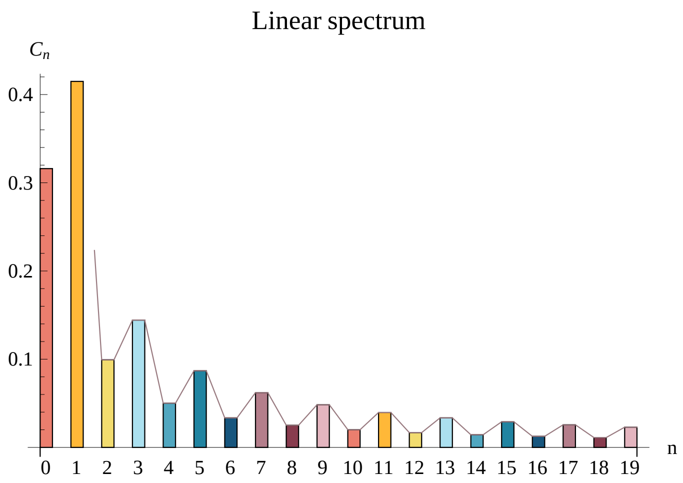
Το αντίστοιχο γραμμικό φάσμα πλάτους δίνεται στο Σχ. A.2.4 - 4. Από τη μελέτη του διαγράμματος προκύπτει ότι η αντίστοιχη σειρά Fourier συγκλίνει επίσης αργά προς την g.



Σχήμα Α.2.4 - 2: Παράδειγμα Α.2.4 - 1: το διάγραμμα κατανομής (pie chart) του γραμμικού φάσματος πλάτους.



Σχήμα Α.2.4 - 3: Παράδειγμα Α.2.4 - 1: το φάσμα φάσεων (phase spectrum).



Σχήμα Α.2.4 - 4: Παράδειγμα Α.2.4 - 2: το γραμμικό φάσμα πλάτους (linear spectrum).

Παράδειγμα Α.2.4 - 3

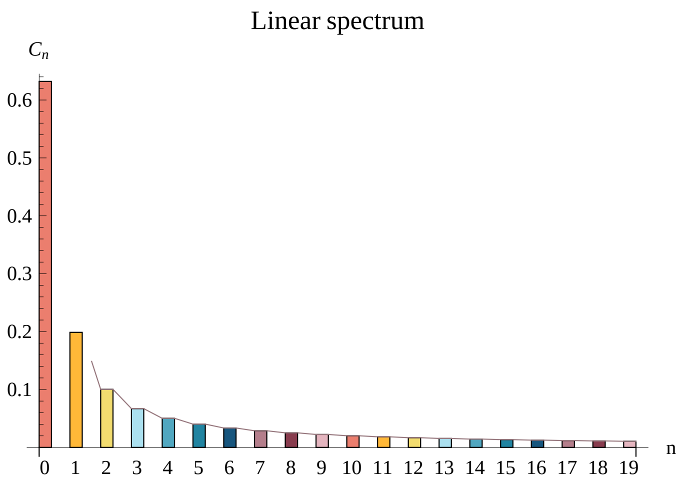
΄Ομοια από τη σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης του Παραδείγματος Α.2.3 - 3 με στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στα 5 δεκαδικά ψηφία προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{|a_0|}{2} = 0.63212, \quad C_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 0.19871, \\ C_2 &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 0.10029, \quad C_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = 0.06698, \\ C_4 &= \sqrt{a_4^2 + b_4^2} = 0.05026, \quad C_5 = \sqrt{a_5^2 + b_5^2} = 0.04026, \quad \ldots \end{aligned}$$

με αντίστοιχο γραμμικό φάσμα πλάτους που δίνεται στο Σχ. Α.2.4 - 5. Από τη μελέτη του διαγράμματος προκύπτει ότι η αντίστοιχη σειρά Fourier συγκλίνει γρήγορα προς την $\tilde{g}$.

Παράδειγμα Α.2.4 - 4

΄Ομοια από τη σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης του Παραδείγματος Α.2.3 - 4 με στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στα 5 δεκαδικά ψηφία



Σχήμα Α.2.4 - 5: Παράδειγμα Α.2.4 - 3: το γραμμικό φάσμα πλάτους (linear spectrum).

έχουμε:

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{|a_0|}{2} = 0.31831, \quad C_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 0.5, \\
C_4 &= \sqrt{a_4^2 + b_4^2} = 0.04244, \quad C_6 = \sqrt{a_6^2 + b_6^2} = 0.01819, \\
C_8 &= \sqrt{a_8^2 + b_8^2} = 0.01011, \quad C_{10} = \sqrt{a_{10}^2 + b_{10}^2} = 0.00643, \quad \ldots
\end{aligned}
$$

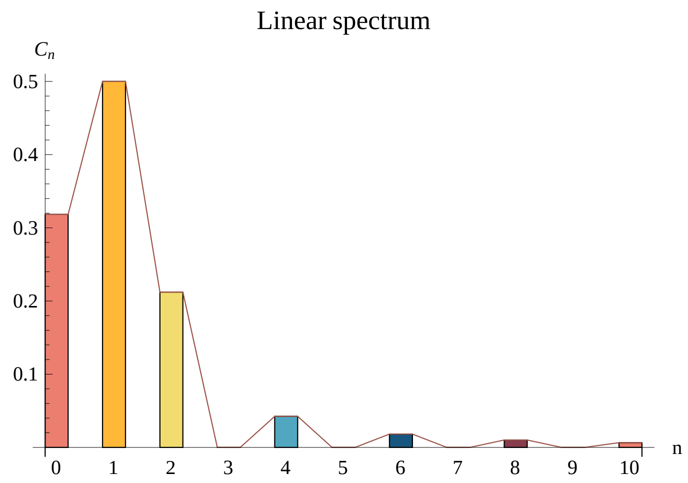
με αντίστοιχο γραμμικό φάσμα πλάτους που δίνεται στο Σχ. Α.2.4 - 6. Από τη μελέτη του διαγράμματος προκύπτει ότι η αντίστοιχη σειρά Fourier συγκλίνει επίσης γρήγορα προς την $\tilde{f}$.

Α.2.5 Σειρά άρτιων και περιττών συναρτήσεων

Είναι ήδη γνωστό ότι μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού, έστω $\mathcal{D}$, λέγεται άρτια αντίστοιχα περιττή, όταν για κάθε t, $-t \in \mathcal{D}$ είναι $f(-t) = f(t)$, αντίστοιχα, $f(-t) = -f(t)$.

Από τις ιδιότητες των συναρτήσεων αυτών έχουμε:

i) το διάγραμμα μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα yy', ενώ μιας περιττής συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων,



Σχήμα A.2.4 - 6: Παράδειγμα A.2.4 - 4: το γραμμικό φάσμα πλάτους (linear spectrum).

ii) όταν η f είναι άρτια, τότε

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt = 2\int_{0}^{\alpha} f(t)\,dt, \tag{A.2.5 - 1}$$

ενώ, όταν είναι περιττή,

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt = 0, \tag{A.2.5 - 2}$$

iii) το γινόμενο μιας περιττής με μία άρτια είναι περιττή συνάρτηση, ενώ το γινόμενο δύο άρτιων ή δύο περιττών συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.

Με χρήση των παραπάνω ιδιοτήτων (i)-(iii) αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα A.2.5 - 1 (σειρά άρτιων και περιττών συναρτήσεων).
Έστω $f(t)$ μία περιοδική συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο T που πληροί τις υποθέσεις του Θεωρήματος A.2.2 - 1. Τότε, αν η $f(t)$ είναι **άρτια**, *το ανάπτυγμά της σε σειρά Fourier είναι*

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)$$

όπου

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt \ \textit{και} \\ \alpha_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt \ \textit{για κάθε} \ n=1,\,2,\,\ldots \end{aligned} \qquad (\text{A.2.5 - 3})$$

ενώ, όταν είναι ***περιττή***,

$$f(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)$$

όπου

$$\beta_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt \ \textit{για κάθε} \ n=1,\,2,\,\ldots\,. \qquad (\text{A.2.5 - 4})$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Α.2.5 - 1, όταν η f είναι

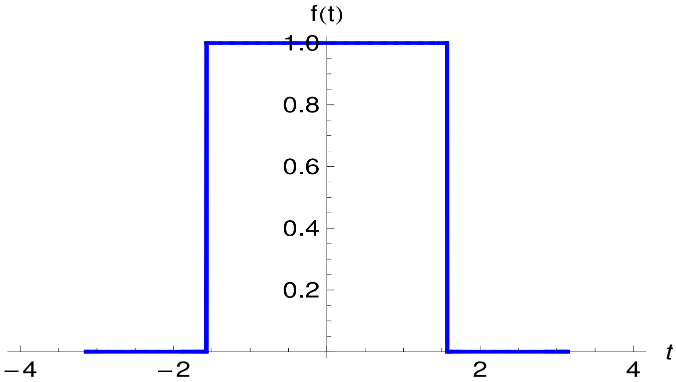
- **άρτια**, πρέπει $\boldsymbol{\beta_n = 0}$ για κάθε $n = 1,\,2,\,\ldots$, ενώ, όταν είναι
- **περιττή**, πρέπει $\boldsymbol{\alpha_n = 0}$ για κάθε $n = 0,\,1,\,\ldots\,.$

Παράδειγμα Α.2.5 - 1

Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση (Σχ. Α.2.5 - 1)

$$f(t)=\begin{cases} 0 & \text{αν} \quad -\pi < t \leq -\dfrac{\pi}{2} \\ 1 & \text{αν} \quad -\dfrac{\pi}{2} < t \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{αν} \quad \dfrac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases} \quad \text{και } f(t+2\pi)=f(t) \text{ για κάθε } t\in\mathbb{R}.$$

Λύση. Η f είναι μία **άρτια** συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$, οπότε $\beta_n = 0$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Τότε σύμφωνα με τους τύπους $(A.2.5-3)$



Σχήμα A.2.5 - 1: Παράδειγμα A.2.5 - 1: η συνάρτηση $f(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο.

ολοκληρώνοντας σε διάστημα πλάτους $T/2$, δηλαδή στο $[0, \pi] = [0, \pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$ έχουμε

$$\alpha_0 = \frac{4}{T} \int_0^{\pi/2} f(t)dt + \frac{4}{T} \int_{\pi/2}^{\pi} f(t)dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} dt = 1$$

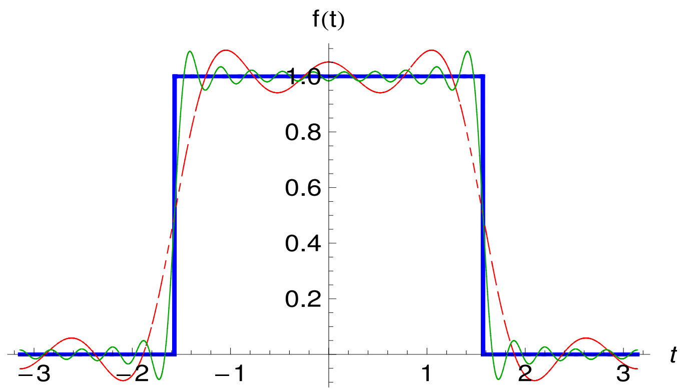
και

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(nt)dt = \frac{2}{n\pi} \sin(nt)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

για κάθε $n = 1,\, 2,\, \ldots$.

Στο Σχ. A.2.5 - 2 δίνεται το διάγραμμα της $f(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο (έντονη μπλε καμπύλη), το διάγραμμα του αθροίσματος S_5 των 5 πρώτων όρων (κόκκινη καμπύλη) και του S_{19} (πράσινη καμπύλη).

Από το Σχ. A.2.5 - 2 προκύπτει ότι, ενώ για $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ το διάγραμμα του αθροίσματος των n πρώτων όρων πρέπει να τείνει στο διάγραμμα της f, όταν το n αυξάνει, στα σημεία ασυνέχειας $-\pi/2$ και $\pi/2$ δημιουργούνται **κύματα**, που εξακολουθούν να υπάρχουν και όταν το άθροισμα των όρων της σειράς αυξάνει. Το φαινόμενο αυτό είναι ήδη γνωστό από τα Παραδείγματα A.2.3 - 1 έως και A.2.3 - 3 ως **φαινόμενο Gibbs**. ∎



Σχήμα Α.2.5 - 2: Παράδειγμα Α.2.5 - 1: διάγραμμα της $f(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο, αθροίσματος S_5 κόκκινη και S_{19} πράσινη καμπύλη.

Παράδειγμα Α.2.5 - 2

Όμοια η περιοδική συνάρτηση (Σχ. Α.2.5 - 3)

$$f(t) = t, \text{όταν} \quad -\pi \leq t < \pi \quad \text{και} \quad f(t+2\pi) = f(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Η f είναι μία **περιττή** συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$, οπότε $\alpha_n = 0$ για κάθε $n = 0, 1, \ldots$. Τότε σύμφωνα με τους τύπους $(A.2.5-4)$ ολοκληρώνοντας όμοια σε διάστημα πλάτους $T/2$, δηλαδή στο $[0,\pi]$ έχουμε

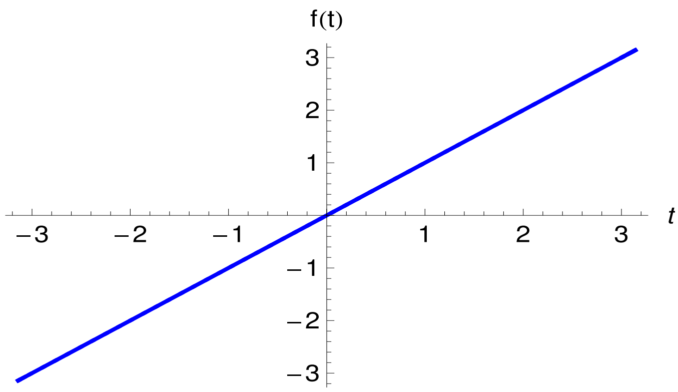
$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt = -\frac{2}{n\pi}\, t\cos(nt)\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt)\,dt \\ &= -\frac{2(-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

Ανάλογο διάγραμμα με αυτό του Σχ. Α.2.5 - 2 γίνεται και στην περίπτωση αυτή.

■

Άσκηση

Να αναπτυχθούν σε σειρά Fourier και να γίνει το γραμμικό φάσμα των παρακάτω περιοδικών συναρτήσεων $f(t)$, που ο περιορισμός τους στη θεμελιώδη περίοδο



Σχήμα A.2.5 - 3: Παράδειγμα A.2.5 - 2: η συνάρτηση $f(t)$, όταν $t \in [-\pi, \pi]$.

είναι:

$i)\quad f(t) = \begin{cases} -1 & \text{αν} \quad -\pi \le t < 0 \\ 1 & \text{αν} \quad 0 \le t < \pi \end{cases} \qquad v)\quad f(t) = e^t\,;\; 0 \le t < 1$

$ii)\quad f(t) = t\,;\; -1 \le t < 1 \qquad vi)\quad f(t) = t^2\,;\; -\pi \le t < \pi$

$iii)\quad f(t) = t\,;\; 0 \le t < 2\pi \qquad vii)\quad f(t) = |\sin t|$

$iv)\quad f(t) = \begin{cases} \sin 2t & \text{αν} \quad 0 \le t < \pi \\ 0, & \text{αν} \quad \pi \le t < 2\pi \end{cases} \qquad viii)\quad f(t) = \begin{cases} -t\,; & -\pi \le t < 0 \\ t\,; & 0 \le t < \pi. \end{cases}$

Απαντήσεις

(i) περιττή $\quad T = 2\pi,\ b_n = \frac{4}{T}\int\limits_0^{\pi} \sin(nt)dt = \frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi}\,;\ n = 1,\,2,\,\ldots,$

(ii) ανάλογη του Παραδείγματος A.2.5 - 2, $T = 2$, $b_n = -\frac{2(-1)^n}{n\pi}\,;\ n = 1,\,2,\,\ldots,$

(iii) $a_0 = 2\pi\,,\quad a_n = 0,\quad b_n = -\frac{2}{n}\,;\ n = 1,\,2,\,\ldots.,$

(iv) βλέπε Παράδειγμα A.2.3 - 4,

(v) όμοια Παράδειγμα A.2.3 - 3, $\quad a_0 = 2 - \frac{2}{e}\,,\quad a_n = \frac{2(e-1)}{e\left(1+4n^2\pi^2\right)}\,,$

$b_n = \frac{4n\pi(e-1)}{e\left(1+4n^2\pi^2\right)}\,;\ n = 1,\,2,\,\ldots,$

(vi) άρτια $\quad a_0 = \frac{2\pi^2}{3}\,,\quad a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}\,;\ n = 1,\,2,\,\ldots,$

(vii) $T = \pi$. Όταν $t \in [0, \pi/2]$ είναι $|\sin t| = \sin t$. Λύση όμοια με Παράδειγμα A.2.3 - 4,

$a_0 = \frac{4}{\pi}\,,\quad a_n = \frac{4}{\pi\left(1-4n^2\right)}\,;\ n = 1,\,2,\,\ldots,$

(viii) άρτια $\quad T = 2\pi,\quad a_0 = \int\limits_0^{\pi} t\,dt = \pi,\ a_n = \frac{2[-1+(-1)^n]}{n^2\pi}\,;\ n = 1,\,2,\,\ldots.$

A.2.6 Εκθετική μορφή της σειράς Fourier

Έστω η περιοδική συνάρτηση $f(t)$ με θεμελιώδη περίοδο T, που το ανάπτυγμά της σε σειρά Fourier είναι

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\alpha_n \cos(n\omega t) + \beta_n \sin(n\omega t)\right], \qquad (1.2.6 - 1)$$

όπου $\omega = 2\pi/T$.

Είναι ήδη γνωστό από το Μάθημα *Μιγαδικοί Αριθμοί* ότι από την ταυτότητα του Euler

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \sin\theta,$$

προκύπτουν οι τύποι

$$\sin\theta = \frac{e^{i\,\theta} - e^{-i\,\theta}}{2i} \quad \text{και} \quad \cos\theta = \frac{e^{i\,\theta} + e^{-i\,\theta}}{2}. \qquad (1.2.6 - 2)$$

Αντικαθιστώντας στην (1.2.6−1) τους όρους του συνημιτόνου και του ημιτόνου με τις $(1.2.6 - 2)$ η σειρά διαδοχικά γράφεται

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\alpha_n \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + \beta_n \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i}\right] \\ &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}\left(\alpha_n - i\beta_n\right) e^{in\omega t} + \frac{1}{2}\left(\alpha_n + i\beta_n\right) e^{-in\omega t}\right]. \end{aligned}$$

Αν

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{\alpha_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}\left(\alpha_n - i\beta_n\right), \quad \text{και} \\ c_{-n} &= \frac{1}{2}\left(\alpha_n + i\beta_n\right), \end{aligned} \qquad (1.2.6 - 3)$$

τότε

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}\right) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{-in\omega t}, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}. \qquad (1.2.6 - 4)$$

Η $(1.2.6-4)$ είναι γνωστή ως η **εκθετική** ή **μιγαδική μορφή** της σειράς Fourier.

Οι συντελεστές c_n με $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ υπολογίζονται ή μέσω των τύπων $(1.2.6-3)$, όταν είναι γνωστά τα α_n και β_n ή όπως αποδεικνύεται από την $f(t)$ σύμφωνα με τον τύπο

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega t}\, dt \quad \text{για κάθε} \quad n = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots . \qquad (1.2.6 - 5)$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι πραγματική, από την $(1.2.6-5)$ προκύπτει ότι γενικά οι συντελεστές c_n είναι μιγαδικοί αριθμοί, για τους οποίους σύμφωνα με τους τύπους $(1.2.6-3)$ ισχύει:

i)

$$c_{-n} = \overline{c_n} \quad \text{για κάθε} \quad n = 1,\, 2,\, \ldots\, , \ \text{ενώ} \qquad (1.2.6 - 6)$$

ii) επειδή $c_n = |c_n| e^{i\theta_n}$ και $c_{-n} = |c_n| e^{-i\theta_n}$, πρέπει

$$|c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \quad \text{για κάθε} \quad n = 1,\, 2,\, \ldots . \qquad (1.2.6 - 7)$$

Όπως έχει ήδη αναπτυχθεί στην Παράγραφο Α.2.4, είναι δυνατόν και για την εκθετική μορφή της σειράς Fourier να οριστεί το αντίστοιχο γραμμικό φάσμα πλάτους, το οποίο όμως στην περίπτωση αυτή εκτείνεται από το $-\infty$ μέχρι το $+\infty$, επειδή οι τιμές της κυκλικής συχνότητας είναι και αρνητικές, δηλαδή $\pm\omega,\, \pm 2\omega,\, \ldots$, όπως επίσης και το φάσμα των φάσεων.

Παράδειγμα Α.2.6 - 1

Έστω η περιοδική συνάρτηση

$$\tilde{g}(t) = e^{-t}, \quad \text{όταν} \quad 0 \le t < 1 \quad \text{και} \quad \tilde{g}(t + 1) = \tilde{g}(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

του Παραδείγματος Α.2.3 - 3 (Σχ. Α.2.3 - 5) με θεμελιώδη περίοδο $T = 1$, δηλαδή $\omega = 2\pi$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(1.2.6-5)$ έχουμε

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{1}\int_0^1 e^{-t}e^{-in\omega t}\,dt = \int_0^1 e^{-t}e^{-2\pi n\,i\,t}\,dt \\ &= \int_0^1 e^{-(1+2n\pi\,i)\,t}\,dt = -\left.\frac{e^{-(1+2n\pi\,i)\,t}}{1+2n\pi\,i}\right|_0^1 \\ &= \frac{1-e^{-1}}{1+2n\pi\,i} = \left(1-\frac{1}{e}\right)\frac{1-2n\pi\,i}{1+4n^2\pi^2} \end{aligned} \tag{1.2.6 - 8}$$

όπου

$$e^{-2n\pi\,i} = \cos(2n\pi) - i\,\sin(2n\pi) = 1.$$

Άρα σύμφωνα με την $(1.2.6-4)$ η εκθετική μορφή της σειράς Fourier είναι

$$\tilde{g}(t) = \left(1-\frac{1}{e}\right)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1-2n\pi\,i}{1+4n^2\pi^2}\,e^{2n\pi\,i\,t}. \tag{1.2.6 - 9}$$

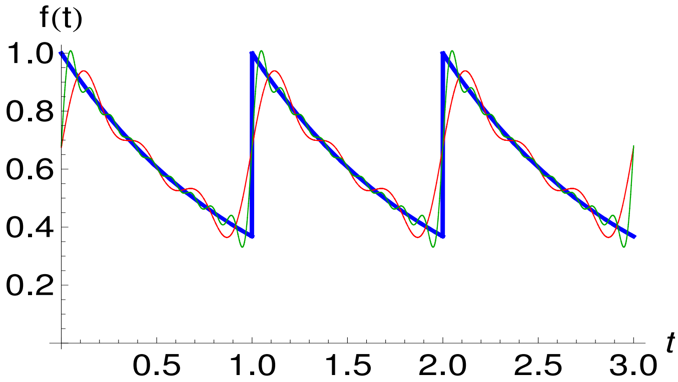
Ανάλογα με το Σχ. Α.2.3 - 6 δίνεται στο Σχ. Α.2.6 - 1 το διάγραμμα της $\tilde{g}(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο (έντονη μπλε καμπύλη), το διάγραμμα του αθροίσματος

$$S_3 = \left(1-\frac{1}{e}\right)\sum_{n=-3}^{3}\frac{1-2n\pi\,i}{1+4n^2\pi^2}\,e^{2n\pi\,i\,t} \qquad \text{(κόκκινη καμπύλη)}$$

και του S_9 (πράσινη καμπύλη). Παρατηρούμε ότι στα σημεία ασυνέχειας εξακολουθεί να εμφανίζεται το φαινόμενο Gibbs, ενώ τα διαγράμματα των S_3 και S_9 διέρχονται από τα σημεία ασυνέχειας $(t_i, g\,(t_i)\,)$ με $t_i = 0,\,1,\,2,\,3$.

Από την $(1.2.6-8)$, όταν $n = 7$, προκύπτει

$$\begin{aligned} |c_{\pm 7}| &= 0.01437, \quad |c_{\pm 6}| = 0.01676, \quad |c_{\pm 5}| = 0.02011, \\ |c_{\pm 4}| &= 0.02513, \quad |c_{\pm 3}| = 0.03349, \quad |c_{\pm 2}| = 0.05014, \\ |c_{\pm 1}| &= 0.09936, \quad |c_0| = 0.63212. \end{aligned} \tag{1.2.6 - 10}$$



Σχήμα A.2.6 - 1: Παράδειγμα A.2.6 - 1: διάγραμμα της $\tilde{g}(t)$ όταν $t \in [0, 3]$ μπλε καμπύλη, αθροίσματος S_3 κόκκινη και S_9 πράσινη.

Τότε από το αντίστοιχο γραμμικό φάσμα πλάτους (Σχ. A.2.6 - 2), όπως και στο αντίστοιχο (Σχ. A.2.4 - 5), προκύπτει η γρήγορη σύγκλιση της σειράς (1.2.6−9) στην $\tilde{g}(t)$. Επίσης παρατηρούμε ότι οι τιμές (1.2.6−10) επαληθεύουν τις (1.2.6 − 6) - (1.2.6 − 7).

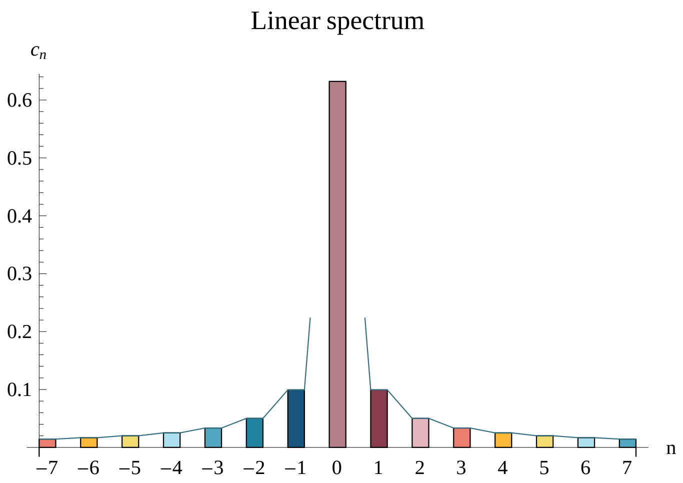
Το Σχ. A.2.6 - 2 έγινε με τις εξής εντολές του MATHEMATICA:

Πρόγραμμα A.2.6 - 1 (σειράς Fourier φάσμα πλάτους)

```
Clear["n"];T = 1;
cn = Integrate[(1/T) Exp[-t]*Exp[-I*n*2*Pi*t],{t,0,1}];
m1 = Array[b1, {15, 1}];
Do[n = i; x = N[Abs[cn]]; m1[[i + 8]] = x;
  Print["c", i, "=", x], {i, -7, 7}];
fgr1 = BarChart[m1, PlotLabel -> "Linear spectrum",
  Joined -> True,BarSpacing -> 1.50,
  AxesLabel->{"n", "|cn|"},ChartLabels -> {"-7","-6",
  "-5","-4","-3","-2","-1","0","1","2","3","4","5","6",
  "7"}, ChartStyle->24, PlotRange -> All]
```

Άσκηση

Να υπολογιστεί η εκθετική μορφή της σειράς Fourier των παρακάτω περιοδικών συναρτήσεων, που ο περιορισμός στη θεμελιώδη περίοδο είναι:



Σχήμα Α.2.6 - 2: Παράδειγμα Α.2.6 - 1: το γραμμικό φάσμα πλάτους (linear spectrum).

$i)\quad f(t) = t\,;\ -\pi \le t < \pi \qquad iii)\quad f(t) = |\sin t|$

$$ii)\quad f(t) = t^2\,;\ -\pi \le t < \pi \qquad iv)\quad f(t) = \begin{cases} -1 & \text{αν} \quad -\pi \le t < 0 \\ 1 & \text{αν} \quad 0 \le t < \pi. \end{cases}$$

Α.3 Μετασχηματισμός Fourier

Α.3.1 Ορισμός

Ορισμός Α.3.1 - 1 (μετασχηματισμού Fourier). *Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και $\omega \in \mathbb{R}$. Τότε η μιγαδική συνάρτηση F που ορίζεται από το γενικευμένο ολοκλήρωμα του α' είδους*

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \tag{1.3.1 - 1}$$

όταν αυτό υπάρχει, ορίζει τον μετασχηματισμό Fourier[11] *(Fourier transform) της f.*

[11] Βλέπε βιβλιογραφία και *http://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform*
Επίσης *mathworld.wolfram.com/FourierTransform.html*

Ορισμός A.3.1 - 2 (αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier). *Η συνάρτηση $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t)$, όταν*

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \qquad (1.3.1 - 2)$$

ορίζει τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier.

Όταν η μεταβλητή t συμβολίζει τον χρόνο, τότε η ω συμβολίζει τη συχνότητα. Αποδεικνύεται ότι, όταν η f είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, δηλαδή όταν ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)dt| < +\infty, \qquad (1.3.1 - 3)$$

τότε ο μετασχηματισμός Fourier της f υπάρχει. Η συνθήκη $(1.3.1-3)$ είναι *ικανή όχι όμως και αναγκαία*, δηλαδή είναι δυνατό να υπάρχουν συναρτήσεις, που να μην ικανοποιούν την $(1.3.1-3)$ και να έχουν μετασχηματισμό Fourier.

Παράδειγμα A.3.1 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad |x| < \alpha \\ 0 & \text{αν} \quad |x| > \alpha \end{cases} \quad \text{με } \alpha > 0.$$

Τότε, αν $\omega \neq 0$, είναι

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-i\omega t}dt = \frac{2}{\omega}\sin(\omega\alpha).$$

Παράδειγμα A.3.1 - 2

Όμοια, έστω

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{αν} \quad t > 0 \\ 0 & \text{αν} \quad t < 0. \end{cases}$$

Τότε

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+i\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{1+i\omega}\left[\lim_{t->+\infty} e^{-(1+i\omega)t} - 1\right] = \frac{1-i\omega}{1+\omega^2}\,. \end{aligned}$$

A.3.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Επειδή όπως είναι ήδη γνωστό ισχύει ότι $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$, η συνάρτηση $F(\omega)$ που ορίζεται από τον τύπο $(1.3.1-1)$ είναι γενικά μία μιγαδική συνάρτηση, που γράφεται αναλυτικά ως

$$F(\omega) = R(\omega) + iX(\omega), \tag{1.3.2 - 1}$$

όπου

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt \tag{1.3.2 - 2}$$

το πραγματικό μέρος και

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt \tag{1.3.2 - 3}$$

το φανταστικό μέρος της. Η εκθετική μορφή της $F(\omega)$ τότε είναι

$$F(\omega) = |F(\omega)|e^{i\varphi(\omega)}, \tag{1.3.2 - 4}$$

όπου $|F(\omega)|$ το μέτρο και $\varphi(\omega)$ η φάση της F.

Θεωρώντας τώρα ότι η συνάρτηση $f(t)$ είναι πραγματική, αποδεικνύονται με τη βοήθεια των τύπων $(1.3.2-1)$ - $(1.3.2-3)$ οι παρακάτω προτάσεις, που ορίζουν τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier:

Πρόταση A.3.2 - 1. *Η συνάρτηση R είναι άρτια ως προς ω, ενώ η X περιττή, δηλαδή*

$$R(-\omega) = R(\omega) \quad \textit{και} \quad X(-\omega) = -X(\omega).$$

Παράδειγμα Α.3.2 - 1

Έστω

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad 0 < t < 1 \\ 0 & \text{αν} \quad t < 0 \ \text{ ή } \ t > 1 \end{cases}$$

Τότε

$$\begin{aligned} F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{0}^{1} e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{i\omega}\left(1 - e^{-i\omega}\right) \\ &= \frac{i}{\omega}(\cos\omega - 1) + \frac{\sin\omega}{\omega} = R(\omega) + X(\omega) \ \text{ με } \ \omega \neq 0 \end{aligned}$$

Πρόταση Α.3.2 - 2. *$F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$, όπου $\overline{F(\omega)}$ η συζυγής συνάρτηση της $F(\omega)$ και αντίστροφα, δηλαδή όταν ισχύει η σχέση αυτή, η f είναι πραγματική συνάρτηση.*

Πρόταση Α.3.2 - 3. *Αν η $F(\omega)$ είναι πραγματική συνάρτηση, τότε η f είναι άρτια συνάρτηση και όταν η $F(\omega)$ είναι φανταστική, τότε η f είναι περιττή.*

Πρόταση Α.3.2 - 4. *Αν $F_1(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)]$, $F_2(\omega) = \mathcal{F}[f_2(t)]$ και $k, \lambda \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει η γραμμική ιδιότητα*

$$\mathcal{F}[kf_1(t) + \lambda f_2(t)] = \varkappa F_1(\omega) + \lambda F_2(\omega)$$

η οποία γενικεύεται επαγωγικά ως εξής:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{F}[\lambda_i f_i(t)] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathcal{F}[f_i(t)], \tag{1.3.2 - 5}$$

όταν $\lambda_i \in \mathbb{R}$; $i = 1, 2, \ldots, n$ και $n = 1, 2, \ldots$.

Πρόταση Α.3.2 - 5. *Αν $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, τότε*

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right), \tag{1.3.2 - 6}$$

όπου για $a = -1$ είναι $\mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega)$.

Πρόταση Α.3.2 - 6. *Αν* $t_0 \in \mathbb{R}$, *τότε*

$$\mathcal{F}\left[f\left(t-t_0\right)\right]=F(\omega) e^{-i \omega t_0}. \qquad (1.3.2 - 7)$$

Πρόταση Α.3.2 - 7. *Αν* $\omega_0 \in \mathbb{R}$, *τότε*

$$\mathcal{F}\left[f(t) e^{i \omega_0 t}\right]=F\left(\omega-\omega_0\right). \qquad (1.3.2 - 8)$$

Πρόταση Α.3.2 - 8. *Ισχύει*

$$\mathcal{F}\left[f(t) \cos \left(\omega_0 t\right)\right]=\frac{1}{2}\left[F\left(\omega-\omega_0\right)+F\left(\omega+\omega_0\right)\right] \qquad (1.3.2 - 9)$$

και

$$\mathcal{F}\left[f(t) \sin \left(\omega_0 t\right)\right]=\frac{1}{2}\left[F\left(\omega-\omega_0\right)+F\left(\omega+\omega_0\right)\right]. \qquad (1.3.2 - 10)$$

Πρόταση Α.3.2 - 9. *Αν* $\lim_{t \rightarrow+\infty} f(t)=0$, *τότε*

$$\mathcal{F}[f'(t)]=i \omega F(\omega)$$

και γενικά

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right]=(i \omega)^n F(\omega). \qquad (1.3.2 - 11)$$

Πρόταση Α.3.2 - 10. *Αν* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) d t=F(0)=0$ *με* $\omega \neq 0$, *τότε*

$$\left[\int\limits_{-\infty}^{x} f(t) d t\right]=\frac{1}{i \omega} F(\omega)=\frac{1}{i \omega} \mathcal{F}[f(t)]. \qquad (1.3.2 - 12)$$

Πρόταση A.3.2 - 11. *Ισχύει*

$$\mathcal{F}[-itf(t)] = F'(\omega)$$

και γενικά για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ *ότι*

$$\mathcal{F}\left[t^n f(t)\right] = i^n F^{(n)}(\omega). \qquad (1.3.2 - 13)$$

Θα πρέπει να τονιστεί στο σημείο αυτό ότι πολλές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier είναι δυνατό να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις των αντίστοιχων ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace για $s = i\omega$.

A.4 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.* Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά.* Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Bolton, W. (1994). *Fourier Series.* Pierson Education Limited. ISBN 978–0582–239–340.

[4] Don, E. (2006). *Schaum's Outlines – Mathematica.* Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN 978–960–461–000–6.

[5] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός ΙΙ.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–184–1.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Ευρετήριο

Ευρετήριο Ξενόγλωσσων Ονομάτων