

ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΙΙ

Αθανάσιος Μπράτσος

Καθηγητής

Περιεχόμενα

1	ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ	9
1.1	Εισαγωγικές έννοιες	9
1.1.1	Ορισμοί	9
1.1.2	Σύγκλιση συναρτήσεων δύο και τριών μεταβλητών . . .	16
1.1.3	Συνέχεια συναρτήσεων δύο και τριών μεταβλητών . . .	18
1.2	Μερική παράγωγος	21
1.2.1	Ορισμοί	21
1.2.2	Υπολογισμός παραγώγων	25
1.2.3	Εφαπτόμενο επίπεδο	37
1.2.4	Η έννοια του διαφορικού	43
1.2.5	Αλυσιδωτός κανόνας παραγωγίσης	45
1.3	Ακρότατα	57
1.3.1	Τοπικά ακρότατα	57
1.3.2	Μέθοδος των ελάχιστων τετραγώνων	67
1.3.3	Απόλυτα ακρότατα	76
1.3.4	Ακρότατα με συνθήκες - Μέθοδος του Lagrange	80
1.4	Βιβλιογραφία	93
2	ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	95
2.1	Εισαγωγικές έννοιες	95
2.1.1	Ορισμοί και σχετικά θεωρήματα	96
2.2	Διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης	101
2.2.1	Ορισμοί	101
2.2.2	Διαφορικές εξισώσεις χωρισμένων μεταβλητών	102

2.2.3	Πλήρεις διαφορικές εξισώσεις	111
2.2.4	Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις	124
2.2.5	Γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης	131
2.2.6	Διαφορική εξίσωση του Bernoulli	140
2.2.7	Διαφορική εξίσωση του Riccati	143
2.2.8	Γραμμική 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές	146
2.2.9	Εφαρμογές	151
2.3	Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης	155
2.3.1	Ορισμοί	155
2.3.2	Ομογενής γραμμική με σταθερούς συντελεστές	156
2.3.3	Εφαρμογές στη Μηχανική	163
2.3.4	Εφαρμογές στον Ηλεκτρισμό	167
2.3.5	Μη ομογενής με σταθερούς συντελεστές	169
2.3.6	Εφαρμογές	185
2.4	Βιβλιογραφία	187
3	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE	189
3.1	Μετασχηματισμός Laplace	189
3.1.1	Ορισμός	189
3.1.2	Θεώρημα ύπαρξης	190
3.1.3	Ιδιότητες του μετασχηματισμού	193
3.1.4	Μετασχηματισμός περιοδικών συναρτήσεων	200
3.1.5	Συνάρτηση γάμμα	201
3.1.6	Μοναδιαία συνάρτηση του Heaviside	202
3.1.7	Συνάρτηση δέλτα του Dirac	210
3.2	Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace	215
3.2.1	Ορισμός και βασικό θεώρημα	215
3.2.2	Ιδιότητες αντίστροφου μετασχηματισμού	216
3.2.3	Μέθοδοι υπολογισμού	218
3.3	Εφαρμογές στη λύση Διαφορικών Εξισώσεων	226
3.3.1	Γραμμική 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές	226
3.3.2	Γραμμική 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές	232
3.4	Βιβλιογραφία	241

4	ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	243
4.1	Εισαγωγικές έννοιες	243
4.1.1	Ορισμός διανυσματικής συνάρτησης	243
4.1.2	Οριακή τιμή	248
4.1.3	Συνέχεια	249
4.2	Παραμετρική παράσταση καμπυλών	250
4.2.1	Ορισμοί	250
4.2.2	Ευθεία	251
4.2.3	Περιφέρεια κύκλου	254
4.2.4	Έλλειψη	255
4.2.5	Παραβολή	256
4.3	Παράγωγος και ολοκλήρωση	257
4.3.1	Ορισμός παραγώγου	257
4.3.2	Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου	260
4.3.3	Κανόνες παραγώγισης	265
4.3.4	Ολοκλήρωση	268
4.4	Βιβλιογραφία	271
5	ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ	273
5.1	Εισαγωγή	273
5.1.1	Βαθμωτά και διανυσματικά πεδία	273
5.2	Κατευθυνόμενη παράγωγος	276
5.2.1	Εισαγωγικές έννοιες	276
5.2.2	Ορισμός	277
5.3	Κλίση συνάρτησης	279
5.3.1	Σχετικοί ορισμοί	279
5.3.2	Ιδιότητες και εφαρμογές	284
5.3.3	Συντηρούμενα διανυσματικά πεδία	292
5.4	Απόκλιση	295
5.4.1	Ορισμός και ιδιότητες	295
5.4.2	Τελεστής Laplace	296
5.5	Στροβιλισμός	299
5.5.1	Ορισμός και ιδιότητες	299

5.5.2	Αστρόβιλα διανυσματικά πεδία	300
5.6	Βιβλιογραφία	303
6	ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ	305
6.1	Διπλά ολοκληρώματα	305
6.1.1	Εισαγωγή	305
6.1.2	Ορισμός	306
6.1.3	Ιδιότητες	309
6.1.4	Υπολογισμός σε καρτεσιανές συντεταγμένες	311
6.1.5	Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων	331
6.1.6	Υπολογισμός εμβαδών επίπεδων σχημάτων	342
6.1.7	Εμβαδόν επιφάνειας	345
6.1.8	Υπολογισμός μάζας	346
6.1.9	Υπολογισμός όγκων	353
6.2	Τριπλά ολοκληρώματα	355
6.2.1	Ορισμός	355
6.2.2	Ιδιότητες	358
6.2.3	Μέθοδοι υπολογισμού	360
6.2.4	Εφαρμογές των τριπλών ολοκληρωμάτων	366
6.3	Βιβλιογραφία	369
7	ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ	371
7.1	Επικαμπύλια ολοκληρώματα	371
7.1.1	Ορισμός σε διανυσματικό πεδίο	371
7.1.2	Τύπος υπολογισμού	374
7.1.3	Ιδιότητες	382
7.1.4	Σχέση επικαμπύλιου ολοκληρώματος και κλίσης	383
7.1.5	Ορισμός σε βαθμωτό πεδίο	391
7.1.6	Εφαρμογές	392
7.1.7	Σχέση επικαμπύλιου και διπλού ολοκληρώματος	399
7.2	Επιφανειακά ολοκληρώματα	402
7.2.1	Παραμετρικός ορισμός επιφάνειας	402
7.2.2	Θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο	405
7.2.3	Φυσική ερμηνεία και ορισμός	412

7.2.4	Εφαρμογές επιφανειακού ολοκληρώματος	421
7.2.5	Σχετικά θεωρήματα	428
7.3	Βιβλιογραφία	441

Σημείωση

Για τα Μαθήματα που αναφέρονται στη Γραμμική Άλγεβρα και τα Γραμμικά Συστήματα, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο Μάθημα

ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι Κεφάλαιο 6

που είναι αναρτημένο στο e-class του Τμήματος Ναυπηγών Μηχανικών Τ.Ε.

Web site: <https://eclass.teiath.gr/courses/MDP102/>

Μάθημα 1

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

1.1 Εισαγωγικές έννοιες

Στο μάθημα αυτό θα γίνει μια γενίκευση της ήδη γνωστής στον αναγνώστη έννοιας της πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής σε **δύο**, αντίστοιχα **τρεις** μεταβλητές.¹

1.1.1 Ορισμοί

Ορισμός 1.1.1 - 1 (συνάρτησης πολλών μεταβλητών) Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$, αντίστοιχα $D \subseteq \mathbb{R}^3$ και $T \subseteq \mathbb{R}$ δύο τυχόντα μη κενά σύνολα. Τότε μία συνάρτηση δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών με πεδίο ορισμού το D και πεδίο τιμών το T είναι μία **μονοσήμαντη** απεικόνιση, έστω f , του συνόλου

¹Βλέπε επίσης βιβλιογραφία [3, 4].

D στο T , τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} D \ni (x, y) &\longrightarrow f(x, y) = w \in T, \\ &\text{αντίστοιχα} \\ D \ni (x, y, z) &\longrightarrow f(x, y, z) = w \in T. \end{aligned} \quad (1.1.1 - 1)$$

Τα x, y , αντίστοιχα x, y, z είναι στην περίπτωση αυτή οι ανεξάρτητες μεταβλητές ή απλά για ευκολία στο εξής μεταβλητές ή επίσης όπως επίσης λέγεται τα στοιχεία (arguments) της f , ενώ η w είναι η εξαρτημένη μεταβλητή. Όμοια, όπως και στην περίπτωση της μιας μεταβλητής, η f ορίζει τον **τύπο** της συνάρτησης, δηλαδή περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η παραπάνω απεικόνιση.

Ο προσδιορισμός του πεδίου ορισμού D γίνεται όπως και στην περίπτωση της συνάρτησης με μία μεταβλητή, με τη διαφορά ότι προσδιορίζονται οι τιμές για τις οποίες ορίζεται η f για κάθε μεταβλητή x, y , αντίστοιχα x, y, z χωριστά και στη συνέχεια το D ως η ένωση των επιμέρους πεδίων ορισμού. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού D θα συμβολίζεται στο εξής με $f|D$ ή αναλυτικά $f(x, y)|D$, αντίστοιχα $f(x, y, z)|D$. Τα πεδία ορισμού και τιμών είναι μια **καμπύλη επιφάνεια** ή γενικότερα μια **τριδιάστατη περιοχή** του χώρου.

Έστω $w = f(x, y)|D$, αντίστοιχα $w = f(x, y, z)|D$. Τότε η γραφική παράσταση της f θα είναι το σύνολο των σημείων

$$\{((x, y), w) \in D \times T, \text{ αντίστοιχα } ((x, y, z), w) \in D \times T.\}$$

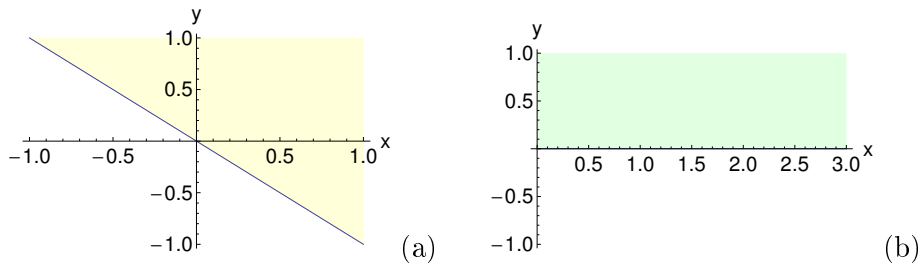
Παράδειγμα 1.1.1 - 1

Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

$$f_1(x, y) = \sqrt{x+y}, \quad f_2(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \text{και} \quad f_3(x, y) = \ln(4 - x^2 - 4y^2).$$

Λύση. Επειδή από τον τύπο της f_1 πρέπει να προκύπτει πραγματικός αριθμός, το πεδίο ορισμού D_1 θα είναι

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}.$$



Σχήμα 1.1.1 - 1: Παράδειγμα 1.1.1 - 1: (a) το πεδίο ορισμού $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0, \}$ της συνάρτησης $f_1(x, y) = \sqrt{x + y}$. Η μπλε ευθεία έχει εξίσωση $x + y = 0$. (b) Το πεδίο ορισμού $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ της $f_2(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Γραφικά το D_1 ορίζεται από το σύνολο των σημείων του επιπέδου που βρίσκονται στο άνω μέρος της ευθείας $x + y = 0$ (Σχ. 1.1.1 - 3a).²

Όμοια το πεδίο ορισμού D_2 της f_2 θα είναι

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\},$$

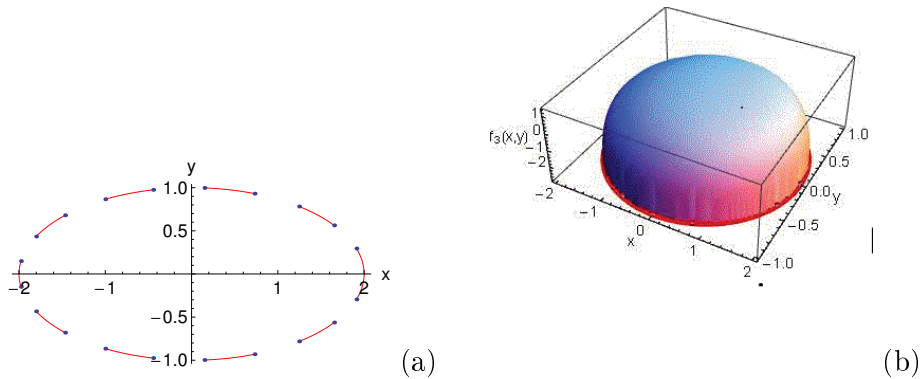
δηλαδή το 1ο τεταρτημόριο του Σχ. 1.1.1 - 3b.

Τέλος, επειδή η λογαριθμική συνάρτηση ορίζεται μόνο για θετικές τιμές της μεταβλητής της, για το πεδίο ορισμού D_3 της f_3 πρέπει $4 - x^2 - 4y^2 > 0$ ή $1 > \frac{x^2}{4} + y^2$, οπότε

$$D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 < 1\},$$

δηλαδή το πεδίο ορισμού είναι το εσωτερικό της έλλειψης με εξίσωση $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (Σχ. 1.1.1 - 2a). Στο Σχ. 1.1.1 - 2b δίνεται η γραφική παράσταση της f_3 . ■

²Υπενθυμίζεται ότι η ανισότητα $Ax + By + \Gamma > 0$ λύνεται γραφικά, όταν χαραχθεί η ευθεία $\varepsilon : Ax + By + \Gamma = 0$ και θεωρήσουμε το σύνολο των σημείων $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, που είναι στο άνω μέρος της ε .



Σχήμα 1.1.1 - 2: Παράδειγμα 1.1.1 - 1: (a) το πεδίο ορισμού $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 < 1\}$ της συνάρτησης $f_3(x, y) = \ln(4 - x^2 - 4y^2)$. Η διακεκομμένη κόκκινη καμπύλη είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. (b) Η γραφική παράσταση της $f_3(x, y)$. Η κόκκινη καμπύλη δεν συμπεριλαμβάνεται στο διάγραμμα.

Παράδειγμα 1.1.1 - 2

Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x, y) = \sin^{-1} x + \sqrt{xy}.$$

Λύση. Έστω

$$f_1(x, y) = \sin^{-1} x \quad \text{και} \quad f_2(x, y) = \sqrt{xy}.$$

Τότε, όπως είναι ήδη γνωστό από το Μάθημα *Πραγματικές Συναρτήσεις*, στη συνάρτηση $\sin x$, όταν το πεδίο ορισμού περιοριστεί στο $[-\pi/2, \pi/2]$, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $\sin^{-1} x$ ή $\arcsin x$ και έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$, δηλαδή το πεδίο τιμών της $\sin x$. Επομένως το πεδίο ορισμού D_1 της f_1 είναι

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}.$$

Η συνάρτηση

$$f_2(x, y) = \sqrt{xy}$$

ορίζεται, όταν $xy \geq 0$, δηλαδή, όταν τα x, y είναι ομόσημα. Άρα λαμβάνοντας υπόψη και το D_1 το πεδίο ορισμού της f θα είναι $D_f = D_2 \cup D_3$, όταν

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, \quad y \leq 0\} \text{ και}$$

$$D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad y \geq 0\}.$$

■

Παράδειγμα 1.1.1 - 3

Όμοια το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

$$f(x, y) = \sqrt{x+y} \quad \text{και} \quad g(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

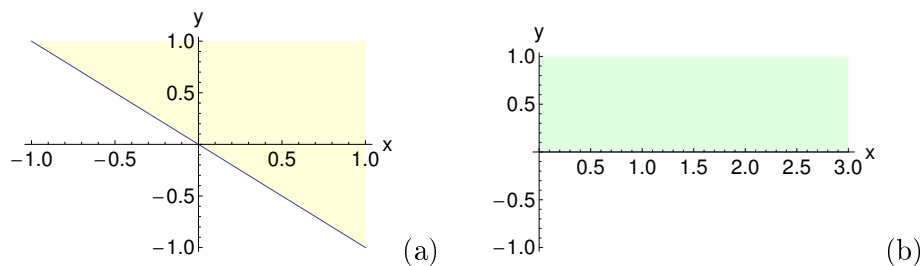
Λύση. Έστω D_f το πεδίο ορισμού της f , αντίστοιχα D_g της g . Τότε προφανώς είναι

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x + y \geq 0 \quad (\text{Σχ. 1.1.1 - 3a}) \},$$

αντίστοιχα

$$D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 0 \text{ και } y \geq 0 \quad (\text{Σχ. 1.1.1 - 3b}) \}.$$

■



Σχήμα 1.1.1 - 3: Παράδειγμα 1.1.1 - 4: (a) το πεδίο ορισμού $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x + y \geq 0\}$ της συνάρτησης $f(x, y) = \sqrt{x+y}$. Η μπλε ευθεία έχει εξίσωση $x + y = 0$ και (b) το πεδίο ορισμού $D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$ της $g(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Παράδειγμα 1.1.1 - 4

Όμοια των συναρτήσεων

$$f(x, y, z) = \ln(x - y + 4z) \quad \text{και} \quad g(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9}}.$$

Λύση. Επειδή η λογαριθμική συνάρτηση ορίζεται μόνο για θετικές τιμές της μεταβλητής της, το πεδίο ορισμού D_f της f θα είναι

$$D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 4z > 0\},$$

δηλαδή πρόκειται για το άνω μέρος του επιπέδου π με εξίσωση

$$\pi : x - y + 4z = 0.$$

Υπενθυμίζεται στο σημείο αυτό από το Μάθημα *Αναλυτική Γεωμετρία* ότι η γενική μορφή της εξίσωσης του επιπέδου είναι

$$ax + by + cz = d, \quad (1.1.1 - 2)$$

που, όταν λυθεί ως προς z , ισοδύναμα γράφεται και

$$z = f(x, y) = Ax + By + D. \quad (1.1.1 - 3)$$

Η γραφική παράσταση ενός επιπέδου γενικά γίνεται με τον προσδιορισμό των σημείων τομής του επιπέδου με τους άξονες συντεταγμένων. Τότε ενώνοντας τα τρία παραπάνω σημεία τομής το δημιουργούμενο τρίγωνο δείχνει και τη μορφή του επιπέδου. Για παράδειγμα, έστω ότι ζητείται η γραφική παράσταση του επιπέδου $3x + 4y + z = 12$, που είναι της μορφής (1.1.1 - 2) και σύμφωνα με την (1.1.1 - 3) ισοδύναμα γράφεται

$$z = 12 - 3x - 4y, \quad \text{δηλαδή} \quad f(x, y) = 12 - 3x - 4y. \quad (1.1.1 - 4)$$

Τότε θέτοντας στην (1.1.1 - 4) $x = y = 0$ προσδιορίζεται ότι το σημείο τομής του επιπέδου με τον z -άξονα είναι το $(0, 0, 12)$. Όμοια το σημείο τομής με τον x -άξονα είναι το $(4, 0, 0)$ και με τον y -άξονα το $(0, 3, 0)$.

Η ανισότητα $ax + by + cz > 0$ λύνεται γραφικά, όταν αρχικά γίνει η γραφική παράσταση του επιπέδου

$$\pi : ax + by + cz = 0$$

και στη συνέχεια θεωρηθεί το σύνολο των σημείων $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, που είναι στο άνω μέρος του π .

Το πεδίο ορισμού D_g της g , λόγω της τετραγωνικής ρίζας και του παρονομαστή, θα είναι

$$D_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 9\},$$

δηλαδή το εσωτερικό της σφαίρας με κέντρο το σημείο $(0, 0, 0)$ και ακτίνα $R = 3$. ■

Από το Παράδειγμα 1.1.1 - 4 προκύπτει ότι στις περιπτώσεις συναρτήσεων τριών μεταβλητών το πεδίο ορισμού είναι ή μια επιφάνεια - περίπτωση πεδίου ορισμού D_f - ή ένας όγκος - πεδίο ορισμού D_g . Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, έστω f , στην περίπτωση αυτή είναι δυνατόν να γίνει από το διάγραμμα του πεδίου τιμών T των σημείων, δηλαδή του συνόλου $T = \{f(x, y, z) \mid (x, y, z) \in D\}$, όταν D το πεδίο ορισμού της f και είναι γενικά μια επιφάνεια ή και ένας όγκος του χώρου των τριών διαστάσεων.

Άσκηση

Των παρακάτω συναρτήσεων να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού και να γίνει η γραφική παράσταση:

- | | |
|--|---------------------------------|
| i) $(4 - x^2 - y^2)^{1/2}$ | v) $1/\ln(x + y + z)$, |
| ii) $\ln(x - y)$ | vi) $\tan^{-1} y + \sqrt{xy}$, |
| iii) $(9 - x^2)^{1/2} + (4 - y^2)^{1/2}$ | vii) $\ln(xyz)$, |
| iv) $\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ | viii) $\ln(x^2 + y^2 - z^2)$. |

Απαντήσεις

- (i) $x^2 + y^2 \geq 0$, (ii) $x - y > 0$, (iii) $-3 \leq x \leq 3$ και $-2 \leq y \leq 2$, (iv) $y \leq x$ και $x \neq 0$, (v) $x + y + z > 0$ και $x + y + z \neq 1$, (vi) $xy \geq 0$, (vii) $xyz > 0$, (viii) $x^2 + y^2 > z^2$.

1.1.2 Σύγκλιση συναρτήσεων δύο και τριών μεταβλητών

Ορισμός 1.1.2 - 1 (δύο μεταβλητών). Έστω η συνάρτηση $f(x, y)$ με πεδίο ορισμού $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Τότε θα είναι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = l, \quad (1.1.2 - 1)$$

τότε και μόνον όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε

$$|f(x, y) - l| < \varepsilon \quad \text{για κάθε } (x, y) \in D, \quad \text{και} \\ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

Ορισμός 1.1.2 - 2 (τριών μεταβλητών). Έστω η συνάρτηση $f(x, y, z)$ με πεδίο ορισμού $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Τότε θα είναι

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = l, \quad (1.1.2 - 2)$$

τότε και μόνον όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε

$$|f(x, y, z) - l| < \varepsilon \quad \text{για κάθε } (x, y, z) \in D, \quad \text{και} \\ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta.$$

Σχετικά με τη διαδικασία υπολογισμού των επιμέρους οριακών τιμών στην περίπτωση του Ορισμού 1.1.2 - 1 ισχύει η παρακάτω πρόταση:³

Πρόταση 1.1.2 - 1. Έστω η συνάρτηση $f(x, y)$ με $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό σύνολο και σημείο $(x_0, y_0) \in D$. Αν

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = l$$

³Ανάλογη πρόταση ισχύει και για την περίπτωση του Ορισμού 1.1.2 - 2 (βλέπε βιβλιογραφία).

και υπάρχουν στο \mathbb{R} οι οριακές τιμές

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \quad \text{και} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y),$$

τότε

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right] \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right] = l. \end{aligned} \tag{1.1.2 - 3}$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε, όπως αυτό προκύπτει από το παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 1.1.2 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y} \text{ με πεδίο ορισμού } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ με } (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

Τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - y}{x + y} = \begin{cases} \frac{0 - y}{0 + y} = -1 & \alpha \nu \quad y \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x + 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x'}{x'} = 1 & \alpha \nu \quad y = 0, \end{cases}$$

ενώ

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x - y}{x + y} = \begin{cases} \frac{x - 0}{x + 0} = 1 & \alpha \nu \quad x \neq 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - y}{0 + y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y'}{y'} = -1 & \alpha \nu \quad x = 0, \end{cases}$$

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right] = 1, \quad \text{αντίστοιχα} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right] = -1,$$

οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.2 - 1 το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

Σημειώσεις 1.1.2 - 1

Ανάλογα με τις ιδιότητες των ορίων των συναρτήσεων μιας μεταβλητής ισχύει ότι:

- το όριο εφόσον υπάρχει, είναι μοναδικό,
- το όριο του αθροίσματος, της διαφοράς και του γινομένου ισούται με το άθροισμα των ορίων, της διαφοράς και του γινομένου. Όμοια του πηλίκου, όταν το όριο του παρονομαστή είναι διάφορο του μηδενός, ισούται με το πηλίκο των ορίων.

Άσκηση

Να υπολογιστούν οι οριακές τιμές των παρακάτω συναρτήσεων στο σημείο $(0, 0)$

$$i) \frac{x - y^2}{x + y^2}$$

$$iv) \frac{x - 2y}{x + y}$$

$$ii) \frac{|xy|}{xy}$$

$$v) \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}$$

$$iii) \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$vi) (1 + y) \frac{\sin^2 x}{x}.$$

Απαντήσεις

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = -1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1,$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 1, \text{ όταν τα } x, y \text{ ομόσημα και } -1, \text{ όταν ετερόσημα,}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \frac{1}{y}, \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0,$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = -2, \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1,$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = x,$$

$$(vi) \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \frac{\sin^2 x}{x}.$$

1.1.3 Συνέχεια συναρτήσεων δύο και τριών μεταβλητών

Ανάλογα με την Παράγραφο 1.1.2 δίνεται και στην περίπτωση αυτή ο ορισμός της συνέχειας μιας συνάρτησης δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών.

Ορισμός 1.1.3 - 1 (συνέχειας). Μία συνάρτηση $f(x, y)$, αντίστοιχα $f(x, y, z)$ με πεδίο ορισμού, έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$, αντίστοιχα $D \subseteq \mathbb{R}^3$, θα είναι συνεχής στο σημείο $(x_0, y_0) \in D$, αντίστοιχα $(x_0, y_0, z_0) \in D$ τότε και μόνον, όταν

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

αντίστοιχα

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0).$$

Οι παραπάνω οριακές τιμές υπολογίζονται σύμφωνα με τους Ορισμούς 1.1.2 - 1, αντίστοιχα 1.1.2 - 2.

Παράδειγμα 1.1.3 - 1

Η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $(0, 0)$, επειδή με ανάλογους υπολογισμούς με εκείνους του Παραδείγματος 1.1.2 - 1 προκύπτει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right] = 0, \quad \text{αντίστοιχα} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right] = 0,$$

οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.2 - 1 είναι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0,$$

δηλαδή υπάρχει η οριακή τιμή και ισούται με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα 1.1.3 - 2

Η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + y^2} & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$. Η λύση, που προκύπτει με υπολογισμούς ανάλογους των Παραδειγμάτων 1.1.2 - 1 και 1.1.3 - 1, αφήνεται ως άσκηση.

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Οι παρακάτω προτάσεις που αναφέρονται στις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων δύο μεταβλητών αποτελούν μια γενίκευση των αντίστοιχων του Μαθήματος *Συνέχεια Συνάρτησης*, που αναφέρεται σε συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Πρόταση 1.1.3 - 1. Αν $f, g|D$ συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο $(x_0, y_0) \in D$, τότε και οι συναρτήσεις $f \pm g$ και fg είναι συνεχείς στο σημείο $(x_0, y_0) \in D$.

Πρόταση 1.1.3 - 2. Αν $f, g|D$ συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο $(x_0, y_0) \in D$ και $f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, τότε υπάρχει περιοχή $\varpi(x_0, y_0)$, τέτοια ώστε $f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ για κάθε $x \in \varpi(x_0, y_0)$, οπότε η συνάρτηση $1/f$ έχει έννοια για κάθε $x \in D \cap \varpi(x_0, y_0)$ και είναι συνεχής στο σημείο $(x_0, y_0) \in D$.

Σημειώσεις 1.1.3 - 1

- Ανάλογες προτάσεις ισχύουν και στην περίπτωση συναρτήσεων τριών μεταβλητών.
- Οι πολυωνυμικές και οι ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς συναρτήσεις στα πεδία ορισμού των. Όμοια οι εκθετικές, τριγωνομετρικές, υπερβολικές και οι αντίστροφες αυτών συναρτήσεις.

Άσκηση

Να εξεταστούν ως προς τη συνέχεια οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$\begin{array}{ll}
 i) \quad \sin(x+y) & iv) \quad \frac{x}{x^2+y^2} \\
 ii) \quad \ln(x^2+y^2+z^2) & v) \quad \frac{x+y}{1-\cos x} \\
 iii) \quad \frac{x+y}{x-y} & vi) \quad \frac{1}{x+y}.
 \end{array}$$

Απαντήσεις

- (i) συνεχής στο \mathbb{R}^2 , (ii) όμοια, (iii) συνεχής στο \mathbb{R}^2 με $x \neq y$,
 (iv) συνεχής στο \mathbb{R}^2 , (v) συνεχής στο \mathbb{R}^2 με $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$,
 (vi) συνεχής στο \mathbb{R}^2 με $x \neq -y$.

1.2 Μερική παράγωγος

1.2.1 Ορισμοί

Ο γνωστός ορισμός της παραγώγου συνάρτησης μιας μεταβλητής⁴ επεκτείνεται και στην περίπτωση μιας συνάρτησης δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών για κάθε μεταβλητή χωριστά θεωρώντας όλες τις άλλες μεταβλητές ως σταθερές και λέγεται μερική παράγωγος της συνάρτησης ως προς τη θεωρούμενη μεταβλητή.

Συγκεκριμένα έχουμε:

⁴ **Ορισμός** παραγώγου συνάρτησης μιας μεταβλητής: έστω η συνάρτηση $f|D$, όπου $D \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα και σημείο $x_0 \in D$. Τότε για κάθε $x \in D - \{x_0\}$ με τον τύπο $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ορίζεται μία συνάρτηση, που λέγεται πηλίκο διαφορών ή κλίση της f στο σημείο x_0 . Θα λέγεται ότι η f παραγωγίζεται στο σημείο $x_0 \in D$ και θα συμβολίζεται αυτό με $f'(x_0)$ τότε και μόνον, όταν υπάρχει η οριακή τιμή:

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.
 \end{aligned}$$

Ορισμός 1.2.1 - 1 (μερική παράγωγος). Έστω μια συνάρτηση $f|S$ όπου S ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 , αντίστοιχα του \mathbb{R}^3 και σημείο $(x_0, y_0) \in S$, αντίστοιχα $(x_0, y_0, z_0) \in S$. Τότε ορίζεται ως 1ης τάξης μερική παράγωγος (partial derivative) της f ως προς τη μεταβλητή x στο σημείο (x_0, y_0) , αντίστοιχα (x_0, y_0, z_0) , η παρακάτω οριακή, εφόσον υπάρχει, τιμή:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = f_x(x_0, y_0) = D_x f(x_0, y_0) \quad (1.2.1 - 1)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

αντίστοιχα

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = f_x(x_0, y_0, z_0) = D_x f(x_0, y_0, z_0) \quad (1.2.1 - 2)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}.$$

Παρατηρήσεις 1.2.1 - 1

- Η οριακή τιμή (1.2.1 - 1), αντίστοιχα (1.2.1 - 2) είναι, όπως και στην περίπτωση της μιας μεταβλητής, πραγματικός αριθμός.
- Το σύμβολο (τελεστής)

$$\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x = D_x$$

δηλώνει 1ης τάξης μερική (partial) παράγωγο ως προς τη μεταβλητή ή συνιστώσα x , σε διάκριση με τον γνωστό συμβολισμό

$$D = D^1 = \frac{d}{dx}$$

για μια μεταβλητή.

- Όμοια ορίζονται οι μερικές παράγωγοι ως προς τις άλλες μεταβλητές.

Σημειώσεις 1.2.1 - 1

- i) Ανάλογα με την περίπτωση της παραγώγου μιας μεταβλητής η μερική παράγωγος μιας συνάρτησης, έστω f , ως προς μια μεταβλητή της x σε ένα σημείο x_0 , θα ορίζει τον **συντελεστή μεταβολής** της f στο σημείο αυτό κατά τον x -άξονα και γεωμετρικά θα ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας ή διαφορετικά με τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας του διαγράμματος της συνάρτησης στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.
Όμοια για τις άλλες μεταβλητές.
- ii) Οι συντελεστές μεταβολής των μεταβλητών στην περίπτωση (i) είναι δυνατόν να είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, δηλαδή να έχουμε ταχύτερη μεταβολή ως προς x σε σύγκριση με τη μεταβολή ως προς y , κ.λπ.
- iii) Όπως και στην περίπτωση της παραγώγου συνάρτησης μιας μεταβλητής αν για τη μερική παράγωγο μιας συνάρτησης, έστω την f_x , ισχύει ότι:
- $f_x(x_0, f(x_0)) = 0$, τότε η εφαπτομένη ευθεία στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι **παράλληλη** στη διεύθυνση του x -άξονα, ενώ, αν
 - $f_x(x_0, f(x_0)) = +\infty$, τότε η εφαπτομένη ευθεία στο $(x_0, f(x_0))$ είναι **κάθετη** στον x -άξονα.

Παράγωγοι ανώτερης τάξης

Ορισμός 1.2.1 - 2 (μερική παράγωγος). Έστω μια συνάρτηση $f|S$ όπου S ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 , αντίστοιχα του \mathbb{R}^3 και σημείο $(x_0, y_0) \in S$, αντίστοιχα $(x_0, y_0, z_0) \in S$. Τότε, αν η 1ης τάξης μερική παράγωγος της f ως προς τη μεταβλητή, έστω x , υπάρχει για κάθε $(x_0, y_0) \in S$, αντίστοιχα $(x_0, y_0, z_0) \in S$, τότε ορίζεται η μερική παράγωγος f_x στο S .

Ανάλογος ορισμός ισχύει και για τις μεταβλητές y και z .

Έστω η συνάρτηση $f|S$. Αν υπάρχει η 1ης τάξης μερική παράγωγος της f , έστω ως προς x , τότε ορίζεται η 2ης τάξης μερική παράγωγος της f στο x ως εξής:

$$f_{xx} = f_{2x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (1.2.1 - 3)$$

όπου όμοια το σύμβολο

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \partial_x x = \partial_{2x} = D_{xx}$$

δηλώνει 2ης τάξης μερική παράγωγο ως x .

Όμοια ορίζονται οι 3ης, 4ης και γενικά η ν -τάξης μερική παράγωγος της f στο x ως εξής:

$$\begin{aligned} f_{xxx} &= f_{3x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right), \\ f_{xxxx} &= f_{4x} = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right), \quad \text{και γενικά} \\ f_{\nu x} &= \frac{\partial^\nu f}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{\nu-1} f}{\partial x^{\nu-1}} \right). \end{aligned} \quad (1.2.1 - 4)$$

Επίσης ορίζονται οι παράγωγοι των παρακάτω μορφών

$$\begin{aligned} f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \\ f_{xxy} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \\ f_{xyy} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right), \quad \text{κ.λπ.} \end{aligned} \quad (1.2.1 - 5)$$

Οι παράγωγοι αυτές λέγονται πολλές φορές **ανάμεικτες** ή και **επάλληλες**.

Παρατήρηση 1.2.1 - 1

Οι παράγωγοι $f_x, f_{xx}, \dots, f_{\nu x}$ είναι συναρτήσεις, ενώ οι αντίστοιχες παράγωγοι των στο σημείο (x_0, y_0) , αντίστοιχα (x_0, y_0, z_0) είναι πραγματικοί αριθμοί. Ανάλογη παρατήρηση ισχύει και για τις μεταβλητές y και z . Ανάλογη παρατήρηση ισχύει για τις επάλληλες παραγώγους.

Σημείωση 1.2.1 - 1

Στην περίπτωση των επάλληλων παραγώγων η παραγωγή αρχίζει από τον δεξιό δείκτη, δηλαδή αν για παράδειγμα ζητείται η μερική παράγωγος f_{xy} , τότε η σειρά παραγωγίσης είναι: f_y και στη συνέχεια η παράγωγός της f_y ως προς x , δηλαδή

$$f_{xy} = (f_y)_x.$$

1.2.2 Υπολογισμός παραγώγων**Κανόνες παραγωγίσης**

⁵Οι γνωστοί κανόνες παραγωγίσης των συναρτήσεων μιας μεταβλητής ισχύουν και στην περίπτωση της μερικής παραγωγού.

Κρίνεται σκόπιμο στο σημείο αυτό να γίνει μια υπενθύμιση με τη μορφή προτάσεων των παρακάτω κανόνων παραγωγίσης των συναρτήσεων μιας μεταβλητής:

Πρόταση (παράγωγος σταθεράς συνάρτησης). Έστω η συνάρτηση $f | \mathbb{R}$ όπου $f(x) = c$ σταθερά για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε

$$f'(x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Πρόταση (παράγωγος αθροίσματος). Έστω ότι οι συναρτήσεις $f, g | D$ είναι παραγωγίσιμες στο D . Τότε ισχύει

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad \text{για κάθε } x \in D.$$

Η ιδιότητα γενικεύεται.

Πρόταση (παράγωγος γινομένου). Έστω ότι οι συναρτήσεις $f, g | D$ είναι παραγωγίσιμες στο D . Τότε ισχύει

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{για κάθε } x \in D.$$

⁵Βλέπε Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 6.

Όμοια η ιδιότητα γενικεύεται.

Επειδή προφανώς ισχύει $(\lambda f(x))' = \lambda f'(x)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά από τις παραπάνω προτάσεις προκύπτει τελικά η παρακάτω **γραμμική ιδιότητα**:

$$(kf(x) + \lambda g(x))' = kf'(x) + \lambda g'(x)$$

για κάθε $x \in D$ και $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

Πρόταση. Αν η συνάρτηση $f|D$ παραγωγίζεται στο D και επιπλέον υπάρχει $x_0 \in D$, έτσι ώστε $f'(x_0) \neq 0$, τότε

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'_{x=x_0} = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$

Πρόταση (παράγωγος πηλίκου). Έστω ότι οι συναρτήσεις $f, g|D$ είναι παραγωγίσιμες στο D και επιπλέον $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in D$. Τότε ισχύει

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{για κάθε } x \in D.$$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση f δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών. Αν η f θεωρηθεί ως συνάρτηση μόνον της μεταβλητής x , ενώ οι άλλες μεταβλητές ως σταθερές, τότε προκύπτει ο παρακάτω κανόνας παραγωγίσιμης σύνθετης συνάρτησης:

Θεώρημα 1.2.2 - 1 (παράγωγος σύνθετης συνάρτησης).

Έστω οι συναρτήσεις

$$y = f(w)|D_1 \quad \text{και} \quad w = g(x)|D_2 \quad \text{όπου} \quad g(D_2) \subseteq D_1$$

και D_1, D_2 ανοικτά διαστήματα και η προκύπτουσα σύνθετη συνάρτηση

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{για κάθε } x \in D_2.$$

Έστω επίσης ότι για ένα σημείο $x_0 \in D_2$ υπάρχει η παράγωγος $g'(x_0) = w'_0$ και η αντίστοιχη $y'_0 = f'(w_0)$ στο σημείο $w_0 = g(x_0)$ με $w_0 \in D_1$. Τότε υπάρχει και η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης $h(x)|D_2$ στο σημείο $x_0 \in D_2$ και ισχύει

$$\left.\frac{dh(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{df(w)}{dw}\right|_{w=w_0} \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = y'_0 w'_0.$$

Το θεώρημα αυτό, που είναι γνωστό ως **κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης** (chain rule) για συναρτήσεις μιας μεταβλητής, όμοια εφαρμόζεται και για τις άλλες μεταβλητές.

Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2.2 - 1, αν για κάθε $x \in D_2$ υπάρχει η παράγωγος $g'(x)$ και επιπλέον ότι για την αντίστοιχη τιμή $g(x) = w \in D_1$ υπάρχει η $f'(w) = f'(g(x))$, θα υπάρχει και η παράγωγος της $f(g(x))$ ως προς x για κάθε $x \in D_2$ και θα δίνεται από τη σχέση

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)} \frac{dg(x)}{dx} = f'_g g'_x. \quad (1.2.2 - 1)$$

Με τον τύπο 1.2.2 - 1 υπολογίζονται οι παράγωγοι των σύνθετων συναρτήσεων μιας μεταβλητής, έστω x , οι κυριότερες των οποίων δίνονται στον Πίνακα 1.2.2 - 1.

Παράδειγμα 1.2.2 - 1

Να υπολογιστούν οι 1ης τάξης μερικές παράγωγοι της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^4 + 4\sqrt{y} - 5$$

Λύση. Διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} f_x &= \left(x^4 + 4y^{1/2} - 5 \right)_x = (x^4)_x + \overbrace{\left(4y^{1/2} - 5 \right)_x}^0 \\ &= 4x^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y &= \left(x^4 + 4y^{1/2} - 5 \right)_y = 4 \overbrace{\left(y^{1/2} \right)_y}^{\frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}-1}} + \overbrace{\left(x^4 - 5 \right)_y}^0 \\ &= 2y^{-1/2}. \end{aligned}$$

■

Πίνακας 1.2.2 - 1: παραγώγων των κυριότερων σύνθετων συναρτήσεων με μεταβλητή x .

α / α	Συνάρτηση	Παράγωγος
1	$f^a(x)$	$a f'(x) f^{a-1}(x)$
2	$e^{f(x)}$	$f'(x) e^{f(x)}$
3	$\ln f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
4	$\sin f(x)$	$f'(x) \cos f(x)$
5	$\cos f(x)$	$-f'(x) \sin f(x)$
6	$\tan f(x)$	$\frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
7	$\cot f(x)$	$-\frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$
8	$\tan^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}$
9	$\sin^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}$
10	$\cos^{-1} f(x)$	$-\frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}$
11	$\sinh f(x)$	$f'(x) \cosh f(x)$
12	$\cosh f(x)$	$f'(x) \sinh f(x)$
13	$\tanh f(x)$	$\frac{f'(x)}{\cosh^2 f(x)} = f'(x) [1 - \tanh^2 f(x)]$
14	$\coth f(x)$	$-\frac{f'(x)}{\sinh^2 f(x)} = f'(x) [1 - \coth^2 f(x)]$

Παράδειγμα 1.2.2 - 2

Όμοια της συνάρτησης

$$h(s, t) = t^2 \ln(s^2 + 1) + \frac{9}{t^3} - \sqrt[3]{s^4}.$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} h_s &= \left[t^2 \ln(s^2 + 1) + 9t^{-3} - s^{4/3} \right]_s \\ &= \left[t^2 \ln(s^2 + 1) \right]_s + 9 \overbrace{(t^{-3})}_0 - \left(s^{4/3} \right)_s \\ &= t^2 \overbrace{\left[\ln(s^2 + 1) \right]_s}^{\text{τύπος 3 του Πίνακα 1.2.2 - 1}} - \frac{4}{3} s^{\frac{4}{3}-1} \\ &= t^2 \frac{1}{s^2 + 1} \overbrace{(s^2 + 1)}^{2s}_s - \frac{4}{3} s^{1/3} \\ &= \frac{2st^2}{s^2 + 1} - \frac{4}{3} s^{1/3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_t &= \left[t^2 \ln(s^2 + 1) + 9t^{-3} - s^{4/3} \right]_t \\ &= \overbrace{\left[t^2 \ln(s^2 + 1) \right]_t}^{\ln(s^2+1)(t^2)_t} + 9 \overbrace{(t^{-3})}_0 - \left(s^{4/3} \right)_s \\ &= 2t \ln(s^2 + 1) - 27t^{-4}. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 1.2.2 - 3

Όμοια της

$$g(x, y, z) = x^2y - y^2z^3 + \sin(xy).$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}
 g_x &= [x^2y - y^2z^3 + \sin(xy)]_x \\
 &= \overbrace{(x^2y)_x}^{y(x^2)_x = y2x} - \overbrace{(y^2z^3)_x}^0 + \overbrace{[\sin(xy)]_x}^{(xy)_x \cos(xy)} \\
 &= 2xy + \overbrace{(xy)_x}^{y(x)_x = y} \cos(xy) = 2xy + y \cos(xy),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_y &= [x^2y - y^2z^3 + \sin(xy)]_y \\
 &= \overbrace{(x^2y)_y}^{x^2(y)_y = x^2} - \overbrace{(y^2z^3)_y}^{z^3(y^2)_y = z^3(2y)} + [\sin(xy)]_y \\
 &= x^2 - 2yz^3 + (xy)_y \cos(xy) \\
 &= x^2 - 2yz^3 + x \cos(xy),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_z &= [x^2y - y^2z^3 + \sin(xy)]_z \\
 &= \overbrace{(x^2y)_z}^0 - \overbrace{(y^2z^3)_z}^{y^2(z^3)_z = y^2(3z^2)} + \overbrace{[\sin(xy)]_z}^0 = -3y^2z^2.
 \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 1.2.2 - 4

Να υπολογιστούν οι 1ης και οι 2ης τάξης μερικές παράγωγοι της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = \frac{x}{y} e^{-x} + z^2.$$

Λύση. Όμοια διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned}
 f_x &= \left(\frac{x}{y} e^{-x} + z^2 \right)_x = \left(\frac{x}{y} e^{-x} \right)_x + \overbrace{\left(z^2 \right)_x}^0 \\
 &= \frac{1}{y} (x e^{-x})_x = \frac{1}{y} \left[\overbrace{\left(\frac{1}{x} \right)_x}^1 e^{-x} + x \overbrace{\left(e^{-x} \right)_x}^{(-x)_x e^{-x} = -e^{-x}} \right] \\
 &= \frac{(1-x)e^{-x}}{y},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{xx} &= [f_x(x, y, z)]_x = \left[\frac{(1-x)e^{-x}}{y} \right]_x \\
 &= \frac{1}{y} [(1-x)e^{-x}]_x = \frac{1}{y} \left[\overbrace{\left(\frac{-1}{(1-x)_x} \right)_x}^{-1} e^{-x} + (1-x) \overbrace{\left(e^{-x} \right)_x}^{-e^{-x}} \right] \\
 &= \frac{(x-2)e^{-x}}{y},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_y &= \left(\frac{x}{y} e^{-x} + z^2 \right)_y = \left(\frac{x}{y} e^{-x} \right)_y + \overbrace{\left(z^2 \right)_y}^0 \\
 &= (x e^{-x}) \overbrace{\left(y^{-1} \right)_y}^{-y-1-1=-y^{-2}} \\
 &= -x y^{-2} e^{-x},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{yy} &= (-x e^{-x} y^{-2})_y = -x e^{-x} \overbrace{(y^{-2})_y}^{-2y^{-3}} \\ &= 2x y^{-3} e^{-x}, \end{aligned}$$

$$f_z = \left(\frac{x}{y} e^{-x} + z^2 \right)_z = \overbrace{\left(\frac{x}{y} e^{-x} \right)_z}^0 + (z^2)_z = 2z,$$

$$f_{zz} = (2z)_z = 2,$$

$$f_{xy} = (f_y)_x \quad \text{η } f_y \text{ έχει ήδη υπολογιστεί παραπάνω}$$

$$\begin{aligned} &= (-x e^{-x} y^{-2})_x \\ &= -y^{-2} (x e^{-x})_x = -\frac{1}{y^2} \left[\overbrace{(x)_x}^1 e^{-x} + x \overbrace{(e^{-x})_x}^{-e^{-x}} \right] \\ &= \frac{(x-1) e^{-x}}{y^2}, \end{aligned}$$

$$f_{yx} = (f_x)_y \quad \text{η } f_x \text{ έχει ήδη όμοια υπολογιστεί}$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{(1-x) e^{-x}}{y} \right]_y = (1-x) e^{-x} \left(\frac{1}{y} \right)_y \\ &= (1-x) e^{-x} \left(-\frac{1}{y^2} \right) = \frac{(x-1) e^{-x}}{y^2}, \quad \text{και όμοια} \end{aligned}$$

$$f_{yz} = f_{zy} = 0,$$

$$f_{xz} = f_{zx} = 0.$$

■

Σημείωση 1.2.2 - 1

Από το Παράδειγμα 1.2.2 - 4 προκύπτει ότι

$$f_{xy} = f_{yx}, \quad f_{yz} = f_{zy} \quad \text{και} \quad f_{xz} = f_{zx},$$

δηλαδή οι ανάμεικτες παράγωγοι 2ης τάξης των ίδιων ανά δύο μεταβλητών είναι ίσες.

Σχετικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1.2.2 - 2 (Schwarz). Έστω η συνάρτηση $f(x, y) | \subseteq \mathbb{R}^2$, όπου S ανοικτό σύνολο, της οποίας υπάρχουν οι 2ης τάξης μερικές παράγωγοι και είναι **συνεχείς** στο S . Τότε

$$f_{xy} = f_{yx} \quad \text{για κάθε} \quad (x, y) \in S. \quad (1.2.2 - 2)$$

Σημείωση 1.2.2 - 2

Το παραπάνω θεώρημα, που είναι επίσης γνωστό και ως θεώρημα των Schwarz-Clairaut, γενικεύεται για τρεις και περισσότερες μεταβλητές.

Παράδειγμα 1.2.2 - 5

Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \frac{y}{x + y}.$$

Να υπολογιστεί η τιμή $f_{xyy}|_{(1,0)}$.

Λύση. Αρχικά από τη Σημείωση 1.2.1 - 1, σύμφωνα με την οποία στην περίπτωση των επάλληλων παραγώγων η παραγωγή αρχίζει από τον δεξιό δείκτη, είναι

$$f_{xyy} = \frac{\partial^3 f(x, y, z)}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y^2} \right) = (f_{yy})_x. \quad (1)$$

Υπολογισμός της f_{yy} : διαδοχικά έχουμε

$$f_y = \left(\frac{y}{x + y} \right)_y = \frac{\overbrace{(y)_y}^1 (x + y) - y \overbrace{(x + y)_y}^{0+1}}{(x + y)^2} = \frac{x}{(x + y)^2},$$

$$\begin{aligned}
 f_{yy} &= \left[\frac{x}{(x+y)^2} \right]_y = x [(x+y)^{-2}]_y \\
 &= x \left[-2 \overbrace{(x+y)_y}^1 (x+y)^{-2-1} \right] \\
 &= x [-2(x+y)^{-3}] = -\frac{2x}{(x+y)^3},
 \end{aligned}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε

$$\begin{aligned}
 f_{xyy} &= \left[-\frac{2x}{(x+y)^3} \right]_x = -2 \left[\frac{x}{(x+y)^3} \right]_x \\
 &= -2 \frac{\overbrace{(x)_x}^1 (x+y)^3 - x \overbrace{[(x+y)^3]_x}^{3(x+y)_x(x+y)^{3-1}}}{(x+y)^6} \\
 &= -2 \frac{(x+y)^3 - x [3(x+y)^2]}{(x+y)^6} = \frac{2(2x-y)}{(x+y)^4}.
 \end{aligned}$$

Άρα

$$f_{xyy}|_{(1,0)} = \frac{2(2x-y)}{(x+y)^4} \Big|_{(1,0)} = \frac{2(2 \cdot 1 - 0)}{(1+0)^4} = 4.$$

■

Παράδειγμα 1.2.2 - 6

Έστω η συνάρτηση $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$. Δείξτε ότι⁶

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0. \quad (1.2.2 - 3)$$

⁶Η εξίσωση (1.2.2 - 3), που είναι γνωστή ως η **εξίσωση του Laplace** (Laplace equation), έχει σημαντικές εφαρμογές στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά (βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 4 - *Εξισώσεις Maxwell*). Η συνάρτηση f , που επαληθεύει την (1.2.2 - 3), λέγεται τότε και **αρμονική** συνάρτηση.

Λύση. Έχουμε

$$f_x = \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \right]_x \quad (1)$$

$$= -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}-1} \overbrace{(x^2 + y^2 + z^2)_x}^{2x}$$

$$= -x (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2},$$

$$f_{xx} = - \left[\overbrace{(x)_x}^1 (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \right] - x \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \right]_x$$

$$= - (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$- x \left[-\frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}-1} \overbrace{(x^2 + y^2 + z^2)_x}^{2x} \right]$$

$$= - (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + \frac{3}{2} x^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}. \quad (1)$$

Λόγω της συμμετρίας της f όμοια έχουμε

$$f_{xx} = - (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + \frac{3}{2} y^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}, \quad (2)$$

$$f_{xx} = - (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + \frac{3}{2} z^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}. \quad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) και (3) προκύπτει τελικά η (1.2.2-3). ■

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν όλες οι 1ης και 2ης τάξης μερικές παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $\sqrt{x^2 + y^2}$

v) $\frac{x}{x^2 + y^2}$

ii) $e^{-x^2 - y^2}$

vi) $\ln\left(\frac{x}{y}\right)$

iii) $\sin^2(x - y)$

vii) $\ln(x^2 - y^2)$

iv) $\frac{x}{x + y}$

viii) $\frac{x}{y + z}$

2. Αν $f(x, y, z) = \ln(xy + z)$, να υπολογιστούν οι παράγωγοι

$$f_x, f_y \text{ και } f_z$$

στο σημείο $P(1, 2, 0)$.

3. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x, y) = e^x \sin y$ είναι αρμονική.

4. Δείξτε ότι, αν $f(x, y) = \ln(x^2 + xy + y^2)$, τότε

$$x f_x + y f_y = 2.$$

5. Όμοια, αν

$$f(x, y, z) = x + \frac{x - y}{y - z}, \quad \text{τότε } f_x + f_y + f_z = 1.$$

6. Αν $x = r \cos \theta$ και $y = r \sin \theta$, να υπολογιστεί η τιμή της ορίζουσας

$$A = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix}.$$

7. Το εμβαδόν E του τραπέζιου με βάσεις a , b και ύψος h δίνεται από τον τύπο

$$E = \frac{1}{2}(a + b)h.$$

Να υπολογιστούν οι παράγωγοι E_a , E_b και E_h και στη συνέχεια να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία τους.

Απαντήσεις

$$1. \quad (i) \quad f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f_{xx} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad f_{yy} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \\ f_{xy} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

$$(ii) \quad \text{συμμετρική } f_x = -2xe^{-x^2-y^2}, \quad f_{xx} = 2(2x^2-1)e^{-x^2-y^2}, \quad f_{xy} = 4xye^{-x^2-y^2} \\ \text{κ.λπ.}$$

$$(iii) \quad f_x = \sin 2(x-y), \quad f_y = -\sin 2(x-y), \quad f_{xx} = f_{yy} = 2\cos 2(x-y), \quad f_{xy} = \\ -2\cos 2(x-y).$$

$$(iv) \quad f_x = \frac{y}{(x+y)^2}, \quad f_y = -\frac{x}{(x+y)^2}, \quad f_{xx} = -\frac{2y}{(x+y)^3}, \quad f_{yy} = \frac{2x}{(x+y)^3}, \quad f_{xy} = \frac{x-y}{(x+y)^3}.$$

$$(v) \quad f_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_{xx} = \frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}, \quad f_{yy} = -\frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}, \\ f_{xy} = \frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

$$(vi) \quad f_x = \frac{1}{x}, \quad f_y = -\frac{1}{x}, \quad f_{xx} = -\frac{1}{x^2}, \quad f_{yy} = \frac{1}{y^2}, \quad f_{xy} = 0.$$

$$(vii) \quad f_x = \frac{2x}{x^2-y^2}, \quad f_y = -\frac{2y}{x^2-y^2}, \quad f_{xx} = f_{yy} = -\frac{2(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}, \quad f_{xy} = \frac{4xy}{(x^2-y^2)^2}.$$

$$(viii) \quad f_x = \frac{1}{y+z}, \quad f_y = f_z = -\frac{x}{(y+z)^2}, \quad f_{xx} = 0, \quad f_{yy} = f_{zz} = \frac{2x}{(y+z)^3}, \quad f_{xy} = f_{xz} = \\ -\frac{1}{(y+z)^2}, \quad f_{yz} = \frac{2x}{(y+z)^3}.$$

$$2. \quad f_x(P) = 1, \quad f_y(P) = f_z(P) = \frac{1}{2}. \quad \mathbf{3 - 5.} \quad \text{Προφανείς.} \quad \mathbf{6.} \quad |A| = r. \quad \mathbf{7.} \quad E_a = \frac{1}{2}bh \\ \text{κ.λπ.}$$

1.2.3 Εφαπτόμενο επίπεδο

Είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη ότι γεωμετρικά η παράγωγος μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής,⁷ έστω f , σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας ή διαφορετικά με τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας του διαγράμματος της συνάρτησης στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Τότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο αυτό δίνεται από τον τύπο

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Επεκτείνοντας την παραπάνω γεωμετρική ερμηνεία θεωρούμε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, έστω $z = f(x, y)$, με πεδίο ορισμού το $D \subseteq \mathbb{R}^2$ και σημείο $z_0 = (x_0, y_0) \in D$ στο οποίο να υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_x(x_0, y_0)$ και $f_y(x_0, y_0)$. Τότε θεωρώντας το y σταθερό, η f_x θα είναι μια συνάρτηση

⁷Βλέπε Μάθημα Παράγωγος Συνάρτησης - Γεωμετρική σημασία παραγώγου.

της μεταβλητής x με διάγραμμα C_x , όπου σύμφωνα με τις Σημειώσεις 1.2.1 - 1 (i) η $f_x(x_0, y_0)$ θα ορίζει τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας ε_x του διαγράμματος C_x στο σημείο $f(x_0, y_0)$. Όμοια θεωρώντας το x σταθερό στην f_y , που είναι μια συνάρτηση του y με διάγραμμα C_y , η παράγωγος $f_y(x_0, y_0)$ θα ορίζει τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας ε_y του διαγράμματος C_y στο $f(x_0, y_0)$. Επομένως, όταν οι μεταβλητές (x, y) μεταβάλλονται στο D οι μερικές παράγωγοι f_x και f_y θα μεταβάλλονται στον γεωμετρικό τόπο, που ορίζεται από την τομή των ευθειών ε_x και ε_y , δηλαδή στο επίπεδο, έστω π , που οι ευθείες αυτές ορίζουν.

Το π ορίζει στην περίπτωση αυτή το **εφαπτόμενο επίπεδο** (tangent plane) της επιφάνειας $z = f(x, y)$ και η εξίσωσή του αποδεικνύεται ότι δίνεται από τον τύπο⁸

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (1.2.3 - 1)$$

Τότε η εξίσωση του αντίστοιχου **κάθετου επιπέδου** (normal plane) δίνεται από τον τύπο

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (1.2.3 - 2)$$

Παρατήρηση 1.2.3 - 1

Σύμφωνα και με τις Σημειώσεις 1.2.1 - 1 περίπτωση (iii) αν στους παραπάνω υπολογισμούς προκύψει ότι για μια μερική παράγωγος έστω την f_x , είναι $f_x(x_0, y_0) = 0$, τότε το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο στον x -άξονα, ενώ το κάθετο επίπεδο τέμνει τον x -άξονα κάθετα στο σημείο $x = x_0$.

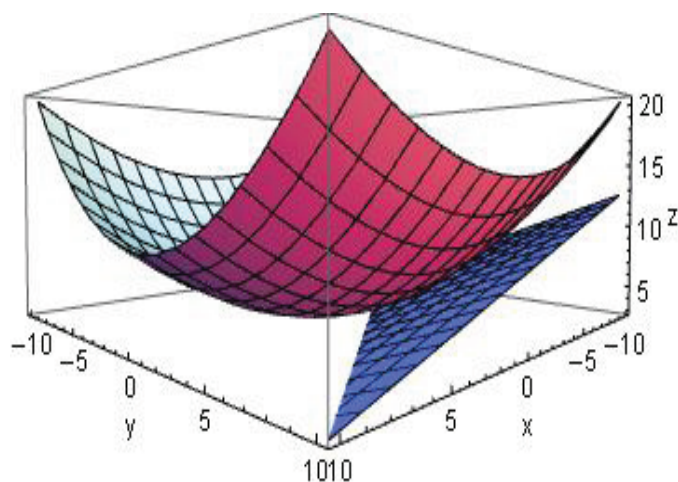
Παράδειγμα 1.2.3 - 1

Να υπολογιστεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας

$$z = f(x, y) = 3 + \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \quad \text{στο σημείο} \quad (x_0, y_0) = (-4, 3).$$

⁸Σύμφωνα και με την υποσημείωση του Παραδείγματος 1.1.1 - 4 η γενική μορφή της εξίσωσης του επιπέδου $ax + by + cz = d$, όταν λυθεί ως προς z , ισοδύναμα γράφεται

$$z = f(x, y) = Ax + By + D.$$



Σχήμα 1.2.3 - 1: Παράδειγμα 1.2.3 - 1 .

Λύση. Διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} z = f(x, y) &= 3 + \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}, & z_0 = f(4, -3) &= 5, \\ f_x(x, y) &= \frac{x}{8}, & f_x(4, -3) &= -\frac{1}{2}, \\ f_y(x, y) &= \frac{2y}{9}, & f_y(4, -3) &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με τον τύπο (1.2.3 - 1) η εξίσωση του επιπέδου θα είναι (Σχ. 1.2.3 - 1)

$$z = 5 - \frac{1}{2}(x + 4) + \frac{2}{3}(y - 3),$$

ενώ του κάθετου επιπέδου σύμφωνα με τον τύπο (1.2.3 - 2)

$$\frac{x + 4}{-\frac{1}{2}} = \frac{y - 3}{\frac{2}{3}} = \frac{z - 5}{-1},$$

δηλαδή

$$4(x + 4) = -3(y - 3) = 2(z - 5).$$

Στην περίπτωση που η εξίσωση της επιφάνειας δεν είναι της παραπάνω αναλυτικής (explicit) μορφής $z = f(x, y)$, αλλά ορίζεται πεπλεγμένα (implicit), δηλαδή είναι της μορφής $f(x, y, z) = 0$ ή διαφορετικά, όταν δεν είναι

δυνατόν να λυθεί η εξίσωση $f(x, y, z) = 0$ μονοσήμαντα ως προς z , τότε οι παραπάνω εξισώσεις για το σημείο

$$(x_0, y_0, z_0) \quad \text{με} \quad f(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

αντίστοιχα γράφονται:

εφαπτόμενο επίπεδο

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) \\ + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0, \end{aligned} \quad (1.2.3 - 3)$$

κάθετο επίπεδο

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{f_z(x_0, y_0, z_0)}. \quad (1.2.3 - 4)$$

Παρατήρηση 1.2.3 - 2

Ισχύει και στην περίπτωση αυτή ανάλογη Παρατήρηση της 1.2.3 - 1.

Παράδειγμα 1.2.3 - 2

Να υπολογιστεί η εξίσωση του εφαπτόμενου και του κάθετου επιπέδου στην επιφάνεια

$$xy - z^3 = 0 \quad \text{στο σημείο} \quad (x, y) = (1, -1).$$

Λύση. Από την εξίσωση της επιφάνειας προκύπτει ότι

$$0 = xy - z^3 \Big|_{x=1, y=-1} = -z^3 - 1, \quad \text{δηλαδή} \quad z = -1,$$

οπότε το ζητούμενο σημείο είναι το $P(1, -1, -1)$.

Άρα

$$f_x(x, y, z) = y, \quad f_x|_P = -1,$$

$$f_y(x, y, z) = x, \quad f_y|_P = 1,$$

$$f_z(x, y, z) = -3z^2, \quad f_z|_P = -3.$$

Επομένως σύμφωνα με τον τύπο (1.2.3 – 3) η εξίσωση του επιπέδου θα είναι

$$-(x - 1) + 1(y + 1) - 3(z + 1) = 0,$$

δηλαδή

$$x - y + 3z + 1 = 0,$$

ενώ του κάθετου επιπέδου σύμφωνα με τον τύπο (1.2.3 – 4)

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z + 1}{-3},$$

δηλαδή

$$1 - x = y + 1 = -\frac{1}{3}(z + 1).$$

■

Παράδειγμα 1.2.3 - 3

Όμοια η εξίσωση του εφαπτόμενου και του κάθετου επιπέδου στην επιφάνεια

$$3xy - z^3 = a^3 \quad \text{στο σημείο} \quad (x, y) = (0, a).$$

Λύση. Από την εξίσωση της επιφάνειας προκύπτει ότι

$$a^3 = 3xy - z^3 \Big|_{x=0, y=a} = -z^3, \quad \text{δηλαδή} \quad z = -a,$$

οπότε το ζητούμενο σημείο είναι το $P(0, a, -a)$.

Άρα

$$f_x(x, y, z) = 3yz, \quad f_x|_P = -3a^2,$$

$$f_z(x, y, z) = 3xy - 3z^2, \quad f_z|_P = -3a^2,$$

$$f_y(x, y, z) = 3xz, \quad f_y|_P = 0,$$

οπότε, επειδή $f_y|_P = 0$, σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.2.3 - 2 το εφαπτόμενο επίπεδο θα είναι παράλληλο στον y -άξονα, ενώ το κάθετο θα τέμνει κάθετα τον y -άξονα στο σημείο $y = a$.

Επομένως σύμφωνα με τον τύπο (1.2.3 – 3) η εξίσωση του επιπέδου θα είναι

$$-3a^2(x - 0) + 0(y - a) - 3a^2(z + a) = 0,$$

δηλαδή

$$x + z + a = 0,$$

ενώ του κάθετου επιπέδου σύμφωνα με τον τύπο (1.2.3 – 4)

$$\frac{x - 0}{-3a^2} = \frac{z + a}{-3a^2},$$

δηλαδή

$$x - z - a = 0.$$

■

Άσκηση

Να υπολογιστεί η εξίσωση του εφαπτόμενου και του κάθετου επιπέδου στις παρακάτω επιφάνειες:

i) $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$ στο σημείο $(1, -1)$,

ii) $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ στο σημείο $(1, 1)$,

iii) $f(x, y, z) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8}$ στο σημείο $(4, 3, 4)$,

iv) της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ στο σημείο $(R \cos t, R \sin t, R)$.

Απαντήσεις

(i) $f(1, -1) = \frac{1}{e^2}$, εφαπτόμενο επίπεδο: $4x - 2y - 5 = 0$, κάθετο $-\frac{1}{e^2}(x - 1) =$

$\frac{1}{e^2}(y + 1) = \frac{1}{e^2} - z$,

(ii) $f(1, 1) = \frac{\pi}{4}$, εφαπτόμενο επίπεδο: $2x - 2y + \pi = 0$, κάθετο $2(x - 1) = 2(1 - y) =$

$\frac{1}{4}(\pi - 4z)$,

(iii) εφαπτόμενο επίπεδο: $3x + 4y - 6z = 0$, κάθετο $2(x - 4) = \frac{3}{2}(y - 3) = 4 - z$,

(iv) εφαπτόμενο επίπεδο: $x \cos t + y \sin t - z = 0$, κάθετο $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{R \cos t} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{xt}{R \sin t} - 1\right) =$

$\frac{R - z}{2R}$.

1.2.4 Η έννοια του διαφορικού

Είναι ήδη γνωστό ότι το διαφορικό 1ης τάξης μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής, έστω $f(x)|D$, συμβολίζεται με $df(x)$ και ορίζεται από τον τύπο

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Η έννοια του διαφορικού 1ης τάξης για την περίπτωση συναρτήσεων δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών ορίζεται ανάλογα ως εξής:

Ορισμός 1.2.4 - 1 (διαφορικό) Έστω ότι $f(x, y)|S \subseteq \mathbb{R}^2$, αντίστοιχα $f(x, y, z)|S \subseteq \mathbb{R}^3$, όπου S ανοικτό σύνολο, είναι μία συνάρτηση δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών, της οποίας υποτίθεται ότι υπάρχουν στο S οι f_x, f_y , αντίστοιχα οι f_x, f_y, f_z .

Τότε το διαφορικό 1ης τάξης της f ορίζεται ως

$$df(x, y) = f_x dx + f_y dy, \quad \text{αντίστοιχα} \quad (1.2.4 - 1)$$

$$df(x, y, z) = f_x dx + f_y dy + f_z dz. \quad (1.2.4 - 2)$$

Αποδεικνύεται στην Ανάλυση ότι η ύπαρξη όλων των μερικών παραγώγων μιας συνάρτησης και η συνέχεια αυτών, συνεπάγονται πάντοτε την ύπαρξη του διαφορικού της συνάρτησης.

Υποθέτοντας ότι υπάρχουν στο S και όλες οι 2ης και 3ης τάξης παράγωγοι της f αποδεικνύεται ότι

$$d^2f(x, y) = f_{xx} dx^2 + 2f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2 \quad (1.2.4 - 3)$$

$$d^3f(x, y) = f_{xxx} dx^3 + 3f_{xxy} dx^2 dy + 3f_{xyy} dx dy^2 + f_{yyy} dy^3 \quad \text{κ.λπ.} \quad (1.2.4 - 4)$$

Ανάλογοι τύποι ισχύουν για την περίπτωση συναρτήσεων τριών μεταβλητών, δηλαδή

$$d^2f(x, y, z) = f_{xx} dx^2 + f_{yy} dy^2 + f_{zz} dz^2 + 2(f_{xy} dx dy + f_{yz} dy dz + f_{zx} dz dx), \quad \text{κ.λπ.} \quad (1.2.4 - 5)$$

Παράδειγμα 1.2.4 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = x^2 y^3.$$

Τότε

$$f_x = 2xy^3 \quad \text{και} \quad f_y = 3x^2 y^2,$$

οπότε σύμφωνα με την (1.2.4 - 1) θα είναι

$$df(x, y) = 2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy.$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (2xy^3)_x = 2y^3, & f_{yy} &= (3x^2 y^2)_y = 6x^2 y, & \text{και} \\ f_{xy} &= (f_y)_x = (3x^2 y^2)_x = 6xy^2, \end{aligned}$$

οπότε από την (1.2.4 - 2) προκύπτει

$$d^2 f = 2y^3 dx^2 + 6xy^2 dx dy + 6x^2 y dy^2.$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν τα διαφορικά 1ης και 2ης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων:

$$i) \quad x^3 + y^3 - xy \qquad \qquad \qquad iii) \quad \ln(x + y - z)$$

$$ii) \quad z \sin(x - y) \qquad \qquad \qquad iv) \quad z e^{x-y}.$$

Απαντήσεις

$$(i) \quad f_x = 3x^2 - y, \quad f_y = -x + 3y^2, \quad f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = -1, \quad f_{yy} = 6y,$$

$$(ii) \quad f_x = z \cos(x - y), \quad f_y = -z \cos(x - y), \quad f_z = \sin(x - y), \quad f_{xx} = -z \sin(x - y),$$

$$f_{yy} = -z \sin(x - y), \quad f_{zz} = 0, \quad f_{xy} = z \sin(x - y), \quad f_{yz} = -\cos(y - z), \quad f_{xz} = \cos(x - y),$$

$$(iii) \quad f_x = f_y = -f_z = (x + y - z)^{-1}, \quad f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = f_{xy} = -f_{yz} = -f_{xz} =$$

$$-(x + y - z)^{-2},$$

$$(iv) \quad f_x = z e^{x-y}, \quad f_y = -z e^{x-y}, \quad f_z = e^{x-y}, \quad f_{xx} = f_{yy} = z e^{x-y}, \quad f_{zz} = 0, \quad f_{xy} =$$

$$-z e^{x-y}, \quad f_{yz} = -e^{x-y}, \quad f_{xz} = e^{x-y}.$$

1.2.5 Αλυσιδωτός κανόνας παραγώγισης

Το Θεώρημα 1.2.2 - 1 της Παραγράφου 1.2.2 διατυπώνεται επίσης ως εξής:

Θεώρημα 1.2.5 - 1 (παράγωγος σύνθετης συνάρτησης).

Έστω οι συναρτήσεις

$$y = f(x) | D_1 \quad \text{και} \quad x = x(t) | D_2 \quad \text{όπου,} \quad g(D_2) \subseteq D_1$$

και D_1, D_2 ανοικτά διαστήματα και η προκύπτουσα σύνθετη συνάρτηση

$$f(t) = (f \circ x)(t) = f(x(t)) \quad \text{για κάθε} \quad t \in D_2.$$

Έστω επίσης ότι για ένα σημείο $t_0 \in D_2$ υπάρχει η παράγωγος $x'(t_0) = x'_0$ και η αντίστοιχη $y'_0 = f'(x_0)$ στο σημείο $x_0 = x(t_0)$ με $x_0 \in D_1$. Τότε υπάρχει και η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης $h(t) | D_2$ στο σημείο $t_0 \in D_2$ και ισχύει

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = y'_0 x'_0. \quad (1.2.5 - 1)$$

Γενικότερα ο τύπος (1.2.5 - 1) γράφεται επίσης ως εξής:

αν $y = f(x)$ και $x = g(t)$, τότε

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \quad \text{ή} \quad y_t = y_x x_t. \quad (1.2.5 - 2)$$

Ο τύπος αυτός γενικεύεται για την περίπτωση συναρτήσεων δύο, αντίστοιχα τριών μεταβλητών⁹ σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1.2.5 - 2 Έστω η συνάρτηση $f(x, y) | S \subseteq \mathbb{R}^2$, αντίστοιχα

$f(x, y, z) | S \subseteq \mathbb{R}^3$ και

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

αντίστοιχα

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

⁹Για την περίπτωση n -μεταβλητών βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 6.

για κάθε $t \in A \subseteq \mathbb{R}$, όπου A ανοικτό σύνολο με τις αντίστοιχες τιμές της f να ανήκουν στο S για κάθε $t \in A$ και επιπλέον ότι υπάρχει η παράγωγος της f στο $(x(t), y(t))$, αντίστοιχα $(x(t), y(t), z(t))$ για κάθε $t \in A$. Τότε η συνάρτηση $f = f(t)$ παραγωγίζεται στο t και ισχύει

$$\frac{d f(t)}{d t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d x}{d t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d y}{d t} \quad \eta$$

$$f_t = f_x \frac{d x}{d t} + f_y \frac{d y}{d t}, \quad (1.2.5 - 3)$$

αντίστοιχα

$$\frac{d f(t)}{d t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d x}{d t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d y}{d t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{d z}{d t} \quad \eta$$

$$f_t = f_x \frac{d x}{d t} + f_y \frac{d y}{d t} + f_z \frac{d z}{d t}. \quad (1.2.5 - 4)$$

Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό ως **κανόνας αλυσιδωτής παραγωγίσης** (chain rule) σύνθετης συνάρτησης για δύο, αντίστοιχα τρεις μεταβλητές.

Πόρισμα 1.2.5 - 1 Έστω η συνάρτηση $f(x, y) \mid S \subseteq \mathbb{R}^2$, όπου $y = g(x)$ για κάθε $x \in A \subseteq \mathbb{R}$, όταν A ανοικτό σύνολο και επιπλέον υπάρχει η παράγωγος της f στο (x, y) για κάθε $x \in A$. Τότε η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο x και ισχύει

$$\frac{d f(x, y)}{d x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d y}{d x}. \quad (1.2.5 - 5)$$

Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τον τύπο (5.3.1 - 3) και παραλείπεται.

Παράδειγμα 1.2.5 - 1

Να υπολογιστεί η παράγωγος df/dt , όταν

$$f(x, y) = x^2 y - y^2 \quad \text{και} \quad x = t^2, \quad y = 2t.$$

Λύση. Διαδοχικά έχουμε

$$f_x = (x^2y - y^2)_x = \overbrace{(x^2y)_x}^{2xy} - \overbrace{(y^2)_x}^0 = 2 \overbrace{x}^{t^2} \overbrace{y}^{2t} = 4t^3,$$

$$f_y = (x^2y - y^2)_y = \overbrace{(x^2y)_y}^{x^2} - \overbrace{(y^2)_y}^{2y}$$

$$= \overbrace{x^2}^{(t^2)^2} - 2 \overbrace{y}^{2t} = t^4 - 2t,$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 2.$$

Άρα σύμφωνα με τον τύπο (5.3.1 - 3) είναι

$$\frac{df}{dt} = 4t^3 \cdot 2t + (t^4 - 2t) \cdot 2 = 2t(5t^3 - 4).$$

■

Παράδειγμα 1.2.5 - 2

Όμοια της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = \ln(x + y + z), \quad \text{όταν } x = \cos^2 t, \quad y = \sin^2 t \quad \text{και} \quad z = t^2.$$

Λύση. Διαδοχικά έχουμε¹⁰

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{x + y + z} \overbrace{(x + y + z)_x}^1 = \frac{1}{x + y + z} \\ &= \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t + t^2} = \frac{1}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

Όμοια υπολογίζεται ότι

$$f_y = f_z = \frac{1}{x + y + z} = \frac{1}{1 + t^2}.$$

¹⁰Υπενθυμίζεται ότι: $[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Επίσης είναι

$$\frac{dx}{dt} = (\cos^2 t)_t = -2 \cos t \sin t,$$

$$\frac{dy}{dt} = (\sin^2 t)_t = 2 \cos t \sin t, \quad \text{και} \quad \frac{dz}{dt} = 2t.$$

Άρα σύμφωνα με τον τύπο (5.3.1 - 4) είναι

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{1+t^2} (-2 \cos t \sin t + 2 \cos t \sin t + 2t) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

■

Παράδειγμα 1.2.5 - 3

Όμοια της συνάρτησης

$$f(x, y) = x \ln(xy) + y^3, \quad \text{όταν} \quad y = \cos(x^2 + 1).$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο (1.2.5 - 7) είναι

$$\begin{aligned} f_x &= [x \ln(xy) + y^3]_x = [x \ln(xy)]_x + \overbrace{(y^3)_x}^0, \\ &= \overbrace{(x)_x}^1 \ln(xy) + x [\ln(xy)]_x \\ &= \ln(xy) + x \frac{\overbrace{(xy)_x}^{y(x)_x=y}}{xy} \\ &= \ln(xy) + x \frac{y}{xy} = \ln(xy) + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y &= (x \ln(xy) + y^3)_y = x [\ln(xy)]_y + \overbrace{(y^3)_y}^{3y^2} \\ &= x \frac{\overbrace{(xy)_y}^{x(y)_y=x}}{xy} + 3y^2 = \frac{x}{y} + 3y^2, \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = -(x^2 + 1)_x \sin(x^2 + 1) = -2x \sin(x^2 + 1),$$

οπότε

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \ln [x \cos (x^2 + 1)] + 1 - 2x^2 \tan (x^2 + 1) \\ &\quad - 6x \sin (x^2 + 1) \cos^2 (x^2 + 1). \end{aligned}$$

■

Γενικεύοντας το Θεώρημα 5.3.1 - 1 αποδεικνύεται ότι:¹¹

Θεώρημα 1.2.5 - 3 Έστω η συνάρτηση $f(x, y) \mid S \subseteq \mathbb{R}^2$ και $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$ για κάθε $(s, t) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$, όπου A ανοικτό σύνολο με τις αντίστοιχες τιμές της f να ανήκουν στο S για κάθε $(s, t) \in A$ και επιπλέον ότι υπάρχει η παράγωγος της f στο $(x(s, t), y(s, t))$ για κάθε $(s, t) \in A$. Τότε η συνάρτηση $f = f(s, t)$ παραγωγίζεται στο (s, t) και ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad \eta \\ f_s &= f_x \frac{\partial x}{\partial s} + f_y \frac{\partial y}{\partial s}, \end{aligned} \quad (1.2.5 - 6)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \quad \eta \\ f_t &= f_x \frac{\partial x}{\partial t} + f_y \frac{\partial y}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.2.5 - 7)$$

Παράδειγμα 1.2.5 - 4

Έστω

$$f(x, y) = e^{2y} \sin 3x \quad \text{όπου} \quad x = \sqrt{s^2 + t^2}, \quad y = st - t^2.$$

Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι f_s και f_t .

Λύση. Αρχικά υπολογίζονται οι παρακάτω κοινοί και στους δύο τύπους

¹¹Βλέπε βιβλιογραφία.

(1.2.5 – 6) και (1.2.5 – 7) όροι ως εξής:

$$\begin{aligned} f_x &= (e^{2y} \sin 3x)_x = e^{2y} (\sin 3x)_x = e^{2y} (3 \cos 3x) \\ &= 3 e^{2y} \cos 3x = 3 e^{2(st-t^2)} \cos \left(3\sqrt{s^2+t^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y &= (e^{2y} \sin 3x)_y = (e^{2y})_y \sin 3x = 2e^{2y} \sin 3x \\ &= 2e^{2y} \sin 3x = 2e^{2(st-t^2)} \sin \left(3\sqrt{s^2+t^2} \right). \end{aligned}$$

Τύπος (1.2.5 – 6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s} &= \left(\sqrt{s^2+t^2} \right)_s = \left[(s^2+t^2)^{1/2} \right]_s \\ &= \frac{1}{2} (s^2+t^2)_s (s^2+t^2)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} 2s (s^2+t^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{s}{\sqrt{s^2+t^2}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = (st-t^2)_s = t.$$

Άρα

$$\begin{aligned} f_s &= f_x \frac{\partial x}{\partial s} + f_y \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= e^{2(st-t^2)} \left[\frac{3s \cos \left(3\sqrt{s^2+t^2} \right)}{\sqrt{s^2+t^2}} + 2t \sin \left(3\sqrt{s^2+t^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Τύπος (1.2.5 – 7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \left(\sqrt{s^2+t^2} \right)_t = \left[(s^2+t^2)^{1/2} \right]_t \\ &= \frac{1}{2} (s^2+t^2)_t (s^2+t^2)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} 2t (s^2+t^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{t}{\sqrt{s^2+t^2}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = (st-t^2)_t = s - 2t.$$

Άρα

$$\begin{aligned} f_t &= f_x \frac{\partial x}{\partial t} + f_y \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= e^{2(st-t^2)} \left[\frac{3t \cos(3\sqrt{s^2+t^2})}{\sqrt{s^2+t^2}} + 2(s-2t) \sin(3\sqrt{s^2+t^2}) \right]. \end{aligned}$$

■

Τελεστής Laplace

Κρίνεται σκόπιμο στο σημείο αυτό να οριστεί ο παρακάτω τελεστής Laplace ή και διαφορικός τελεστής 2ης τάξης, που χρησιμοποιείται στην περιγραφή των εξισώσεων πολλών φυσικών φαινομένων και στη συνέχεια να δοθούν οι εκφράσεις του σε πολικές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες. Ο αναγνώστης για τις εφαρμογές του τελεστή παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

Ορισμός 1.2.5 - 1 (τελεστής Laplace). Έστω ότι η συνάρτηση $f(x, y) | S \subseteq \mathbb{R}^2$, αντίστοιχα $f(x, y, z) | S \subseteq \mathbb{R}^3$ έχει τουλάχιστον 2ης τάξης μερικούς παραγώγους για κάθε $(x, y) \in S$, αντίστοιχα $(x, y, z) \in S$. Τότε ο τελεστής Laplace ή και διαφορικός τελεστής 2ης, αντίστοιχα 3ης τάξης ορίζεται ως εξής:

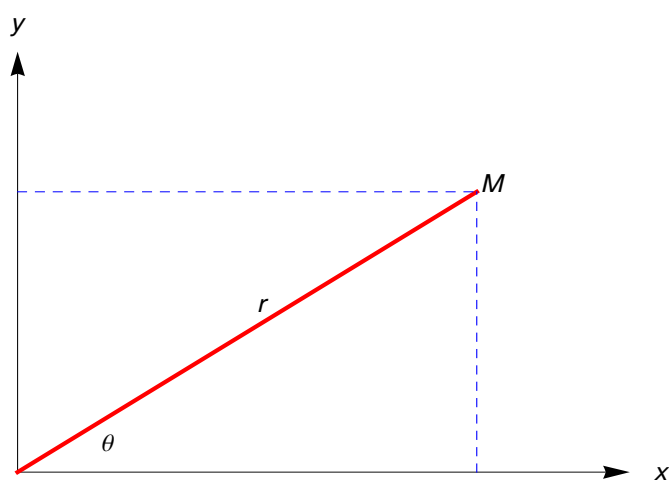
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \text{αντίστοιχα} \quad (1.2.5 - 8)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Εφαρμογή 1.2.5 - 1 (πολικές συντεταγμένες (r, θ))

Να υπολογιστεί η παράσταση

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{xx} + f_{yy} \quad (1.2.5 - 9)$$



Σχήμα 1.2.5 - 1: πολικές συντεταγμένες (r, θ) .

σε πολικές συντεταγμένες (Σχ. 6.1.5 - 3), όταν όπως είναι ήδη γνωστό οι πολικές συντεταγμένες (r, θ) δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad \text{με } r \geq 0 \text{ και } \theta \in [0, 2\pi) \text{ ή } \theta \in (-\pi, \pi].$$

Λύση. Εφαρμόζοντας τους τύπους (1.2.5 - 6) και (1.2.5 - 7) έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \overbrace{\frac{\partial x}{\partial r}}^{\cos \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \overbrace{\frac{\partial y}{\partial r}}^{\sin \theta} \\ &= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1)$$

οπότε παραγωγίζοντας ως προς r την (1) προκύπτει

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\
 &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\
 &= \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial x} + \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial y} \\
 &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) \quad (\text{Θεώρημα 1.2.2 - 2}) \\
 &\stackrel{(1)}{=} \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\
 &\quad + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\
 &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\
 &\quad + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
 &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},
 \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \quad (2)$$

Όμοια με την (1) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \overbrace{\frac{\partial x}{\partial \theta}}^{-r \sin \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \overbrace{\frac{\partial y}{\partial \theta}}^{r \cos \theta} \\
 &= -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την (3) ως προς θ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= r \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\
&= r \left[-\cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} - \sin \theta \overbrace{\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)}^{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)} \right] + r \left[-\sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} + \cos \theta \overbrace{\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)}^{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)} \right] \\
&= r \left[-\cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(-r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] \\
&\quad r \left[-\sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \left(-r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] \\
&= -r \overbrace{\left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \right)}^{\frac{\partial f}{\partial r}} \\
&\quad + r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\
&\quad - r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = -r \frac{\partial f}{\partial r} + r^2 \left(\sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

Συνδυάζοντας τις (2) και (4) προκύπτει τότε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\
&\quad + (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r}.
\end{aligned} \quad (5)$$

Από την (5) έχουμε την παρακάτω έκφραση της (5.4.2 - 4) σε πολικές συντεταγμένες:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \quad (1.2.5 - 10)$$

που γράφεται και

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}. \quad (1.2.5 - 11)$$

Με ανάλογους υπολογισμούς προκύπτει ότι ο τελεστής Laplace σε

- **κυλινδρικές συντεταγμένες** (r, θ, z) , που δίνονται από τις σχέσεις (Σχ. 1.2.5 - 2a)

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

$$\text{με } r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi) \text{ ή } \theta \in (-\pi, \pi] \text{ και } z \in \mathbb{R}.$$

είναι

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- ενώ σε **σφαιρικές συντεταγμένες** (r, θ, ϕ) , που ορίζονται από τις σχέσεις (Σχ. 1.2.5 - 2b)

$$x = r \cos \theta \sin \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \phi$$

$$\text{με } r \geq 0 \text{ και } \theta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi) \text{ ή } \phi \in (-\pi, \pi],$$

είναι

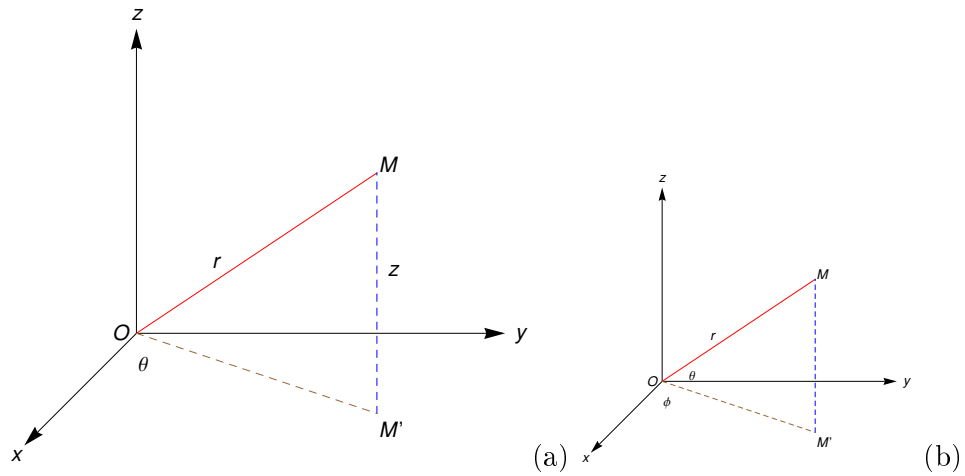
$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}. \end{aligned}$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η παράγωγος f_t των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x, y) = e^{xy} + \sin(x - y)$, όταν $x = t$, $y = -t$,

ii) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, όταν $x = \cosh t$, $y = \sinh t$,



Σχήμα 1.2.5 - 2: (a) οι κυλινδρικές (r, θ, z) και (b) οι σφαιρικές (r, θ, ϕ) συντεταγμένες.

$$\text{iii) } f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2), \quad \text{όταν } x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t,$$

$$\text{iv) } f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \text{όταν } x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t.$$

2. Όμοια οι παράγωγοι f_s και f_t των

$$\text{i) } f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \text{όταν } x = s + t, \quad y = s - t,$$

$$\text{ii) } f(x, y) = x^2 - y^2, \quad \text{όταν } x = s^2 - t^2, \quad y = st,$$

$$\text{iii) } f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}, \quad \text{όταν } x = e^{-s} \cos t, \quad y = e^{-s} \sin t.$$

Απαντήσεις

$$1. \text{ (i) } f_x = ye^{xy} + \cos(x - y), \quad f_x = xe^{xy} - \cos(x - y), \quad f_t = -2e^{-t^2} + 2 \cos 2t,$$

$$\text{(ii) } f_x = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_t = \frac{1}{\cosh^2 2t},$$

$$\text{(iii) } f_x = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad f_x = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad f_z = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad f_t = 2,$$

$$\text{(iv) } f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad f_x = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad f_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad f_t = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

2. Εφαρμόζοντας τους τύπους (1.2.5 - 6) και (1.2.5 - 7) έχουμε

$$\text{(i) } f_x = 2x, \quad f_y = 2y, \quad f_s = 4s, \quad f_t = 4t,$$

- (ii) $f_x = 2x$, $f_y = -2y$, $f_s = 4(s^3 - 2st^2)$, $f_t = 4t(t^2 - 2s^2)$,
 (iii) $f_x = -2xe^{-x^2-y^2}$, $f_y = -2ye^{-x^2-y^2}$, $f_s = 2e^{-e^{-2s}}$, $f_t = 0$.

1.3 Ακρότατα

1.3.1 Τοπικά ακρότατα

Ορισμός 1.3.1 - 1 (τοπικό ακρότατο). Έστω η συνάρτηση $f(x, y) | S \subseteq \mathbb{R}^2$, αντίστοιχα $f(x, y, z) | S \subseteq \mathbb{R}^3$, όπου S ανοικτό σύνολο και σημείο $P_0 = (x_0, y_0)$, αντίστοιχα $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$. Τότε θα λέγεται ότι το P_0 , αντίστοιχα το \tilde{P}_0 είναι θέση τοπικού μεγίστου, αντίστοιχα τοπικού ελαχίστου της f τότε και μόνον, όταν υπάρχει περιοχή $\varpi(x_0, y_0)$ του P_0 , αντίστοιχα $\varpi(x_0, y_0, z_0)$ του \tilde{P}_0 , έτσι ώστε

- **μέγιστο**

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \text{ αντίστοιχα } f(x, y, z) \leq f(x_0, y_0, z_0),$$

- **ελάχιστο**

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \text{ αντίστοιχα } f(x, y, z) \geq f(x_0, y_0, z_0)$$

για κάθε $(x, y) \in \varpi(x_0, y_0) \cap S$, αντίστοιχα $(x, y, z) \in \varpi(x_0, y_0, z_0) \cap S$.

Σε κάθε περίπτωση το σημείο αυτό λέγεται θέση **τοπικού ακρότατου** (relative extremum) της f με τιμή $f(x_0, y_0)$, αντίστοιχα $f(x_0, y_0, z_0)$.

Ορισμός 1.3.1 - 2 (ολικό ακρότατο). Έστω η συνάρτηση $f(x, y) | S \subseteq \mathbb{R}^2$, αντίστοιχα $f(x, y, z) | S \subseteq \mathbb{R}^3$, όπου S ανοικτό σύνολο και σημείο $P_0 = (x_0, y_0)$, αντίστοιχα $\tilde{P}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$. Τότε θα λέγεται ότι το P_0 , αντίστοιχα το \tilde{P}_0 είναι θέση ολικού μεγίστου, αντίστοιχα ολικού ελαχίστου (extremum) της f τότε και μόνον, όταν

- **μέγιστο**

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \text{ αντίστοιχα } f(x, y, z) \leq f(x_0, y_0, z_0),$$

- **ελάχιστο**

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \text{ αντίστοιχα } f(x, y, z) \geq f(x_0, y_0, z_0)$$

για κάθε $(x, y) \in S$, αντίστοιχα $(x, y, z) \in S$.

Σε κάθε περίπτωση το σημείο αυτό λέγεται θέση **ολικού ακρότατου** της f με τιμή $f(x_0, y_0)$, αντίστοιχα $f(x_0, y_0, z_0)$.

Δίνονται στη συνέχεια οι συνθήκες που πρέπει να πληρούνται, έτσι ώστε μία συνάρτηση να έχει ακρότατα.

Θεώρημα 1.3.1 - 1 (αναγκαία συνθήκη ακρότατου). Έστω η συνάρτηση $f(x, y) \mid S \subseteq \mathbb{R}^2$, αντίστοιχα $f(x, y, z) \mid S \subseteq \mathbb{R}^3$, όπου S ανοικτό σύνολο. Αν το σημείο $P_0 = (x_0, y_0)$, αντίστοιχα $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ είναι ένα ακρότατο (stationary point) της f και υπάρχουν όλες οι 1ης τάξης μερικές παράγωγοι της f στο σημείο αυτό, τότε αυτές πρέπει να είναι ίσες με το μηδέν.

Ακρότατο συνάρτησης δύο μεταβλητών

Στο παρακάτω θεώρημα γίνεται χρήση των εξής συμβολισμών:

$$A = f_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f_{yy}(x_0, y_0)$$

$$\Delta = AC - B^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)}. \quad (1.3.1 - 1)$$

Θεώρημα 1.3.1 - 2 (ικανή συνθήκη ακρότατου). Έστω η συνάρτηση $f(x, y) \mid S \subseteq \mathbb{R}^2$, όπου S ανοικτό σύνολο, της οποίας υπάρχουν στο S και είναι συνεχείς συναρτήσεις όλες οι 1ης και 2ης τάξης μερικές παράγωγοι. Αν το σημείο $(x_0, y_0) \in S$ είναι τέτοιο ώστε

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0, \quad (1.3.1 - 2)$$

τότε, αν

$\Delta > 0$, και

- $A < 0$ ή $C < 0$
το (x_0, y_0) είναι θέση **μεγίστου** της f ,
- $A > 0$ ή $C > 0$
το (x_0, y_0) είναι θέση **ελαχίστου** της f .

$\Delta < 0$

τότε δεν υπάρχει ακρότατο. Στην περίπτωση αυτή το (x_0, y_0) είναι σημείο **καμπής** του διαγράμματος της f .

$\Delta = 0$

το **θεώρημα δεν εφαρμόζεται**, δηλαδή ενδέχεται να υπάρχει ή όχι ακρότατο.

Σημειώσεις 1.3.1 - 1

- Τα σημεία που επαληθεύουν τη συνθήκη (1.3.1 – 2) λέγονται **κρίσιμα σημεία** (critical ή stationary points) και είναι θέσεις πιθανών ακρότατων της $f(x, y)$.
- Το σημείο (x_0, y_0) που επαληθεύει την (1.3.1 – 1) πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , διαφορετικά δεν είναι σημείο πιθανού ακρότατου.

Παράδειγμα 1.3.1 - 1

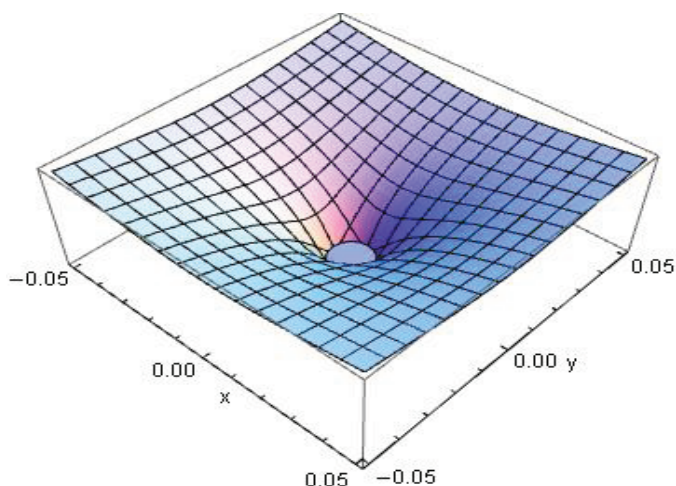
Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad \text{με πεδίο ορισμού } D = \mathbb{R}^2 - (0, 0).$$

Τότε από τον τύπο (1.3.1 – 2) προκύπτει

$$f_x = \frac{(x^2 + y^2)_x}{x^2 + y^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2} = 0, \quad \text{και}$$

$$f_y = \frac{(x^2 + y^2)_y}{x^2 + y^2} = \frac{2y}{x^2 + y^2} = 0,$$



Σχήμα 1.3.1 - 1: Παράδειγμα 1.3.1 - 1.

οπότε $x = y = 0$, δηλαδή το σημείο $P(0,0) \notin D$ (Σχ. 1.3.1 - 1) και επομένως το σημείο P **δεν** είναι πιθανό ακρότατο.

Παράδειγμα 1.3.1 - 2

Να μελετηθεί ως την ύπαρξη ακρότατων η συνάρτηση

$$f(x, y) = xy \quad \text{με πεδίο ορισμού } D = \mathbb{R}^2.$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο (1.3.1 - 2) είναι

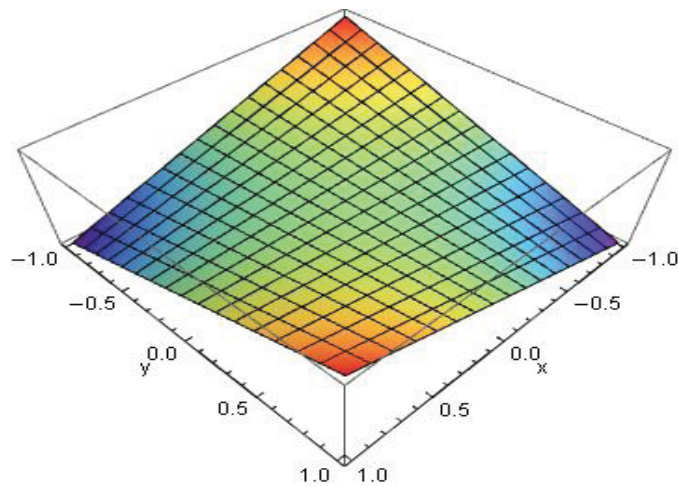
$$f_x = x = 0 \quad \text{και} \quad f_y = y = 0,$$

οπότε έχουμε πιθανό ακρότατο στο σημείο $P(0,0)$.

Από τις σχέσεις (1.3.1 - 1) προκύπτουν

$$A = f_{xx} = 0, \quad B = f_{xy} = 1, \quad C = f_{yy} = 0, \quad \Delta = -1 < 0.$$

Άρα σύμφωνα με τη συνθήκη (II) του Θεωρήματος 1.3.1 - 2 το P είναι **σημείο καμπής** του διαγράμματος της f (Σχ. 1.3.1 - 2). ■



Σχήμα 1.3.1 - 2: Παράδειγμα 1.3.1 - 2.

Παράδειγμα 1.3.1 - 3

Όμοια η συνάρτηση

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad \text{με} \quad D = \mathbb{R}^2.$$

Λύση. Από τον τύπο (1.3.1 - 2) έχουμε το σύστημα

$$f_x = 3x^2 - 3y = 0$$

$$f_y = 3y^2 - 3x = 0.$$

Τότε από την 1η εξίσωση προκύπτει $y = x^2$, οπότε αντικαθιστώντας στη 2η έχουμε

$$3(x^2)^2 - 3x = 3x(x^3 - 1) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 1.$$

Άρα τα πιθανά ακρότατα είναι στα σημεία:

$$P_1(0, 0) \quad \text{και} \quad P_2(1, 1).$$

Από τις σχέσεις (1.3.1 - 1) για το σημείο $(x, y) \in D$ έχουμε

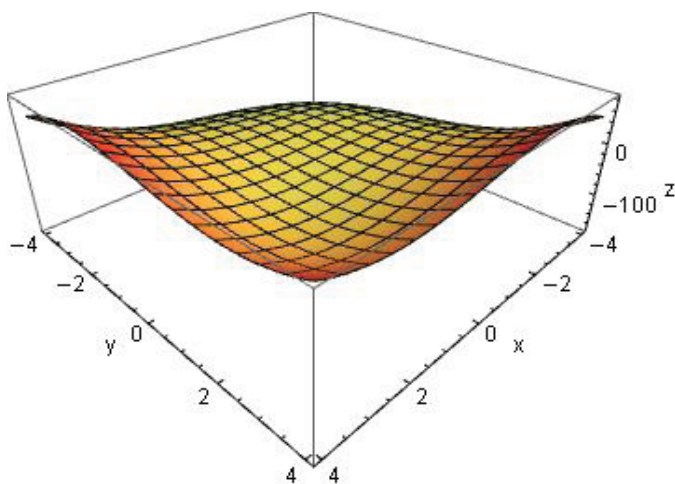
$$A = f_{xx} = 6x, \quad B = f_{xy} = -3, \quad C = f_{yy} = 6y \quad \text{και}$$

$$\Delta = AC - B^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9.$$

Τότε από τις συνθήκες (I-III) του Θεωρήματος 1.3.1 - 2 για τα παραπάνω σημεία προκύπτουν (Σχ. 1.3.1 - 3):

$$P_1: \Delta|_{P_1(0,0)} = -9 < 0, \text{ δηλαδή είναι } \textbf{σημείο καμπής},$$

$$P_2: \Delta|_{P_2(1,1)} = 27 > 0 \text{ και } A|_{P_2(1,1)} = 6 > 0, \text{ δηλαδή υπάρχει } \textbf{ελάχιστο} \text{ με τιμή } f(1,1) = 3.$$



Σχήμα 1.3.1 - 3: Παράδειγμα 1.3.1 - 3.

■

Παράδειγμα 1.3.1 - 4

Όμοια η συνάρτηση

$$f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2 \quad \text{με} \quad D = \mathbb{R}^2.$$

Λύση. Από τον τύπο (1.3.1 - 2) έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x &= 6xy - 6x &= 0 \\ f_y &= 3x^2 + 3y^2 - 6y &= 0. \end{aligned}$$

Τότε από την 1η εξίσωση προκύπτει $6x(y - 1) = 0$, δηλαδή ή $x = 0$ ή $y = 1$.

Τότε από τη 2η εξίσωση έχουμε

$$x = 0 :$$

$$3y^2 - 6y = 3y(y - 2) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad y = 0 \quad \text{ή} \quad y = 2,$$

$$y = 1 :$$

$$3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 1.$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι:

$$P_1(0, 0), \quad P_2(0, 2), \quad P_3(1, 1) \quad \text{και} \quad P_4(-1, 1).$$

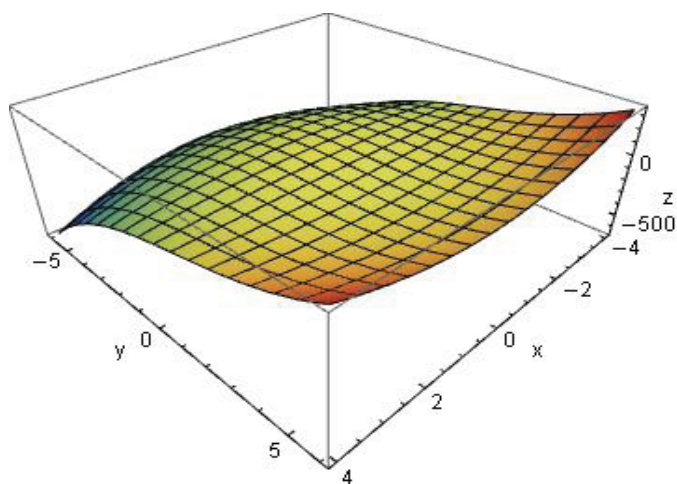
Οι σχέσεις (1.3.1 - 1), όταν εφαρμοστούν γενικά για το σημείο $(x, y) \in D$, δίνουν

$$A = f_{xx} = 6y - 6, \quad B = f_{xy} = 6x, \quad C = f_{yy} = 6y - 6 \quad \text{και}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= AC - B^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6y - 6 & 6x \\ 6x & 6y - 6 \end{vmatrix} \\ &= 36(y - 1)^2 - 36x^2. \end{aligned}$$

Τότε από τις συνθήκες (I-III) του Θεωρήματος 1.3.1 - 2 για τα παραπάνω σημεία προκύπτουν (Σχ. 1.3.1 - 4):

- P_1 : $\Delta|_{P_1(0,0)} = 36 < 0$ και $A|_{P_1(0,0)} = -6 > 0$,
δηλαδή υπάρχει **μέγιστο** (ολικό) με τιμή $f(0,0) = 2$,
- P_2 : $\Delta|_{P_2(0,2)} = 36 > 0$ και $A|_{P_2(0,2)} = 6 > 0$,
δηλαδή **ελάχιστο** (ολικό) με τιμή $f(0,2) = -2$,
- P_3 : $\Delta|_{P_3(1,1)} = -36 < 0$, **σημείο καμπής**, και
- P_4 : $\Delta|_{P_4(-1,1)} = -36 < 0$, όμοια **σημείο καμπής**.



Σχήμα 1.3.1 - 4: Παράδειγμα 1.3.1 - 4.

Άσκηση

Να μελετηθούν για την ύπαρξη ακρότατων οι παρακάτω συναρτήσεις $f(x, y)$:

i) $x^2 + xy + y^2 + 4x - 4y + 3$

iii) $x^3 - 6xy + y^3$

ii) $x^3 - 3x + xy^2$

iv) $e^{-x^2-y^2}$

και να γίνει η γραφική παράστασή των.

Απαντήσεις

- (i) $f_x = 2x + 4$, $f_y = 2y - 4$, κρίσιμο σημείο: $P(-1, 0)$, $\Delta = 4$, $A = 2 \min$,
 (ii) $f_x = 3x^2 + y^2 - 3$, $f_y = 2xy$, $\Delta = 12x^2 - 4y^2$, σημεία: $P_1(-2, 2) \max$,
 $P_2(1, 0) \min$, $P_3(0, \sqrt{3})$ και $P_4(0, -\sqrt{3})$ καμπής,
 (iii) $f_x = 3x^2 - 6y$, $f_y = -6x + 3y^2$, $\Delta = 36(xy - 1)$, πραγματικές λύσεις στα σημεία:
 $P_1(0, 0)$ καμπής και $P_2(2, 2) \min$,
 (iv) $f_x = -2xe^{-x^2-y^2}$, $f_y = -2ye^{-x^2-y^2}$, $\Delta = 4(1 - 2x^2 - 2y^2)e^{-x^2-y^2}$,
 σημείο: $P(0, 0) \min$.

Ακρότατα συνάρτησης τριών μεταβλητών

Θεώρημα 1.3.1 - 3 (ικανή συνθήκη ακρότατου). Έστω η συνάρτηση $f(x, y, z) | S \subseteq \mathbb{R}^3$, όπου S ανοικτό σύνολο, της οποίας υπάρχουν στο S και είναι συνεχείς συναρτήσεις όλες οι πρώτης και δευτέρας τάξης μερικές παράγωγοι. Έστω σημείο $P_0 = P_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, τέτοιο ώστε

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0, z_0) = f_z(x_0, y_0, z_0) = 0. \quad (1.3.1 - 1)$$

Αν

$$A = f_{xx}(x_0, y_0, z_0), \quad B = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}_{P_0} \quad \text{και}$$

$$C = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}_{P_0}, \quad (1.3.1 - 2)$$

τότε η $f(x, y, z) | S \subseteq \mathbb{R}^3$ έχει:

- I. **μέγιστο**, όταν
 $A < 0$, $B > 0$ και $C < 0$,
- II. **ελάχιστο**, όταν
 $A > 0$, $B > 0$ και $C > 0$.

Όμοια σύμφωνα με τις Σημειώσεις 1.3.1 - 1 (I) τα σημεία που επαληθεύουν τη συνθήκη (1.3.1-1) λέγονται επίσης **κρίσιμα σημεία** και είναι θέσεις πιθανών ακρότατων της $f(x, y, z)$.

Παράδειγμα 1.3.1 - 5

Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 5.$$

Τότε σύμφωνα με τον τύπο (1.3.1 - 1) έχουμε το σύστημα

$$f_x = 2x - 2 = 0$$

$$f_y = 2y = 0$$

$$f_z = 2z = 0$$

από τη λύση του οποίου προκύπτει ως πιθανό σημείο ακρότατου το $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$.

Σύμφωνα με τις σχέσεις (1.3.1 - 2) είναι

$$A = f_{xx}(1, 0, 0) = 2 > 0,$$

$$B = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(1,0,0)} = 4 > 0, \text{ και}$$

$$C = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}_{(1,0,0)} = 8 > 0,$$

δηλαδή επαληθεύεται η συνθήκη (II) του Θεωρήματος 1.3.1 - 3, οπότε στο σημείο $P(1, 0, 0)$ η f έχει **ελάχιστο** με τιμή $f(1, 0, 0) = -4$.

Άσκηση

Να προσδιοριστούν τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων $f(x, y, z)$:

i) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11$

ii) $-2x^2 + x - y^2 + 2y - z^2 + 4z + 10$.

Απαντήσεις

(i) $f_x = 2x - 2$, $f_y = 2y + 4$, $f_z = 2z - 6$, κρίσιμο σημείο $P(1, -2, 3)$, $A = 2 > 0$,
 $B = 4 > 0$, $C = 8 > 0$ min,

(ii) $f_x = 1 - 4x$, $f_y = 2 - 2y$, $f_z = 4 - 2z$, κρίσιμο σημείο $P(\frac{1}{4}, 1, 2)$, $A = -4 < 0$,
 $B = 8 > 0$, $C = -16 < 0$ max.

Δίνεται στην επόμενη παράγραφο μια σημαντική εφαρμογή των ακρότατων των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.

1.3.2 Μέθοδος των ελάχιστων τετραγώνων

Είναι ήδη γνωστό από το Μάθημα Ορισμένο Ολοκλήρωμα ότι, όταν η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι της μορφής

$$e^{-x^2}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \sin x^2, \quad \frac{e^x}{x} \quad \text{κ.λπ.,}$$

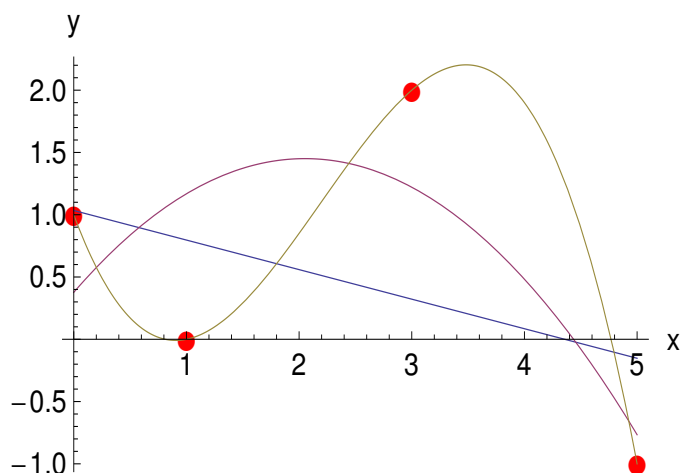
τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται με καμιά από τις γνωστές μεθόδους, επειδή με κανέναν μετασχηματισμό η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν ανάγεται σε υπολογίσιμη θεωρητικά μορφή. Με δεδομένο ότι η ολοκλήρωση πολυωνύμου είναι πάντοτε δυνατή, μια λύση στις παραπάνω περιπτώσεις είναι η αντικατάσταση της ολοκληρωτέας συνάρτησης με πολυώνυμο. Η αντικατάσταση αυτή σημαίνει τότε **προσέγγιση** της ολοκληρωτέας συνάρτησης με την πολυωνυμική, οπότε για την ακρίβεια της λύσης, πρέπει κάθε φορά να ελέγχεται και το σφάλμα που προκύπτει μετά από την προσέγγιση αυτή.

Εκτός της ήδη γνωστής στον αναγνώστη προσέγγισης από το παραπάνω μάθημα με το πολυώνυμο του Taylor,¹² μια άλλης μορφής πολυωνυμική προσέγγιση είναι δυνατόν να γίνει ως εξής:

Έστω ότι x_0, x_1, \dots, x_n είναι $n + 1$ **διαφορετικά** μεταξύ τους σημεία ενός διαστήματος $[a, b]$ και $f(x)$ μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού επίσης το $[a, b]$ και της οποίας είναι γνωστές οι τιμές $y_i = f(x_i)$ για κάθε $i = 0, 1, \dots, n$. Τότε υπάρχει πάντοτε ένα πολυώνυμο, έστω P_n βαθμού $\leq n$ της μορφής

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad (1.3.2 - 1)$$

¹²Για τη γενίκευση του τύπου του Taylor για συναρτήσεις 2 και 3 μεταβλητών βλέπε βιβλιογραφία και βιβλίο Α. Μπράτσος [2].



Σχήμα 1.3.2 - 1: Δεδομένα: $S = \{(0, 1), (1, 0), (3, 2), (5, -1)\}$. Προσέγγιση με πολυώνυμο βαθμού: 3ου (πράσινη), 2ου - παραβολή (κόκκινη) και 1ου - ευθεία (μπλε καμπύλη).

όταν $a_i \in \mathbb{R}$; $i = 0, 1, \dots, n$, έτσι ώστε (Σχ. 1.3.2 - 1) το P_n να προσεγγίζει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο ή διαφορετικά με **άριστο τρόπο** (best approximation ή **best fitting**) τα σημεία (data)

$$S = \{(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (1.3.2 - 2)$$

Τότε το πολυώνυμο αυτό για τον συγκεκριμένο κάθε φορά βαθμό θα δίνει και το ελάχιστο δυνατό σφάλμα. Το πρόβλημα είναι γνωστό ως πρόβλημα της **διακριτής προσέγγισης** (discrete approximation).

Η απάντηση στο παραπάνω πρόβλημα δίνεται στη συνέχεια και όπως θα διαπιστωθεί, είναι μια εφαρμογή των ακρότατων μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών.

Περίπτωση I πολυώνυμο 1ου βαθμού

Έστω ότι το σύνολο των σημείων S στην (1.3.2 - 2) προσεγγίζεται από ένα πολυώνυμο 1ου βαθμού της μορφής

$$P_1(x) = P(x) = ax + b, \quad (1.3.2 - 3)$$

δηλαδή η προσέγγιση των δεδομένων γίνεται με μια ευθεία. Αν θεωρηθεί το σημείο $(x_i, y_i) \in S$, τότε η τιμή y_i προσεγγίζεται από την τιμή

$$\tilde{y}_i = P(x_i) = ax_i + b,$$

οπότε το αντίστοιχο απόλυτο σφάλμα της προσέγγισης στην περίπτωση αυτή θα είναι

$$e_i = |y_i - \tilde{y}_i| = |y_i - (ax_i + b)|.$$

Επομένως για το ολικό σφάλμα, έστω \tilde{E} , θα έχουμε

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \tilde{e}_1 + \dots + \tilde{e}_n \\ &= |y_1 - (ax_1 + b)| + \dots + |y_n - (ax_n + b)|. \end{aligned} \quad (1.3.2 - 4)$$

Προφανώς $\tilde{E} = \tilde{E}(a, b)$, δηλαδή \tilde{E} είναι μια συνάρτηση των a, b . Άρα το πρόβλημα του υπολογισμού του πολυωνύμου $P(x) = ax + b$ στην (1.3.2 - 3) ανάγεται στον υπολογισμό των a και b , έτσι ώστε το σφάλμα \tilde{E} στην (1.3.2-4) να είναι **ελάχιστο**. Τότε σύμφωνα με το ¹³Θεώρημα (1.3.1 - 1) η **αναγκαία** συνθήκη για να συμβαίνει αυτό είναι:

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial a} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \tilde{E}}{\partial b} = 0. \quad (1.3.2 - 5)$$

Εύκολα όμως διαπιστώνεται ότι η (1.3.2 - 5) λόγω και του απολύτου δεν παραγωγίζεται,¹⁴ οπότε το πρόβλημα στη μορφή αυτή δεν λύνεται.

Στη **διακριτή μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων** (discrete least squares method), σε αντίθεση με την (1.3.2 - 4), προσδιορίζονται οι σταθερές a και

¹³

Θεώρημα (αναγκαία συνθήκη ακρότατου). Έστω η συνάρτηση $f(x, y) | S \subseteq \mathbb{R}^2$, όπου S ανοικτό σύνολο. Αν το σημείο $P_0 = (x_0, y_0)$ είναι ένα ακρότατο της f και υπάρχουν όλες οι 1ης τάξης μερικές παράγωγοι της f στο σημείο αυτό, τότε αυτές πρέπει να είναι ίσες με το μηδέν.

¹⁴ Έστω για ευκολία ότι απαλείφονται τα απόλυτα. Τότε

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial a} = -x_1 - \dots - x_n = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \tilde{E}}{\partial b} = -1 - \dots - 1 = -n = 0$$

άτοπο.

b , έτσι ώστε το **ολικό τετραγωνικό σφάλμα** E , δηλαδή το

$$\begin{aligned} E &= e_1^2 + \dots + e_n^2 \\ &= [y_1 - (ax_1 + b)]^2 + \dots + [y_n - (ax_n + b)]^2 \end{aligned} \quad (1.3.2 - 6)$$

να είναι **ελάχιστο**.

Τότε από την (1.3.2 - 6) προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) x_i = 0, \quad \text{και} \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0 \end{aligned}$$

που τελικά γράφεται μετά τις πράξεις ως εξής:

$$\begin{aligned} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^0 &= \sum_{i=1}^n y_i. \end{aligned} \quad (1.3.2 - 7)$$

Το γραμμικό σύστημα (1.3.2 - 7) λέγεται τότε και **σύστημα κανονικών εξισώσεων** (normal equations) και από τη λύση του προκύπτει ότι:

$$a = \frac{n \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad (1.3.2 - 8)$$

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)}{n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}. \quad (1.3.2 - 9)$$

Πίνακας 1.3.2 - 1: Παράδειγμα 1.3.2 - 1.

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
-0.5	1.2	-0.6	0.25
0.3	2.0	0.6	0.09
0.7	1.0	0.7	0.49
1.5	-1.0	-1.5	2.25
2.0	3.2	-0.8	3.08

Παράδειγμα 1.3.2 - 1

Να προσδιοριστεί με τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων το πολυώνυμο πρώτου βαθμού που προσεγγίζει τα δεδομένα:

x_i	-0.5	0.3	0.7	1.5
y_i	1.2	2.0	1.0	-1.0

Λύση. Σύμφωνα με τα παραπάνω δεδομένα δημιουργείται ο Πίνακας 1.3.2 - 1. Τότε από τους τύπους (1.3.2 - 9) και (1.3.2 - 9) προκύπτει

$$a = \frac{4 \cdot (-0.8) - 2 \cdot (3.2)}{4 \cdot (3.08) - 2^2} \approx -1.1539 \quad \text{και}$$

$$b = \frac{(3.08) \cdot (3.2) - (-0.8) \cdot 2}{4 \cdot (3.08) - 2^2} \approx 1.3769,$$

δηλαδή $P(x) = -1.1539x + 1.3769$ (Σχ. 1.3.2 - 2). ■

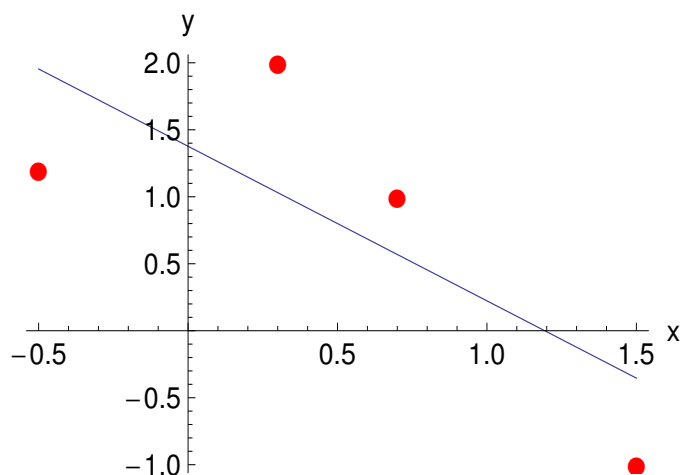
Περίπτωση II πολυώνυμο m -βαθμού

Στην περίπτωση αυτή ζητείται η προσέγγιση του συνόλου S στην (1.3.2 - 2) με ένα πολυώνυμο m -βαθμού της μορφής (1.3.2 - 1), δηλαδή

$$P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m,$$

όταν

$$\mathbf{m} < \mathbf{n} - \mathbf{1}. \quad (1.3.2 - 10)$$



Σχήμα 1.3.2 - 2: Παράδειγμα 1.3.2 - 1. Η εξίσωση της ευθείας είναι $y = -1.1539x + 1.3769$.

Τότε, όμοια με την Περίπτωση I, εκλέγονται οι σταθερές a_0, a_1, \dots, a_m , έτσι ώστε το ολικό τετραγωνικό σφάλμα

$$\begin{aligned} E &= e_1^2 + \dots + e_n^2 \\ &= [y_1 - P_m(x_1)]^2 + \dots + [y_n - P_m(x_n)]^2 \end{aligned}$$

να είναι **ελάχιστο**.

Το σφάλμα E διαδοχικά γράφεται

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n P_m(x_i) y_i + \sum_{i=1}^n [P_m(x_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^m a_j x_i^j \right) y_i + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^m a_j x_i^j \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^m a_j x_i^j \right) y_i + \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^m a_j a_k \left(\sum_{i=1}^n x_i^{j+k} \right). \end{aligned}$$

Όπως και στην περίπτωση του πολυωνύμου 1ου βαθμού μία αναγκαία

συνθήκη προκύπτει από τον τύπο (1.3.1 – 2) ως εξής:¹⁵

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad \text{για κάθε } j = 0, 1, \dots, m. \quad (1.3.2 - 11)$$

Το σύστημα (1.3.2 – 11) γράφεται

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2 \sum_{i=1}^n y_i x_i^j + 2 \sum_{k=0}^m a_k \sum_{i=1}^n x_i^{j+k} = 0,$$

οπότε

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^m x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^m y_i x_i^j \quad \text{για κάθε } j = 0, 1, \dots, n$$

από την οποία προκύπτει το παρακάτω γραμμικό σύστημα **κανονικών εξισώσεων**:

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=1}^n x_i^0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^1 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^m &= \sum_{i=1}^n y_i x_i^0 \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^1 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} &= \sum_{i=1}^n y_i x_i^1 \\ &\vdots \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{2m} &= \sum_{i=1}^n y_i x_i^m. \end{aligned} \quad (1.3.2 - 12)$$

με $m+1$ εξισώσεις και $m+1$ αγνώστους τους συντελεστές a_j του πολυωνύμου, στο οποίο ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων είναι συμμετρικός.

Αποδεικνύεται ότι το σύστημα (1.3.2 – 12) έχει ακριβώς μία λύση, όταν τα σημεία $x_i; i = 1, 2, \dots, n$ είναι **διαφορετικά** μεταξύ τους.

¹⁵ Το Θεώρημα (1.3.1 – 1) γενικεύεται ως εξής:

Θεώρημα (αναγκαία συνθήκη ακρότατου). Έστω η συνάρτηση $f(x_1, \dots, x_m) | S \subseteq \mathbb{R}^m$, όπου S ανοικτό σύνολο. Αν το σημείο $P = (x_1, \dots, x_m)$ είναι ένα ακρότατο της f και υπάρχουν όλες οι 1ης τάξης μερικές παράγωγοι της f στο σημείο αυτό, τότε αυτές πρέπει να είναι ίσες με το μηδέν.

Σημείωση 1.3.2 - 1

Κρίνεται σκόπιμο στο σημείο αυτό να διευκρινιστεί ότι μια γενίκευση του παραπάνω προβλήματος, δηλαδή η προσέγγιση των σημείων S με ένα πολυώνυμο $P_m(x)$ με την απαίτηση το άθροισμα των σφαλμάτων $E = \sum_{i=1}^n e_i^k$ με $k \geq 3$, να είναι ελάχιστο, καταλήγει μετά και την εφαρμογή της συνθήκης (1.3.2–11) σε μη γραμμικό σύστημα. Επομένως η μέθοδος με την απαίτηση αυτή δεν είναι εφαρμόσιμη.

Παράδειγμα 1.3.2 - 2

Να προσδιοριστεί με τη διακριτή μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων το πολυώνυμο 2ου βαθμού που προσεγγίζει τα δεδομένα του Παραδείγματος 1.3.2 - 1.

Λύση. Επειδή ο αριθμός των σημείων είναι $n = 4$, σύμφωνα με τη συνθήκη (1.3.2 – 10) ο μεγαλύτερος δυνατός βαθμός m του πολυωνύμου θα είναι $m < 4 - 1$, δηλαδή $m = 2$.

Έστω $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ το ζητούμενο πολυώνυμο. Τότε το σύστημα (1.3.2 – 12) γράφεται

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=1}^4 x_i^0 + a_1 \sum_{i=1}^4 x_i^1 + a_2 \sum_{i=1}^4 x_i^2 &= \sum_{i=1}^4 y_i x_i^0 \\ a_0 \sum_{i=1}^4 x_i^1 + a_1 \sum_{i=1}^4 x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^4 x_i^3 &= \sum_{i=1}^4 y_i x_i^1, \\ a_0 \sum_{i=1}^4 x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^4 x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^4 x_i^4 &= \sum_{i=1}^4 y_i x_i^2, \end{aligned}$$

οπότε σύμφωνα με τον Πίνακα 1.3.2 - 2 έχουμε

$$4a_0 + 2.0a_1 + 3.08a_2 = 3.2$$

$$2.0a_0 + 3.08a_1 + 3.62a_2 = -0.8$$

$$3.08a_0 + 3.62a_1 + 5.3732a_2 = -1.28$$

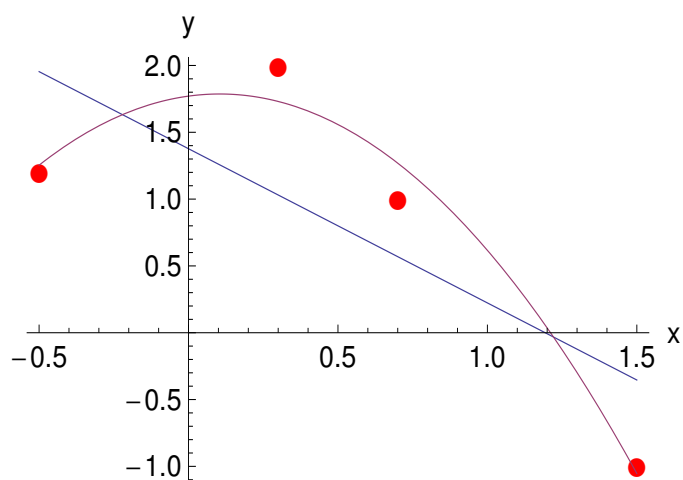
από τη λύση του οποίου προκύπτει ότι το πολυώνυμο είναι (Σχ. 1.3.2 - 3)

$$P_2(x) = -1.4583x^2 + 0.3045x + 1.7707.$$

■

Πίνακας 1.3.2 - 2: Παράδειγμα 1.3.2 - 2.

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 y_i$
-0.5	1.2	-0.6	0.25	-0.125	0.0625	0.30
0.3	2.0	0.6	0.09	0.027	0.0081	0.18
0.7	1.0	0.7	0.49	0.343	0.2401	0.49
1.5	-1.0	-1.5	2.25	3.375	5.0625	-2.25
2.0	3.2	-0.8	3.08	3.62	5.3732	-1.28



Σχήμα 1.3.2 - 3: Παράδειγμα 1.3.2 - 2. Η καμπύλη ορίζεται από το πολυώνυμο $P_2(x) = -1.4583x^2 + 0.3045x + 1.7707$, ενώ η ευθεία (Παράδειγμα 1.3.2 - 1) έχει εξίσωση $y = -1.1539x + 1.3769$.

1.3.3 Απόλυτα ακρότατα

Επεκτείνοντας την έννοια των ακρότατων της Παραγράφου 1.3.1 ζητείται ο υπολογισμός των ακρότατων μιας συνάρτησης, έστω $f(x, y)$, σε μια κλειστή περιοχή,¹⁶ έστω D του πεδίου ορισμού της με $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Τα ακρότατα της περίπτωσης αυτής λέγονται **απόλυτα** και χαρακτηρίζονται στα Μαθηματικά με τον γενικότερο όρο ως πρόβλημα της **βελτιστοποίησης** (mathematical optimization) των τιμών μιας συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της D , όταν $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Η μελέτη βασίζεται στο παρακάτω θεώρημα (extreme value theorem):

Θεώρημα 1.3.3 - 1 *Αν η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι ορισμένη και συνεχής σε μια περιοχή $D \subseteq \mathbb{R}^2$, τότε υπάρχουν σημεία $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$, έτσι ώστε η $f(x_1, y_1)$ να είναι η μέγιστη και η $f(x_2, y_2)$ η ελάχιστη τιμή της f στο D .*

Σημείωση 1.3.3 - 1

Η διαδικασία προσδιορισμού των απόλυτων ακρότατων γίνεται με τα παρακάτω βήματα:

- I. υπολογισμός των κρίσιμων σημείων της f στο D , και¹⁷
- II. εύρεση της μέγιστης, αντίστοιχα ελάχιστης τιμής της f στο σύνορο του D .

Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή των περιπτώσεων (I) και (II) ορίζουν τότε τα απόλυτα ακρότατα της f στο D .

¹⁶Υπενθυμίζεται ότι:

Ορισμός. Μια περιοχή στο \mathbb{R}^2 θα λέγεται **κλειστή**, όταν περιέχει και το σύνορό της, ενώ θα λέγεται **ανοικτή**, όταν δεν το περιέχει.

Επομένως η περιοχή $D = [-1, 1] \times [0, 2]$ είναι κλειστή, ενώ η $D = (-1, 1) \times (0, 2)$ ανοικτή.

Ορισμός. Μια περιοχή στο \mathbb{R}^2 θα λέγεται **φραγμένη**, όταν είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι ανήκει σε έναν πεπερασμένο δίσκο.

¹⁷ Δεν απαιτείται η εφαρμογή του Θεωρήματος 1.3.1 - 3 στην περίπτωση αυτή.

Παράδειγμα 1.3.3 - 1

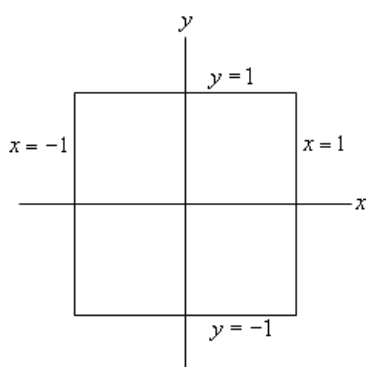
Να υπολογιστούν τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2x^2y + 4$$

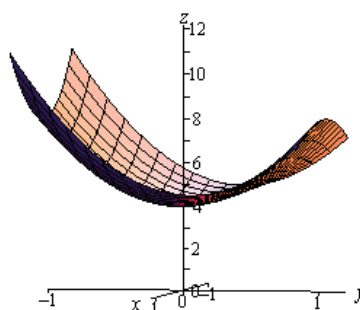
στο τετράγωνο (Σχ. 1.3.3 - 1a)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \text{ και } -1 \leq y \leq 1\}.$$

Λύση. Σύμφωνα με τη Σημείωση 1.3.3 - 1 έχουμε:



(a)



(b)

Σχήμα 1.3.3 - 1: Παράδειγμα 1.3.3 - 1: (a) το τετράγωνο $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \text{ και } -1 \leq y \leq 1\}$ και (b) το διάγραμμα της $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2x^2y + 4$, όταν $(x, y) \in D$.

βήμα I: Από τον τύπο (1.3.1 - 2) προκύπτει το σύστημα

$$f_x = 2x - 4xy = 0$$

$$f_y = 8y - 2x^2 = 0.$$

Τότε από την 2η εξίσωση προκύπτει $y = \frac{x^2}{4}$, οπότε αντικαθιστώντας στην 1η έχουμε

$$x - 4x \frac{x^2}{4} = 2x - x^3 = x(2 - x^2) = 0, \quad \text{δηλαδή } x = 0, \pm\sqrt{2}.$$

Επειδή όμως πρέπει οι τιμές να ανήκουν στο D , δεκτή γίνεται μόνον η τιμή $x = 0$. Αντικαθιστώντας την τιμή $x = 0$ στη 2η εξίσωση του συστήματος προκύπτει ότι $y = 0$. Άρα το κρίσιμο σημείο της f είναι το

$$P(0,0) \text{ με αντίστοιχη τιμή } f(0,0) = 4. \quad (1)$$

βήμα II: Η εύρεση της μέγιστης, αντίστοιχα ελάχιστης τιμής της f στο σύνορο του D γίνεται ως εξής:

i) $x = 1$, $-1 \leq y \leq 1$, οπότε $f(1,y) = g_1(y) = 4y^2 - 2y + 5$. Τότε $g_1'(y) = 8y - 2$, οπότε το κρίσιμο σημείο της g_1 υπολογίζεται από την εξίσωση $g_1'(y) = 0$, δηλαδή είναι το $y = \frac{1}{4} \in D$. Άρα για την περίπτωση αυτή έχουμε

$$P_1 \left(1, \frac{1}{4} \right), \quad f \left(1, \frac{1}{4} \right) = g_1 \left(\frac{1}{4} \right) = 4.75. \quad (2)$$

ii) $x = -1$, $-1 \leq y \leq 1$, οπότε $f(-1,y) = g_2(y) = 4y^2 - 2y + 5 = g_1(y)$, δηλαδή είναι η περίπτωση (i).

iii) $y = 1$, $-1 \leq x \leq 1$, οπότε $f(x,1) = f_1(x) = 8 - x^2$. Τότε $f_1'(x) = -2x$, οπότε το κρίσιμο σημείο της f_1 υπολογίζεται από την εξίσωση $f_1'(x) = 0$, δηλαδή είναι το $x = 0 \in D$. Άρα έχουμε

$$P_2(0,1), \quad f(0,1) = f_1(0) = 8. \quad (3)$$

iv) $y = -1$, $-1 \leq x \leq 1$, οπότε $f(x,-1) = f_2(x) = 8 + 3x^2$. Τότε $f_2'(x) = 6x$, οπότε το κρίσιμο σημείο της f_2 όμοια υπολογίζεται ότι είναι το $x = 0 \in D$. Άρα έχουμε

$$P_3(0,-1), \quad f(0,-1) = f_2(0) = 8. \quad (4)$$

v) Στα παραπάνω πιθανά σημεία των απόλυτων ακρότατων πρέπει να συνυπολογιστούν και οι κορυφές του τετραγώνου D , δηλαδή:

σημείο:	$A_1(-1,-1)$	με τιμή	$f(-1,-1) = 11$	(5)
	$A_2(1,-1)$		$f(-1,1) = 11$	
	$A_3(1,1)$		$f(1,1) = 7$	
	$A_4(-1,1)$		$f(-1,1) = 7$	

βήμα III: Από τις (1)-(5) προκύπτουν τα εξής:

- το σημείο $P(0, 0)$ ορίζει το απόλυτο ελάχιστο, επειδή η f έχει τη μικρότερη τιμή 4 από όλες τις άλλες σε αυτό,
- τα σημεία $B_1(-1, -1)$ και $B_2(1, -1)$ ορίζουν τις απόλυτα μέγιστες τιμές, επειδή η f έχει τη μεγαλύτερη τιμή 11 σε αυτά (Σχ. 1.3.3 - 1b). ■

Παράδειγμα 1.3.3 - 2

Όμοια τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x, y) = 2x^2 - y^2 + 6y$$

στον κυκλικό δίσκο

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}.$$

Λύση. Διαδοχικά σύμφωνα και με τη Σημείωση 1.3.3 - 1 έχουμε:

βήμα I: Από τον τύπο (1.3.1 - 2) προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x = 4x &= 0 \\ f_y = -2y + 6 &= 0. \end{aligned}$$

Άρα το κρίσιμο σημείο της f είναι το

$$P(0, 3) \in D \quad \text{με αντίστοιχη τιμή} \quad f(0, 3) = 9. \quad (1)$$

βήμα II: Η εύρεση της μέγιστης, αντίστοιχα ελάχιστης τιμής της f στο σύνορο του D , δηλαδή στην περιφέρεια του κύκλου $x^2 + y^2 = 16$ γίνεται ως εξής:

- i) από την εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$ προκύπτει $x^2 = 16 - y^2$, οπότε αντικαθιστώντας στην f έχουμε

$$g(y) = 2(16 - y^2) - y^2 + 6y = 32 - 3y^2 + 6y.$$

Επομένως το πρόβλημα στην περίπτωση αυτή ανάγεται στην εύρεση των ακρότατων της g , όταν το y ανήκει στον παραπάνω κυκλικό δίσκο, δηλαδή, όταν $-4 \leq y \leq 4$. Τότε $g'(y) = -6y + 6$, οπότε $y = 1$ και επειδή $x^2 = 16 - y^2$, τελικά τα κρίσιμα σημεία για την περίπτωση αυτή είναι:

$$\begin{aligned} \text{σημείο: } P_1(-\sqrt{15}, 1) \in D & \quad \text{με τιμή } f(-\sqrt{15}, 1) = 35 \\ P_2(\sqrt{15}, 1) \in D & \quad f(\sqrt{15}, 1) = 35. \end{aligned} \quad (2)$$

ii) Στα παραπάνω πιθανά σημεία των απόλυτων ακρότατων πρέπει να συνυπολογιστούν και εκείνα που προκύπτουν από τις τιμές στα άκρα του διαστήματος $[-4, 4]$ για τη μεταβλητή y , δηλαδή οι τιμές $y = \pm 4$ όπου προφανώς $x = 0$. Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} \text{σημείο: } A_1(0, -4) & \quad \text{με τιμή } f(0, -4) = -40 \\ A_2(0, 4) & \quad f(0, 4) = 8. \end{aligned} \quad (3)$$

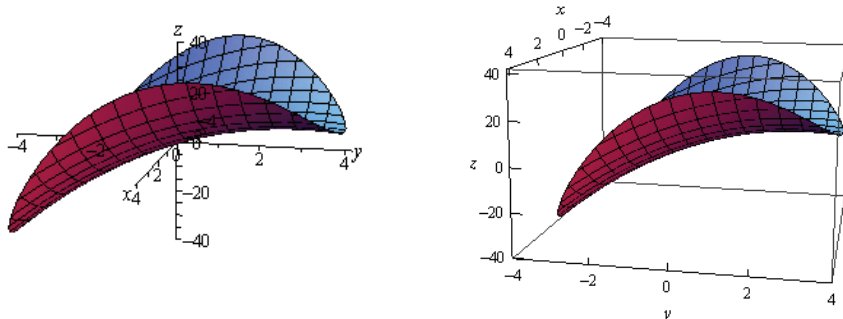
βήμα III: Από τις (1)-(3) προκύπτουν τα εξής:

- το σημείο $A_1(0, -4)$ ορίζει το απόλυτο ελάχιστο, επειδή η f έχει τη μικρότερη τιμή -40 από όλες τις άλλες σε αυτό,
- τα σημεία $P_1(-\sqrt{15}, 1)$ και $P_2(\sqrt{15}, 1)$ ορίζουν τις απόλυτα μέγιστες τιμές, επειδή η f έχει τη μεγαλύτερη τιμή 35 σε αυτά (Σχ. 1.3.3 - 2).

■

1.3.4 Ακρότατα με συνθήκες - Μέθοδος του Lagrange

Στην προηγούμενη παράγραφο μελετήθηκε το πρόβλημα της βελτιστοποίησης των τιμών μιας συνάρτησης, έστω $f(x, y)$, σε μια κλειστή περιοχή του πεδίου ορισμού της f . Γενικεύοντας το παραπάνω πρόβλημα στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί η βελτιστοποίηση μιας συνάρτησης $f(x, y)$, αντίστοιχα $f(x, y, z)$, όταν τα (x, y) , αντίστοιχα τα (x, y, z) επαληθεύουν ορισμένες συνθήκες (constraints) της μορφής $\phi(x, y) = 0$, αντίστοιχα $\phi(x, y, z) = 0$ (coupling equation ή equality constraint). Τα ακρότατα του είδους αυτού είναι γνωστά ως



Σχήμα 1.3.3 - 2: Παράδειγμα 1.3.3 - 2: Δύο διαφορετικές όψεις του διαγράμματος της $f(x, y) = 2x^2 - y^2 + 6y$, όταν $(x, y) \in D$.

ακρότατα με συνθήκη (conditional extremum) και είναι επίσης μια μορφή της με συνθήκη μαθηματικής βελτιστοποίησης μιας συνάρτησης. Η μέθοδος λύσης που θα χρησιμοποιηθεί είναι γνωστή ως **μέθοδος πολλαπλασιαστών του Lagrange** (Lagrange multiplier).¹⁸

Περίπτωση μιας συνθήκης

Ζητείται ο προσδιορισμός των ακρότατων μιας συνάρτησης, έστω $f(x, y)$, αντίστοιχα $f(x, y, z)$, όταν ισχύει η παρακάτω συνθήκη:

$$\phi(x, y) = 0, \quad \text{αντίστοιχα} \quad \phi(x, y, z) = 0. \quad (1.3.4 - 1)$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο του Lagrange ορίζεται αρχικά μία βοηθητική συνάρτηση (auxiliary function)

$$\Lambda(x, y) = f(x, y) + \lambda \phi(x, y), \quad (1.3.4 - 2)$$

αντίστοιχα

$$\Lambda(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda \phi(x, y, z) \quad (1.3.4 - 3)$$

που λέγεται και **συνάρτηση του Lagrange**, στην οποία η παράμετρος λ είναι ένας προσδιοριστέος πολλαπλασιαστής. Επομένως το πρόβλημα ανάγεται

¹⁸Βλέπε βιβλιογραφία και https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_multiplier

πλέον στον προσδιορισμό των ακρότατων της Λ . Έχοντας υπόψη τις (1.3.1 – 1) προκύπτει ότι οι αναγκαίες συνθήκες είναι

$$\begin{aligned}\Lambda_x &= f_x + \lambda\phi_x = 0 \\ \Lambda_y &= f_y + \lambda\phi_y = 0,\end{aligned}\tag{1.3.4 - 4}$$

αντίστοιχα

$$\begin{aligned}\Lambda_x &= f_x + \lambda\phi_x = 0 \\ \Lambda_y &= f_y + \lambda\phi_y = 0 \\ \Lambda_z &= f_z + \lambda\phi_z = 0.\end{aligned}\tag{1.3.4 - 5}$$

Από τη λύση των παραπάνω συστημάτων θα προκύψουν οι άγνωστοι συναρτήσεις του λ , δηλαδή

$$x = x(\lambda), \quad y = y(\lambda) \quad \text{και} \quad z = z(\lambda).$$

Αντικαθιστώντας στην (1.3.4 – 1) προσδιορίζεται τότε το λ και στη συνέχεια οι τιμές x_0 και y_0 , αντίστοιχα x_0 , y_0 και z_0 που επαληθεύουν το σύστημα (1.3.4 – 4), αντίστοιχα (1.3.4 – 5).

Σημείωση 1.3.4 - 1

Όμοια, όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, επειδή λόγω της συνθήκης (1.3.4 – 1) το πεδίο ορισμού της f θα είναι μια φραγμένη περιοχή του \mathbb{R}^2 , αντίστοιχα του \mathbb{R}^3 , θα εφαρμόζεται και στην περίπτωση αυτή το Θεώρημα 1.3.3 - 1. Τότε το σημείο $P(x_0, y_0)$, που προσδιορίζεται με την παραπάνω διαδικασία, θα είναι ακρότατο της $f(x, y)$ με συνθήκη τη $\phi(x, y) = 0$, αντίστοιχα το $P(x_0, y_0, z_0)$ θα είναι ακρότατο της $f(x, y, z)$ με συνθήκη τη $\phi(x, y, z) = 0$. Το είδος του ακρότατου (μέγιστο ή ελάχιστο) υπολογίζεται από τις τιμές τις

$$f(x_0, y_0), \quad \text{αντίστοιχα} \quad f(x_0, y_0, z_0) \quad \text{στο σημείο} \quad P.$$

Παράδειγμα 1.3.4 - 1

Να προσδιοριστούν τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x, y) = xy \quad \text{με συνθήκη} \quad \phi(x, y) = x + y - 1 = 0.$$

Λύση. Σύμφωνα με την (1.3.4 - 2) η συνάρτηση του Lagrange γράφεται

$$\Lambda(x, y) = xy + \lambda(x + y - 1).$$

Τότε από το σύστημα (1.3.4 - 4) προκύπτει

$$\begin{aligned} \Lambda_x = y + \lambda &= 0 & y &= -\lambda \\ \Lambda_y = x + \lambda &= 0, & x &= -\lambda. \end{aligned} \quad \text{οπότε}$$

Αντικαθιστώντας στη συνθήκη

$$\phi(x, y) = x + y - 1 = 0$$

προκύπτει ότι

$$-2\lambda = 1, \quad \text{δηλαδή} \quad \lambda = -\frac{1}{2}.$$

Άρα

$$x = y = \frac{1}{2}, \quad \text{δηλαδή το κρίσιμο σημείο είναι το} \quad P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.3.4 - 1 ο προσδιορισμός του είδους του ακρότατου γίνεται αντικαθιστώντας στην f την τιμή $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, οπότε

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} > 0, \quad \text{δηλαδή} \quad \text{μέγιστο.}$$

■

Παράδειγμα 1.3.4 - 2

Όμοια της συνάρτησης

$$f(x, y) = 5x - 3y \quad \text{με συνθήκη} \quad \phi(x, y) = x^2 + y^2 - 136 = 0.$$

Λύση. Γεωμετρικά στο παραπάνω πρόβλημα ζητείται ο προσδιορισμός των μέγιστων και των ελάχιστων τιμών των συντεταγμένων τομής του επιπέδου $z = f(x, y)$ με τον κύλινδρο $\phi(x, y)$ με βάση κυκλικό δίσκο ακτίνας $\sqrt{136}$.

Σύμφωνα με την (1.3.4-2) η συνάρτηση του Lagrange για την περίπτωση αυτή γράφεται

$$\Lambda(x, y) = 5x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 136).$$

Τότε από το σύστημα (1.3.4-4) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \Lambda_x = 2\lambda x + 5 &= 0 & \text{οπότε} & & x &= -\frac{5}{2\lambda} \\ \Lambda_y = 2\lambda y - 3 &= 0, & & & y &= \frac{3}{2\lambda}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη συνθήκη $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 136 = 0$ προκύπτει

$$\frac{25}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 136 \quad \text{ή} \quad \lambda^2 = \frac{1}{16}, \quad \text{δηλαδή} \quad \lambda = \pm \frac{1}{4}.$$

Επομένως, όταν

$$\lambda = \frac{1}{4} \quad \text{είναι} \quad x = -10 \quad \text{και} \quad y = 6 \quad \text{σημείο} \quad P_1(-10, 6),$$

$$\lambda = -\frac{1}{4} \quad x = 10 \quad \text{και} \quad y = -6 \quad \text{σημείο} \quad P_2(10, -6).$$

Για να προσδιορίσουμε το είδος του ακρότατου, όμοια σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.3.4-1, αντικαθιστούμε τις παραπάνω τιμές στην f , δηλαδή

$$\text{σημείο} \quad P_1(-10, 6): \quad f(-10, 6) = -68 < 0 \quad \text{ελάχιστο},$$

$$P_2(10, -6): \quad f(10, -6) = 68 > 0 \quad \text{μέγιστο.}$$

■

Παράδειγμα 1.3.4 - 3

Όμοια της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = xyz \quad \text{με συνθήκη την} \quad \phi(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0,$$

όταν $x, y, z \geq 0$.

Λύση. Σύμφωνα με την (1.3.4-3) η συνάρτηση του Lagrange γράφεται

$$\Lambda(x, y, z) = xyz + \lambda(x + y + z - 1).$$

Τότε από το σύστημα (1.3.4 – 5) προκύπτει

$$\Lambda_x = yz + \lambda = 0$$

$$\Lambda_y = zx + \lambda = 0$$

$$\Lambda_z = xy + \lambda = 0,$$

που γράφεται

$$yz = -\lambda \quad (1)$$

$$zx = -\lambda \quad (2)$$

$$xy = -\lambda. \quad (3)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$yz = zx \quad \text{ή} \quad z(y - x) = 0,$$

οπότε διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

$$z = 0 \quad \text{ή} \quad (4)$$

$$y = x \quad (5)$$

- Αν ισχύει η (4), τότε από την (1) ή την (2) προκύπτει ότι $\lambda = 0$, οπότε από την (3) έχουμε $xy = 0$, δηλαδή

$$x = 0 \quad \text{ή} \quad y = 0.$$

Συνδυάζοντας τις λύσεις αυτές με τη συνθήκη $\phi(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$ έχουμε

$$z = 0, \quad x = 0, \quad y = 1 \quad \text{σημείο} \quad P_1(0, 1, 0) \quad (6)$$

$$z = 0, \quad y = 0, \quad x = 1 \quad \text{σημείο} \quad P_2(1, 0, 0) \quad (7)$$

- Αν ισχύει η (5), τότε έχουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

- i) $x = y = 0$. Όμοια συνδυάζοντας τις λύσεις αυτές με τη συνθήκη $\phi(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$, προκύπτει $z = 1$, δηλαδή το σημείο

$$P_3(0, 0, 1). \quad (8)$$

ii) $x = y \neq 0$. Τότε από τις (2) και (3) προκύπτει ότι

$$xz = xy \quad \text{ή} \quad x(z - y) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad y = z$$

και επειδή $x \neq 0$, πρέπει $y = z$. Άρα τελικά $x = y = z$. Τότε όμοια από τη συνθήκη $\phi(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$ έχουμε

$$3x = 1, \quad \text{δηλαδή} \quad x = \frac{1}{3} \quad \text{σημείο} \quad P_4 \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \quad (9)$$

Για να προσδιορίσουμε το είδος του ακρότατου στις περιπτώσεις (6)-(9), όμοια σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.3.4 - 1, αντικαθιστούμε τις τιμές στην f , οπότε στα αντίστοιχα σημεία έχουμε

$$f(0, 0, 1) = 0, \quad f(0, 1, 0) = 0, \quad f(1, 0, 0) = 0 \quad \text{ελάχιστα,}$$

$$f \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{27} \quad \text{μέγιστο.}$$

Σημείωση: στο παράδειγμα αυτό εξετάστηκε και η τιμή $\lambda = 0$. ■

Παράδειγμα 1.3.4 - 4

Να προσδιοριστούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με τον μέγιστο δυνατό όγκο, όταν το εμβαδόν της επιφάνειάς του είναι 64 cm^2 .

Λύση. Έστω x το μήκος, y το πλάτος και z το ύψος όπου $x, y, z > 0$. Τότε είναι γνωστό ότι ο όγκος V δίνεται από τον τύπο

$$V = xyz,$$

ενώ το εμβαδόν από τον

$$E = 2(xy + yz + zx).$$

Επομένως το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό των ακρότατων της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = xyz \quad \text{με συνθήκη} \quad \phi(x, y, z) = 2(xy + yz + zx) - 64 = 0,$$

δηλαδή

$$f(x, y, z) = xyz \quad \text{με συνθήκη} \quad \phi(x, y, z) = xy + yz + zx - 32 = 0,$$

Σύμφωνα με την (1.3.4 – 3) η συνάρτηση του Lagrange γράφεται

$$\Lambda(x, y, z) = xyz + \lambda(xy + yz + zx - 32).$$

Τότε από το σύστημα (1.3.4 – 5) προκύπτει

$$\Lambda_x = yz + \lambda(y + z) = 0$$

$$\Lambda_y = zx + \lambda(z + x) = 0$$

$$\Lambda_z = xy + \lambda(x + y) = 0$$

που γράφεται

$$yz = -\lambda(y + z) \quad (1)$$

$$zx = -\lambda(z + x) \quad (2)$$

$$xy = -\lambda(x + y). \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) με x , την (2) με y και την (3) με z προκύπτει

$$xyz = -\lambda(y + z)x \quad (4)$$

$$xyz = -\lambda(z + x)y \quad (5)$$

$$xyz = -\lambda(x + y)z \quad (6)$$

Από τις (5) και (6) έχουμε

$$-\lambda(y + z) = -\lambda(z + x), \quad \text{δηλαδή} \quad \lambda(xz - yz) = 0,$$

οπότε ή

- $\lambda = 0$ που απορρίπτεται, επειδή τότε $yz = 0$, οπότε ή $y = 0$ ή $z = 0$ άτοπο,
- $xz - yz = 0$ που, επειδή $z \neq 0$, δίνει

$$x = y. \quad (7)$$

Όμοια από τις (6) και (7) προκύπτει ότι

$$y = z. \quad (8)$$

Άρα

$$x = y = z$$

και αντικαθιστώντας στην (4), δηλαδή στη συνθήκη

$$\phi(x, y, z) = xy + yz + zx - 32 = 3x^2 - 32 = 0,$$

επειδή $x, y, z > 0$, προκύπτει ότι η λύση είναι

$$x_0 = y_0 = z_0 = \sqrt{\frac{32}{3}},$$

δηλαδή υπάρχει ακρότατο στο σημείο

$$P(x_0, y_0, z_0) \quad \text{με τιμή} \quad f(x_0, y_0, z_0) \approx 10.67 > 0,$$

οπότε σύμφωνα και με την Παρατήρηση 1.3.4 - 1 έχουμε **μέγιστο**. ■

Παράδειγμα 1.3.4 - 5

Όμοια να προσδιοριστούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπίδου με τον μέγιστο δυνατό όγκο, που περικλείεται από το ελλειψοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Λύση. Όπως προκύπτει από την εξίσωση του ελλειψοειδούς, το κέντρο του είναι το σημείο $(0, 0, 0)$. Επομένως το ίδιο σημείο θα πρέπει να είναι και το κέντρο του ορθογωνίου παραλληλεπίδου, οπότε οι κορυφές του θα είναι στα σημεία $(\pm x, \pm y, \pm z)$ όπου $x, y, z > 0$, οπότε ο όγκος του στην περίπτωση αυτή θα δίνεται από τον τύπο

$$V = 2x \cdot 2y \cdot 2z = 8xyz.$$

Άρα το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό των ακρότατων της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = 8xyz \quad \text{με συνθήκη την} \quad \phi(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Σύμφωνα με την (1.3.4 – 3) η συνάρτηση του Lagrange γράφεται

$$\Lambda(x, y, z) = 8xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right),$$

οπότε από το σύστημα (1.3.4 – 5) προκύπτει

$$\Lambda_x = 8yz + 2\lambda \frac{x}{a^2} = 0$$

$$\Lambda_y = 8zx + \lambda \frac{y}{b^2} = 0$$

$$\Lambda_z = 8xy + \lambda \frac{z}{c^2} = 0.$$

Λύνοντας ως προς λ τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε

$$\lambda = -4a^2 \frac{yz}{x} = -4b^2 \frac{zx}{y} = -4c^2 \frac{xy}{z},$$

οπότε

$$y^2 a^2 = x^2 b^2 \quad \text{και} \quad z^2 b^2 = y^2 c^2, \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}. \quad (1)$$

Τότε αντικαθιστώντας στη συνθήκη

$$\phi(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

προκύπτει

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3 \frac{x^2}{a^2}, \quad \text{οπότε} \quad x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Επειδή $x > 0$, προκύπτει ότι $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, οπότε τελικά από την (1) έχουμε ακρότατο στο σημείο

$$P \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}} \right) \quad \text{με} \quad \text{μέγιστο} \quad \text{όγκο} \quad V(P) = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}.$$

Σημείωση: στο παράδειγμα αυτό δεν απαιτήθηκε ο υπολογισμός του λ . ■

Περίπτωση δύο συνθηκών

¹⁹Ζητείται ο προσδιορισμός των πιθανών ακρότατων μιας συνάρτησης $f(x, y, z)$, όταν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

$$g(x, y, z) = 0, \quad \text{αντίστοιχα} \quad h(x, y, z) = 0. \quad (1.3.4 - 24)$$

Όμοια, όπως και στην περίπτωση της μιας συνθήκης, με τη μέθοδο του Lagrange ορίζεται η συνάρτηση

$$\Lambda(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z) \quad (1.3.4 - 25)$$

στην οποία οι παράμετροι λ, μ είναι προσδιοριστέοι πολλαπλασιαστές, οπότε το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό των ακρότατων της Λ . Έχοντας υπόψη τις (1.3.1 – 1) προκύπτει ότι οι αναγκαίες συνθήκες είναι

$$\begin{aligned} \Lambda_x &= f_x + \lambda g_x + \mu h_x = 0 \\ \Lambda_y &= f_y + \lambda g_y + \mu h_y = 0 \\ \Lambda_z &= f_z + \lambda g_z + \mu h_z = 0. \end{aligned} \quad (1.3.4 - 26)$$

Από τη λύση του παραπάνω συστήματος θα προκύψουν οι άγνωστοι συναρτήσει των λ, μ , δηλαδή $x = x(\lambda, \mu)$, $y = y(\lambda, \mu)$ και $z = z(\lambda, \mu)$. Αντικαθιστώντας στην (1.3.4 – 24) προσδιορίζονται τα λ, μ και στη συνέχεια οι τιμές x_0, y_0 και z_0 που επαληθεύουν το σύστημα (1.3.4 – 26).

Άσκηση

Να προσδιοριστούν τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

- i) $x^2 + y^2$ με συνθήκη την $x + y = 1$,
- ii) $x + 2y$ με $x^2 + y^2 = 5$,
- iii) $\cos^2 x + \cos^2 y$ με $x - y = -\frac{\pi}{4}$,
- iv) $x + y - z - 4$ με $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$.

¹⁹Για εφαρμογές και γενίκευση του προβλήματος βλέπε βιβλιογραφία.

Απαντήσεις

$$(i) \Lambda(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1), \quad \Lambda_x = 2x + \lambda, \quad \Lambda_y = 2y + \lambda, \quad \lambda = -1,$$

σημείο $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ max,

$$(ii) \Lambda(x, y) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5), \quad \Lambda_x = 1 + 2x\lambda, \quad \Lambda_y = 2 + 2y\lambda, \quad \lambda = \pm\frac{1}{2},$$

σημεία: $P_1(-1, -2)$ min και $P_2(1, 2)$ max,

$$(iii) \Lambda(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y + \lambda\left(x - y + \frac{\pi}{4}\right), \quad \Lambda_x = \lambda - \sin 2x, \quad \text{οπότε } x = \frac{1}{2} \sin^{-1} \lambda,$$

$$\Lambda_y = -\lambda - \sin 2y, \quad \text{οπότε } y = -\frac{1}{2} \sin^{-1} \lambda, \quad \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{σημείο } P\left(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right) \text{ max,}$$

$$(iv) \Lambda(x, y, z) = x + y - z - 4 + \lambda\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} - 1\right), \quad \Lambda_x = 1 + \frac{1}{2}x\lambda, \quad \Lambda_y = 1 + \frac{2}{9}y\lambda, \quad \Lambda_z = -1 + \frac{1}{8}z\lambda, \quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{29}}{2},$$

σημεία: $P_1\left(-\frac{4}{\sqrt{29}}, -\frac{9}{\sqrt{29}}, \frac{16}{\sqrt{29}}\right)$ min και $P_2\left(\frac{4}{\sqrt{29}}, \frac{9}{\sqrt{29}}, -\frac{16}{\sqrt{29}}\right)$ max.

1.4 Βιβλιογραφία

- [1] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960-351-453-5/978-960-351-453-4.
- [2] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Αθήνα: Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978-960-351-874-7.
- [3] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός II*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978-960-524-184-1.
- [4] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960-418-087-8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- <http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm>
- <http://mathworld.wolfram.com/>
- <http://eom.springer.de/>

Μάθημα 2

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

2.1 Εισαγωγικές έννοιες

Από την Άλγεβρα είναι γνωστή η έννοια της αλγεβρικής εξίσωσης ή και του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων. Στις εξισώσεις ή και τα συστήματα αυτά οι άγνωστοι υπολογίζονται τότε στο σύνολο των πραγματικών ή γενικότερα των μιγαδικών αριθμών.

Υπάρχουν όμως προβλήματα καθαρά μαθηματικά, αλλά και γενικότερα των εφαρμοσμένων επιστημών, που οδηγούν σε εξισώσεις, όπου οι παρουσιαζόμενες άγνωστες συναρτήσεις της μιας ή περισσότερων μεταβλητών, εμφανίζονται με τις παραγώγους τους διαφόρων τάξεων. Οι εξισώσεις αυτές λέγονται τότε **διαφορικές εξισώσεις** (differential equations). Οι διαφορικές εξισώσεις που οι άγνωστες συναρτήσεις εξαρτώνται από μία μεταβλητή, λέγονται **συνήθεις διαφορικές εξισώσεις** (ΣΔΕ), ενώ εκείνες που εξαρτώνται από περισσότερες της μιας μεταβλητές λέγονται **διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους** (ΜΔΕ).

Επομένως η εξίσωση

•

$$y' + xy + \sin 2x = 0,$$

όπου η άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$ εξαρτάται από μια μεταβλητή, την x και εμφανίζεται με την πρώτη παράγωγό της είναι μία συνήθης διαφορική εξίσωση 1ης τάξης,

•

$$x^2 y''' + xy' + (x^2 - y^2)y + e^x = 0,$$

όπου $y = y(x)$, είναι όμοια μία συνήθης διαφορική εξίσωση 3ης τάξης, ενώ

•

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,$$

όπου η άγνωστη συνάρτηση $u = u(x, t)$ εξαρτάται από τις μεταβλητές x και t , είναι μία διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους 2ης τάξης ως προς x και t .

Στο μάθημα αυτό θα εξεταστούν μόνον οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και από την κατηγορία αυτή μόνον αυτές που έχουν άμεσο ενδιαφέρον στις τεχνολογικές εφαρμογές.¹

2.1.1 Ορισμοί και σχετικά θεωρήματα

Ορισμός 2.1.1 - 1. Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης ν -τάξης είναι

$$F(x, y, y', \dots, y^{(\nu)}) = 0, \quad (2.1.1 - 1)$$

όπου $y = y(x) | (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ μία άγνωστη προσδιοριστέα συνάρτηση και η $y^{(k)}(x) | (a, b)$ για κάθε $k = 1, 2, \dots, \nu$ συμβολίζει την k -τάξης παράγωγο της y .

Αν υπάρχει συνάρτηση $y(x)$, που να επαληθεύει την (2.1.1 - 1), τότε αυτή θα λέγεται **γενική λύση** ή και **ολοκληρωτική καμπύλη** της.

¹Ο αναγνώστης για εκτενέστερη μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 5, 6], στο βιβλίο Α. Μπράτσος [4] Κεφ. 12 και στη διεύθυνση https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_theorem.

Αποδεικνύεται ότι η γενική λύση της (2.1.1 – 1) έχει γενικά τη μορφή

$$y(x) = \varphi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_\nu), \quad (2.1.1 - 2)$$

όπου c_1, c_2, \dots, c_ν αυθαίρετες σταθερές, δηλαδή η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.1.1 – 1) περιέχει τόσες αυθαίρετες σταθερές όσες και η τάξη της.

Στη γενική λύση (2.1.1 – 2) οι ν το πλήθος σταθερές c_1, c_2, \dots, c_ν προσδιορίζονται, όταν δοθούν σε ένα σημείο του πεδίο ορισμού, έστω το $x_0 \in (a, b)$, οι παρακάτω ν - **αρχικές συνθήκες**:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \dots, \quad y^{(\nu-1)}(x_0) = y_0^{(\nu-1)}. \quad (2.1.1 - 3)$$

Τότε, επειδή $y(x) = \varphi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_\nu)$, από την (2.1.1–2) παραγωγίζοντας την $y(x)$ στο σημείο x_0 διαδοχικά μέχρι και την $\nu - 1$ τάξη και λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες (2.1.1 – 3) προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} y_0 &= \varphi(x_0, c_1, c_2, \dots, c_\nu) \\ y_0' &= \varphi_{x'}(x_0, c_1, c_2, \dots, c_\nu) \\ &\dots \\ y_0^{(\nu-1)} &= \varphi_{x^{(\nu-1)}}(x_0, c_1, c_2, \dots, c_\nu). \end{aligned} \quad (2.1.1 - 4)$$

Το σύστημα (2.1.1 – 4) έχει ν - εξισώσεις με ν - αγνώστους τις σταθερές c_1, c_2, \dots, c_ν . Η αντικατάσταση των τιμών των σταθερών που προσδιορίζονται από τη λύση του συστήματος (2.1.1–4) στην $y(x)$ ορίζει τότε τη **μερική λύση** της (2.1.1 – 1).

Ορισμός 2.1.1 - 2 (πρόβλημα αρχικής τιμής). Η διαφορική εξίσωση (2.1.1–1) με τις αρχικές συνθήκες (2.1.1 – 3), δηλαδή η

$$\begin{aligned} y^{(\nu)} &= f(x, y, y', \dots, y^{(\nu-1)}) \quad \text{με τις} \\ y^{(i)}(x_0) &= y_0^{(i)} \quad \text{για κάθε } i = 0, 1, \dots, \nu - 1, \end{aligned} \quad (2.1.1 - 5)$$

ορίζει ένα πρόβλημα αρχικής τιμής (*initial value problem* ή *IVP*) ν - τάξης.

Παράδειγμα 2.1.1 - 1

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y' - 2y = 0, \quad \text{όπου } y = y(x).$$

Λόγω της ύπαρξης της $y''(x)$ η διαφορική εξίσωση είναι τάξης $\nu = 2$, οπότε η γενική της λύση σύμφωνα με την (2.1.1 - 2) θα είναι της μορφής $y(x) = \varphi(x, y, c_1, c_2)$, όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές. Αποδεικνύεται ότι η γενική της λύση είναι στην περίπτωση αυτή

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}.$$

Έστω τώρα ότι ζητείται η μερική λύση, που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες:

i) $y(0) = 1, y'(0) = -2$, αντίστοιχα

ii) $y(0) = 2, y'(0) = 3$.

Λύση. Σύμφωνα και με την (2.1.1 - 3) έχουμε

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}, \quad \text{οπότε } y'(x) = c_1 e^x - 2c_2 e^{-2x}.$$

Επειδή στην περίπτωση αυτή οι αρχικές συνθήκες δίνονται στο σημείο $x_0 = 0$, θέτοντας $x = 0$ στις $y(x)$ και $y'(x)$ προκύπτει σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες (i), αντίστοιχα (ii) το σύστημα:

i)

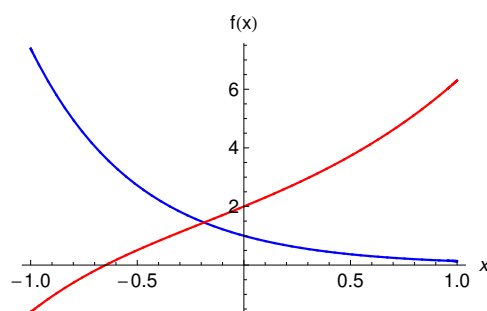
$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ c_1 - 2c_2 &= -2, \end{aligned} \quad \text{οπότε } c_1 = 0 \text{ και } c_2 = 1,$$

δηλαδή η μερική λύση είναι η $y = e^{-2x}$ (Σχ. 2.1.1 - 1) - μπλε καμπύλη, αντίστοιχα

ii)

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 2 \\ c_1 - 2c_2 &= 3, \end{aligned} \quad \text{οπότε } c_1 = \frac{7}{3} \text{ και } c_2 = -\frac{1}{3},$$

με μερική λύση $y = \frac{7}{3} e^x - \frac{1}{3} e^{-2x}$ (Σχ. 2.1.1 - 1) - κόκκινη καμπύλη.



Σχήμα 2.1.1 - 1: Παράδειγμα 2.1.1 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x)$, όταν $x \in [-1, 1]$ στην περίπτωση (i) μπλε και (ii) κόκκινη καμπύλη.

²Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στις εφαρμογές παρουσιάζει μια ειδική κατηγορία διαφορικών εξισώσεων, που είναι γνωστή ως **γραμμικές διαφορικές εξισώσεις** (linear differential equations). Οι εξισώσεις αυτές ορίζονται στη συνέχεια.

Ορισμός 2.1.1 - 3 (μη ομογενής γραμμική). Μία διαφορική εξίσωση που γράφεται στη μορφή

$$y^{(\nu)} + f_{\nu-1}(x)y^{(\nu-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = r(x), \quad (2.1.1 - 6)$$

όπου η $r(x)$ και οι συντελεστές $f_0(x)$, $f_1(x)$, \dots , $f_{\nu-1}(x)$ είναι γνωστές συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς για κάθε $x \in (a, b)$, λέγεται μη ομογενής γραμμική (nonhomogeneous linear) διαφορική εξίσωση ν -τάξης.

Ενδεικτικά, στα προβλήματα του ηλεκτρισμού, η $r(x)$ ορίζει την είσοδο (source term).

Ορισμός 2.1.1 - 4 (μη γραμμική). Λέγεται μη γραμμική (nonlinear) διαφορική εξίσωση, κάθε διαφορική εξίσωση, που δεν είναι δυνατόν να γραφεί στη μορφή (2.1.1 - 6).

Ορισμός 2.1.1 - 5 (ομογενής γραμμική). Ορίζεται ως ομογενής γραμμική (homogeneous linear) διαφορική εξίσωση ν -τάξης, κάθε διαφορική εξίσωση

²Βλέπε βιβλιογραφία και:

https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_differential_equation

της μορφής (2.1.1 - 6) με $r(x) = 0$, δηλαδή η

$$y^{(\nu)} + f_{\nu-1}(x)y^{(\nu-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0. \quad (2.1.1 - 7)$$

Αποδεικνύεται το παρακάτω σημαντικό θεώρημα:

Θεώρημα 2.1.1 - 1 Αν y_h είναι η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (2.1.1 - 7) και y_p μία μερική (particular) λύση της μη ομογενούς (2.1.1 - 6), τότε η γενική λύση της (2.1.1 - 6) είναι

$$y = y_h + y_p. \quad (2.1.1 - 8)$$

Σημείωση 2.1.1 - 1

Η μερική λύση y_p , σε αντίθεση με τη λύση y_h της ομογενούς, **δεν** περιέχει σταθερές.

Ορισμός 2.1.1 - 6. Ορίζεται ως μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση ν -τάξης με σταθερούς συντελεστές, κάθε εξίσωση της μορφής (2.1.1-6), όπου οι συναρτήσεις $f_k(x)$ είναι σταθερές για κάθε $k = 0, 1, \dots, \nu - 1$, δηλαδή η

$$y^{(\nu)} + a_{\nu-1}y^{(\nu-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = r(x), \quad (2.1.1 - 9)$$

όταν a_k σταθερές για κάθε $k = 0, 1, \dots, \nu - 1$.

Ορισμός 2.1.1 - 7. Ορίζεται ως ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση ν -τάξης με σταθερούς συντελεστές, κάθε εξίσωση της μορφής (2.1.1 - 9), όπου $r(x) = 0$, δηλαδή η

$$y^{(\nu)} + a_{\nu-1}y^{(\nu-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0, \quad (2.1.1 - 10)$$

όταν a_k σταθερές για κάθε $k = 0, 1, \dots, \nu - 1$.

Στην περίπτωση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (2.1.1 - 10) η λύση της προσδιορίζεται θέτοντας

$$y = e^{\lambda x} \quad \text{με } \lambda \text{ σταθερά.} \quad (2.1.1 - 11)$$

Τότε

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \quad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad y^{(\nu)}(x) = \lambda^\nu e^{\lambda x},$$

οπότε, επειδή προφανώς $e^{\lambda x} \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αντικαθιστώντας στην (2.1.1 – 10) προκύπτει τελικά ότι

$$\lambda^\nu + a_{\nu-1}\lambda^{\nu-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0. \quad (2.1.1 - 12)$$

Η (2.1.1 – 12) είναι η **χαρακτηριστική εξίσωση** (characteristic ή auxiliary equation) της (2.1.1 – 10) και από τη λύση της προκύπτουν οι ν - το πλήθος ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$, που ορίζουν τις τιμές του λ στην (2.1.1 – 11). Σύμφωνα με την (2.1.1 – 2) αποδεικνύεται ότι η γενική λύση της (2.1.1 – 10), όταν οι ρίζες είναι απλές, είναι της μορφής

$$y_h(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_\nu e^{\lambda_\nu x}, \quad (2.1.1 - 13)$$

ενώ όταν μια ρίζα, έστω η λ , έχει πολλαπλότητα ρ με $\rho \leq \nu$, τότε

$$y_h(x) = (c_1 + \dots + c_\rho) e^{\lambda x} + c_{\rho+1} e^{\lambda \rho+1 x} + \dots + c_\nu e^{\lambda_\nu x}. \quad (2.1.1 - 14)$$

Εφαρμογές της παραπάνω θεωρίας στις περιπτώσεις των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 1ης και 2ης τάξης θα δοθούν στις επόμενες παραγράφους.

2.2 Διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης

2.2.1 Ορισμοί

Ορισμός 2.2.1 - 1. Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης είναι

$$F(x, y, y') = 0, \quad (2.2.1 - 1)$$

όπου η άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$ ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ και υπάρχει η $y'(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Τότε η λύση $y(x)$, εφόσον είναι δυνατόν να προσδιοριστεί, θα ορίζει τη λύση της (2.2.1 – 1).

Ορισμός 2.2.1 - 2. Μια διαφορική εξίσωση 1ης τάξης της μορφής (2.2.1-1) θα λέγεται ότι γράφεται σε **λυμένη μορφή** (explicit formula), όταν

$$y' = f(x, y). \quad (2.2.1 - 2)$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση η (2.2.1 - 1) θα λέγεται ότι ορίζεται με **πεπλεγμένη μορφή** (implicit formula).

Ως ειδική περίπτωση του Ορισμού 2.1.1 - 2 δίνεται ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός 2.2.1 - 3. Μία λυμένη διαφορική εξίσωση 1ης τάξης, που επαληθεύει μία αρχική τιμή, δηλαδή η

$$y' = f(x, y) \quad \text{με} \quad y_0 = y(x_0), \quad (2.2.1 - 3)$$

θα λέγεται ότι ορίζει ένα **πρόβλημα αρχικής τιμής** (initial value problem) 1ης τάξης.

Εξετάζεται στη συνέχεια μια ειδική κατηγορία των διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης, που είναι απαραίτητη για τα επόμενα.

2.2.2 Διαφορικές εξισώσεις χωρισμένων μεταβλητών

Ορισμός 2.2.2 - 1. Κάθε διαφορική εξίσωση της μορφής³

$$g(y) y' = f(x), \quad \text{με} \quad x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \quad \text{και} \quad y = y(x) \in (\gamma, \delta) \subseteq \mathbb{R} \quad (2.2.2 - 1)$$

λέγεται ότι ορίζει μια διαφορική εξίσωση με **χωρισμένες μεταβλητές**.

Είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη από τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης ο συμβολισμός

$$y' = y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}, \quad \text{οπότε} \quad dy(x) = y'(x) dx.$$

Επομένως το κλάσμα $dy(x)/dx$ είναι δυνατόν να θεωρηθεί ως το πηλίκο των διαφορικών $dy(x)$ και dx , οπότε η (2.2.2 - 1) γράφεται

$$g(y) y' = f(x) \quad \text{γράφεται} \quad g(y) dy = f(x) dx,$$

³Βλέπε επίσης [http : //en.wikipedia.org/wiki/Separation_of_variables](http://en.wikipedia.org/wiki/Separation_of_variables)

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης προκύπτει τελικά ότι

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c, \quad (2.2.2 - 2)$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά. Αν υποθεθεί ότι οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς, τότε τα ολοκληρώματα στην (2.2.2 – 2) υπάρχουν, οπότε από τον υπολογισμό τους προκύπτει η γενική λύση της (2.2.2 – 1).

Παρατηρήσεις 2.2.2 - 1

Από την (2.2.2 – 2) προκύπτουν τα εξής:

- i) η σταθερά c συμπεριλαμβάνει τις σταθερές που προκύπτουν από την ολοκλήρωση του αριστερού και του δεξιού μέλους. Επομένως **δεν** απαιτείται στην (2.2.2 – 2) η πρόσθεση άλλων σταθερών.
- ii) Μετά τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων, θα πρέπει η (2.2.2 – 2) να λυθεί ως προς y . Αν αυτό δεν είναι δυνατόν, τότε λέγεται ότι η λύση της (2.2.2 – 1) δίνεται με **πεπλεγμένη μορφή**.
- iii) Αν κάποιο από τα ολοκληρώματα στην (2.2.2–2) δεν υπολογίζεται, τότε αναζητούνται προσεγγιστικές λύσεις⁴ της (2.2.2 – 2).
- iv) Έστω ότι για την αναγωγή της (2.2.2 – 1) στη μορφή (2.2.2 – 2) απαιτείται η διαίρεση με το y , οπότε πρέπει να υποθεθεί $y \neq 0$. Τότε, αν στη γενική λύση η τιμή $y = 0$ δεν συμπεριλαμβάνεται, θα λέγεται ότι η $y = 0$ είναι μια **ιδιόζουσα** ή **προφανής λύση** (trivial solution) της (2.2.2 – 1).

Παράδειγμα 2.2.2 - 1

⁴Βλέπε βιβλιογραφία: Προσεγγιστική λύση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων και βιβλίο Α. Μπράτσος [3] Κεφ. 10.

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$y y' + 4x = 0 \quad (1)$$

που διαδοχικά γράφεται

$$y \frac{dy}{dx} + 4x = 0 \quad \text{ή} \quad y dy = -4x dx,$$

οπότε ολοκληρώνοντας

$$\frac{y^2}{2} = -4 \frac{x^2}{2} + c,$$

όταν c μια αυθαίρετη σταθερά. Άρα έχουμε την παρακάτω με πεπλεγμένη μορφή γενική λύση της (1)

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = c. \quad (2)$$

Η (2) για τις διάφορες τιμές της σταθεράς c παριστάνει μια οικογένεια ελλείψεων (Σχ. 2.2.2 - 1).

Παράδειγμα 2.2.2 - 2

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$(x^2 + 1) y' - y^2 = 0 \quad \text{όπου} \quad y_0 = y(0) = 1. \quad (3)$$

Λύση. Είναι $1 + x^2 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Υποθέτοντας ότι $y \neq 0$ η (3) γράφεται

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{1 + x^2},$$

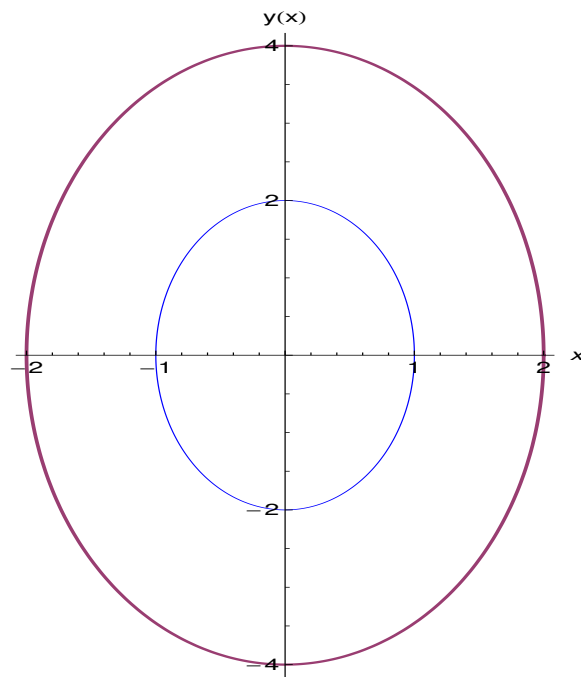
οπότε ολοκληρώνοντας

$$-\frac{1}{y} = \tan^{-1} x + c,$$

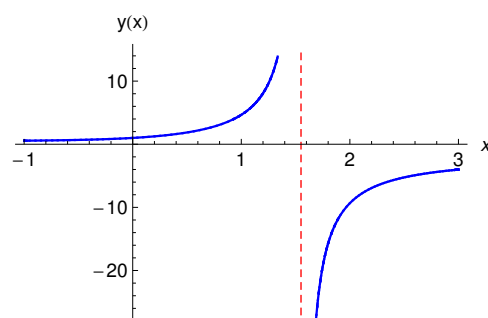
όταν c αυθαίρετη σταθερά.

Επομένως η γενική λύση της (3) είναι

$$y = -\frac{1}{\tan^{-1} x + c}. \quad (4)$$



Σχήμα 2.2.2 - 1: Παράδειγμα 2.2.2 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x)$, όταν $c = 1$ μπλε και $c = 4$ κόκκινη έλλειψη.



Σχήμα 2.2.2 - 2: Παράδειγμα 2.2.2 - 2: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x)$, όταν $x \in [-2, 5]$ με κάθετη ασύμπτωτη (διακεκομμένη ευθεία) την $x \approx 1.5574$.

Σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 2.2.2 - 1 (iv), επειδή για την εύρεση της γενικής λύσης έχει υποθεθεί $y \neq 0$, εξετάζεται αν η $y = 0$ συμπεριλαμβάνεται στη γενική λύση (4). Επειδή αυτό δεν συμβαίνει, η $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (3).

Υπολογισμός μερικής λύσης

Σύμφωνα με την (3) η αρχική συνθήκη είναι $y(0) = 1$. Τότε από την (4) έχουμε

$$1 = - \frac{1}{\underbrace{\tan^{-1} 0}_0 + c}, \quad \text{δηλαδή} \quad c = -1.$$

Άρα η μερική λύση της (3) είναι

$$y = \frac{1}{1 - \tan^{-1} x} \quad (5)$$

με $1 - \tan^{-1} x \neq 0$, δηλαδή $x \neq 1.5574$ - κάθετη ασύμπτωτη στο Σχ. 2.2.2 - 2. ■

Η εύρεση της γενικής λύσης του Παραδείγματος 2.2.2 - 2 με το MATHEMATICA γίνεται με την εντολή:

Πρόγραμμα 2.2.2 - 1 (λύση διαφορικής εξίσωσης)

```
DSolve[(x^2+1)y'[x]-(y[x])^2==0,y[x],x]
```

ενώ της μερικής λύσης με την:

`DSolve[{(x^2+1)y'[x]-(y[x])^2==0,y[0]==1},y[x],x]`

Παρατήρηση 2.2.2 - 1

Πολλές φορές για να απλουστεύσουμε την έκφραση της γενικής λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης, η αυθαίρετη σταθερά c αντικαθίσταται από την επίσης αυθαίρετη σταθερά $\ln c$ με $c > 0$. Η αντικατάσταση αυτή δεν περιορίζει τη γενικότητα της λύσης, επειδή $(\ln c) \in \mathbb{R}$.

Σημείωση 2.2.2 - 1

Όταν υπάρχουν τιμές της μεταβλητής που μηδενίζουν τον συντελεστή της y' , οπότε η διαφορική εξίσωση γίνεται μια εξίσωση με άγνωστο το y , τότε οι τιμές αυτές εξετάζονται χωριστά.

Παράδειγμα 2.2.2 - 3

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(1 - \cos x)y' = y \sin x. \quad (6)$$

Λύση. Σύμφωνα και με τη Σημείωση 2.2.2 - 1 πρέπει $1 - \cos x \neq 1$, δηλαδή $x \neq k\pi$ με $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, ενώ αν $x = k\pi$, τότε προφανώς η (6) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω τώρα ότι $y \neq 0$. Τότε διαδοχικά έχουμε

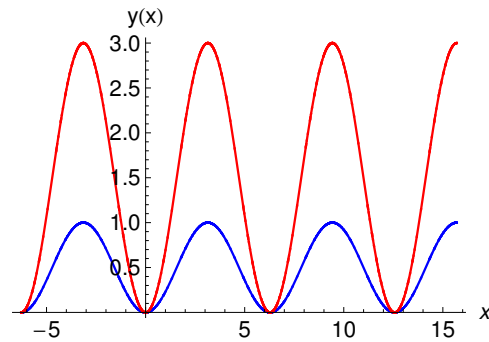
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y \sin x}{1 - \cos x} \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{y} = \frac{\sin x dx}{1 - \cos x}, \quad \text{δηλαδή} \\ \frac{dy}{y} &= \frac{(1 - \cos x)' dx}{1 - \cos x}. \end{aligned}$$

Άρα ολοκληρώνοντας προκύπτει ότι

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{(1 - \cos x)' dx}{1 - \cos x} + c, \quad \text{δηλαδή} \quad \ln |y| = \ln |1 - \cos x| + c,$$

που σύμφωνα και με την Παρατήρηση 2.2.2 - 1 γράφεται

$$\ln |y| = \ln |1 - \cos x| + \ln c = \ln |c(1 - \cos x)| \quad \text{με} \quad c > 0,$$



Σχήμα 2.2.2 - 3: Παράδειγμα 2.2.2 - 3: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = c \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ με $x \in [-2\pi, 5\pi]$, όταν $c = 1$ μπλε και $c = 3$ κόκκινη καμπύλη.

δηλαδή $|y| = |c(1 - \cos x)|$ ή ισοδύναμα $y = \pm c(1 - \cos x)$ με $c > 0$, οπότε

$$y = c(1 - \cos x) \quad \text{με} \quad c \neq 0.$$

Επειδή $2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$, από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η γενική λύση της (6) τελικά γράφεται

$$y = c \sin^2\left(\frac{x}{2}\right), \quad \text{όταν} \quad c \neq 0. \quad (7)$$

Η γραφική παράσταση της (7) για τις τιμές $c = 1, 3$ δίνεται στο Σχ. 2.2.2 - 3.

Επειδή για την εύρεση της γενικής λύσης (7) έχει υποθεθεί $y \neq 0$ και η τιμή $y = 0$, εφόσον στην (7) είναι $c \neq 0$, δεν συμπεριλαμβάνεται στη γενική λύση, η $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (6). ■

Παράδειγμα 2.2.2 - 4

Όμοια η

$$x \ln x y' - y = 0, \quad \text{όταν} \quad y(e) = 1. \quad (8)$$

Λύση. Λόγω του παράγοντα $\ln x$ πρέπει $x > 0$. Έστω $y \neq 0$. Τότε από την (8) υποθέτοντας ότι και $\ln x \neq 0$, δηλαδή $x \neq 1$, διαφορετικά πρέπει $y = 0$, άτοπο, έχουμε

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x \ln x} = \frac{d \ln x}{\ln x}.$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση όμοια σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.2.2 - 1 και το Παράδειγμα 2.2.2 - 3 προκύπτει ότι

$$\ln |y| = \ln |\ln x| + \ln c = \ln |c \ln x| \quad \text{με } c > 0.$$

Άρα

$$y = \pm c \ln x,$$

δηλαδή η γενική λύση της (8) τελικά γράφεται

$$y = c \ln x, \quad \text{όταν } c \neq 0 \quad \text{και } x > 0 \quad \text{με } x \neq 1. \quad (9)$$

Επειδή $y(e) = 1$, από την (9) προκύπτει $c = 1$, οπότε η μερική λύση της (8) είναι

$$y = \ln x.$$

Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (8).

Εφαρμογή 2.2.2 - 1 (ορθογώνιες τροχιές)

Έστω ότι μία οικογένεια καμπύλων του xy -επιπέδου επαληθεύει την εξίσωση

$$F(x, y, c) = 0 \quad (2.2.2 - 3)$$

όπου $y = y(x)$ και c μία παράμετρος. Ζητείται να προσδιοριστεί μια άλλη οικογένεια καμπύλων, έστω η $G(x, y, c) = 0$, που να τέμνει κάθετα κάθε καμπύλη της (2.2.2-3). Η G ορίζει τότε τις **ορθογώνιες τροχιές** της (2.2.2-3).

Λύση. Παραγωγίζοντας την (2.2.2 - 3) και απαλείφοντας την παράμετρο c μεταξύ της (2.2.2 - 3) και της εξίσωσης που προκύπτει μετά την παραγωγή της, έχουμε μία διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Άρα οι ορθογώνιες τροχιές της (2.2.2-3) θα είναι οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)}. \quad (2.2.2 - 4)$$

■

Παράδειγμα 2.2.2 - 5

Αν η οικογένεια καμπυλών είναι η

$$x^2 + y^2 = c,$$

τότε

$$2x + yy' = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

Άρα η ζητούμενη οικογένεια καμπύλων θα προκύψει από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

δηλαδή είναι η

$$y = cx \quad \text{όπου} \quad c \quad \text{σταθερά.}$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

Ασκήσεις

1. Αν $y = y(x)$, να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$i) \quad (x^2 + 1)y' - x = 0$$

$$iii) \quad x(1 + x^2)y' = y$$

$$ii) \quad y' - xy(y-1) = 0$$

$$iv) \quad y' + y \tan x = 0; \quad y(\pi) = 2.$$

2. Να υπολογιστούν οι ορθογώνιες τροχιές των οικογενειών των καμπυλών $y = ce^{-x}$ και $x^2 - y^2 = cx$.

Απαντήσεις

1. (i) $y = c + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$, (ii) $y = \frac{1}{1 - ce^{x^2/2}}$, (iii) $y = cx(1 + x^2)^{-1/2}$
(iv) $= -2 \cos x$.

2. Ανάλογα με το Παράδειγμα 2.2.2 - 5.

2.2.3 Πλήρεις διαφορικές εξισώσεις

Ορισμός 2.2.3 - 1. Μία διαφορική εξίσωση 1ης τάξης της μορφής

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (2.2.3 - 1)$$

λέγεται **πλήρης** ή **ακριβής**⁵ (*exact differential equation*) τότε και μόνον, όταν υπάρχει συνάρτηση, έστω $u = u(x, y)$, που λέγεται **παράγουσα** (*potential function*) της (2.2.3 - 1), τέτοια ώστε

$$(\alpha) \quad u_x = P \quad \text{και} \quad (\beta) \quad u_y = Q. \quad (2.2.3 - 2)$$

⁶Επειδή για το ολικό διαφορικό της u ισχύει ότι στην

$$du = du(x, y) = u_x dx + u_y dy$$

σύμφωνα και με τις συνθήκες (2.2.3 - 2) θα πρέπει στην περίπτωση αυτή να ισχύει ότι

$$du = u_x dx + u_y dy = P dx + Q dy = 0,$$

οπότε

$$u(x, y) = c \quad (2.2.3 - 3)$$

με c αυθαίρετη σταθερά, που ορίζει και τη **γενική λύση** της (2.2.3 - 1).

Έστω τώρα ότι οι συναρτήσεις P και Q είναι ορισμένες και συνεχείς στις περιοχές D_1 και D_2 αντίστοιχα και ότι τα σύνορα των περιοχών αυτών είναι κλειστές καμπύλες που δεν τέμνονται μεταξύ τους. Τότε σύμφωνα και με τις συνθήκες (2.2.3 - 2), επειδή είναι

$$P_y = (u_x)_y = u_{yx} \quad \text{και} \quad Q_x = (u_y)_x = u_{xy},$$

αν υποτεθεί ότι οι 2ης τάξης μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς συναρτήσεις, θα πρέπει σύμφωνα με γνωστό θεώρημα⁷ και τα δεύτερα μέλη τους να είναι ίσα, δηλαδή $P_y = Q_x$.

⁵Βλέπε βιβλιογραφία και

https://en.wikipedia.org/wiki/Exact_differential_equation

⁶Βλέπε Μάθημα Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών - Ολικό διαφορικό.

⁷

Επομένως έχει αποδειχθεί το παρακάτω θεώρημα, που είναι και το κριτήριο για την ύπαρξη μιας πλήρους διαφορικής εξίσωσης:

Θεώρημα 2.2.3 - 1 (κριτήριο πληρότητας). Έστω η διαφορική εξίσωση

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad (2.2.3 - 4)$$

όπου οι P και Q υποτίθεται ότι έχουν συνεχείς παραγώγους 2ης τάξης. Τότε *ικανή και αναγκαία συνθήκη* για να είναι πλήρης η (2.2.3 - 4), είναι

$$P_y = Q_x. \quad (2.2.3 - 5)$$

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος είναι το παρακάτω πόρισμα:

Πόρισμα 2.2.3 - 1. Κάθε διαφορική εξίσωση χωρισμένων μεταβλητών, δηλαδή κάθε διαφορική εξίσωση της μορφής

$$P(x) dx + Q(y) dy = 0$$

είναι πλήρης.

Παράδειγμα 2.2.3 - 1

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.3 - 1 έχουμε ότι η διαφορική εξίσωση

•

$$(xy^2 + x) dx + yx^2 dy = 0$$

είναι πλήρης, επειδή

$$P_y = (xy^2 + x)_y = 2xy = (x^2y)_x = Q_x,$$

ενώ η

Θεώρημα (Schwarz) 1.2.2 - 2: Έστω η συνάρτηση $f(x, y) | S \subseteq \mathbb{R}^2$, όπου S ανοικτό σύνολο, της οποίας υπάρχουν οι 2ης τάξης μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς στο S . Τότε

$$f_{xy} = f_{yx} \quad \text{για κάθε } (x, y) \in S.$$

•

$$\cos y dx + (y^2 + x \sin y) dy = 0$$

δεν είναι, επειδή

$$P_y = -\sin y \neq \sin y = Q_x.$$

Υπολογισμός της παράγουσας

Έστω τώρα ότι η (2.2.3-1) είναι πλήρης. Τότε η (2.2.3-2α): $u_x = P(x, y)$, όταν ολοκληρωθεί ως προς x προκύπτει ότι

$$u(x, y) = \int P(x, y) dx + c$$

με c αυθαίρετη σταθερά, που επειδή η ολοκλήρωση γίνεται ως προς x , η c θα περιέχει στη γενική περίπτωση και τη μεταβλητή y , δηλαδή $c = k(y)$.

Άρα

$$u(x, y) = \int P(x, y) dx + k(y). \quad (2.2.3 - 6)$$

Τότε η $k(y)$ προσδιορίζεται παραγωγίζοντας την (2.2.3-6) ως προς y , δηλαδή

$$u_y = \left(\int P(x, y) dx \right)_y + \frac{dk(y)}{dy}$$

που σύμφωνα με την (2.2.3-2β) γράφεται

$$Q(x, y) = \left(\int P(x, y) dx \right)_y + \frac{dk(y)}{dy},$$

δηλαδή

$$dk(y) = \left[Q(x, y) - \left(\int P(x, y) dx \right)_y \right] dy$$

που είναι μια διαφορική εξίσωση χωρισμένων μεταβλητών, οπότε τελικά ολοκληρώνοντας

$$k(y) = \int \left[Q(x, y) - \left(\int P(x, y) dx \right)_y \right] dy. \quad (2.2.3 - 7)$$

Παράδειγμα 2.2.3 - 2

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(2xy - 3x^2) dx + (x^2 - 2y) dy = 0. \quad (1)$$

Λύση. Είναι

$$u_x = P(x, y) = 2xy - 3x^2 \quad \text{και} \quad u_y = Q(x, y) = x^2 - 2y. \quad (2)$$

Επομένως

$$P_y = 2x = Q_x, \quad (3)$$

δηλαδή επαληθεύεται η συνθήκη (2.2.3 - 2) και επομένως η (1) είναι πλήρης.

Τότε ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία ο υπολογισμός της παράγουσας γίνεται ολοκληρώνοντας την

$$u_x = P(x, y) = 2xy - 3x^2 \quad \text{ως προς} \quad x,$$

οπότε

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int P(x, y) dx + k(y) = \int (2xy - 3x^2) dx + k(y) \\ &= x^2y - x^3 + k(y), \end{aligned} \quad (4)$$

όταν η $k(y)$ υπολογίζεται παραγωγίζοντας την (4) ως προς y , δηλαδή

$$u_y = \overbrace{(x^2y - x^3)}^{x^2}_y + \frac{dk(y)}{dy}$$

ή επειδή σύμφωνα με την (2) είναι $u_y = x^2 - 2y$, η παραπάνω σχέση γράφεται

$$x^2 - 2y = x^2 + \frac{dk(y)}{dy} \quad \text{ή} \quad \frac{dk(y)}{dy} = -2y,$$

οπότε $dk(y) = -2y dy$ και τελικά

$$k(y) = -y^2. \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας την (5) στην (4) προκύπτει ότι η παράγουσα της (1) είναι

$$u(x, y) = x^2y - x^3 - y^2,$$

οπότε σύμφωνα με την (2.2.3–3) η γενική της λύση θα είναι $u(x, y) = c$, όταν c αυθαίρετη σταθερά, δηλαδή

$$x^2y - x^3 - y^2 = c.$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές:

Πρόγραμμα 2.2.3 - 1 (πλήρης διαφορική εξίσωση)

```
P[x_, y_] := 2 x y - 3 x^2; Q[x_, y_] := x^2 - 2 y;
z = Integrate[P[x, y], x] +
  Integrate[Q[x, y] - D[Integrate[P[x, y], x], y], y];
Print["Solution : ", z, " = c"]
```

■

Σημείωση 2.2.3 - 1

Διευκρινίζεται ότι ανάλογα με την ευκολία του προβλήματος, η διαδικασία υπολογισμού της u είναι δυνατόν να αρχίσει από τη συνθήκη (2.2.3 – 2β). Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$u(x, y) = \int Q(x, y) dy + k(x), \quad (2.2.3 - 8)$$

όπου

$$k(x) = \int \left[\left(P(x, y) - \int Q(x, y) dy \right)_x \right] dx, \quad (2.2.3 - 9)$$

όπως αυτό γίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.2.3 - 3

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(y + 4)dx + xdy = 0. \quad (1)$$

Λύση. Είναι

$$u_x = P(x, y) = y + 4 \quad \text{και} \quad u_y = Q(x, y) = x. \quad (2)$$

Επομένως

$$P_y = 1 = Q_x, \quad (3)$$

δηλαδή επαληθεύεται η συνθήκη (2.2.3 - 2) και επομένως η (1) είναι πλήρης.

Τότε ολοκληρώνοντας την

$$u_y = Q(x, y) = x \quad \text{ως προς } x,$$

έχουμε

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int Q(x, y) dy + k(x) = \int x dy + k(x) \\ &= xy + k(x), \end{aligned} \quad (4)$$

όταν η $k(x)$ υπολογίζεται παραγωγίζοντας την (4) ως προς x , δηλαδή

$$u_x = \overbrace{(xy)_x}^y + \frac{dk(x)}{dx}$$

ή επειδή σύμφωνα με την (2) είναι $u_x = y + 4$, η παραπάνω σχέση γράφεται

$$y + 4 = y + \frac{dk(x)}{dx} \quad \text{ή} \quad \frac{dk(x)}{dx} = 4,$$

οπότε $dk(x) = 4 dx$ και τελικά

$$k(x) = 4x. \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας την (5) στην (4) προκύπτει ότι η παράγουσα της (1) είναι

$$u(x, y) = xy + 4x$$

και η γενική της λύση

$$xy + 4x = c,$$

όταν c αυθαίρετη σταθερά.

Όμοια ο υπολογισμός με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές:

Πρόγραμμα 2.2.3 - 2 (πλήρης διαφορική εξίσωση)

```
P[x_, y_] := y+4; Q[x_, y_] := x;
z = Integrate[Q[x, y], y] +
  Integrate[P[x, y] - D[Integrate[Q[x, y], y], x], x];
Print["Solution : ", z, " = c"]
```

■

Ολοκληρωτικός παράγοντας

Εξετάζεται στη συνέχεια η περίπτωση, όπου μία διαφορική εξίσωση της μορφής

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (2.2.3 - 10)$$

δεν είναι πλήρης, αλλά που μετά από πολλαπλασιασμό της με μια κατάλληλη συνάρτηση, που λέγεται **ολοκληρωτικός παράγοντας** (integrating factor) ή **πολλαπλασιαστής του Euler**⁸ (Euler multiplier), μετατρέπεται σε πλήρη.

Σχετικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.2.3 - 2. *Αν η διαφορική εξίσωση (2.2.3 – 10) δεν είναι πλήρης, αλλά έχει μία λύση της μορφής $u(x, y) = c$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας ολοκληρωτικός παράγοντας.*

Απόδειξη. Από τη λύση $u(x, y) = c$ προκύπτει

$$du = u_x dx + u_y dy = 0. \quad (1)$$

Συγκρίνοντας την (2.2.3 – 10) με την (1) έχουμε

$$\frac{u_x}{u_y} = \frac{P}{Q}. \quad (2)$$

Επειδή η (2) πρέπει να ισχύει ως ταυτότητα, θα υπάρχει μία συνάρτηση, έστω $F(x, y)$, τέτοια ώστε

$$u_x = F(x, y)P(x, y) \quad \text{και} \quad u_y = F(x, y)Q(x, y). \quad (3)$$

Τότε σύμφωνα με την (3) έχουμε

$$du = u_x dx + u_y dy = F P dx + F Q dy = F (P dx + Q dy), \quad (4)$$

δηλαδή η $F(x, y)$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της (2.2.3 – 10).

Από την (4) προκύπτει τότε ότι η συνάρτηση

$$G(u) F (P dx + Q dy) = G(u) du, \quad (5)$$

⁸Βλέπε βιβλιογραφία και https://en.wikipedia.org/wiki/Integrating_factor

Πίνακας 2.2.3 - 1: Υπολογισμός του ολοκληρωτικού παράγοντα.

α/α	Συνθήκη	Ολοκληρωτικός παράγοντας
1	$\frac{1}{Q} (P_y - Q_x) = f(x)$	$F(x, y) = \exp \left[\int f(x) dx \right]$
2	$\frac{1}{P} (Q_x - P_y) = g(y)$	$F(x, y) = \exp \left[\int g(y) dy \right]$
3	$\frac{P_y - Q_x}{yQ - xP} = h(xy)$	$F(x, y) = \exp[H(xy)], \quad \frac{dH(s)}{ds} := h(s)$

όπου $G(u)$ αυθαίρετη συνάρτηση του u , είναι όμοια ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της (2.2.3 – 10), δηλαδή υπάρχουν άπειροι το πλήθος ολοκληρωτικοί παράγοντες της (2.2.3 – 10). ■

Ο προσδιορισμός του ολοκληρωτικού παράγοντα γενικά είναι δύσκολος και πολλές φορές ξεπερνά σε δυσκολία και τη λύση αυτής της ίδιας της διαφορικής εξίσωσης. Στον Πίνακα 2.2.3 - 1 δίνονται οι ολοκληρωτικοί παράγοντες για τις περιπτώσεις που οι συναρτήσεις P και Q πληρούν ορισμένες συνθήκες, ενώ στον Πίνακα 2.2.3 - 2 οι ολοκληρωτικοί παράγοντες, που συνήθως εμφανίζονται στα περισσότερα των προβλημάτων.

Σημείωση 2.2.3 - 2

Ο Πίνακας 2.2.3 - 1 ισχύει και όταν $f(x) = 1$ ή $g(y) = 1$.

Παράδειγμα 2.2.3 - 4

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(y^2 - x) dx + 2y dy = 0. \quad (1)$$

Λύση. Η (1) δεν είναι πλήρης, επειδή

$$P_y = 2y \neq 0 = Q_x.$$

Πίνακας 2.2.3 - 2: με τους κυριότερους ολοκληρωτικούς παράγοντες.

α/α	Διαφορική εξίσωση	ολοκληρωτικός παράγοντας	τέλειο διαφορικό
1	$y dx - x dy$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{x dy - y dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$
2	$y dx - x dy$	$\frac{1}{y^2}$	$\frac{y dx - x dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$
3	$y dx - x dy$	$-\frac{1}{xy}$	$\frac{x dy - y dx}{xy} = d\left[\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right]$
4	$y dx - x dy$	$-\frac{1}{x^2 + y^2}$	$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = d\left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right]$
5	$y dx + x dy$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{y dx + x dy}{xy} = d[\ln(xy)]$
6	$y dx + x dy$	$\frac{1}{(xy)^n}, n > 1$	$\frac{y dx + x dy}{(xy)^n} = \frac{d[(xy)^{1-n}]}{1-n}$
7	$y dx + x dy$	$\frac{1}{x^2 + y^2}$	$\frac{x dy + y dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} d[\ln(x^2 + y^2)]$
8	$y dx + x dy$	$\frac{1}{(x^2 + y^2)^n}; n > 1$	$\frac{y dx + x dy}{(x^2 + y^2)^n}$ $= \frac{d[(x^2 + y^2)^{1-n}]}{2(1-n)}$
9	$ay dx + bx dy$	$x^{a-1}y^{b-1}$	$d(x^a y^b)$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{Q} (P_y - Q_x) = \frac{1}{2y} (2y - 0) = 1 = f(x), \quad (2)$$

οπότε σύμφωνα με την περίπτωση 1 του Πίνακα 2.2.3 - 1 προκύπτει ότι η (1) γίνεται πλήρης, όταν πολλαπλασιαστούν και τα δύο μέλη της με τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$F(x, y) = e^{\int f(x) dx} = e^{\int 1 dx} = e^x.$$

Τότε η (1) μετά τον πολλαπλασιασμό με e^x γράφεται

$$(y^2 e^x - x e^x) dx + 2y e^x dy = 0, \quad (3)$$

που είναι πλήρης και η λύση της, επειδή είναι ευκολότερη η ολοκλήρωση του όρου $2y e^x dy$, σύμφωνα και με το Παράδειγμα 2.2.3 - 3 υπολογίζεται ως εξής:

$$u(x, y) = \int Q(x, y) dy + k(x) = \int 2y e^x dy + k(x) = y^2 e^x + k(x), \quad (4)$$

όταν η $k(x)$ υπολογίζεται παραγωγίζοντας την (4) ως προς x , οπότε

$$u_x = y^2 e^x + \frac{k(x)}{dx}$$

ή σύμφωνα με την (3), επειδή $u_x = y^2 e^x - x e^x$, τελικά

$$dk(x) = -x e^x dx.$$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση προκύπτει ότι

$$k(x) = - \int x e^x dx = -x e^x + e^x,$$

οπότε η παράγουσα της (1) είναι

$$u(x, y) = y^2 e^x - x e^x + e^x$$

και η γενική της λύση $y^2 e^x - x e^x + e^x = c$, όταν c αυθαίρετη σταθερά, δηλαδή

$$y^2 - x + 1 = c e^{-x}.$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές:

Πρόγραμμα 2.2.3 - 3 (ολοκληρωτικός παράγοντας - συνθήκη 1)

```
P[x_, y_] := y^2 - x; Q[x_, y_] := 2 y;
Print["Condition 1 f(x) = ", w/Q[x, y]]
w = Simplify[D[P[x, y], y] - D[Q[x, y], x]];
F = Simplify[Exp[Integrate[w/Q[x, y], x]]];
Print["Potential function F(x,y) = ", F]
P1[x_, y_] := P[x, y] F; Q1[x_, y_] := Q[x, y] F
Print["Exact condition = ", Simplify[D[P1[x, y], y] - D[Q1[x, y], x]]]
z = Integrate[P1[x, y], x] +
  Integrate[Q1[x, y] - D[Integrate[P1[x, y], x], y], y];
Print["Solution : ", Simplify[z], " = c"]
```

■

Παράδειγμα 2.2.3 - 5

Όμοια η μη πλήρης διαφορική εξίσωση

$$y dx - (x + 6y^2) dy = 0. \tag{5}$$

Για την (5) εφαρμόζεται η συνθήκη (2) του Πίνακα 2.2.3 - 1 με

$$g(y) = -\frac{2}{y},$$

οπότε

$$F(x, y) = e^{\int g(y) dy} = e^{-2 \int \frac{dy}{y}} = e^{-2 \ln |y|} = e^{\ln y^{-2}} = \frac{1}{y^2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (5) με την $F(x, y) = \frac{1}{y^2}$ τελικά προκύπτει ότι

$$\frac{1}{y} dx - \left(\frac{x}{y^2} + 6 \right) dy = 0$$

που είναι μια πλήρης διαφορική εξίσωση από την οποία τελικά προκύπτει ως γενική λύση η

$$\frac{x}{y} - 6y = c,$$

όταν c αυθαίρετη σταθερά.

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές:

Πρόγραμμα 2.2.3 - 4 (ολοκληρωτικός παράγοντας - συνθήκη 2)

```

P[x_, y_] := y; Q[x_, y_] := -(x + 6 y^2);
w = D[Q[x, y], x] - D[P[x, y], y];
Print["Condition 2 g(y) = ", w/P[x, y]]
F = Simplify[Exp[Integrate[w/P[x, y], y]]];
Print["Potential function F(x,y) = ", F]
P1[x_, y_] := P[x, y] F; Q1[x_, y_] := Q[x, y] F
Print["Exact condition = ", Simplify[D[P1[x, y], y] - D[Q1[x, y], x]]]
z = Integrate[P1[x, y], x] +
  Integrate[Q1[x, y] - D[Integrate[P1[x, y], x], y], y];
Print["Solution : ", Simplify[z], " = c"]

```

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις υπολογίζοντας σε κάθε περίπτωση τον ολοκληρωτικό παράγοντα, εφόσον αυτό απαιτείται:

i) $(4x^3y^3 - 2xy) dx + (3x^4y^2 - x^2) dy = 0,$

ii) $(2x - ye^x) dx - e^x dy = 0,$

iii) $(x + y) dx + \tan x dy = 0,$

iv) $y^2 dx + (xy - 1) dy = 0,$

v) $3x^2y^2 dx + (2x^3y + x^3y^4) dy = 0.$

2. Όμοια τα παρακάτω προβλήματα αρχικής τιμής:

i) $(y dx + dy) e^x = 0; \quad y(0) = 1,$

ii) $(x - 3) dx + (y - 3) dy = 0; \quad y(3) = 0,$

iii) $(1 + e^x) yy' = e^x; \quad y(1) = 1,$

iv) $2(y \sin 2x + \cos 2x) dx = \cos 2x dy; \quad y(\pi) = 0,$

v) $(xe^{xy} + 2y) y' + ye^{xy} = 0; \quad y(0) = 1,$

vi) $y(xy + 1) dx + x(xy - 1) dy = 0; \quad y(1) = 1.$

3. Δείξτε ότι η διαφορική εξίσωση

$$(axy^2 + by) dx + (bx^2y + ay) dy = 0$$

είναι πλήρης, όταν $a = b$. Στη συνέχεια υπολογίστε τη μερική λύση της, όταν $y(1) = 1$.

Απαντήσεις

1. i) Πλήρης, γενική λύση $-x^2y + x^4y^3 = c$.
- ii) Συνθήκη 1, $F(x, y) = e^{-2x}$, γενική λύση $\frac{1}{2} e^{-2x} (-1 - 2x + 2ye^x) = c$.
- iii) Συνθήκη 1, $F(x, y) = \cos x$, γενική λύση $\cos x + (x + y) \sin x = c$.
- iv) Συνθήκη 2, $F(x, y) = \frac{1}{y}$, γενική λύση $xy - \ln y = c$.
- v) Συνθήκη 2, $F(x, y) = e^{\frac{y^3}{3}}$, γενική λύση $x^3y^2 e^{\frac{y^3}{3}} = c$.
2. i) Πλήρης, γενική λύση $ye^x = c$, μερική με $c = 1$.
- ii) Πλήρης, γενική λύση $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 3(x + y) = c$, μερική με $c = -\frac{9}{2}$.
- iii) Συνθήκη 2, $F(x, y) = e^{-\frac{y^2}{2}}$, γενική λύση $e^{-\frac{y^2}{2}}(1 + e^x) = c$, μερική με $c = 1 + e$.
- iv) Πλήρης, γενική λύση $-y \cos 2x + \sin 2x$, μερική με $c = 0$.
- v) Πλήρης, γενική λύση $y^2 + e^{xy} = c$, μερική με $c = 2$.
- vi) Συνθήκη 3, $F(x, y) = \frac{1}{2xy}$, γενική λύση $\frac{1}{2}(xy + \ln x - \ln y)$, μερική με $c = \frac{1}{2}$.
3. $P_y - Q_x = (a - b)(2xy - 1)$, γενική λύση $axy + \frac{1}{2}ax^2y^2 = c$, μερική $c = \frac{3a}{2}$.

Ο υπολογισμός της λύσης της Άσκησης 2vi με το MATHEMATICA έγινε με τις εντολές:

Πρόγραμμα 2.2.3 - 5 (ολοκληρωτικός παράγοντας - συνθήκη 3)

```
P[x_, y_] := y (x y + 1); Q[x_, y_] := x (x y - 1);
w = Simplify[D[P[x, y], y] - D[Q[x, y], x]]
Print["Condition 3"]
F = Simplify[1/(x P[x, y] - y Q[x, y])];
Print["Potential function F(x,y) = ", F]
P1[x_, y_] := P[x, y] F
Q1[x_, y_] := Q[x, y] F
Print["Exact condition = ", Simplify[D[P1[x, y], y] - D[Q1[x, y], x]]]
z = Integrate[P1[x, y], x] +
  Integrate[Q1[x, y] - D[Integrate[P1[x, y], x], y], y];
```

```
Print["Solution : ", Simplify[z], " = c"]
Print["Constant c = ", z /. {x -> 1, y -> 1}]
```

2.2.4 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Ορισμός 2.2.4 - 1. Μία συνάρτηση $f(x)$ λέγεται **ομογενής** βαθμού ν , όταν

$$f(\lambda x) = \lambda^\nu f(x) \quad \text{για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.2.4 - 1)$$

Ο αντίστοιχος ορισμός για μια συνάρτηση δύο μεταβλητών γράφεται:

Ορισμός 2.2.4 - 2. Μία συνάρτηση $f = f(x, y)$ λέγεται **ομογενής** βαθμού ν , όταν

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\nu f(x, y) \quad \text{για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.2.4 - 2)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό:

- η συνάρτηση $f(x, y) = y^2 - xy + 4x^2$ είναι ομογενής βαθμού $\nu = 2$, επειδή

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda y)^2 - (\lambda x)(\lambda y) + 4(\lambda x)^2 \\ &= \lambda^2 (y^2 - xy + 4x^2) = \lambda^2 f(x, y), \end{aligned}$$

- η $g(x, y) = (x - y)^{1/2}$ είναι ομογενής βαθμού $\nu = 1/2$, επειδή

$$g(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x - \lambda y)^{1/2} = \lambda^{1/2} (x - y)^{1/2} = \lambda^{1/2} g(x, y),$$

- η $h(x, y) = \frac{1}{x-y}$ είναι ομογενής βαθμού $\nu = -1$, επειδή

$$h(\lambda x, \lambda y) = \frac{1}{\lambda x - \lambda y} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{x - y} = \lambda^{-1} h(x, y),$$

- ενώ όλες οι συναρτήσεις

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{y+x}{y-x} \quad \text{και} \quad \ln y - \ln x = \ln \frac{y}{x}$$

ομογενείς βαθμού $\nu = 0$.

Ορισμός 2.2.4 - 3. Η διαφορική εξίσωση

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (2.2.4 - 3)$$

θα λέγεται **ομογενής**⁹ (*homogeneous differential equation*), όταν οι συναρτήσεις $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ είναι ομογενείς συναρτήσεις του ίδιου βαθμού.

Επειδή η (2.2.4 - 3) γράφεται και

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = f(x, y),$$

όπου σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.4 - 3 είναι

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = -\frac{P(\lambda x, \lambda y)}{Q(\lambda x, \lambda y)} = -\frac{\lambda^\nu P(x, y)}{\lambda^\nu Q(x, y)} \\ &= -\lambda^0 \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \lambda^0 f(x, y) \end{aligned}$$

ο παραπάνω ορισμός γενικότερα γράφεται:

Ορισμός 2.2.4 - 4. Η διαφορική εξίσωση

$$y' = f(x, y) \quad (2.2.4 - 4)$$

θα λέγεται **ομογενής**, όταν η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι ομογενής βαθμού $\nu = 0$.

Άμεση συνέπεια του Ορισμού 2.2.4 - 3 είναι ότι:

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y) \quad \text{για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.2.4 - 5)$$

Τότε, αν $x = 1$, προκύπτει ότι $f(\lambda, \lambda y) = f(1, y)$, δηλαδή

$$f(x, xy) = f(1, y). \quad (2.2.4 - 6)$$

⁹Βλέπε βιβλιογραφία και

https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneous_differential_equation

Υπολογισμός της λύσης

Για τη λύση της (2.2.4 - 4) θεωρείται ο μετασχηματισμός

$$y = x u, \quad \text{όπου } u = u(x), \quad (2.2.4 - 7)$$

οπότε σύμφωνα με τον γνωστό κανόνα παραγώγισης γινομένου των συναρτήσεων x και $u = u(x)$ έχουμε

$$y' = x' u + x u' = u + x u',$$

δηλαδή

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}. \quad (2.2.4 - 8)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.2.4 - 6) και (2.2.4 - 8) στην (2.2.4 - 4) προκύπτει ότι

$$x \frac{du}{dx} = f(1, u) - u$$

και τελικά

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}, \quad (2.2.4 - 9)$$

δηλαδή η λύση της (2.2.4 - 4) ή ισοδύναμα της (2.2.4 - 3) ανάγεται στη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης χωρισμένων μεταβλητών.

Σημείωση 2.2.4 - 1

Η σχέση (2.2.4 - 8) για την περίπτωση που η ομογενής διαφορική εξίσωση είναι της μορφής (2.2.4 - 3) γράφεται

$$dy = u dx + x du. \quad (2.2.4 - 10)$$

Παράδειγμα 2.2.4 - 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}. \quad (1)$$

Λύση. Η (1) είναι ομογενής της μορφής (2.2.4 - 4) βαθμού $\nu = 2$, επειδή σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.4 - 4 ισχύει

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{2(\lambda x)(\lambda y)}{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = f(x, y) \quad \text{για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Επομένως εφαρμόζοντας στην (1) τον μετασχηματισμό (2.2.4-7), δηλαδή $y = xu$, οπότε σύμφωνα με τη σχέση (2.2.4-8) είναι $y' = u + xu'$, διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} u + x \frac{du}{dx} &= \frac{2x(xu)}{x^2 - (xu)^2} = \frac{2x^2u}{x^2(1 - u^2)} \\ &= \frac{2u}{1 - u^2}, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} x \frac{du}{dx} &= \frac{2u}{1 - u^2} - u = \frac{u + u^3}{1 - u^2} \\ &= \frac{u(1 + u^2)}{1 - u^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Η (2), που είναι της μορφής (2.2.4 - 9), γράφεται

$$\frac{1 - u^2}{u(1 + u^2)} du = \frac{1}{x} dx \quad (3)$$

που είναι μια διαφορική εξίσωση χωρισμένων μεταβλητών.

Η ρητή συνάρτηση στο 1ο μέλος της (3) αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής:

$$\frac{1 - u^2}{u(1 + u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu + C}{1 + u^2} = \dots = \frac{1}{u} - \frac{2u}{1 + u^2}. \quad (4)$$

Επομένως ολοκληρώνοντας κατά μέλη την (3) σύμφωνα με την (4) έχουμε:

$$\begin{aligned} \int \frac{1-u^2}{u(1+u^2)} du &= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{1+u^2} \right) du \\ &= \ln |u| - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln \left(\frac{|u|}{1+u^2} \right) \\ &= (2\text{o μέλος}) \int \frac{dx}{x} \\ &= \ln |x| + c = \ln |x| + \ln |c| = \ln |xc|, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\frac{u}{1+u^2} = cx, \quad \text{όταν } c \text{ αυθαίρετη σταθερά.}$$

Αντικαθιστώντας τη μεταβλητή u σύμφωνα με την (2.2.4–7) στην παραπάνω λύση προκύπτει τελικά ότι η γενική λύση της (1) είναι

$$c(x^2 + y^2) = y. \quad (5)$$

Η (5) για τις διάφορες τιμές της σταθεράς c παριστάνει μία οικογένεια κύκλων, που εφάπτονται στον άξονα των x στο σημείο 0.

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος, που προκύπτει από το 1ο μέλος της (2.2.4–9), γίνεται στην περίπτωση που η εξίσωση είναι της μορφής (2.2.4–4) με τις παρακάτω εντολές του MATHEMATICA:

Πρόγραμμα 2.2.4 - 1 (ομογενής διαφορική εξίσωση)

```
f[x_, y_] := 2 x y/(x^2 - y^2); z = Simplify[f[1, u] - u]
w = Integrate[1/z, u]; FullSimplify[w /. u -> y/x]
```

■

Παράδειγμα 2.2.4 - 2

Όμοια να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(x^3 + 2xy^2) dx + (y^3 + 2x^2y) dy = 0, \quad \text{όταν } y(1) = 1. \quad (6)$$

Λύση. Η (6) είναι ομογενής βαθμού $\nu = 3$ της μορφής (2.2.4 - 3), επειδή σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.4 - 3 ισχύει

$$P(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 + 2(\lambda x)(\lambda y)^2 = \lambda^3 (x^3 + 2xy^2) = \lambda^3 P(x, y)$$

$$Q(\lambda x, \lambda y) = (\lambda y)^3 + 2(\lambda x)^2(\lambda y) = \lambda^3 (y^3 + 2x^2y) = \lambda^3 Q(x, y).$$

Η (6), όταν $x \neq 0$, γράφεται στη μορφή (2.2.4 - 4), όταν $x \neq 0$, ως εξής:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x^3 + 2xy^2}{y^3 + 2x^2y} = f(x, y). \quad (7)$$

Επομένως εφαρμόζοντας στην (7) τον μετασχηματισμό (2.2.4 - 7), δηλαδή $y = xu$, ανάλογα με το Παράδειγμα 2.2.4 - 1 διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} u + x \frac{du}{dx} &= -\frac{x^3 + 2x(xu)^2}{(xu)^3 + 2x^2(xu)} \\ &= -\frac{1 + 2u^2}{2u + u^3}, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$x \frac{du}{dx} = -\frac{1 + 2u^2}{2u + u^3} - u = -\frac{1 + 4u^2 + u^4}{2u + u^3}.$$

Άρα

$$\frac{2u + u^3}{1 + 4u^2 + u^4} du + \frac{1}{x} dx = 0 \quad (8)$$

που είναι μια διαφορική εξίσωση χωρισμένων μεταβλητών.

Επειδή

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2u + u^3}{1 + 4u^2 + u^4} du = \frac{1}{4} \int \frac{(1 + 4u^2 + u^4)'}{1 + 4u^2 + u^4} du \\ &= \frac{1}{4} \ln(1 + 4u^2 + u^4) \end{aligned}$$

από την (8) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{4} \ln(1 + 4u^2 + u^4) + \ln|x| = c$$

με c αυθαίρετη σταθερά ή

$$\ln(1 + 4u^2 + u^4) + \overbrace{4 \ln|x|}^{\ln|x|^4 = \ln x^4} = 4c = c^*$$

ή

$$\ln [x^4 (1 + 4u^2 + u^4)] = \overbrace{c}^{\ln c}$$

και τελικά

$$x^4 (1 + 4u^2 + u^4) = c,$$

οπότε αντικαθιστώντας όπου $u = y/x$ προκύπτει ότι η γενική λύση της (6) είναι

$$x^4 + 4x^2y^2 + y^4 = c.$$

Επειδή $y(1) = 1$ προκύπτει τότε από τη γενική λύση ότι $c = 6$, οπότε η μερική λύση της (6) είναι

$$x^4 + 4x^2y^2 + y^4 = 6.$$

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος, που προκύπτει από το 1ο μέλος της (2.2.4-9), γίνεται στην περίπτωση που η εξίσωση είναι της μορφής (2.2.4-3) με τις παρακάτω εντολές του MATHEMATICA:

Πρόγραμμα 2.2.4 - 2 (ομογενής διαφορική εξίσωση)

```
f[x_, y_] := 2 x y/(x^2 - y^2); z = Simplify[f[1, u] - u]
w = Integrate[1/z, u]; FullSimplify[w /. u -> y/x]
```

■

Άσκηση

Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

- | | |
|----------------------------------|---|
| i) $xy' + (x^2 + y^2)^{1/2} = y$ | iv) $(x - y)dx + x dy = 0$ |
| ii) $(x + y)y' = x - y$ | v) $x^3yy' = x^4 + 3x^2y^2 + y^4$ |
| iii) $xy' = y + x e^{y/x}$ | vi) $xyy' = x^2 + y^2$, όταν $y(1) = -2$. |

Απαντήσεις

i) $f(x, y) = (y - \sqrt{x^2 + y^2})/x$, $f(1, u) - u = -\sqrt{1 + u^2}$, ολοκλήρωμα 1ου μέλους της (2.2.4 - 9): $I = -\sinh^{-1} \frac{y}{x}$, γενική λύση: $cx = e^{-\sinh^{-1} \frac{y}{x}}$.

ii) $f(x, y) = (x - y)/(x + y)$, $f(1, u) - u = -\frac{-1+2u+u^2}{1+u}$, ολοκλήρωμα:
 $I = -\frac{1}{2} \ln(-1 + 2u + u^2) = \ln \frac{(-x^2+2xy+y^2)^{-1/2}}{x}$, γενική λύση:
 $cx^4 (y^2 + 2xy - x^2) = 1$.

iii) $f(x, y) = (y - x)/x$, $f(1, u) - u = -e^{-u}$, ολοκλήρωμα: $I = -e^{-\frac{y}{x}}$, γενική λύση:
 $cx = e^I$.

iv) $f(x, y) = (y - x)/x$, $f(1, u) - u = -1$, ολοκλήρωμα: $I = -u$ γενική λύση:
 $cx = e^{-\frac{y}{x}}$.

v) $f(x, y) = (x^4 + 3x^2y^2 + y^4)/x^3y$, $f(1, u) - u = -\frac{1}{u} + 2u + u^3$, ολοκλήρωμα:
 $I = -\frac{1}{2(1+u^2)}$, γενική λύση: $cx = e^{-\frac{x^2}{2(x^2+y^2)}}$.

vi) $f(x, y) = (x^2 + y^2)/xy$, $f(1, u) - u = \frac{1}{u}$, ολοκλήρωμα: $I = \frac{y^2}{2x^2}$, γενική λύση:
 $cx = e^{\frac{y^2}{2x^2}}$ και μερική, όταν $c = e^2$.

2.2.5 Γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης

¹⁰Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1.1 - 3 η γενική μορφή της **μη ομογενούς** γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης είναι

$$\mathbf{y}' + \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{r}(\mathbf{x}), \quad (2.2.5 - 1)$$

10

Ορισμός 2.1.1 - 3: Μία διαφορική εξίσωση που γράφεται στη μορφή

$$y^{(\nu)} + f_{\nu-1}(x)y^{(\nu-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = r(x),$$

όπου η $r(x)$ και οι συντελεστές $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{\nu-1}(x)$ είναι γνωστές συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς για κάθε $x \in (a, b)$, λέγεται μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση ν -τάξης.

όπου $y = y(x)$ και $f(x), r(x)$ συνεχείς συναρτήσεις με $r(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$.

Τότε η αντίστοιχη **ομογενής** της (2.2.5 - 1) σύμφωνα και με τον Ορισμό 2.1.1 - 5 θα είναι:

$$y' + f(x)y = 0, \quad \text{όταν } x \in (a, b). \quad (2.2.5 - 2)$$

Λύση ομογενούς

Η (2.2.5 - 2), που είναι μια διαφορική εξίσωση με χωρισμένες μεταβλητές, αν $y \neq 0$, γράφεται

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx, \quad \text{οπότε } \ln |y| = -\int f(x) dx + c^*,$$

όπου c^* αυθαίρετη σταθερά. Άρα

$$|y| = e^{-\int f(x) dx + c^*} = e^{-\int f(x) dx} \underbrace{e^{c^*}}_{c \neq 0 \text{ σταθερά}}, \quad \text{δηλαδή}$$

$$y = \pm c e^{-\int f(x) dx},$$

οπότε η γενική λύση y_h της ομογενούς εξίσωσης (2.2.5 - 2) θα είναι

$$y_h(x) = c e^{-\int f(x) dx} \quad \text{με } c \neq 0, \quad (2.2.5 - 3)$$

όπου προφανώς είναι $y > 0$, όταν $c > 0$ και $y < 0$, όταν $c < 0$. Τότε, επειδή η τιμή $y = 0$ δεν περιλαμβάνεται στη λύση (2.2.5 - 3), θα είναι μια ιδιάζουσα λύση της (2.2.5 - 2).

Λύση μη ομογενούς - Μέθοδος του Lagrange

Για τον προσδιορισμό της μερικής λύσης $y_p(x)$ της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (2.2.5 - 1), δηλαδή της

$$y' + f(x)y = r(x),$$

εφαρμόζεται η μέθοδος του Lagrange. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή η σταθερά c στη γενική λύση (2.2.5 - 3) της ομογενούς, δηλαδή στην

$$y_h(x) = c e^{-\int f(x) dx}$$

θεωρείται ως συνάρτηση του x .

Έστω ότι είναι $c = k(x)$, οπότε η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$y_h(x) = y(x) = k(x) e^{-\overbrace{\int f(x) dx}^{q(x)}} = k(x) e^{-q(x)},$$

δηλαδή

$$y(x) = k(x) e^{-q(x)}, \quad \text{όταν} \quad (2.2.5 - 4)$$

$$q(x) = \int f(x) dx \quad \text{και} \quad q'(x) = f(x).$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (2.2.5 - 4) έχουμε

$$\begin{aligned} y' = y'(x) &= k'(x) e^{-q(x)} + k(x) [-q'(x)]' e^{-q(x)} \\ &= k'(x) e^{-q(x)} - k(x) f(x) e^{-q(x)}. \end{aligned} \quad (2.2.5 - 5)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.2.5 - 4) και (2.2.5 - 5) στην $y' + f(x)y = r(x)$ τελικά προκύπτει ότι

$$k'(x) = r(x) e^{q(x)} \quad \text{ή} \quad \frac{d k(x)}{dx} = r(x) e^{q(x)}, \quad \text{δηλαδή}$$

$$d k(x) = r(x) e^{q(x)} dx,$$

οπότε ολοκληρώνοντας

$$k(x) = \int r(x) e^{q(x)} dx. \quad (2.2.5 - 6)$$

Αντικαθιστώντας την (2.2.5 - 6) στην (2.2.5 - 4) προκύπτει ότι η μερική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (2.2.5 - 1), δηλαδή της

$$y' + f(x)y = r(x),$$

είναι¹¹

$$y_p(x) = e^{-q(x)} \int r(x) e^{q(x)} dx. \quad (2.2.5 - 7)$$

Επειδή σύμφωνα με την (2.2.5 - 4) είναι

$$q(x) = \int f(x) dx,$$

από το ¹²Θεώρημα 2.1.1 - 1, την (2.2.5 - 7) και την (2.2.5 - 3) προκύπτει ότι η γενική λύση $y(x)$ της $y' + f(x)y = r(x)$, γράφεται

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p \\ &= c e^{-\int f(x) dx} + e^{-\int f(x) dx} \int r(x) e^{\int f(x) dx} dx \\ &= e^{-\int f(x) dx} \left[\int r(x) e^{\int f(x) dx} dx + c \right] \\ &= e^{-q(x)} \left[\int r(x) e^{q(x)} dx + c \right]. \end{aligned}$$

Άρα η **γενική λύση** $y(x)$ της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης (2.2.5 - 1) είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{y(x)} &= \mathbf{y_h} + \mathbf{y_p} \quad (2.2.5 - 8) \\ &= e^{-q(x)} \left[\int r(x) e^{q(x)} dx + c \right], \end{aligned}$$

για κάθε $x \in (a, b)$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

¹¹Υπενθυμίζεται ότι η μερική λύση δεν περιέχει σταθερά - Σημείωση 2.1.1 - 1.

¹²

Θεώρημα 2.1.1 - 1: Αν y_h είναι η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $y^{(\nu)} + f_{\nu-1}(x)y^{(\nu-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$ και y_p μία μερική λύση της μη ομογενούς $y^{(\nu)} + f_{\nu-1}(x)y^{(\nu-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = r(x)$, τότε η γενική λύση της μη ομογενούς είναι

$$\mathbf{y} = \mathbf{y_h} + \mathbf{y_p}.$$

Παράδειγμα 2.2.5 - 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + 2xy = e^{-x^2}, \quad \text{όταν } y(0) = 1. \quad (1)$$

Λύση. Έστω $y \neq 0$. Τότε συγκρίνοντας την αντίστοιχη ομογενή

$$y' - 2xy = 0$$

με την (2.2.5 - 2) προκύπτει ότι $f(x) = 2x$. Άρα από την (2.2.5 - 3) για τη λύση της ομογενούς έχουμε

$$y_h(x) = c e^{-\int f(x) dx} = c e^{-2 \int x dx} = c e^{-x^2},$$

όταν $c \neq 0$. Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της ομογενούς.

Μη ομογενής

Είναι $f(x) = 2x$, οπότε από την (2.2.5 - 4) προκύπτει ότι

$$q(x) = \int f(x) dx = \int 2x dx = x^2.$$

Επειδή $r(x) = e^{-x^2}$, από την (2.2.5 - 7) έχουμε

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^{-q(x)} \left[\int r(x) e^{q(x)} dx \right] \\ &= e^{-x^2} \left[\int e^{-x^2} e^{x^2} dx \right] = x e^{-x^2}. \end{aligned}$$

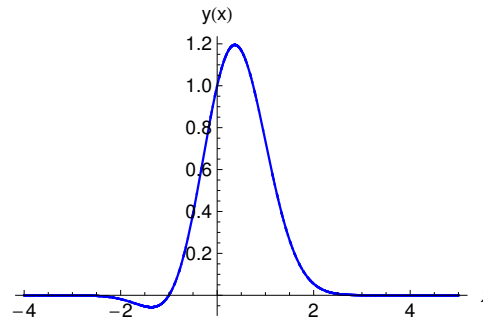
Άρα σύμφωνα με την (2.2.5 - 8) η γενική λύση της (1) θα είναι

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x^2} (x + c), \quad (2)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

Επειδή από την (1) έχουμε ότι η αρχική τιμή είναι $y(0) = 1$, η μερική λύση θα προκύψει από τη (2) θέτοντας $x = 0$. Τότε

$$1 = y(0) = 1(0 + c), \quad \text{οπότε } c = 1$$



Σχήμα 2.2.5 - 1: Παράδειγμα 2.2.5 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-x^2}(x+1)$, όταν $x \in [-4, 5]$.

και η μερική λύση της (1) θα είναι (Σχ. 2.2.5 - 1)

$$y(x) = e^{-x^2}(x+1).$$

■

Παράδειγμα 2.2.5 - 2

Όμοια η

$$x y' - y = x^2, \quad \text{όταν } y(1) = 0. \quad (3)$$

Λύση. Αν $x = 0$, τότε προφανώς είναι και $y = 0$. Έστω $x \neq 0$ Τότε η (3) γράφεται

$$y' - \frac{y}{x} = x, \quad \text{όταν } y(1) = 0. \quad (4)$$

με αντίστοιχη ομογενή την

$$y' - \frac{y}{x} = 0. \quad (5)$$

Έστω $y \neq 0$. Τότε όμοια συγκρίνοντας την (5) με την (2.2.5 - 2) προκύπτει ότι $f(x) = -\frac{1}{x}$. Άρα από την (2.2.5-3) για τη λύση της ομογενούς έχουμε

$$y_h(x) = c e^{-\int f(x) dx} = c e^{-\int (-\frac{1}{x}) dx} = c e^{\ln|x|} = c|x|,$$

όταν $c \neq 0$, δηλαδή $y = \pm c x$. Επομένως τελικά η λύση της ομογενούς είναι:

$$y_h(x) = c x, \quad \text{όταν } c \neq 0.$$

Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (5).

Μη ομογενής

Επειδή είναι $f(x) = -\frac{1}{x}$, από την (2.2.5 - 4) προκύπτει ότι

$$q(x) = \int f(x) dx = - \int \frac{1}{x} dx = - \ln |x|.$$

Τότε, επειδή $r(x) = x$, από την (2.2.5 - 7) έχουμε για τη μερική λύση της μη ομογενούς

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^{-q(x)} \left[\int r(x) e^{q(x)} dx \right] = e^{-(-\ln|x|)} \left[\int x e^{-\ln|x|} dx \right] \\ &= |x| \int x \frac{1}{|x|} dx = \begin{cases} x \int x \frac{1}{x} dx = x^2 & \text{αν } x > 0, \\ -x \int x \frac{1}{-x} dx = x^2 & \text{αν } x < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$y_p(x) = x^2.$$

Άρα σύμφωνα με την (2.2.5 - 8) η γενική λύση της (4) είναι

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = x(x + c), \quad (6)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

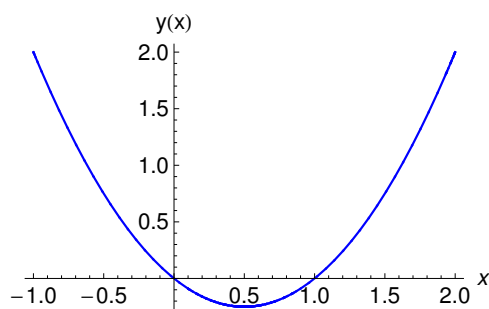
Επειδή από την (4) έχουμε ότι η αρχική τιμή είναι $y(1) = 0$, η μερική λύση θα προκύψει από τη (6) θέτοντας $x = 1$. Άρα

$$0 = y(1) = 1 + c, \quad \text{οπότε } c = -1$$

και η μερική λύση της (4) θα είναι (Σχ. 2.2.5 - 2)

$$y(x) = -x + x^2.$$

■



Σχήμα 2.2.5 - 2: Παράδειγμα 2.2.5 - 2: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = -x + x^2$, όταν $x \in [-1, 2]$.

Παράδειγμα 2.2.5 - 3

Όμοια η

$$y' - y \cos x = \cos x, \quad \text{όταν } y(0) = 1. \quad (7)$$

Λύση. Έστω $y \neq 0$. Όμοια συγκρίνοντας την αντίστοιχη ομογενή

$$y' - y \cos x = 0$$

με την (2.2.5 - 2) προκύπτει ότι $f(x) = -\cos x$, οπότε από την (2.2.5 - 3) έχουμε

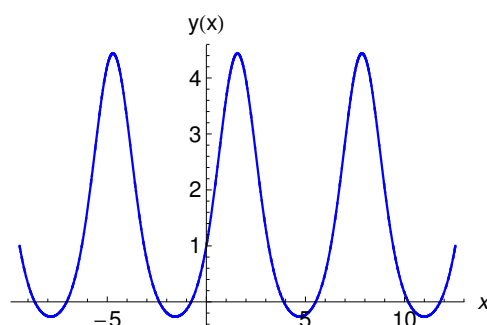
$$y_h(x) = c e^{-\int f(x) dx} = c e^{-\int (-\cos x) dx} = c e^{\sin x},$$

όταν $c \neq 0$. Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιαίζουσα λύση της ομογενούς.

Μη ομογενής

Όμοια από την (2.2.5 - 4) προκύπτει ότι

$$q(x) = \int f(x) dx = -\int \cos x dx = -\sin x$$



Σχήμα 2.2.5 - 3: Παράδειγμα 2.2.5 - 3: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = -1 + 2e^{\sin x}$, όταν $x \in [-3\pi, 4\pi]$.

και επειδή $r(x) = \cos x$, από την (2.2.5 - 7) έχουμε για τη μερική λύση της μη ομογενούς

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^{-q(x)} \left[\int r(x) e^{q(x)} dx \right] = e^{-(-\sin x)} \left[\int \cos x e^{-\sin x} dx \right] \\ &= e^{\sin x} \int e^{-\sin x} d \sin x = -e^{\sin x} \left[\int e^{-\sin x} d(-\sin x) \right] \\ &= -e^{\sin x} [e^{-\sin x}] = -e^0 = -1. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με την (2.2.5 - 8) η γενική λύση της (7) είναι

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = -1 + c e^{\sin x}, \quad \text{όταν } c \neq 0. \quad (8)$$

Επειδή από την (7) έχουμε ότι η αρχική τιμή είναι $y(0) = 1$, η μερική λύση θα προκύψει από την (8) θέτοντας $x = 0$. Άρα

$$1 = y(0) = -1 + c e^0, \quad \text{οπότε } c = 2$$

και η μερική λύση της (7) θα είναι (Σχ. 2.2.5 - 3)

$$y(x) = -1 + 2 e^{\sin x}.$$

Η μελέτη της περιοδικότητας ή μη της μερικής λύσης αφήνεται ως άσκηση. ■

Άσκηση

Να λυθούν οι παρακάτω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις:

i) $y' + 2xy = -x^3 + x; \quad y(0) = -1,$

ii) $y' \cos x - y \sin x = \sin x; \quad y(0) = 0,$

iii) $y' + \frac{y}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}; \quad y(0) = 0,$

iv) $xy' - y = x^2 \cos x; \quad y(\pi/2) = 0.$

Απαντήσεις

(i) $y(x) = \frac{1}{2}(2-x^2) + ce^{-x^2}$, μερική: $c = -\frac{1}{2}$,

(ii) $y(x) = -1 + \frac{1}{\cos x}$, μερική: $c = 1$,

(iii) $y(x) = 1 + c \exp(-\tan^{-1} x)$, μερική: $c = -1$,

(iv) $y(x) = cx + x \sin x$, μερική: $c = -1$.

2.2.6 Διαφορική εξίσωση του Bernoulli

Η διαφορική εξίσωση

$$y' + f(x)y = g(x)y^a, \quad \text{όταν } a \in \mathbb{R} \quad (2.2.6 - 1)$$

είναι γνωστή ως η **διαφορική εξίσωση του Bernoulli**¹³ (Bernoulli differential equation).

Παρατηρούμε ότι:

- αν

i)

$$a = 0, \quad \text{τότε γράφεται } y' + f(x)y = g(x),$$

δηλαδή η (2.2.6 - 1) είναι μια **γραμμική μη ομογενής**, ενώ, αν

¹³Βλέπε βιβλιογραφία και

<https://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli-differential-equation>

ii)

$$a = 1, \quad \text{τότε} \quad y' + [f(x)y - g(x)]y = 0,$$

είναι μια **γραμμική ομογενής** διαφορική εξίσωση. Και στις δύο περιπτώσεις (i) και (ii) λύνεται σύμφωνα με την Παράγραφο 2.2.5.

- $a \neq 0, 1$ η (2.2.6 - 1) είναι **μη γραμμική**. Στην περίπτωση αυτή θεωρείται ο μετασχηματισμός

$$u(x) = [y(x)]^{1-a}, \quad (2.2.6 - 2)$$

οπότε

$$u'(x) = (1 - a) [y(x)]^{-a} y'(x). \quad (2.2.6 - 3)$$

Λύνοντας την (2.2.6 - 3) ως προς $y'(x)$ προκύπτει τότε ότι

$$y'(x) = \frac{[y(x)]^a}{1 - a} u'(x). \quad (2.2.6 - 4)$$

Αντικαθιστώντας την (2.2.6 - 4) στην (2.2.6 - 1) διαδοχικά έχουμε

$$\frac{[y(x)]^a}{1 - a} u'(x) + f(x)y(x) = g(x)y^a(x)$$

ή διαιρώντας και τα δύο μέλη με $\frac{[y(x)]^a}{1 - a}$

$$u'(x) + (1 - a)f(x)\frac{y(x)}{[y(x)]^a} = (1 - a)g(x)\frac{y(x)}{[y(x)]^a},$$

δηλαδή τελικά η (2.2.6-1) μετασχηματίζεται στην παρακάτω **γραμμική εξίσωση**:

$$u' + (1 - a)f(x)u = (1 - a)g(x). \quad (2.2.6 - 5)$$

Παράδειγμα 2.2.6 - 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' - 5y = -5xy^3, \quad \text{όταν} \quad y = y(x). \quad (1)$$

Λύση. Η (1) είναι της μορφής (2.2.6 - 1) με

$$f(x) = -5, \quad g(x) = -5x \quad \text{και} \quad a = 3.$$

Σύμφωνα με την (2.2.6 - 3) εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό

$$u(x) = y^{-2}(x)$$

η (1) μετασχηματίζεται στην

$$u' + (-2)(-5)u = (-2)(-5x),$$

δηλαδή

$$u' + 10u = 10x. \quad (2)$$

Η (2) είναι μια μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση, που σύμφωνα με την Παράγραφο 2.2.5 έχει γενική λύση

$$u = c e^{10x} + x - \frac{1}{10}, \quad (3)$$

όταν c αυθαίρετη σταθερά.

Αντικαθιστώντας στην (3) όπου $u = y^{-2}$ προκύπτει ότι η γενική λύση της (1) είναι

$$y^{-2} = c e^{10x} + x - \frac{1}{10}.$$

Η παραπάνω λύση με το MATHEMATICA υπολογίζεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 2.2.6 - 1 (Bernoulli equation)

```
a = 3;f[x_] := -5;g[x_] := -5 x;
Print["Transformed equation : ",
  u' + (1 - a) f[x] u, " = ", (1 - a) g[x]]
z = DSolve[u'[x] + (1 - a) f[x] u[x] == (1 - a) g[x], u[x], x];
Print["General solution y(x) = ", Simplify[z /. u -> y^(1 - a)]]
```

■

Άσκηση

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις του Bernoulli:

- i) $y' + xy = x/y$ iv) $4yy' + 2y^2 \cos x = \sin 2x$
 ii) $(1 + x^2)y' + xy = y^3$ v) $4y' - y \tan x + y^5 \sin 2x = 0$
 iii) $x^2y' + 2xy = y^3$ vi) $y' + y = y^{1/2}e^x; \quad y(0) = 1.$

Απαντήσεις

Αρχικά πρέπει να γίνει αναγωγή ορισμένων εξισώσεων στη μορφή (2.2.6 - 1).

i) Μετασχηματισμένη διαφορική εξίσωση (2.2.6 - 5): $u' + 2ux = 2x$, γενική λύση: $y^2(x) = 1 + ce^{-x^2}$.

ii) (2.2.6 - 5): $u' - \frac{2ux}{1+x^2} = -\frac{2}{1+x^2}$, γενική λύση: $y^{-2}(x) = -x - (1+x^2) \tan^{-1} x + c(1+x^2)$.

iii) (2.2.6 - 5): $u' - \frac{4u}{x} = -\frac{2}{x^2}$, γενική λύση: $y^{-2}(x) = \frac{2}{5x} + cx^4$.

iv) (2.2.6 - 5): $u' + u \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, γενική λύση: $y^2(x) = -1 + \sin x + ce^{-\sin x}$.

v) (2.2.6 - 5): $u' + u \tan x = \sin 2x$, γενική λύση: $y^{-4}(x) = (c - 2 \cos x) \cos x$.

vi) (2.2.6 - 5): $u' + \frac{u}{2} = \frac{e^x}{2}$, γενική λύση: $y^{1/2}(x) = \frac{e^x}{3} + ce^{-\frac{x}{2}}$. Μερική λύση, όταν $c = \frac{2}{3}$.

2.2.7 Διαφορική εξίσωση του Riccati

Η διαφορική εξίσωση

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \quad (2.2.7 - 1)$$

είναι γνωστή ως η **διαφορική εξίσωση του Riccati**¹⁴ (Riccati equation).

Παρατηρούμε ότι: αν

- $p(x) = 0$, η (2.2.7 - 1) γράφεται

$$y' - q(x)y = r(x), \quad (2.2.7 - 2)$$

δηλαδή είναι μια **μη ομογενής γραμμική** διαφορική εξίσωση.

¹⁴Βλέπε βιβλιογραφία και https://en.wikipedia.org/wiki/Riccati_equation

- $r(x) = 0$, η (2.2.7 - 1) γράφεται

$$y' - q(x)y = y^2 p(x), \quad (2.2.7 - 3)$$

δηλαδή είναι μια διαφορική εξίσωση του **Bernoulli**.

Στις περιπτώσεις όπου $p(x)r(x) \neq 0$, αν και **δεν** υπάρχει γενική μέθοδος λύσης της (2.2.7 - 1), όταν είναι γνωστή μία λύση της, έστω η $y_1(x)$, τότε θέτοντας

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}, \quad (2.2.7 - 4)$$

οπότε

$$y'(x) = y_1'(x) - \frac{z'(x)}{z^2(x)}, \quad (2.2.7 - 5)$$

και αντίστροφο μετασχηματισμό

$$z(x) = \frac{1}{y(x) - y_1(x)}, \quad (2.2.7 - 6)$$

η (2.2.7 - 1) διαδοχικά μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} y_1'(x) - \frac{z'(x)}{z^2(x)} &= p(x) \left(y_1^2(x) + 2 \frac{y_1(x)}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)} \right) \\ &\quad + q(x) \left(y_1(x) + \frac{1}{z(x)} \right) + r(x) \end{aligned}$$

από την οποία, επειδή η $y_1(x)$ είναι λύση της (2.2.7 - 1), προκύπτει τελικά ότι

$$z'(x) + [2y_1(x)p(x) + q(x)]z = -p(x) \quad (2.2.7 - 7)$$

που είναι μια γραμμική εξίσωση και λύνεται κατά τα γνωστά.

Παράδειγμα 2.2.7 - 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' = y^2 - y - 2, \quad (1)$$

όταν μια λύση της είναι η $y_1(x) = 2$.

Λύση. Η (1) είναι της μορφής (2.2.7 - 1) με $p(x) = 1$, $q(x) = 1$ και $r(x) = -2$, όπου προφανώς η $y_1(x) = 2$ είναι μια λύση της.

Θέτοντας σύμφωνα με τη (2.2.7 - 4)

$$z = 2 + \frac{1}{z}, \quad (2)$$

η (1) σύμφωνα με την (2.2.7 - 7) μετασχηματίζεται στην

$$z' + 3z = -1, \quad (3)$$

που είναι μια μη ομογενής διαφορική εξίσωση με γενική λύση

$$z = -\frac{1}{3} + c e^{-3x}, \quad (4)$$

όταν c αυθαίρετη σταθερά.

Αντικαθιστώντας στην (4) σύμφωνα με την (2.2.7 - 6):

$$z = \frac{1}{y - 2},$$

τελικά προκύπτει ότι η λύση της (1) είναι

$$y = 2 + \frac{3}{-1 + 3c e^{-3x}}.$$

Η λύση της (3) με το MATHEMATICA υπολογίζεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 2.2.7 - 1 (Ricatti equation)

```
p[x_] := 1; q[x_] := -1; y1 = 2;
Print["Transformed equation : ",
  z' + (2 y1 p[x] + q[x]) z, " = ", -p[x]]
w = DSolve[z'[x] + (2 y1 p[x] + q[x]) z[x] == -p[x], z[x], x]
Print["General solution z(x) = ", w]
```

■

Άσκηση

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις του Riccati, όταν μια λύση των είναι της μορφής $y = a/x$:

i) $x^2 y' - x^2 y^2 - xy - 1 = 0$

iii) $4y' + y^2 + 4x^{-2} = 0$

ii) $y' + y^2 = 2x^{-2}$

iv) $x^2 y' = x^2 y^2 + xy - 3.$

Απαντήσεις

Αρχικά πρέπει να γίνει αναγωγή ορισμένων εξισώσεων στη μορφή (2.2.6 - 1).

i) Λύση $y_1(x) = -\frac{1}{x}$. Μετασχηματισμένη διαφορική εξίσωση (2.2.7 - 7): $z' - \frac{z}{x} = -1$, γενική λύση: $z(x) = cx - x \ln x$.

ii) $y_1(x) = -\frac{2}{x}$. Εξίσωση (2.2.7 - 7): $z' + \frac{4z}{x} = 1$, λύση: $z(x) = \frac{x}{5} + \frac{c}{x^5}$.

$y_2(x) = \frac{1}{x}$. Εξίσωση (2.2.7 - 7): $z' - \frac{2z}{x} = 1$, λύση: $z(x) = -x + cx^2$.

iii) $y_1(x) = \frac{2}{x}$. Εξίσωση (2.2.7 - 7): $z' - \frac{z}{x} = \frac{1}{4}$, λύση: $z(x) = cx + \frac{1}{4}x \ln x$.

iv) $y_1(x) = \frac{1}{x}$. Εξίσωση (2.2.7 - 7): $z' + \frac{3z}{x} = -1$, λύση: $z(x) = -\frac{x}{4} + \frac{c}{x^3}$.

2.2.8 Γραμμική 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

¹⁵Από τον Ορισμό 2.1.1 - 6 προκύπτει ότι η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές έχει τη μορφή

$$y' + ay = r(x), \quad (2.2.8 - 1)$$

όταν a σταθερά, $y = y(x)$ με $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ και αντίστοιχη **ομογενή** την

$$y' + ay = 0. \quad (2.2.8 - 2)$$

Έστω $y \neq 0$. Σύμφωνα με την (2.1.1 - 11), αντικαθιστώντας στην (3.3.1 - 2) $y = e^{\lambda x}$ με λ σταθερά προκύπτει ότι η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς είναι

$$\lambda + a = 0 \quad \text{με ρίζα} \quad \lambda = -a. \quad (2.2.8 - 3)$$

15

Ορισμός 2.1.1 - 6: Ορίζεται ως μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση ν -τάξης με σταθερούς συντελεστές, κάθε εξίσωση της μορφής (2.1.1 - 6): $y^{(\nu)} + f_{\nu-1}(x)y^{(\nu-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = r(x)$, όπου οι συναρτήσεις $f_k(x)$ είναι σταθερές για κάθε $k = 0, 1, \dots, \nu - 1$, δηλαδή η

$$y^{(\nu)} + a_{\nu-1}y^{(\nu-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = r(x),$$

όταν a_k σταθερές για κάθε $k = 0, 1, \dots, \nu - 1$.

Επομένως η γενική λύση της ομογενούς θα είναι:

$$y_h = c e^{-ax}, \quad \text{όταν } c \neq 0. \quad (2.2.8 - 4)$$

Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (3.3.1 - 2).

Επειδή

$$f(x) = a, \quad \text{οπότε } q(x) = \int f(x) dx = ax,$$

σύμφωνα με την (2.2.5 - 4) η μερική λύση y_p της μη ομογενούς θα είναι

$$y_p(x) = e^{-ax} \left[\int e^{ax} r(x) dx \right]. \quad (2.2.8 - 5)$$

Τότε από το Θεώρημα 2.1.1 - 1 προκύπτει ότι η γενική λύση της (3.3.1 - 1) είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= e^{-ax} \left[\int e^{ax} r(x) dx + c \right] \end{aligned} \quad (2.2.8 - 6)$$

για κάθε $x \in (a, b)$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

Παράδειγμα 2.2.8 - 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + 2y = e^{-3x}, \quad \text{όταν } y(0) = 0. \quad (1)$$

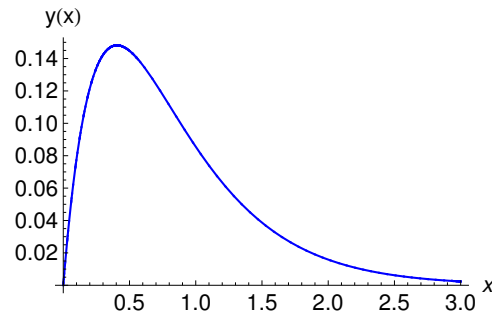
Λύση. Η αντίστοιχη ομογενής της (1) είναι η

$$y' + 2y = 0,$$

οπότε σύμφωνα με την (2.2.8-3) η χαρακτηριστική εξίσωση θα είναι $\lambda + 2 = 0$ με ρίζα την $\lambda = -2$. Άρα από την (2.2.8 - 4) προκύπτει ότι η λύση της ομογενούς είναι

$$y_h = c e^{-2x}, \quad \text{όταν } c \neq 0, \quad (2)$$

όταν προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της.



Σχήμα 2.2.8 - 1: Παράδειγμα 3.3.1 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-3x}(-1 + e^x)$, όταν $x \in [0, 3]$.

Μη ομογενής

Είναι $f(x) = a = 2$ και $r(x) = e^{-3x}$, οπότε σύμφωνα με την (2.2.8 - 5) η μερική λύση y_p της (1) είναι

$$y_p(x) = e^{-2x} \int e^{2x} e^{-3x} dx = e^{-2x} \int \overbrace{e^{-x}}^{-e^{-x}} dx = -e^{-3x}. \quad (3)$$

Επομένως από την (2.2.8 - 6) και τις (2), (3) η γενική λύση της (1) προκύπτει ότι είναι η

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = -e^{-3x} + c e^{-2x} \quad (4)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

Επειδή από την (1) έχουμε ότι η αρχική τιμή είναι $y(0) = 0$, η μερική λύση θα προκύψει από τη (4) θέτοντας $x = 0$. Άρα $0 = y(0) = -1 + c$, οπότε $c = 1$ και η μερική λύση της (1) θα είναι (Σχ. 3.3.1 - 1)

$$y(x) = e^{-3x}(-1 + e^x).$$

■

Παράδειγμα 2.2.8 - 2

Όμοια να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + y = e^{-x}, \quad \text{όταν} \quad y(0) = -1. \quad (5)$$

Λύση. Η αντίστοιχη ομογενής της (5) είναι η

$$y' + y = 0,$$

οπότε σύμφωνα με την (2.2.8-3) η χαρακτηριστική εξίσωση θα είναι $\lambda + 1 = 0$ με ρίζα την $\lambda = -1$. Άρα όμοια η λύση της ομογενούς είναι

$$y_h = c e^{-x}, \quad \text{όταν } c \neq 0, \quad (6)$$

όταν η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της.

Μη ομογενής

Είναι $f(x) = a = 1$ και $r(x) = e^{-x}$, οπότε σύμφωνα με την (2.2.8-5) η μερική λύση y_p της (5) είναι

$$y_p(x) = e^{-x} \int e^x e^{-x} dx = e^{-x} \int dx = x e^{-x}. \quad (7)$$

Επομένως από την (2.2.8-6) και τις (6), (7) προκύπτει ότι η γενική λύση της (5) είναι η

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x}(x + c), \quad (8)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

Επειδή σύμφωνα με την (5) η αρχική τιμή είναι $y(0) = -1$, η μερική λύση θα προκύψει από τη (8) θέτοντας $x = 0$. Άρα $-1 = y(0) = 1(0 + c)$, οπότε $c = -1$ και η μερική λύση της (5) θα είναι (Σχ. 3.3.1 - 2)

$$y(x) = e^{-x}(-1 + x).$$

■

Παράδειγμα 2.2.8 - 3

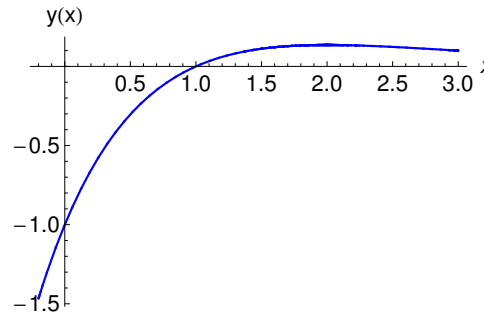
Όμοια διαφορική εξίσωση

$$y' + y = \sin 2x, \quad \text{όταν } y(0) = 0. \quad (9)$$

Λύση. Η αντίστοιχη ομογενής της (9) είναι $y' + y = 0$, οπότε όμοια με την (2.2.8-3) η χαρακτηριστική εξίσωση θα είναι $\lambda + 1 = 0$ με ρίζα την $\lambda = -1$. Άρα η λύση της ομογενούς είναι

$$y_h = c e^{-x}, \quad \text{όταν } c \neq 0. \quad (10)$$

Προφανώς η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της.



Σχήμα 2.2.8 - 2: Παράδειγμα 3.3.1 - 2: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-x}(-1+x)$, όταν $x \in [-0.2, 3]$.

Μη ομογενής

Είναι $f(x) = a = 1$ και $r(x) = \sin 2x$, οπότε σύμφωνα με την (2.2.8 - 5) η μερική λύση y_p της (9) είναι¹⁶

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^{-x} \left[\int e^x \sin 2x dx \right] = e^{-x} \left[\frac{e^x}{5} (-2 \cos 2x + \sin 2x) \right] \\ &= \frac{1}{5} (-2 \cos 2x + \sin 2x) . \end{aligned} \quad (11)$$

Επομένως από την (2.2.8 - 6) και τις (10), (11) η γενική λύση της (9) προκύπτει ότι είναι η

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c e^{-x} + \frac{1}{5} (-2 \cos 2x + \sin 2x) , \quad (12)$$

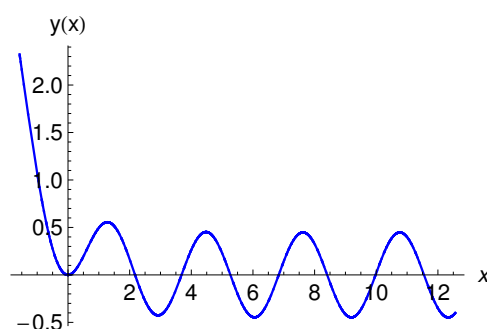
για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και c αυθαίρετη σταθερά με $c \neq 0$.

Επειδή από την (9) έχουμε ότι η αρχική τιμή είναι $y(0) = 0$, η μερική λύση θα προκύψει από τη (12) θέτοντας $x = 0$. Άρα $0 = y(0) = c + \frac{1}{5}(-2 + 0)$, οπότε $c = \frac{2}{5}$ και η μερική λύση της (9) θα είναι (Σχ. 3.3.1 - 3)

$$y(x) = \frac{2}{5} e^{-x} + \frac{1}{5} (-2 \cos 2x + \sin 2x) . \quad (13)$$

Από τη λύση (13) προκύπτουν τα εξής:

¹⁶**Παραγοντική ολοκλήρωση** - γινόμενο εκθετικής με τριγωνομετρική συνάρτηση: εφαρμόζεται δύο φορές η παραγοντική ολοκλήρωση (βλέπε Μάθημα *Αόριστο Ολοκλήρωμα*).



Σχήμα 2.2.8 - 3: Παράδειγμα 3.3.1 - 3: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = \frac{2}{5} e^{-x} + \frac{1}{5} (-2 \cos 2x + \sin 2x)$, όταν $x \in [-\pi/2, 4\pi]$.

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = +\infty,$

ii) όταν $x \geq \pi$, ο όρος e^{-x} πρακτικά μηδενίζεται, οπότε η λύση γράφεται

$$y(x) \approx \frac{1}{5} (-2 \cos 2x - \sin 2x) = \frac{\sqrt{2^2 + 1^2}}{5} \sin(2x + \phi)$$

$$\approx 0.45 \sin(2x + \phi), \quad \text{όταν } \phi = \arctan(-2) \approx -1.107 \text{ rad},$$

δηλαδή εκτελεί μια αμείωτη περιοδική ταλάντωση πλάτους 0.45.

■

2.2.9 Εφαρμογές

Εφαρμογή 2.2.9 - 1 (φόρτιση πυκνωτή)

Έστω πυκνωτής χωρητικότητας C που πρόκειται να φορτιστεί με τη βοήθεια πηγής σταθερής ΗΕΔ E διαμέσου ωμικής αντίστασης R . Όταν ο διακόπτης είναι ανοικτός, δεχόμαστε ότι ο πυκνωτής είναι κενός, δηλαδή

$$q_0 = q(0) = 0 \quad \text{αρχική συνθήκη.}$$

Κλείνοντας τον διακόπτη στο κύκλωμα υπάρχουν δύο ΗΕΔ, που είναι αυτή της πηγής E και αυτής που επικρατεί στους οπλισμούς του πυκνωτή. Εφαρμόζοντας

τον 2ο κανόνα του Kirchhoff έχουμε $E - q/C = iR$, που επειδή $i = dq/dt = q'(t)$, τελικά γράφεται

$$q' + \frac{1}{RC} q = \frac{E}{R} \quad \text{όπου } q = q(t). \quad (2.2.9 - 1)$$

Η (2.2.9 - 1) είναι μία μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές της μορφής (3.3.1 - 1):

$$y' + a y = r(t) \quad \text{με } a = \frac{1}{RC} \quad \text{και } r(t) = \frac{E}{R},$$

όπου η αντίστοιχη ομογενής είναι της μορφής: (3.3.1-1): $y' + a y = 0$, δηλαδή

$$q' + \frac{1}{RC} q = 0. \quad (2.2.9 - 2)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (2.2.9 - 2) είναι η $\lambda + 1/RC = 0$ με ρίζα την $\lambda = -1/RC$. Επομένως σύμφωνα με την (2.2.8 - 4) η γενική λύση q_h της ομογενούς θα είναι:

$$q_h(t) = k e^{-at} = k e^{-\frac{t}{RC}},$$

όταν k αυθαίρετη σταθερά με $k \neq 0$, ενώ σύμφωνα (2.2.8 - 5) η μερική λύση q_p της μη ομογενούς θα είναι:

$$\begin{aligned} q_p(t) &= e^{-at} \left[\int e^{at} r(t) dt \right] = e^{-\frac{t}{RC}} \left[\int e^{\frac{t}{RC}} \left(\frac{E}{R} \right) dt \right] \\ &= CE e^{-\frac{t}{RC}} \left[\int e^{\frac{t}{RC}} \left(\frac{t}{RC} \right)' dt \right] \\ &= CE e^{-\frac{t}{RC}} \left(e^{\frac{t}{RC}} \right) = CE. \end{aligned}$$

Τότε η **γενική λύση** της (2.2.9 - 1) σύμφωνα με την (2.2.8 - 4) είναι

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t) = CE + k e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Αλλά σύμφωνα με την αρχική συνθήκη είναι $q_0 = 0$, οπότε αντικαθιστώντας στη γενική λύση προκύπτει ότι

$$0 = CE + k \cdot 1, \quad \text{δηλαδή } k = -CE.$$

Άρα η **μερική λύση** της (2.2.9 - 1) είναι

$$q(t) = CE \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right). \quad (2.2.9 - 3)$$

Εφαρμογή 2.2.9 - 2 (κύκλωμα RL)

Όμοια εφαρμόζοντας τον 2ο κανόνα του Kirchhoff έχουμε την παρακάτω διαφορική εξίσωση του κυκλώματος RL :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L} \quad \text{όπου} \quad i = i(t). \quad (2.2.9 - 4)$$

Η (2.2.9 - 4) είναι όμοια μία μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές της μορφής (3.3.1 - 1):

$$y' + ay = r(t) \quad \text{με} \quad a = \frac{R}{L} \quad \text{και} \quad r(t) = \frac{E}{L},$$

με αντίστοιχη ομογενή: (3.3.1 - 1): $y' + ay = 0$, δηλαδή

$$i' + \frac{R}{L}i = 0. \quad (2.2.9 - 5)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (2.2.9 - 6) είναι η $\lambda + R/L = 0$ με ρίζα την $\lambda = -R/L$. Επομένως σύμφωνα με την (2.2.8 - 4) η **γενική λύση** i_h της ομογενούς θα είναι:

$$i_h(t) = k e^{-at} = k e^{-\frac{R}{L}t},$$

όταν k αυθαίρετη σταθερά με $k \neq 0$, ενώ σύμφωνα (2.2.8 - 5) η **μερική λύση** i_p της μη ομογενούς θα είναι:

$$\begin{aligned} i_p(t) &= e^{-at} \left[\int e^{at} r(t) dt \right] = e^{-\frac{R}{L}t} \left[\int e^{\frac{R}{L}t} \left(\frac{E}{L} \right) dt \right] \\ &= \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \left[\int e^{\frac{R}{L}t} \left(\frac{Rt}{L} \right)' dt \right] \\ &= \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \left(e^{\frac{R}{L}t} \right) = \frac{E}{R}. \end{aligned}$$

Τότε η γενική λύση της (2.2.9 - 4) σύμφωνα με την (2.2.8 - 4) είναι

$$i = \frac{E}{R} + k e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Αν το αρχικό ρεύμα (αρχική συνθήκη) του κυκλώματος είναι $i(0) = i_0$, οπότε $k = i_0 - E/R$, η μερική λύση της (2.2.9-4) γράφεται τελικά στη μορφή

$$i = \frac{E}{R} + \left(i_0 - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (2.2.9 - 6)$$

Ο τελευταίος όρος στην (2.2.9-6) μηδενίζεται, όταν ο χρόνος t απειρίζεται, οπότε στην περίπτωση αυτή εύκολα προκύπτει ότι $i_{\max} = E/R$.

Άσκηση

Να λυθούν οι παρακάτω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις:

$$i) \quad y' + y = x; \quad y(0) = -1 \quad v) \quad y' + 3y = e^{-x} \sin 2x; \quad y(0) = 0$$

$$ii) \quad y' + 4y = e^{-3x}; \quad y(0) = 0 \quad vi) \quad y' + y = \sin^2 x; \quad y(0) = -1$$

$$iii) \quad y' + y = x e^{-x}; \quad y(0) = 0 \quad vii) \quad y' + 4y = 1 - \sinh x; \quad y(0) = 0$$

$$iv) \quad y' + y = \sin 2x; \quad y(0) = 0 \quad viii) \quad y' + y = \sin x \cos 2x; \quad y(0) = 0.$$

Απαντήσεις

$$(i) \quad y(x) = -1 + x + c e^{-x}, \quad \text{μερική: } c = 0,$$

$$(ii) \quad y(x) = e^{-3x} + c e^{-4x}, \quad \text{μερική: } c = -1,$$

$$(iii) \quad y(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x} + c e^{-x}, \quad \text{μερική: } c = 0,$$

$$(iv) \quad y(x) = c e^{-x} + \frac{1}{2} (-2 \cos 2x + \sin 2x), \quad \text{μερική: } c = \frac{2}{5},$$

$$(v) \quad y(x) = c e^{-3x} + \frac{e^{-x}}{13} (-3 \cos 3x + 2 \sin 3x), \quad \text{μερική: } c = -\frac{1}{13},$$

$$(vi) \quad y(x) = c e^{-x} + \frac{1}{10} (5 - \cos 2x - \sin 2x), \quad \text{μερική: } c = -\frac{14}{10},$$

$$(vii) \quad y(x) = c e^{-4x} - \frac{1}{60} (10 - 15e^x + 6e^{2x}), \quad \text{μερική: } c = -\frac{19}{60},$$

$$(viii) \quad y(x) = c e^{-x} + \frac{1}{20} (5 \cos x - 3 \cos 3x - 5 \sin x + \sin 3x), \quad \text{μερική: } c = -\frac{1}{10}.$$

2.3 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης

2.3.1 Ορισμοί

Ορισμός 2.3.1 - 1 Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης είναι

$$F(x, y, y', y'') = 0, \quad (2.3.1 - 1)$$

όταν η άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$ ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Τότε η y , εφόσον υπάρχει, θα ορίζει τη λύση της (2.3.1 - 1).

Σημαντικό ενδιαφέρον στις εφαρμογές από το σύνολο των εξισώσεων της μορφής (2.3.1 - 1) παρουσιάζει η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης. Συγκεκριμένα σύμφωνα και με τον Ορισμό 2.1.1 - 3 έχουμε:¹⁷

Ορισμός 2.3.1 - 3 (μη ομογενής) Η γενική μορφή της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης είναι

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x), \quad (2.3.1 - 2)$$

όταν f , g και r συνεχείς συναρτήσεις με $r(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Ορισμός 2.3.1 - 4 (ομογενής) Η γενική μορφή της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης είναι

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0. \quad (2.3.1 - 3)$$

όταν f και g συνεχείς συναρτήσεις για κάθε $x \in (a, b)$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.

17

Ορισμός 2.1.1 - 3: Μία διαφορική εξίσωση που γράφεται στη μορφή

$$y^{(\nu)} + f_{\nu-1}(x)y^{(\nu-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = r(x),$$

όπου η $r(x)$ και οι συντελεστές $f_0(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_{\nu-1}(x)$ είναι γνωστές συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς για κάθε $x \in (a, b)$, λέγεται μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση ν -τάξης.

Στη συνέχεια του μαθήματος εξετάζονται αναλυτικά οι κυριότερες μορφές των (2.3.1 – 2) και (2.3.1 – 3) με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή αυτών που κύρια εμφανίζονται στις εφαρμογές, ενώ ο αναγνώστης παραπέμπεται για μια εκτενέστερη μελέτη στη βιβλιογραφία.

2.3.2 Ομογενής γραμμική με σταθερούς συντελεστές

¹⁸Από τον Ορισμό 2.1.1 - 7 και τον Ορισμό 2.3.1 - 4 προκύπτει ότι η γενική μορφή της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$y'' + ay' + by = 0, \quad (2.3.2 - 1)$$

όταν a, b σταθερές, $y = y(x)$ με $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Έστω $y \neq 0$, διαφορετικά η τιμή $y = 0$ είναι μια ιδιάζουσα λύση της (3.3.2 – 1). Τότε αντικαθιστώντας κατά τα γνωστά στην (3.3.2 – 1)

$$y = e^{\lambda x} \quad \text{με } \lambda \text{ σταθερά}$$

προκύπτει ότι η **χαρακτηριστική εξίσωση** στην περίπτωση αυτή είναι

$$F(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0. \quad (2.3.2 - 2)$$

Έστω $\Delta = a^2 - 4b$ η διακρίνουσα της (2.3.2–2). Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για το πρόσημο της Δ :

18

Ορισμός 2.1.1 - 7: Ορίζεται ως ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση ν -τάξης με σταθερούς συντελεστές, κάθε εξίσωση της μορφής (2.1.1 – 9): $y^{(\nu)} + a_{\nu-1}y^{(\nu-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = r(x)$, όπου $r(x) = 0$, δηλαδή η

$$y^{(\nu)} + a_{\nu-1}y^{(\nu-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0,$$

όταν a_k σταθερές για κάθε $k = 0, 1, \dots, \nu - 1$.

$\Delta > 0$

Τότε έχουμε δύο πραγματικές διαφορετικές ρίζες λ_1, λ_2 , οπότε η **γενική λύση** της (3.3.2 - 1) θα είναι

$$y_h(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad (2.3.2 - 3)$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Παράδειγμα 2.3.2 - 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad \text{όταν } y_0 = y(0) = 0 \quad \text{και} \quad y'_0 = y'(0) = 1. \quad (1)$$

Λύση. Η (1) είναι μια γραμμική ομογενής διαφορική εξίσωση 2ης τάξης. Αντικαθιστώντας στην (1)

$$y = e^{\lambda x} \quad \text{με } \lambda \text{ σταθερά}$$

προκύπτει ότι η χαρακτηριστική εξίσωσή της είναι

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \quad \text{με } \Delta < 0 \quad \text{και ρίζες } \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -2.$$

Τότε από την (2.3.2 - 3) έχουμε ότι η γενική λύση της (1) είναι

$$y_h(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}, \quad (2)$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

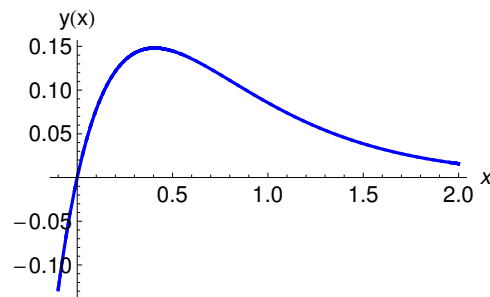
Οι σταθερές προσδιορίζονται από την (2) και τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(0) = 1$ ως εξής:

$$\begin{aligned} y_h(0) &= c_1 + c_2 = 0 & \text{οπότε} & & c_1 &= -1 \\ y'_h(0) &= -3c_1 - 2c_2 = 1, & & & c_2 &= 1. \end{aligned}$$

Άρα η μερική λύση της (1) είναι (Σχ. 3.3.2 - 1)

$$y(x) = y_h(x) = -e^{-3x} + e^{-2x}.$$

Η λύση στην περίπτωση αυτή είναι γνωστή ως **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ισχυρή απόσβεση**. ■



Σχήμα 2.3.2 - 1: Παράδειγμα 3.3.2 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y_h(x) = -e^{-3x} + e^{-2x}$, όταν $x \in [-0.1, 2]$.

$\Delta = 0$

Έχουμε μία διπλή πραγματική ρίζα την $\lambda = -a/2$. Στην περίπτωση αυτή η γενική λύση έχει τη μορφή

$$y_h(x) = (c_1 + x c_2) e^{\lambda x}, \quad (2.3.2 - 4)$$

όταν όμοια c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Παράδειγμα 2.3.2 - 2

Όμοια να λυθεί η εξίσωση

$$y'' + 4y' + 4y = 0, \quad \text{όταν } y_0 = y(0) = 1 \quad \text{και} \quad y'_0 = y'(0) = 1. \quad (3)$$

Λύση. Όμοια η χαρακτηριστική της εξίσωση της (3) είναι

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \quad \text{με} \quad \Delta = 0 \quad \text{και} \quad \text{διπλή ρίζα την} \quad \lambda = -2.$$

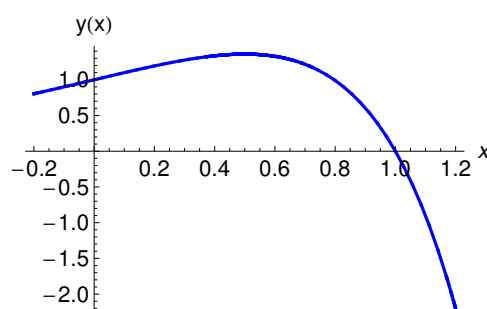
Τότε σύμφωνα με την (2.3.2 - 4) η γενική της λύση είναι

$$y_h(x) = (c_1 + c_2 x) e^{-2x}, \quad (4)$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Οι σταθερές προσδιορίζονται από την (4) και τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$ και $y'(0) = 1$ ως εξής:

$$\begin{aligned} y_h(0) &= c_1 + \quad = 1 \\ y'_h(0) &= 2c_1 + c_2 = 1, \end{aligned} \quad \text{οπότε} \quad \begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= -1. \end{aligned}$$



Σχήμα 2.3.2 - 2: Παράδειγμα 3.3.2 - 2: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y_h(x) = e^{-2x}(1-x)$, όταν $x \in [-0.2, 1.2]$.

Άρα η μερική λύση της (3) είναι (Σχ. 3.3.2 - 2)

$$y_h(x) = e^{-2x}(1-x).$$

Η μερική λύση περιγράφει την **κρίσιμη απόσβεση**. Επειδή $e^{-2x} \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η $y_h(x) = 0$, όταν $x_0 = 1$. Το x_0 στην περίπτωση αυτή λέγεται **σημείο στατικής ισορροπίας**. ■

$\Delta < 0$

Έχουμε δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες, έστω τις

$$\lambda = p + i\omega \quad \text{και} \quad \bar{\lambda} = p - i\omega \quad \text{όπου} \quad i = \sqrt{-1} \quad \text{και} \quad \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

Τότε, επειδή σύμφωνα με τον τύπο του Euler¹⁹ ισχύει ότι $e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega$, πρέπει

$$\begin{aligned} y_h(x) &= c_1^* e^{\lambda x} + c_2^* e^{\bar{\lambda} x} = c_1^* e^{(p+i\omega)x} + c_2^* e^{(p-i\omega)x} \\ &= c_1^* e^{px} e^{i\omega x} + c_2^* e^{px} e^{-i\omega x} \\ &= c_1^* e^{px} [\cos(\omega x) + i \sin(\omega x)] \\ &\quad + c_2^* e^{px} [\cos(\omega x) - i \sin(\omega x)] \\ &= e^{px} [(c_1^* + c_2^*) \cos(\omega x) + i(c_1^* - c_2^*) \sin(\omega x)], \end{aligned}$$

¹⁹Βλέπε Μάθημα *Μιγαδικοί Αριθμοί*.

δηλαδή η **γενική λύση** της (3.3.2 - 1) είναι

$$\mathbf{y}_h(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^{\mathbf{P}\mathbf{x}} [\mathbf{c}_1 \cos(\omega \mathbf{x}) + \mathbf{c}_2 \sin(\omega \mathbf{x})], \quad (2.3.2 - 5)$$

όταν όμοια c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Η (2.3.2-5) χρησιμοποιώντας γνωστές τριγωνομετρικές σχέσεις μετασχηματίζεται διαδοχικά ως εξής:

αν $c_2 \neq 0$ και $\tan \varphi = c_1/c_2$ με $-\pi \leq \varphi < \pi$, τότε

$$\begin{aligned} A &= c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x) \\ &= c_2 \left[\frac{c_1}{c_2} \cos(\omega x) + \sin(\omega x) \right] \\ &= c_2 [\tan \varphi \cos(\omega x) + \sin(\omega x)] \\ &= c_2 \left[\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos(\omega x) + \sin(\omega x) \right] \\ &= \frac{c_2}{\underbrace{\cos \varphi}_{\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \varphi}}}} [\sin \varphi \cos(\omega x) + \cos \varphi \sin(\omega x)] \\ &= c_2 \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} \sin(\omega x + \varphi) \\ &= c_2 \sqrt{1 + \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2} \sin(\omega x + \varphi) \\ &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin(\omega x + \varphi), \end{aligned}$$

δηλαδή τελικά

$$\mathbf{y}_h(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \mathbf{e}^{\mathbf{P}\mathbf{x}} \sin(\omega \mathbf{x} + \phi), \quad (2.3.2 - 6)$$

όπου $C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$.

Στην (2.3.2 - 6) η γωνία $\omega = \text{Im}(\lambda)$ εκφράζει την **κυκλική συχνότητα**, ενώ η ϕ τη **φάση**.²⁰

²⁰Για φυσική ερμηνεία βλέπε

http://el.wikipedia.org/wiki/Απλή_αρμονική_ταλάντωση και

[http://el.wikipedia.org/wiki/Φάση_\(χυματική\)](http://el.wikipedia.org/wiki/Φάση_(χυματική))

Παράδειγμα 2.3.2 - 3

Όμοια η εξίσωση

$$16y'' + 8y' + 17y = 0, \quad \text{όταν } y_0 = y(0) = 1 \quad \text{και} \quad y'_0 = y'(0) = 0. \quad (5)$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της (5) είναι

$$F(\lambda) = 16\lambda^2 + 8\lambda + 17 = 0 \quad \text{με} \quad \Delta < 0$$

$$\text{και ρίζες} \quad \lambda_1 = -\frac{1}{4} + i, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{4} - i,$$

οπότε σύμφωνα με την (2.3.2 - 5) έχουμε τη γενική λύση

$$y_h(x) = e^{-\frac{x}{4}} (c_1 \cos x + c_2 \sin x), \quad (6)$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Οι σταθερές προσδιορίζονται από την (6) και τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$ και $y'(0) = 0$ ως εξής:

$$\begin{aligned} y_h(0) &= c_1 + 0 = 1 & \text{οπότε} & c_1 = 1 \\ y'_h(0) &= -\frac{1}{4}c_1 + c_2 = 0, & & c_2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Άρα η μερική λύση της (5) είναι (Σχ. 3.3.2 - 3)

$$y_h(x) = e^{-x/4} \left(\cos x + \frac{1}{4} \sin x \right).$$

Η λύση περιγράφει μια **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ασθενή απόσβεση**.

Η μερική λύση γράφεται στη μορφή 2.3.2 - 6) ως εξής:

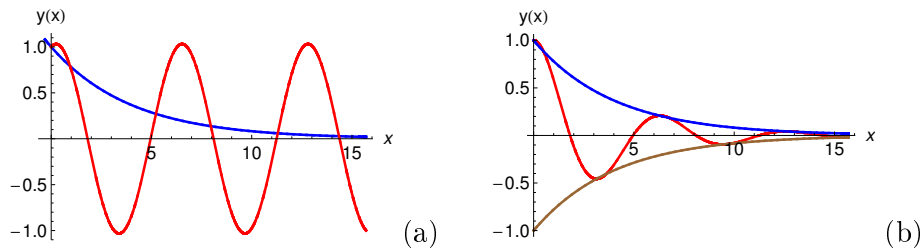
$$C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{\sqrt{17}}{4} \approx 1.030776, \quad \text{ενώ}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{c_1}{c_2} \right) \approx 1.325818 = \frac{21\pi}{50},$$

όταν γίνει αντιστοιχία της τιμής $\phi = 1.325818$ με την $\pi = 3.14$. Άρα

$$y_h(x) = 1.030776 e^{-x/4} \sin(x + \phi). \quad (7)$$

Από τη μερική λύση (7) προκύπτουν τα εξής:



Σχήμα 2.3.2 - 3: Παράδειγμα 3.3.2 - 2, όταν $x \in [0, 5\pi]$: (a) το διάγραμμα της $y_1 = e^{-x/4}$ μπλε (απόσβεση), και της $\cos x + \frac{1}{4} \sin x$ κόκκινη καμπύλη (αμείωτη ταλάντωση), ενώ στο διάγραμμα (b) της μερικής λύσης $y_h(x) = e^{-x/4} (\cos x + \frac{1}{4} \sin x)$, όπου η καφέ καμπύλη είναι το διάγραμμα της $y_2 = -e^{-x/4}$. Η απόσβεση προκαλεί τελικά τον μηδενισμό της μερικής λύσης.

i) Επειδή $|\sin(x + \phi)| \leq 1$, η γραφική παράσταση της $y_h(x)$ είναι μία καμπύλη, που περιορίζεται γενικά από τις καμπύλες

$$y_1 = e^{-x/4} \quad \text{και} \quad y_2 = -e^{-x/4}.$$

ii) Η περίοδος T της ταλάντωσης, όπου

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi,$$

είναι ανεξάρτητη από τις αρχικές συνθήκες y_0 και y'_0 , ενώ αυτό δεν συμβαίνει με τις σταθερές C και ϕ .

iii) Ο όρος

$$e^{px} = e^{-x/4}$$

πρακτικά μηδενίζεται μετά από αρκετό χρόνο, που σημαίνει όμοια, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση της ισχυρής απόσβεσης του Παραδείγματος 3.3.2 - 1, ότι το σώμα επανέρχεται στη θέση της αρχικής ισορροπίας.

■

Άσκηση

Αν $y = y(x)$, να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

- i) $y'' + 4y' + 5y = 0$; $y'_0 = y_0 = 1$,
 ii) $y'' - y' - 12y = 0$; $y'_0 = 1$, $y_0 = 0$,
 iii) $y'' + 2y' + 10y = 0$; $y'_0 = 1$, $y_0 = 0$,
 iv) $y'' + 25y = 0$; $y'_0 = y_0 = 1$,
 v) $y'' + 2y' + 4y = 0$; $y'_0 = 1$, $y_0 = 0$,
 vi) $y'' - 2y' + y = 0$; $y'_0 = -1$, $y_0 = 1$.

Απαντήσεις

- (i) $e^{-2x} (\cos x + 3 \sin x)$, (ii) $\frac{1}{7} (-e^{-3x} + e^{4x})$, (iii) $\frac{1}{3} e^{-x} \sin 3x$,
 (iv) $\frac{1}{5} (5 \cos 5x + \sin 5x)$, (v) $\frac{1}{\sqrt{3}} e^{-x} \sin(\sqrt{3}x)$, (vi) $-e^x (-1 + 2x)$.

Δίνονται στη συνέχεια χαρακτηριστικές εφαρμογές της Παραγράφου 2.3.2 στη Μηχανική και τον Ηλεκτρισμό.

2.3.3 Εφαρμογές στη Μηχανική

Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις λύσης των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές εφαρμόζονται σε προβλήματα ταλαντώσεων της Μηχανικής και, όπως θα διαπιστωθεί στην επόμενη παράγραφο, εντελώς ανάλογα και στα αντίστοιχα προβλήματα του Ηλεκτρισμού. Και στις δύο περιπτώσεις η άγνωστη συνάρτηση, που περιγράφει την ταλάντωση, θεωρείται ως συνάρτηση του χρόνου t .

Έστω ελατήριο που το ένα του άκρο είναι σταθερό, ενώ το άλλο του άκρο κινείται κατά τη διεύθυνση της κατακόρυφου. Στο ελεύθερο άκρο του προσαρτάται σώμα μάζας m , υποθέτοντας ότι η μάζα αυτή είναι τέτοια, ώστε η μάζα του ελατηρίου να θεωρείται αμελητέα. Όπως είναι γνωστό από τη Φυσική, όταν το σώμα έλκεται προς τα κάτω και κατόπιν αφήνεται ελεύθερο, εκτελεί μία κίνηση - ταλάντωση - κατά τη διεύθυνση της κατακόρυφου. Θεωρώντας ότι δεν υπάρχουν άλλες εξωτερικές δυνάμεις που να ενεργούν στο σώμα, οι μόνες δυνάμεις στην περίπτωση αυτή είναι:

- i) η δύναμη της βαρύτητας $F_1 = mg$, όπου m η μάζα του σώματος και g η επιτάχυνση της βαρύτητας,

ii) η δύναμη του ελατηρίου $F_2 = ks$ (**νόμος του Hooke**), όπου με s συμβολίζεται η απομάκρυνση του σώματος και k η σταθερά του ελατηρίου.

Έστω s_0 η αρχική απομάκρυνση. Τότε

$$ks_0 = mg. \quad (2.3.3 - 1)$$

Αν τώρα η συνάρτηση $y = y(t)$ εκφράζει την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση της στατικής ισορροπίας τη χρονική στιγμή t σύμφωνα με τον νόμο του Hooke θα πρέπει θεωρώντας πάντοτε ως θετική φορά την κίνηση προς τα κάτω η δύναμη του ελατηρίου να είναι $F_2 = -ks_0 - ky$. Τότε

$$F_1 + F_2 = mg - ks_0 - ky,$$

που λόγω της (2.3.3 - 1) τελικά γράφεται

$$F_1 + F_2 = -ky. \quad (2.3.3 - 2)$$

Εφαρμογή 2.3.3 - 1 (αμείωτη ελεύθερη αρμονική ταλάντωση)

Οι μόνες δυνάμεις που ενεργούν στο σύστημα είναι αυτές που περιγράφονται από τη σχέση (2.3.3 - 1). Εφαρμόζοντας τον 2ο νόμο του Newton, έχουμε

$$my'' + ky = 0$$

που ισοδύναμα γράφεται

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0. \quad (2.3.3 - 3)$$

Η (2.3.3-3) είναι μία ομογενής διαφορική εξίσωση 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές της μορφής (3.3.2 - 1): $y'' + ay' + by = 0$ με $a = 0$. Σύμφωνα με την (2.3.2 - 2) η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$F(\lambda) = \lambda^2 + b = \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0,$$

όπου προφανώς είναι $k/m > 0$. Επομένως οι ρίζες της είναι οι **φανταστικοί αριθμοί**

$$\lambda = \sqrt{-\frac{k}{m}} = i\sqrt{\frac{k}{m}} = i\omega \quad \text{και} \quad \bar{\lambda} = -i\sqrt{\frac{k}{m}} = -i\omega.$$

Άρα σύμφωνα με την (2.3.2 – 5) η γενική λύση είναι

$$y_h(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

που με την (2.3.2 – 6) ισοδύναμα γράφεται

$$y_h(t) = C \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.3.3 - 4)$$

όταν

$$C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}; \quad \tan \varphi = \frac{c_1}{c_2} \quad \text{και} \quad -\pi \leq \varphi < \pi.$$

Η (2.3.3 – 4) παριστάνει μία **αμείωτη ελεύθερη αρμονική ταλάντωση** με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi/\omega$.

Εφαρμογή 2.3.3 - 2 (ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση)

Στο σώμα ενεργούν εκτός από τις δυνάμεις F_1 και F_2 και μία δύναμη F_3 που θεωρείται ότι αντιδρά στην κίνηση και είναι ανάλογη προς την ταχύτητα v , δηλαδή

$$F_3 = -pv = -p \frac{dy}{dt},$$

όπου p η σταθερά απόσβεσης (το αρνητικό σημείο φανερώνει ότι η F_3 έχει φορά αντίθετη της φοράς της ταχύτητας). Τότε η (2.3.3 – 2) γράφεται

$$F_1 + F_2 + F_3 = -ky - py',$$

οπότε όμοια σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton έχουμε

$$my'' + py' + ky = 0.$$

ή ισοδύναμα

$$y'' + \frac{p}{m} y' + \frac{k}{m} y = 0. \quad (2.3.3 - 5)$$

Η (2.3.3 – 5) είναι όμοια μία ομογενής διαφορική εξίσωση 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές της μορφής (3.3.2 – 1): $y'' + ay' + by = 0$, που έχει σύμφωνα με την (2.3.2 – 2) την παρακάτω χαρακτηριστική εξίσωση:

$$F(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = \lambda^2 + \frac{p}{m} \lambda + \frac{k}{m} = 0. \quad (2.3.3 - 6)$$

Έστω

$$\Delta = \frac{1}{m^2} (p^2 - 4mk)$$

η διακρίνουσα της (2.3.3 – 6). Διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

- $\Delta > 0$, δηλαδή $p^2 > 4mk$

Τότε η (2.3.3 – 6) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες ρίζες, έστω τις

$$\lambda_1 = -(\alpha - \beta) \quad \text{και} \quad \lambda_2 = -(\alpha + \beta)$$

με

$$\alpha = \frac{p}{2m} \quad \text{συντελεστής απόσβεσης και} \quad \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{2},$$

οπότε σύμφωνα και με την (2.3.2 – 3) η γενική λύση είναι της μορφής

$$y_h(t) = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t}. \quad (2.3.3 - 7)$$

Η λύση παριστάνει μία **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ισχυρή απόσβεση**.

Επειδή εύκολα διαπιστώνεται ότι $\alpha > \beta > 0$, δηλαδή η εκθετική συνάρτηση στην παραπάνω λύση είναι της μορφής e^{-kt} με $k > 0$, οπότε $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-kt} = 0$, τελικά το σώμα δεν εκτελεί ταλάντωση, αλλά πρακτικά μετά από παρέλευση αρκετού χρόνου επανέρχεται στη θέση της αρχικής ισορροπίας. Στο Παράδειγμα 3.3.2 - 1 έχει δοθεί ανάλογη λύση με το αντίστοιχο διάγραμμα (Σχ. 3.3.2 - 1).

- $\Delta = 0$, δηλαδή $p^2 = 4mk$

Τότε η (2.3.3 – 6) έχει μία διπλή πραγματική ρίζα την

$$\lambda = -\frac{p}{2m} = -\alpha,$$

οπότε σύμφωνα και με την (2.3.2 – 4) η γενική λύση είναι της μορφής

$$y_h(t) = (c_1 + tc_2) e^{-\alpha t} \quad (2.3.3 - 8)$$

(**κρίσιμη απόσβεση**).

Επειδή $e^{-\alpha t} \neq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και ο όρος $c_1 + tc_2$ μηδενίζεται το πολύ μία φορά, δηλαδή όταν $t^* = -c_1/c_2$ με $C_2 \neq 0$ (εξίσωση 1ου βαθμού ως προς t), από την (2.3.3 – 8) προκύπτει τότε ότι θα πρέπει να υπάρχει το πολύ ένα πέρασμα από τη θέση της στατικής ισορροπίας $y = 0$. Αν οι σταθερές c_1, c_2 είναι ετερόσημες, οπότε $t > 0$, αυτό συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t^* = -c_1/c_2$, ενώ, όταν οι c_1, c_2 είναι ομόσημες, δεν συμβαίνει ποτέ. Στο Παράδειγμα 3.3.2 - 2 έχει δοθεί ανάλογη λύση με το αντίστοιχο διάγραμμα (Σχ. 3.3.2 - 2).

- $\Delta < 0$, δηλαδή $p^2 < 4mk$

Τότε η (2.3.3 - 6) έχει ρίζες μιγαδικές συζυγείς τις

$$\lambda = -\alpha + i\omega \quad \text{και} \quad \bar{\lambda} = -\alpha - i\omega,$$

όπου

$$\omega = \frac{\sqrt{4mk - p^2}}{2m} \quad (\text{κυκλική συχνότητα}),$$

οπότε σύμφωνα και με τις (2.3.2 - 5) και (2.3.2 - 6) η γενική λύση είναι της μορφής

$$\begin{aligned} y_h(t) &= e^{-\alpha t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) \\ &= C e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \phi), \end{aligned} \quad (2.3.3 - 9)$$

όταν

$$C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}; \quad \tan \phi = \frac{c_1}{c_2} \quad \text{με } c_2 \neq 0 \text{ και } -\pi \leq \phi < \pi.$$

Η κίνηση αυτή είναι μία **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ασθενή απόσβεση**. Ανάλογα με τις προηγούμενες δύο περιπτώσεις στο Παράδειγμα 3.3.2 - 3 έχει δοθεί λύση σε αντίστοιχο πρόβλημα και έχει γίνει μελέτη της συμπεριφοράς της λύσης στο διάγραμμα του Σχ. 3.3.2 - 3.

2.3.4 Εφαρμογές στον Ηλεκτρισμό

Εφαρμογή 2.3.4 - 3 (κύκλωμα RLC)

Έστω κύκλωμα RLC όπου το μόνο αίτιο απόσβεσης είναι η ωμική αντίσταση R . Εφαρμόζοντας τον 2ο κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα έχουμε

$$\frac{q}{C} - L \frac{di}{dt} = iR$$

που επειδή $i = -dq/dt$ γράφεται

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \quad (2.3.4 - 1)$$

(κύκλωμα **Thompson**).

Η (2.3.4 - 1) είναι της μορφής (3.3.2 - 1) με χαρακτηριστική εξίσωση

$$F(\lambda) = \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0. \quad (2.3.4 - 2)$$

Έστω

$$\Delta = \frac{1}{L^2} \left(R^2 - \frac{4L}{C} \right).$$

η διακρίνουσα της (2.3.4 - 2).

Ανάλογα συμπεράσματα εκείνων της Εφαρμογής 2.3.3 - 2 της Παραγράφου 2.3.3 είναι δυνατόν να προκύψουν και στην περίπτωση αυτή. Περιληπτικά δίνονται οι λύσεις της (2.3.4 - 1) στις παρακάτω περιπτώσεις:

- $\Delta > 0$, δηλαδή $R > 2\sqrt{L/C}$

Τότε έχουμε ρίζες πραγματικές και άνισες τις

$$\lambda_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2L} = -k + m, \quad \lambda_2 = -\frac{R}{2L} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2L} = -k - m,$$

οπότε σύμφωνα με την (2.3.2 - 3) η λύση είναι

$$i_h = c_1 e^{-(k-m)t} + c_2 e^{-(k+m)t}. \quad (2.3.4 - 3)$$

Η (2.3.4 - 3) παριστάνει μία **απεριοδική ταλάντωση**.

- $\Delta = 0$, δηλαδή $R = 2\sqrt{L/C}$

Σύμφωνα με την (2.3.2 - 4) έχουμε τη λύση

$$i_h = (c_1 + tc_2) e^{-kt} \quad (2.3.4 - 4)$$

που είναι γνωστή ως **κρίσιμη απόσβεση**.

- $\Delta < 0$, δηλαδή $R < 2\sqrt{L/C}$

Σύμφωνα με την (2.3.2 - 6) έχουμε τελικά ότι

$$i_h = i_0 e^{-kt} \sin(\omega t + \phi), \quad (2.3.4 - 5)$$

όπου

$$i_0 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}; \quad \tan \phi = \frac{c_1}{c_2}, \quad \text{όταν } c_2 \neq 0 \text{ και } -\pi \leq \phi < \pi.$$

Η λύση παριστάνει μία **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ισχυρή απόσβεση**.

- **Ειδική περίπτωση**, όταν $R = 0$

Τότε η (2.3.4 - 1) γράφεται

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} i = 0 \quad (2.3.4 - 6)$$

με γενική λύση όμοια σύμφωνα με την (2.3.2 - 6) της μορφής

$$i_h = i_0 \sin(\omega t + \phi), \quad (2.3.4 - 7)$$

όπου i_0 κατάλληλη σταθερά και

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Η λύση παριστάνει **αμείωτη αρμονική ταλάντωση** με κυκλική συχνότητα ω . Η περίπτωση αυτή είναι ανάλογη της Εφαρμογής 2.3.3 - 1 της Παραγράφου 2.3.3.

2.3.5 Μη ομογενής με σταθερούς συντελεστές

²¹Από τον Ορισμό 2.1.1 - 6 και τον Ορισμό 2.3.1 - 3 προκύπτει ότι η γενική μορφή της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$\mathbf{y}'' + \mathbf{a}\mathbf{y}' + \mathbf{b}\mathbf{y} = \mathbf{r}(\mathbf{x}), \quad (2.3.5 - 1)$$

όταν $a, b \in \mathbb{R}$, $y = y(x)$, $r(x) \neq 0$ με $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

²²Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.1 - 1 η γενική λύση $y = y(t)$ της (3.3.2 - 4) είναι $y = y_h + y_p$, όπου y_h είναι η γενική λύση της αντίστοιχης

21

Ορισμός 2.1.1 - 6: Ορίζεται ως μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση ν -τάξης με σταθερούς συντελεστές, κάθε εξίσωση της μορφής (2.1.1 - 6) όπου οι συναρτήσεις $f_k(x)$ είναι σταθερές για κάθε $k = 0, 1, \dots, \nu - 1$, δηλαδή η

$$y^{(\nu)} + a_{\nu-1}y^{(\nu-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = r(x),$$

όταν a_k σταθερές για κάθε $k = 0, 1, \dots, \nu - 1$.

22

ομογενούς, δηλαδή της (3.3.2 – 1) και y_p μία μερική λύση της μη ομογενούς (3.3.2 – 4).

Από τις μεθόδους προσδιορισμού της μερικής λύσης y_p της μη ομογενούς (3.3.2 – 4) θα εξεταστεί μόνον η μέθοδος που δίνεται στη συνέχεια. Ο αναγνώστης παραπέμπεται για μια εκτενέστερη μελέτη στη βιβλιογραφία.

Μέθοδος του Lagrange

Σύμφωνα με τη μέθοδο του Lagrange για τον προσδιορισμό της μερικής λύσης y_p θεωρείται ότι στη γενική λύση

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (2.3.5 - 2)$$

της αντίστοιχης ομογενούς της (3.3.2 – 4), δηλαδή της

$$y'' + ay' + by = 0,$$

οι σταθερές c_1 και c_2 είναι συναρτήσεις του x , που πρέπει να προσδιοριστούν, έτσι ώστε να επαληθεύεται η (3.3.2 – 4), δηλαδή η

$$y'' + ay' + by = r(x).$$

Έστω $c_1 = k_1(x)$ και $c_2 = k_2(x)$, οπότε η (2.3.5 – 2) γράφεται

$$y_p(x) = k_1(x)y_1(x) + k_2(x)y_2(x). \quad (2.3.5 - 3)$$

Τότε

$$y_p'(x) = k_1'(x)y_1(x) + k_1(x)y_1'(x) + k_2'(x)y_2(x) + k_2(x)y_2'(x). \quad (2.3.5 - 4)$$

Στη (2.3.5 – 4) οι συναρτήσεις $k_1(x)$ και $k_2(x)$ εκλέγονται, έτσι ώστε

$$k_1'(x)y_1(x) + k_2'(x)y_2(x) = 0, \quad (2.3.5 - 5)$$

Θεώρημα 2.1.1 - 1: Αν y_h είναι η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $y^{(\nu)} + f_{\nu-1}(x)y^{(\nu-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$ και y_p μία μερική λύση της μη ομογενούς $y^{(\nu)} + f_{\nu-1}(x)y^{(\nu-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = r(x)$, τότε η γενική λύση της μη ομογενούς είναι

$$y = y_h + y_p.$$

οπότε από την (2.3.5 - 4) προκύπτει τότε ότι

$$y_p(x)'' = k_1(x)y_1''(x) + k_1'(x)y_1'(x) + k_2(x)y_2''(x) + k_2'(x)y_2'(x). \quad (2.3.5 - 6)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.3.5 - 4), (2.3.5 - 5) και (2.3.5 - 6) στην (3.3.2 - 4), λαμβάνοντας υπόψη ότι οι y_1 και y_2 είναι λύσεις της (3.3.2 - 1), έχουμε

$$\begin{aligned} r(x) &= \underbrace{k_1 y_1'' + k_1' y_1'} + \underbrace{k_2 y_2'' + k_2' y_2'} + a \left(\underbrace{k_1 y_1'} + \underbrace{k_2 y_2'} \right) + b \left(\underbrace{y_1 k_1} + \underbrace{y_2 k_2} \right) \\ &= k_1 (y_1'' + \alpha y_1' + \beta y_1) + k_2 (y_2'' + \alpha y_2' + \beta y_2) + k_1' y_1' + k_2' y_2' \\ &= k_1' y_1' + k_2' y_2'. \end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$k_1'(x)y_1'(x) + k_2'(x)y_2'(x) = r(x). \quad (2.3.5 - 7)$$

Οι εξισώσεις (2.3.5-5) και (2.3.5-7) ορίζουν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους τις συναρτήσεις $k_1'(x)$ και $k_2'(x)$, από τη λύση του οποίου προκύπτει ότι

$$k_1(x) = - \int \frac{r(x) y_2(x)}{u(x)} dx \quad \text{και} \quad k_2(x) = \int \frac{r(x) y_1(x)}{u(x)} dx, \quad \text{όταν}$$

$$u(x) = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x). \quad (2.3.5 - 8)$$

Τότε σύμφωνα και με την (2.3.5-2) η γενική λύση της (3.3.2-4) θα είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\mathbf{x}) &= y_h(\mathbf{x}) + y_p(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{c}_1 \mathbf{y}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{c}_2 \mathbf{y}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_1(\mathbf{x}) \mathbf{y}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_2(\mathbf{x}) \mathbf{y}_2(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.3.5 - 9)$$

Παράδειγμα 2.3.5 - 1

Αν $y = y(t)$, να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y' + 3y = -x, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y(0) = 0 \quad \text{και} \quad y'_0 = y'(0) = 1. \quad (1)$$

Λύση. Η (1) είναι μια μη ομογενής 2ης τάξης διαφορική εξίσωση με αντίστοιχη ομογενή την

$$y'' + 4y' + 3y = 0. \quad (2)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (2) είναι η

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

με διακρίνουσα $\Delta = 4 > 0$, οπότε οι ρίζες της θα είναι οι πραγματικοί αριθμοί, έστω

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = -3.$$

Άρα σύμφωνα με την (2.3.2 – 3) η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}, \quad (3)$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Έστω

$$r(x) = -x, \quad y_1(x) = e^{-x} \quad \text{και} \quad y_2(x) = e^{-3x},$$

οπότε

$$y_1'(x) = -e^{-x} \quad \text{και} \quad y_2'(x) = -3e^{-3x}.$$

Τότε από την (2.3.5 – 8) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} u(x) &= y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x) \\ &= e^{-x} (-3e^{-3x}) - e^{-x} e^{-3x} = -2e^{-4x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1(x) &= - \int \frac{r(x) y_2(x)}{u(x)} dx = - \int \frac{-x e^{-3x}}{-2e^{-4x}} dx = -\frac{1}{2} \int x e^x dx \\ &= (\text{παραγοντική ολοκλήρωση}) \cdots = -\frac{1}{2} e^x (x - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2(x) &= \int \frac{r(x) y_1(x)}{u(x)} dx = \int \frac{-x e^{-x}}{-2e^{-4x}} dx = \frac{1}{2} \int x e^{3x} dx \\ &= (\text{παραγοντική ολοκλήρωση}) \cdots = \frac{1}{2} e^{3x} \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9} \right). \end{aligned}$$

Η μερική λύση y_p της μη ομογενούς της (1) προκύπτει τότε από την (2.3.5–

3) ως εξής:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= k_1(x)y_1(x) + k_2(x)y_2(x) \\ &= -\frac{1}{2}e^x(x-1)e^{-x} + \frac{1}{2}e^{3x}\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{-3x} \\ &= \frac{1}{9}(4-3x). \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με την (2.3.5 - 9) η γενική λύση της (1) θα είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p \\ &= c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{9}(4-3x). \end{aligned} \quad (4)$$

Η μερική λύση της (1) προκύπτει τότε από την (4) σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος ως εξής:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 + \frac{1}{9}(4-0) = c_1 + c_2 + \frac{4}{9} = 0 \\ y'(0) &= -c_1 - 3c_2 + \frac{1}{9}(-3) = -c_1 - 3c_2 - \frac{1}{3} = 1, \end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= -\frac{4}{9} \\ c_1 + 3c_2 &= -\frac{4}{3}, \end{aligned} \quad \text{οπότε } c_1 = 0 \text{ και } c_2 = -\frac{4}{9}.$$

Άρα η μερική λύση της (1) είναι (Σχ. 2.3.5 - 1)

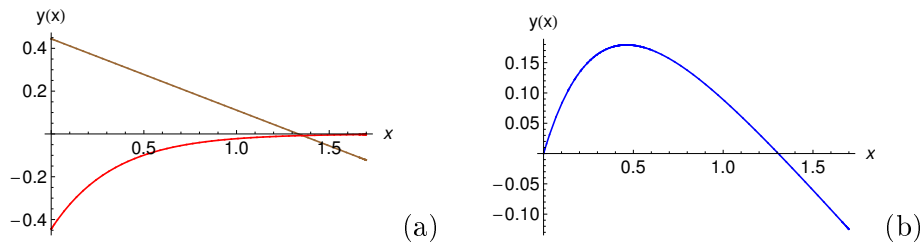
$$y(x) = -\frac{4}{9}e^{-3x} + \frac{1}{9}(4-3x).$$

■

Παράδειγμα 2.3.5 - 2

Όμοια να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y' + 3y = \sin x, \quad \text{όταν } y_0 = y(0) = y'_0 = y'(0) = 0. \quad (5)$$



Σχήμα 2.3.5 - 1: Παράδειγμα 2.3.5 - 1, όταν $x \in [0, 1.7]$: (a) το διάγραμμα της μερικής λύσης $y_p = \frac{1}{9}(4-3x)$ (ευθεία) καφέ και της $-\frac{4}{9}e^{-3x}$ κόκκινη καμπύλη, ενώ στο διάγραμμα (b) της μερικής λύσης $y(x) = -\frac{4}{9}e^{-3x} + \frac{1}{9}(4-3x)$. Η λύση, εκτός από το σημείο $x = 0$, τέμνει άλλη μια φορά τον x -άξονα (θέση ισορροπίας).

Λύση. Το παράδειγμα αυτό είναι όμοιο με το Παράδειγμα 2.3.5 - 1 και διαφέρει μόνον ως προς τη συνάρτηση $r(x)$, όπου στην περίπτωση αυτή είναι $r(x) = \sin x$.

Επομένως η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης $y'' + 4y' + 3y = 0$ θα είναι όμοια

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}, \quad (6)$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές, ενώ σύμφωνα με την (2.3.5 - 8) έχουμε

$$\begin{aligned} u(x) &= y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x) \\ &= e^{-x}(-3e^{-3x}) - e^{-x} e^{-3x} = -2e^{-4x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1(x) &= - \int \frac{r(x) y_2(x)}{u(x)} dx = - \int \frac{\sin x e^{-3x}}{-2e^{-4x}} dx = \frac{1}{2} \int e^x \sin x dx \\ &= (\text{παραγοντική ολοκλήρωση}) \dots = \frac{1}{4} e^x (\sin x - \cos x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2(x) &= \int \frac{r(x) y_1(x)}{u(x)} dx = \int \frac{\sin x e^{-x}}{-2e^{-4x}} dx = -\frac{1}{2} \int e^{3x} \sin x dx \\ &= (\text{παραγοντική ολοκλήρωση}) \dots = \frac{1}{20} e^{3x} (-3 \sin x + \cos x). \end{aligned}$$

Η μερική λύση y_p της μη ομογενούς της (5) προκύπτει τότε από την (2.3.5-

3) ως εξής:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= k_1(x)y_1(x) + k_2(x)y_2(x) \\ &= \frac{1}{4} e^x (\sin x - \cos x) e^{-x} + \frac{1}{20} e^{3x} (-3 \sin x + \cos x) e^{-3x} \\ &= \frac{1}{10} (\sin x - 2 \cos x). \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με την (2.3.5 - 9) η γενική λύση της (5) θα είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p \\ &= c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} (\sin x - 2 \cos x). \end{aligned} \quad (7)$$

Η μερική λύση της (5) προκύπτει τότε από την (7) σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος ως εξής:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 + \frac{1}{10}(0 - 2) = c_1 + c_2 - \frac{1}{5} = 0 \\ y'(0) &= -c_1 - 3c_2 + \frac{1}{10}(-1 + 0) = -c_1 - 3c_2 - \frac{1}{10} = 0, \end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= \frac{1}{5} \\ c_1 + 3c_2 &= \frac{1}{10}, \end{aligned} \quad \text{οπότε} \quad c_1 = \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad c_2 = -\frac{1}{20}.$$

Άρα η μερική λύση της (5) είναι

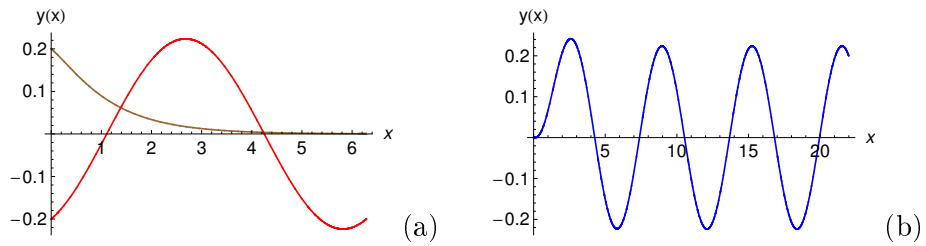
$$y(x) = \frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{20} e^{-3x} + \frac{1}{10} (\sin x - 2 \cos x).$$

Παρατηρούμε τα εξής (Σχ. 2.3.5 - 2):

- ο όρος

$$\frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{20} e^{-3x}$$

τελικά μηδενίζεται (**απόσβεση**), που είναι δυνατόν στην περίπτωση αυτή να χαρακτηριστεί ως ισχυρή, ενώ ο όρος



Σχήμα 2.3.5 - 2: Παράδειγμα 2.3.5 - 2, όταν $x \in [0, 2\pi]$: (a) το διάγραμμα της λύσης $\frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{20}e^{-3x}$ καφέ καμπύλη (ισχυρή απόσβεση) και της $\frac{1}{10}(\sin x - 2\cos x)$ κόκκινη καμπύλη (αμείωτη ταλάντωση), ενώ στο διάγραμμα (b) της μερικής λύσης $y(x) = \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{20}e^{-3x} + \frac{1}{10}(\sin x - 2\cos x)$, όταν $x \in [0, 7\pi]$. Η λύση τελικά περιγράφει μια αμείωτη ταλάντωση.

- $$\frac{1}{10}(\sin x - 2\cos x)$$

εκτελεί μια αμείωτη ταλάντωση.

- Τελικά η μερική λύση $y(x)$ περιγράφει μια αμείωτη ταλάντωση.

Παράδειγμα 2.3.5 - 3

Όμοια της

$$y'' + 2y' + y = e^{-2x}, \quad \text{όταν } y_0 = y(0) = y'_0 = y'(0) = 0. \quad (8)$$

Λύση. Η ομογενής εξίσωση της (8) είναι η

$$y'' + 2y' + y = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση την

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

και διακρίνουσα $\Delta = 0$, οπότε έχουμε μια πραγματική διπλή ρίζα, έστω την

$$\lambda = -1.$$

Άρα σύμφωνα με την (2.3.2 – 4) η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}, \quad (9)$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Έστω

$$r(x) = e^{-2x}, \quad y_1(x) = e^{-x} \quad \text{και} \quad y_2(x) = x e^{-x},$$

οπότε

$$y_1'(x) = -e^{-x} \quad \text{και} \quad y_2'(x) = e^{-x} - x e^{-x}.$$

Τότε όμοια από την (2.3.5 – 8) προκύπτει

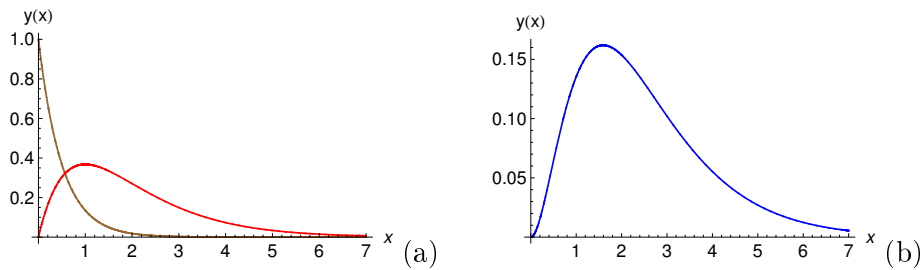
$$\begin{aligned} u(x) &= y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x) \\ &= e^{-x} (e^{-x} - x e^{-x}) - (-e^{-x}) x e^{-x} = e^{-2x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1(x) &= - \int \frac{r(x) y_2(x)}{u(x)} dx = - \int \frac{e^{-2x} x e^{-x}}{e^{-2x}} dx \\ &= - \int x e^{-x} dx = \dots = x e^{-x} + e^{-x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2(x) &= \int \frac{r(x) y_1(x)}{u(x)} dx = \int \frac{e^{-2x} e^{-x}}{e^{-2x}} dx \\ &= \int e^{-x} dx = -e^{-x}. \end{aligned}$$

Η μερική λύση y_p της μη ομογενούς της (8) προκύπτει τότε από την (2.3.5–3) ως εξής:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= k_1(x) y_1(x) + k_2(x) y_2(x) \\ &= e^{-x} (x e^{-x} + e^{-x}) + x e^{-x} (-e^{-x}) \\ &= e^{-2x}. \end{aligned}$$



Σχήμα 2.3.5 - 3: Παράδειγμα 2.3.5 - 3, όταν $x \in [0, 7]$: (a) το διάγραμμα της μερικής λύσης $y_p = e^{-2x}$ καφέ και της $x e^{-x}$ κόκκινη καμπύλη, ενώ στο διάγραμμα (b) της μερικής λύσης $y(x) = e^{-2x}(1 + x e^x - e^x)$. Η λύση παρουσιάζει ισχυρή απόσβεση και το σύστημα επανέρχεται στη θέση της αρχικής ισορροπίας.

Άρα σύμφωνα με την (2.3.5 - 9) η γενική λύση της (8) θα είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p \\ &= c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + e^{-2x}. \end{aligned} \quad (10)$$

Η μερική λύση της (8) προκύπτει τότε από την (10) σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος ως εξής:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + 0 + 1 = c_1 + 1 = 0 \\ y'(0) &= -c_1 + c_2 - 0 - 2 = -c_1 + c_2 - 2 = 0, \end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} c_1 &= -1 \\ -c_1 + c_2 &= 2, \end{aligned} \quad \text{οπότε } c_1 = -1 \text{ και } c_2 = 1.$$

Άρα η μερική λύση της (8) είναι (Σχ. 2.3.5 - 3)

$$y(x) = e^{-2x} + x e^{-x} - e^{-x} = e^{-2x}(1 + x e^x - e^x)$$

(ισχυρή απόσβεση).

■

Παράδειγμα 2.3.5 - 4

Όμοια η

$$y'' + 4y = \sin x, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y(0) = y'_0 = y'(0) = 0. \quad (11)$$

Λύση. Η ομογενής εξίσωση της (11) είναι

$$y'' + 4y = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση την

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0 \quad \text{με} \quad \Delta < 0 \quad \text{και} \quad \text{ρίζες} \quad \lambda = 2i, \quad \bar{\lambda} = -2i.$$

Άρα σύμφωνα με την (2.3.2 – 5) η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_h(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x, \quad (12)$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Έστω

$$r(x) = \sin x, \quad y_1(x) = \cos 2x \quad \text{και} \quad y_2(x) = \sin 2x,$$

οπότε

$$y'_1(x) = -2 \sin 2x \quad \text{και} \quad y'_2(x) = 2 \cos 2x.$$

Τότε όμοια από την (2.3.5 – 8) είναι

$$\begin{aligned} u(x) &= y_1(x) y'_2(x) - y'_1(x) y_2(x) \\ &= \cos 2x (\sin 2x)' - (\cos 2x)' \sin 2x \\ &= 2 (\sin^2 2x + \cos^2 2x) = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_1(x) &= - \int \frac{r(x) y_2(x)}{u(x)} dx = - \int \frac{\sin x \sin 2x}{2} dx \\
 &= - \int \frac{\sin x 2 \sin x \cos x}{2} dx = - \int \sin^2 x (\sin x)' dx \\
 &= -\frac{1}{3} \sin^3 x,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_2(x) &= \int \frac{r(x) y_1(x)}{u(x)} dx = \int \frac{\sin x \cos 2x}{2} dx \\
 &\quad (2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)) \\
 &= \frac{1}{4} \int \sin 3x dx - \frac{1}{4} \int \sin x dx \\
 &= -\frac{1}{12} \cos 3x + \frac{1}{4} \cos x.
 \end{aligned}$$

Η μερική λύση y_p της μη ομογενούς της (11) προκύπτει τότε από την (2.3.5 – 3) ως εξής:

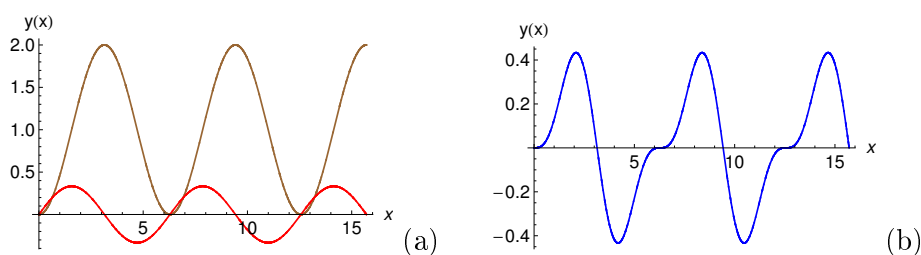
$$\begin{aligned}
 y_p(x) &= k_1(x)y_1(x) + k_2(x)y_2(x) \\
 &= -\frac{1}{3} \sin^3 x \cos 2x + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \cos 3x + \cos x \right) \sin 2x \\
 &= \frac{1}{3} \sin x.
 \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με την (2.3.5 – 9) η γενική λύση της (11) θα είναι

$$\begin{aligned}
 y(x) &= y_h + y_p \\
 &= c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{3} \sin x. \tag{13}
 \end{aligned}$$

Η μερική λύση της (11) προκύπτει τότε από την (13) σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος ως εξής:

$$\begin{aligned}
 y(0) &= c_1 + 0 + 0 = 0 \\
 y'(0) &= 0 + 2c_2 + \frac{1}{3} = 0,
 \end{aligned}$$



Σχήμα 2.3.5 - 4: Παράδειγμα 2.3.5 - 4, όταν $x \in [0, 5\pi]$: (a) το διάγραμμα της λύσης $-(\cos x - 1)$ καφέ και της μερικής $\frac{1}{3} \sin x$ κόκκινη καμπύλη, ενώ στο διάγραμμα (b) της μερικής λύσης $y(x) = -\frac{1}{3}(\cos x - 1) \sin x$. Η λύση περιγράφει μια αμείωτη ταλάντωση.

οπότε

$$c_1 = 0 \quad \text{και} \quad c_2 = -\frac{1}{6}.$$

Άρα η μερική λύση της (11) είναι (Σχ. 2.3.5 - 4)

$$y(x) = -\frac{1}{3}(\cos x - 1) \sin x$$

(αμείωτη ταλάντωση). ■

Παράδειγμα 2.3.5 - 5

Όμοια η

$$y'' + 2y' + 10y = 1, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y(0) = y'_0 = y'(0) = 0. \quad (14)$$

Λύση. Η ομογενής εξίσωση της (14) είναι

$$y'' + 2y' + 10y = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση την

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0 \quad \text{με} \quad \Delta < 0$$

και ρίζες $\lambda = -1 + 3i, \quad \bar{\lambda} = -1 - 3i.$

Άρα σύμφωνα με την (2.3.2 – 5) η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_h(x) = e^{-x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x), \quad (15)$$

όταν c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Έστω

$$r(x) = 1, \quad y_1(x) = e^{-x} \cos 3x \quad \text{και} \quad y_2(x) = e^{-x} \sin 3x,$$

οπότε

$$y_1'(x) = -e^{-x} \cos 3x - 3e^{-3x} \sin 3x, \quad \text{και}$$

$$y_2'(x) = -e^{-x} \sin 3x + 3e^{-3x} \cos 3x.$$

Τότε όμοια από την (2.3.5 – 8) είναι

$$\begin{aligned} u(x) &= y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x) \\ &= e^{-x} \cos 3x (-e^{-x} \sin 3x + 3e^{-3x} \cos 3x) \\ &\quad - e^{-x} \sin 3x (-e^{-x} \cos 3x - 3e^{-3x} \sin 3x) \\ &= 3e^{-x} (\cos^2 3x + \sin^2 3x) = 3e^{-2x}, \end{aligned}$$

$$k_1(x) = - \int \frac{r(x) y_2(x)}{u(x)} dx = - \int \frac{1 \cdot e^{-2x} \sin 3x}{3e^{-x}} dx$$

$$= -\frac{1}{3} \int e^x \sin 3x dx$$

(διπλή παραγοντική ολοκλήρωση)

$$= -\frac{e^x}{10} (-3 \cos 3x + \sin 3x),$$

$$\begin{aligned}
 k_2(x) &= \int \frac{r(x)y_1(x)}{u(x)} dx = \int \frac{1 \cdot e^{-x} \cos 3x}{3e^{-2x}} dx \\
 &= \frac{1}{3} \int e^x \cos 3x dx \\
 &\quad (\text{διπλή παραγοντική ολοκλήρωση}) \\
 &= \frac{e^x}{10} (\cos 3x + 3 \sin 3x).
 \end{aligned}$$

Η μερική λύση y_p της μη ομογενούς της (14) προκύπτει τότε από την (2.3.5 – 3) ως εξής:

$$\begin{aligned}
 y_p(x) &= k_1(x)y_1(x) + k_2(x)y_2(x) \\
 &= -\frac{e^x}{10} (-3 \cos 3x + \sin 3x) e^{-x} \cos 3x \\
 &\quad + \frac{e^x}{10} (\cos 3x + 3 \sin 3x) e^{-x} \sin 3x \\
 &= \frac{1}{10}.
 \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με την (2.3.5 – 9) η γενική λύση της (14) θα είναι

$$\begin{aligned}
 y(x) &= y_h + y_p \\
 &= e^{-x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + \frac{1}{10}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Η μερική λύση της (14) προκύπτει τότε από την (16) σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος ως εξής:

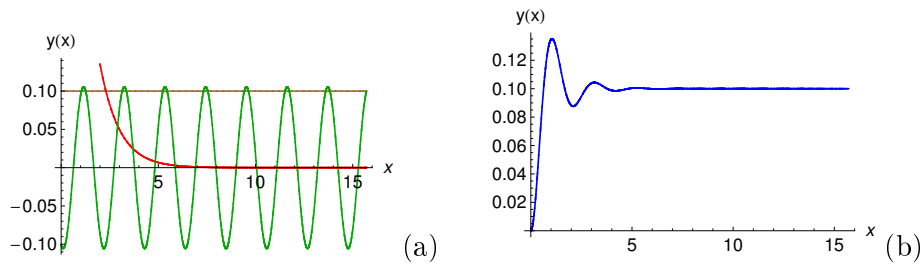
$$\begin{aligned}
 y(0) &= c_1 + 0 + \frac{1}{10} = 0 \\
 y'(0) &= -c_1 + 3c_2 + 0 = 0,
 \end{aligned}$$

οπότε

$$c_1 = -\frac{1}{10} \quad \text{και} \quad c_2 = -\frac{1}{30}.$$

Επομένως η μερική λύση της (14) είναι

$$y(x) = \frac{1}{10} - \frac{e^{-x}}{10} \left(\cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x \right).$$



Σχήμα 2.3.5 - 5: Παράδειγμα 2.3.5 - 5, όταν $x \in [0, 5\pi]$: (α) το διάγραμμα της $y_1 = \frac{1}{10}$ (σταθερή συνάρτηση) καφέ ευθεία, $y_2 = e^{-x}$ κόκκινη καμπύλη (απόσβεση) και $y_3 = -\frac{1}{10}(\cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x)$ πράσινη καμπύλη (αμείωτη ταλάντωση), ενώ στο διάγραμμα (β) της μερικής λύσης $y(x) = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}(e^{-x} \cos 3x + \frac{1}{3} e^{-x} \sin 3x)$. Η λύση τελικά περιγράφει μια σταθερή κατάσταση.

Παρατηρούμε τα εξής (Σχ. 2.3.5 - 5):

- το διάγραμμα της μερικής λύσης $y_p(x) = \frac{1}{10}$ είναι μια ευθεία παράλληλη στον x -άξονα,
- του όρου e^{-x} είναι μια καμπύλη, που τείνει στον x -άξονα ασυμπτωτικά (απόσβεση), που είναι δυνατόν στην περίπτωση αυτή να χαρακτηριστεί ως ισχυρή, ενώ
- ο όρος

$$-\frac{1}{10} \left(\cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x \right)$$

εκτελεί μια αμείωτη ταλάντωση.

- Τελικά η μερική λύση $y(x)$ περιγράφει μια σταθερή κατάσταση με τελική τιμή ασυμπτωτικά $\frac{1}{10}$.

■

2.3.6 Εφαρμογές

Εφαρμογές στη Μηχανική (εξαναγκασμένη ταλάντωση)

Στην Παράγραφο 2.3.3 η μελέτη της κίνησης του σώματος είχε στηριχθεί στη μη ύπαρξη εξωτερικών δυνάμεων που να ενεργούν στο σώμα κατά τη διάρκεια της κίνησής του (ελεύθερη ταλάντωση). Η μελέτη της κίνησης επεκτείνεται θεωρώντας ότι στο σώμα ενεργεί εξωτερική δύναμη που περιγράφεται από τη συνάρτηση $F(t)$. Τότε η εξίσωση της κίνησης γράφεται

$$my'' + py' + ky = F(t) \quad (2.3.6 - 1)$$

που είναι μία μη ομογενής διαφορική εξίσωση 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές της μορφής (3.3.2 – 4): $y'' + ay' + by = r(x)$. Στην περίπτωση αυτή η $F(t)$ λέγεται είσοδος, η $y = y(t)$ έξοδος και το είδος της κίνησης **εξαναγκασμένη ταλάντωση**. Η γενική λύση της (2.3.6 – 1) προκύπτει τότε σύμφωνα με τα παραπάνω.

Εφαρμογές στον Ηλεκτρισμό

Έστω ότι στο κύκλωμα RLC εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ηλεκτρεγερτική δύναμη $E_0 \sin \omega t$. Εφαρμόζοντας τον 2ο κανόνα του Kirchoff, έχουμε

$$\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} + Ri = E_0 \sin \omega t,$$

οπότε, παραγωγίζοντας ως προς t και αντικαθιστώντας όπου $i = i(t)$ με $i = dq/dt$, προκύπτει τελικά

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{1}{L} E_0 \omega \cos \omega t. \quad (2.3.6 - 2)$$

Η (2.3.6 – 2) είναι όμοια μια μη ομογενής διαφορική εξίσωση 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές της μορφής (3.3.2 – 4), που λύνεται κατά τα γνωστά.

Τέλος, πρέπει να αναφερθεί στο σημείο αυτό ότι στις περισσότερες των περιπτώσεων, η λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης είναι αδύνατη. Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι. Ο αναγνώστης παραπέμπεται προς τούτο στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [3] Κεφ. 10.

Άσκηση

1. Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις, όταν $y = y(x)$ και $y_0 = y'_0 = 0$:

$$i) \quad y'' + 4y' + 13y = e^{-x}$$

$$iv) \quad y'' + 2y' + y = \sin x$$

$$ii) \quad y'' + y = \cos x$$

$$v) \quad y'' + y' = e^{-x} \sin x$$

$$iii) \quad y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$$

$$vi) \quad y'' + 4y' + 3y = 4e^{-x}.$$

Απαντήσεις

$$(i) \quad u(x) = 3, \quad k_1(x) = \frac{e^{-x}}{30} (3 \cos 3x + \sin 3x), \quad k_2(x) = -\frac{e^{-x}}{30} (\cos 3x - 3 \sin 3x), \\ y_p(x) = \frac{e^{-x}}{10}, \quad y(x) = \frac{1}{30} e^{-2x} (3e^x - 3 \cos 3x - \sin 3x).$$

$$(ii) \quad u(x) = 1, \quad k_1(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x, \quad k_2(x) = -\frac{1}{2} \cos^2 x, \\ y_p(x) = -\frac{1}{2} x \cos x, \quad y(x) = \frac{1}{2} (-x \cos x + \sin x).$$

$$(iii) \quad u(x) = -3e^{-3x}, \quad k_1(x) = x, \quad k_2(x) = -e^{-x}, \\ y_p(x) = e^{-x}(x-1), \quad y(x) = e^{-2x} [1 + e^x(x-1)].$$

$$(iv) \quad u(x) = e^{-2x}, \quad k_1(x) = -\frac{e^x}{2} (\cos x - x \cos x + x \sin x), \quad k_2(x) = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x), \\ y_p(x) = -\frac{\cos x}{2}, \quad y(x) = \frac{1}{2} e^{-x} (1 + x - e^x \cos x).$$

$$(v) \quad u(x) = -e^{-x}, \quad k_1(x) = -\frac{e^{-x}}{2} (\cos x + \sin x), \quad k_2(x) = \cos x, \\ y_p(x) = \frac{e^{-x}}{2} (\cos x - \sin x), \quad y(x) = \frac{1}{2} e^{-x} (-2 + e^x + \cos x - \sin x).$$

$$(vi) \quad u(x) = -2e^{-4x}, \quad k_1(x) = 2x, \quad k_2(x) = -e^{-2x}, \\ y_p(x) = e^{-x}(2x-1), \quad y(x) = e^{-3x} [1 + e^{2x}(2x-1)].$$

2.4 Βιβλιογραφία

- [1] Αθανασιάδη, Α. (1997). *Διαφορικές Εξισώσεις*. Εκδόσεις Διόσκουροι. ISBN 960-650-00-4.
- [2] Αλικάκος, Ν. & Καλογερόπουλος, Γ. (2003). *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*. Σύγχρονη Εκδοτική. ISBN 978-960-816-563-2.
- [3] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978-960-351-874-7.
- [4] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960-351-453-5/978-960-351-453-4.
- [5] Bronson, R. (1978). *Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις*. Εκδόσεις ΕΣΠΙ Εκδοτική. ISBN 978-000-761-014-3.
- [6] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός II*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978-960-524-184-1.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- <http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm>
- <http://mathworld.wolfram.com/>
- <http://eom.springer.de/>

Μάθημα 3

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

3.1 Μετασχηματισμός Laplace

3.1.1 Ορισμός

1

Ορισμός 3.1.1 - 1 (ορισμός μετασχηματισμού). Έστω $f(t)$ μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού $[0, +\infty]$ και $\sigma > 0$ σταθερά. Τότε ορίζεται ως μετασχηματισμός Laplace (Laplace transform) της f και συμβολίζεται με $\mathcal{L}[f(t)]$ ή συντομότερα $\mathcal{L}(f)$, η συνάρτηση που ορίζεται από την τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος του α' είδους²

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \text{με } s \geq \sigma, \quad (3.1.1 - 1)$$

¹Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3, 5] και http://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform

²Βλέπε Α. Μπράτσος [4] Κεφ. 8 και Μάθημα Ορισμένο Ολοκλήρωμα - Γενικευμένα ολοκλήρωματα

όταν το ολοκλήρωμα υπάρχει.

Σημείωση 3.1.1 - 1

Η παράμετρος s είναι δυνατόν να είναι και μιγαδικός αριθμός, αν υποθεθεί ότι $\operatorname{Re}(s) \geq 0$.

Ο αρχικός μετασχηματισμός χρησιμοποιήθηκε από τον Laplace για την επίλυση ενός προβλήματος στις πιθανότητες. Χρησιμοποιείται στη λύση διαφορικών εξισώσεων, στη Φυσική και τη Μηχανική κ.λπ. Στις περιπτώσεις που το πρόβλημα εξαρτάται από τον χρόνο, ο μετασχηματισμός το ανάγει από το πεδίο του χρόνου στο *πεδίο συχνοτήτων*, όπου η επίλυσή του γενικά γίνεται ευκολότερα.

Στην (3.1.1 - 1) η $f(t)$ λέγεται τότε ο **αντίστροφος μετασχηματισμός** (inverse transform) της $F(s)$ και συμβολίζεται με

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]. \quad (3.1.1 - 2)$$

Ο υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού θα γίνει στη συνέχεια του μαθήματος.

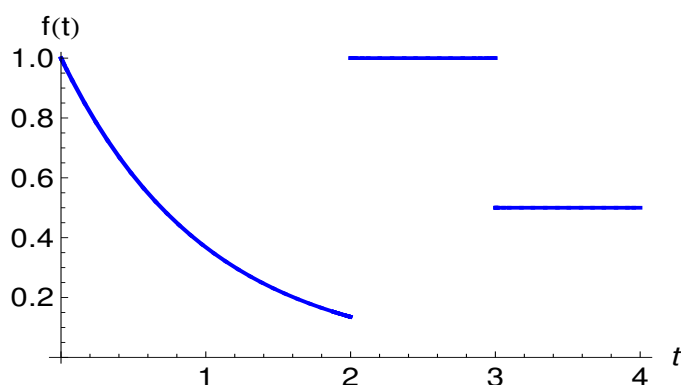
Στο εξής θα θεωρείται ότι το s είναι πραγματικός αριθμός και θα συμβολίζεται με τα κεφαλαία γράμματα F , X , I κ.λπ. οι μετασχηματισμένες κατά Laplace συναρτήσεις των f , x , i κ.λπ., αντίστοιχα.

3.1.2 Θεώρημα ύπαρξης

Ορισμός 3.1.2 - 1. Μια συνάρτηση $f(t)$ με πεδίο ορισμού το $[a, b]$ θα λέγεται **κατά τμήματα συνεχής** (Σχ. 3.1.2 - 1), όταν είναι ορισμένη για κάθε $t \in [a, b]$ και υποδιαιρώντας το διάστημα $[a, b]$ σε ν το πλήθος υποδιαστήματα της μορφής (a_k, b_k) ; $k = 1, 2, \dots, \nu$ το όριό της στα άκρα του διαστήματος (a_k, b_k) είναι πεπερασμένο για κάθε $k = 1, 2, \dots, \nu$.

Ο ορισμός αυτός εύκολα γενικεύεται για την περίπτωση που η συνάρτηση $f(t)$ έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$.

Ορισμός 3.1.2 - 2. Μια συνάρτηση $f(t)$ λέγεται **συνάρτηση εκθετικής τάξης** (function of exponential order), όταν υπάρχουν σταθερές γ , t_0 και



Σχήμα 3.1.2 - 1: συνάρτηση $f(t)$ συνεχής για κάθε $t \in [0, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 4)$, ενώ παρουσιάζει ασυνέχεια στα σημεία $t = 2, 3$ με $\lim_{t \rightarrow 2-0} e^{-t} = e^{-1}$, $\lim_{t \rightarrow 2+0} f(t) = 1$, $\lim_{t \rightarrow 3-0} f(t) = 1$ και $\lim_{t \rightarrow 3+0} f(t) = 0.5$.

M με $t_0, M > 0$, έτσι ώστε

$$|f(t)| < M e^{\gamma t} \quad \text{για κάθε } t > t_0. \quad (3.1.2 - 1)$$

Τότε το γ ορίζει την τάξη της f .

Στο παρακάτω θεώρημα δίνεται η συνθήκη που πρέπει να ισχύει, έτσι ώστε να υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης.

Θεώρημα 3.1.2 - 1 (ύπαρξης του μετασχηματισμού). Έστω η συνάρτηση $f(t)$ που είναι ορισμένη για κάθε $t \in [0, +\infty)$. Αν η f είναι

- i) κατά τμήματα συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα της μορφής $[0, \alpha]$, όπου $\alpha > 0$,
- ii) εκθετικής τάξης, δηλαδή υπάρχουν σταθερές γ, t_0 και M με $t_0, M > 0$, έτσι ώστε

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t} \quad \text{για κάθε } t \in [0, +\infty), \quad (3.1.2 - 2)$$

τότε ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ υπάρχει για κάθε $s > \gamma$.

Η απαίτηση της κατά τμήματα συνεχούς συνάρτησης και η ισχύς της (3.1.2 – 2) είναι επίσης γνωστές και ως **συνθήκες Dirichlet** (Dirichlet conditions) για τον μετασχηματισμό Laplace. Το σύνολο των συναρτήσεων f με πεδίο ορισμού $[0, +\infty)$ που ικανοποιούν τις συνθήκες Dirichlet, δηλαδή των συναρτήσεων που υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace, θα συμβολίζεται στο εξής με $D_{\mathcal{L}}$.

Δίνονται στη συνέχεια οι μετασχηματισμοί Laplace ορισμένων συναρτήσεων με τον Ορισμό 3.1.1 - 1.

Παράδειγμα 3.1.2 - 1

Έστω

$$f(t) = A \quad \text{όπου } A \text{ σταθερά.}$$

Τότε³

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= F(s) = \int_0^{+\infty} A e^{-st} dt = -\frac{A}{s} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-st} \Big|_0^x \\ &= -\frac{A}{s} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-sx} - e^0 \right) = \frac{A}{s} \quad \text{με } s > 0. \end{aligned}$$

Άρα

$$\mathcal{L}(A) = \frac{A}{s} \quad \text{με } s > 0. \quad (3.1.2 - 3)$$

Παράδειγμα 3.1.2 - 2

Όμοια, έστω $f(t) = e^{-at}$. Τότε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-at}] &= \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t} dt \\ &= -\frac{1}{s+a} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-(s+a)t} \Big|_0^x = -\frac{1}{s+a} \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-(s+a)x} - e^0 \right] \\ &= \frac{1}{s+a}, \quad \text{όταν } s+a > 0. \end{aligned}$$

³Η συνάρτηση e^x ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Άρα

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a} \quad \text{με } s+a > 0. \quad (3.1.2 - 4)$$

Επομένως

$$\mathcal{L}[e^{3t}] = \mathcal{L}[e^{-(-3)t}] = \frac{1}{s+3} \quad \text{με } s+3 > 0.$$

3.1.3 Ιδιότητες του μετασχηματισμού

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace, που με τη χρήση τους υπολογίζονται οι μετασχηματισμοί των διαφόρων συναρτήσεων.⁴

Θεώρημα 3.1.3 - 1 (γραμμική ιδιότητα). Έστω $f, g \in D_{\mathcal{L}}$. Τότε αν $k, \lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\mathcal{L}[kf(t) + \lambda g(t)] = k\mathcal{L}[f(t)] + \lambda\mathcal{L}[g(t)]. \quad (3.1.3 - 1)$$

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται για ν -το πλήθος συναρτήσεων.

Παράδειγμα 3.1.3 - 1

Είναι γνωστό ότι αν $f(t) = \sin t$, τότε $\sin t = (e^{it} - e^{-it})/2i$, όπου i η φανταστική μονάδα. Σύμφωνα με τον τύπο (3.1.2 - 4) και τη γραμμική ιδιότητα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sin t) &= \frac{1}{2i} \mathcal{L}(e^{it}) - \frac{1}{2i} \mathcal{L}(e^{-it}) = \frac{1}{2i} \mathcal{L}(e^{-(-i)t}) - \frac{1}{2i} \mathcal{L}(e^{-it}) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s+(-i)} - \frac{1}{s+i} \right) = \frac{1}{s^2+1}, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{s^2+1}. \quad (3.1.3 - 2)$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι

$$\mathcal{L}(\cos t) = \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{it} + e^{-it}] = \frac{s}{s^2+1} \quad (3.1.3 - 3)$$

⁴Οι ιδιότητες αυτές αποδεικνύεται στη συνέχεια του μαθήματος ότι ισχύουν επίσης και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace.

και

$$\mathcal{L}(\sinh at) = \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{at} - e^{-at}] = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad (3.1.3 - 4)$$

$$\mathcal{L}(\cosh at) = \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{at} + e^{-at}] = \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad (3.1.3 - 5)$$

όταν $s > a > 0$.

Θεώρημα 3.1.3 - 2. Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ με $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε

$$\mathcal{L}[f(kt)] = \frac{1}{k} F\left(\frac{s}{k}\right) \quad \text{με } k > 0. \quad (3.1.3 - 6)$$

Παράδειγμα 3.1.3 - 2

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2 - 2 και τον τύπο (3.2.2 - 2) είναι

$$\mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{1}{\omega} \frac{\frac{s}{\omega}}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad (3.1.3 - 7)$$

$$\mathcal{L}(\sin \omega t) = \frac{1}{\omega} \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{με } \omega > 0. \quad (3.1.3 - 8)$$

Επομένως

$$\mathcal{L}(\cos 2t) = \frac{s}{s^2 + 4}, \quad \mathcal{L}(\sin 2t) = \frac{2}{s^2 + 4}, \quad \text{κ.λπ.}$$

Θεώρημα 3.1.3 - 3 (προπορείας). Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ και $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s + a), \quad \text{όταν } s + a > 0 \text{ και } a > 0. \quad (3.1.3 - 9)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2 - 3 και τους τύπους (3.1.3 - 7) - (3.1.3 - 8) είναι:

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}, \quad (3.1.3 - 10)$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}. \quad (3.1.3 - 11)$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [e^{-t} \cos 2t] &= \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 5}, \\ \mathcal{L} [e^{3t} \sin 2t] &= \mathcal{L} [e^{-(-3)t} \sin 2t] = \frac{2}{[s + (-3)]^2 + 2^2} \\ &= \frac{2}{s^2 - 6s + 13}, \\ \mathcal{L} \left[e^t \sin \left(2t + \frac{\pi}{4} \right) \right] &= \mathcal{L} \left[e^t \left(\sin 2t \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2t \sin \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \mathcal{L} [e^t \sin 2t] + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathcal{L} [e^t \cos 2t] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \mathcal{L} [e^{-(-t)} \sin 2t] + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathcal{L} [e^{-(-t)} \cos 2t] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{2}{(s-1)^2 + 2^2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{s-1}{(s-1)^2 + 2^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{s+1}{s^2 - 2s + 5}. \end{aligned}$$

Θεώρημα 3.1.3 - 4 (υστέρησης). Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ με $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ και

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a) & \text{αν } t > a \\ 0 & \text{αν } t < a, \end{cases}$$

τότε

$$\mathcal{L}[g(t)] = e^{-as} F(s), \quad \text{όταν } t > a > 0. \quad (3.1.3 - 12)$$

Με το θεώρημα αυτό δίνεται η δυνατότητα να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης, που ορίζεται για $t > a$ με $a > 0$. Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων έχουμε στη μελέτη συστημάτων που ενεργοποιούνται τη χρονική στιγμή $t = a$ αντί της $t = 0$.

Παράδειγμα 3.1.3 - 3

Επειδή

$$\mathcal{L}[t^3] = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4},$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2 - 4 ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$g(t) = \begin{cases} (t-1)^3 & \text{αν } t > 1 \\ 0 & \text{αν } t < 1 \end{cases} \quad \text{είναι} \quad \mathcal{L}[g(t)] = \frac{6e^{-s}}{s^4}.$$

Άλλες εφαρμογές του Θεωρήματος 3.2.2 - 3 θα δοθούν στην επόμενη παράγραφο.

Θεώρημα 3.1.3 - 5. Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ με $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds} = -F'(s).$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά n φορές το Θεώρημα 3.2.2 - 5, τελικά προκύπτει

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} = (-1)^n F^{(n)}(s), \quad (3.1.3 - 13)$$

όταν $n = 1, 2, \dots$.

Παράδειγμα 3.1.3 - 4

Σύμφωνα με τον τύπο (3.1.3 - 8) είναι:

$$\mathcal{L}(\sin 3t) = \frac{3}{s^2 + 9}.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο (3.2.2 - 5) για $n = 1, 2$, έχουμε

$$\mathcal{L}[t \sin 3t] = (-1)^1 \frac{d}{ds} \left(\frac{3}{s^2 + 9} \right) = \frac{6s}{(s^2 + 9)^2},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^2 \sin 3t] &= (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{3}{s^2 + 9} \right) = \frac{d}{ds} \left[\frac{6s}{(s^2 + 9)^2} \right] \\ &= \frac{18(s^2 - 3)}{(s^2 + 9)^3}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.1.3 - 5

Όμοια σύμφωνα με τον τύπο (3.1.3 - 8) είναι:

$$\mathcal{L} [e^{-at}] = \frac{1}{s+a} \quad \text{με } s+a > 0.$$

Εφαρμόζοντας τώρα διαδοχικά τον τύπο (3.2.2 - 5) έχουμε

$$\mathcal{L} [t e^{-at}] = (-1)^1 \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+a} \right) = \frac{1}{(s+a)^2},$$

$$\mathcal{L} [t^2 e^{-at}] = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{s+a} \right) = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{(s+a)^2} \right] = \frac{\overbrace{2!}^2}{(s+a)^3},$$

$$\mathcal{L} [t^3 e^{-at}] = (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3} \left(\frac{1}{s+a} \right) = \frac{d}{ds} \left[\frac{2!}{(s+a)^3} \right] = \frac{\overbrace{2 \cdot 3!}^3}{(s+a)^4},$$

⋮

$$\mathcal{L} [t^n e^{-at}] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{1}{s+a} \right) = \frac{d}{ds} \left[\frac{(n-1)!}{(s+a)^n} \right] = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}.$$

Άρα

$$\mathcal{L} [t^n e^{-at}] = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}, \quad (3.1.3 - 14)$$

όταν $n = 0, 1, \dots$ και $s+a > 0$.

Αν στην (3.1.3 - 14) είναι $a = 0$, τότε

$$\mathcal{L} [t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \text{όταν } n = 0, 1, \dots \quad (3.1.3 - 15)$$

Επομένως σύμφωνα με τους τύπους (3.1.3 - 14) και (3.1.3 - 15) έχουμε

$$\mathcal{L} [t^2 e^{3t}] = \frac{2!}{(s-3)^{2+1}} = \frac{2}{(s-3)^3} \quad \text{και} \quad \mathcal{L} [t^3] = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}.$$

Θεώρημα 3.1.3 - 6 (παραγώγου 1ης τάξης). Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ και υπάρχει η 1ης τάξης παράγωγος της f και είναι συνεχής συνάρτηση ή κατά τμήματα συνεχής για κάθε $t \geq 0$, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου f' και ισχύει

$$\mathcal{L} [f'(t)] = s \mathcal{L}[f(t)] - f(0) \quad \text{με } s > a. \quad (3.1.3 - 16)$$

Εφαρμόζοντας τώρα την (3.1.3 – 16) για τη 2ης τάξης παράγωγο της f , υποθέτοντας ότι η f'' είναι συνεχής ή κατά τμήματα συνεχής για κάθε $t \geq 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''(t)] &= s \mathcal{L}[f'(t)] - f'(0) \\ &= s \{s \mathcal{L}[f(t)] - f(0)\} - f'(0),\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 \mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0). \quad (3.1.3 - 17)$$

Παράδειγμα 3.1.3 - 6

Έστω

$$f(t) = t \sin t.$$

Τότε

$$f(0) = 0, \quad \text{ενώ} \quad f'(t) = \sin t + t \cos t, \quad \text{οπότε} \quad f'(0) = 0.$$

Άρα σύμφωνα με την (3.1.3–17) και με τύπο (3.2.2–5) για $n = 1$ έχουμε

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 \mathcal{L}[t \sin t] - sf(0) - f'(0) = s^2 \mathcal{L}[t \sin t] = \frac{2s^3}{(s^2 + 1)^2}.$$

Θεώρημα 3.1.3 - 7 (ολοκλήρωση του μετασχηματισμού). Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ με $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ και υπάρχει το $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$, τότε

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} F(x) dx. \quad (3.1.3 - 18)$$

Επειδή $\lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} = 1$, από την (3.1.3 – 18) προκύπτει ότι:

Πόρισμα 3.1.3 - 1. Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ με $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ και υπάρχει το $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$, τότε

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} F(x) dx. \quad (3.1.3 - 19)$$

Παράδειγμα 3.1.3 - 7

Από τον τύπο (3.1.3 – 2) και τη σχέση (3.1.3 – 18) προκύπτει

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \int_s^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s,$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right).$$

Τότε από την (3.1.3 – 19) έχουμε

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}. \quad (3.1.3 - 20)$$

Ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Laplace μιας συνάρτησης $f(t)$ με το πρόγραμμα MATHEMATICA γίνεται με την εντολή:

Πρόγραμμα 3.1.3 - 1 (μετασχηματισμού Laplace)

`LaplaceTransform[f(t),t,s]`

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων $f(t)$:

i) $t^3 - t + 2$

v) $e^{-2t} \cos 3t$

ii) $\sin(2t)$

vi) $t \cos 2t$

iii) $t \sin 2t$

vii) $\sin^2 3t$ (Υπ: $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$)

iv) $t^2 \sin 3t$

viii) $\cos^2 2t$ (Υπ: $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$).

2. Όμοια των συναρτήσεων

i) $t e^{-t} \cos t$

v) $t e^{-t} \sin 2t$

ii) $t e^{-t} \cos \omega t$

vi) $t^2 e^{-2t}$

iii) $t^3 e^{-2t}$

vii) $t e^{-t} \sin \omega t$.

Απαντήσεις

$$1. (i) \frac{6}{s^4} - \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}, \quad (ii) \frac{2}{4+s^2}, \quad (iii) \frac{4s}{(4+s^2)^2}, \quad (iv) \frac{18(-3+s^2)}{(9+s^2)^3},$$

$$(v) \frac{2+s}{13+4s+s^2}, \quad (vi) \frac{-4+s^2}{(4+s^2)^2}, \quad (vii) \frac{18}{36s+s^3}, \quad (viii) \frac{8+s^2}{16s+s^3}.$$

$$2. (i) \frac{2s+s^2}{(2+2s+s^2)^2}, \quad (ii) \frac{1-\omega^2-2s+s^2}{(1+\omega^2-2s+s^2)^2}, \quad (iii) \frac{6}{(2+s)^4},$$

$$(iv) \frac{4(1+s)}{(5+2s+s^2)^2}, \quad (v) \frac{2}{(2+s)^3}, \quad (vi) \frac{2\omega(1+s)}{(1+\omega^2+2s+s^2)^2}.$$

3.1.4 Μετασχηματισμός περιοδικών συναρτήσεων

Θεώρημα 3.1.4 - 1. Έστω $f \in D_{\mathcal{L}}$ όπου f μία κατά τμήματα συνεχής περιοδική συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο T και $f(t) = 0$ για κάθε $t < 0$. Τότε

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st} dt. \quad (3.1.4 - 1)$$

Παράδειγμα 3.1.4 - 1

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της περιοδικής συνάρτησης (Σχ. 3.1.4 - 1 - **ημιανόρθωση** - half rectified sine wave function)

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{αν } 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{αν } \pi \leq t < 2\pi \end{cases} \quad \text{και } f(t+2\pi) = f(t) \text{ για κάθε } t \geq 0.$$

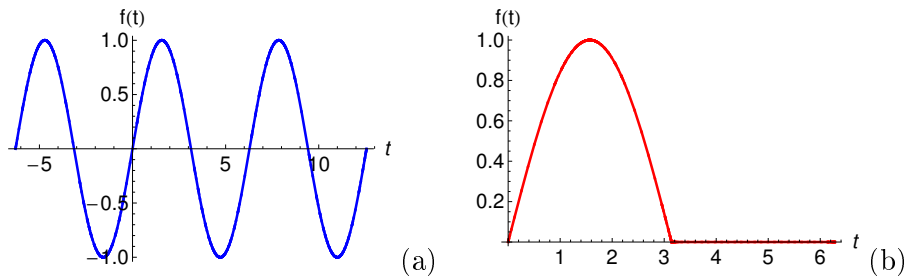
Λύση. Είναι $f(t) = 0$ για κάθε $t < 0$ και $T = 2\pi$. Τότε

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\pi} e^{-st} \sin t dt = - \left. \frac{e^{-st}(s \sin t + \cos t)}{s^2 + 1} \right|_0^{\pi} = \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}.$$

Άρα

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1 + e^{-\pi s}}{(s^2 + 1)(1 - e^{-2\pi s})} = \frac{e^{\pi s}}{(s^2 + 1)(e^{\pi s} - 1)}, \quad \text{όταν } s > 0.$$

■



Σχήμα 3.1.4 - 1: Παράδειγμα 3.1.4 - 1: (a) η συνάρτηση $\sin t$, όταν $t \in [-2\pi, 4\pi]$, (b) η συνάρτηση $\tilde{f}(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο, δηλαδή όταν $t \in [0, 2\pi]$.

Άσκηση

Να γίνει το διάγραμμα και να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω περιοδικών συναρτήσεων, που ο περιορισμός τους στη θεμελιώδη περίοδο είναι

$$i) f(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{αν } 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad iv) f(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \leq t < \pi \\ t - \pi & \text{αν } \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

$$ii) f(t) = t; \quad 0 \leq t < 1 \quad v) f(t) = |\sin \omega t|; \quad \omega > 0$$

$$iii) f(t) = e^t; \quad 0 \leq t < 2 \quad vi) f(t) = t^2; \quad 0 \leq t < 1.$$

3.1.5 Συνάρτηση γάμμα

Η **συνάρτηση γάμμα**⁵ (gamma function) έχει πολλές εφαρμογές σε διάφορα προβλήματα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και ορίζεται από το γενικευμένο ολοκλήρωμα του μεικτού είδους

$$\Gamma(a) = \int_{0+}^{+\infty} e^{-t} t^{a-1} dt. \quad (3.1.5 - 1)$$

⁵Βλέπε Μάθημα Ορισμένο Ολοκλήρωμα - Συνάρτηση γάμμα και [http : //en.wikipedia.org/wiki/Gamma-function](http://en.wikipedia.org/wiki/Gamma-function)

Το ολοκλήρωμα (3.1.5-1) έχει έννοια, όταν $a > 0$ ή όταν ο a είναι μιγαδικός αριθμός με $\text{Re}(a) > 0$.

Έστω η συνάρτηση $f(t) = t^a$ όπου $t > 0$ και $a \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\}$. Τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.1 - 1 είναι

$$\mathcal{L}(t^a) = \int_{0+}^{+\infty} t^a e^{-st} dt. \quad (3.1.5 - 2)$$

Αν $u = st$ με $u \in (0, +\infty)$ και $s > 0$, τότε $du = s dt$, οπότε η (3.1.5 - 2) γράφεται

$$\mathcal{L}(t^a) = \frac{1}{s^{a+1}} \int_{0+}^{+\infty} u^a e^{-u} du. \quad (3.1.5 - 3)$$

Από την (3.1.5 - 3) και την (1.3-1) προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}(t^a) = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}; \quad a \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\}. \quad (3.1.5 - 4)$$

Παράδειγμα 3.1.5 - 1

Σύμφωνα με την (3.1.5 - 4) είναι

$$\mathcal{L}(t^{1/3}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3} + 1)}{s^{\frac{1}{3} + 1}} = \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{s^{4/3}} \approx 0.89298 s^{-4/3}.$$

Η τιμή $\Gamma(a)$ δίνεται από πίνακες, ενώ με το MATHEMATICA από την εντολή:

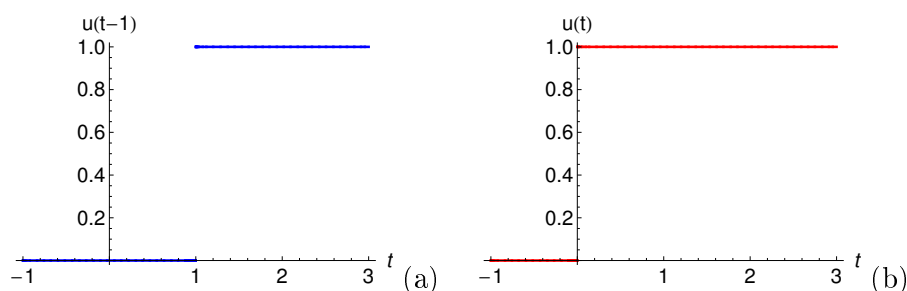
Gamma[a]

3.1.6 Μοναδιαία συνάρτηση του Heaviside

Ορισμός 3.1.6 - 1. Η μοναδιαία βηματική συνάρτηση (*unit step function*) ή συνάρτηση Heaviside⁶ (*Heaviside step function*) ορίζεται από τη σχέση

$$u(t-a) = u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t < a \\ 1 & \text{αν } t > a, \end{cases} \quad \mu\epsilon \alpha \geq 0 \quad (3.1.6 - 1)$$

⁶Βλέπε http://en.wikipedia.org/wiki/Unit_step_function



Σχήμα 3.1.6 - 1: (a) η συνάρτηση $u(t - 1) = u_1(t)$, όταν $t \in [-1, 3]$, (b) η $u(t) = u_0(t)$, όταν $t \in [-1, 3]$.

όπου το a δείχνει την τιμή του t στην οποία η συνάρτηση αλλάζει από την τιμή 0 στην τιμή 1 (Σχ. 3.1.6 - 1 (a) όπου $a = 1$). Ειδικά, όταν $a = 0$, δηλαδή η αλλαγή γίνεται όταν $t = 0$, έχουμε τη συνάρτηση (Σχ. 3.1.6 - 1 (b))

$$u(t) = u_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t < 0 \\ 1 & \text{αν } t > 0. \end{cases} \quad (3.1.6 - 2)$$

Ορισμός 3.1.6 - 2 (ορθογώνιος παλμός ή συνάρτηση-φίλτρο). Η συνάρτηση (Σχ. 3.1.6 - 2)

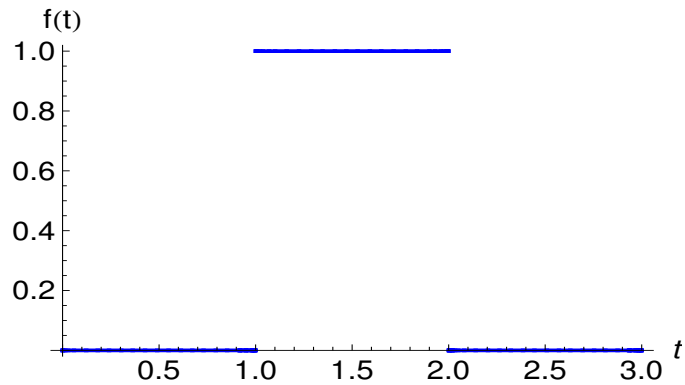
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 < t < a \\ 1 & \text{αν } a < t < b \\ 0 & \text{αν } t > b \end{cases} \quad \text{όπου } a, b \in \mathbb{R} \text{ και } b > a > 0 \quad (3.1.6 - 3)$$

λέγεται ορθογώνιος παλμός ή συνάρτηση-φίλτρο.

Έχοντας υπόψη τον Ορισμό 3.1.6 - 1 και την (3.1.6 - 1) ο ορθογώνιος παλμός εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός δύο συναρτήσεων Heaviside ως εξής:

$$f(t) = u(t - a) - u(t - b). \quad (3.1.6 - 4)$$

Όπως άμεσα προκύπτει από τον Ορισμό 3.1.6 - 1 η συνάρτηση $u_a(t) = u(t - a)$ είναι συνεχής για κάθε $t \in \mathbb{R} - \{a\}$, ενώ για $a = 1$ παρουσιάζει ασυνέχεια ύψους 1. Άρα είναι τμηματικά συνεχής, ενώ προφανώς είναι εκθετικής



Σχήμα 3.1.6 - 2: ορθογώνιος παλμός ή συνάρτηση-φίλτρο, όταν $a = 1$, $b = 2$ και $t \in [0, 3]$ (square wave). Σύμφωνα με την (3.1.6 - 3) είναι $f(t) = u(t - 1) - u(t - 2)$.

τάξης, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.2 - 1 θα υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης u_a για κάθε $t \in [0, +\infty)$. Τότε από την (3.1.6 - 1) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(t - a)] = \mathcal{L}[u_a(t)] &= \int_0^{+\infty} u(t - a)e^{-st} dt \\ &= \int_0^a u(t - a)e^{-st} dt + \int_a^{+\infty} u(t - a)e^{-st} dt \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-as}}{s}, \end{aligned}$$

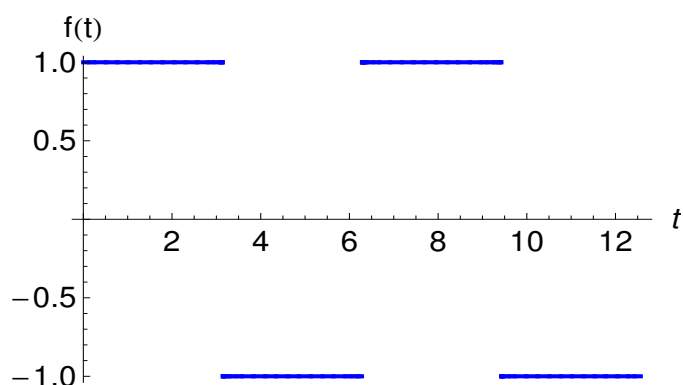
δηλαδή

$$\mathcal{L}[u(t - a)] = \mathcal{L}[u_a(t)] = \frac{e^{-as}}{s}, \quad \text{όταν } s > 0 \text{ και } a \geq 0, \quad (3.1.6 - 5)$$

ενώ

$$\mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[u_0(t)] = \frac{1}{s}, \quad \text{όταν } s > 0. \quad (3.1.6 - 6)$$

Η χρησιμότητα της μοναδιαίας συνάρτησης στον μετασχηματισμό Laplace είναι σημαντική, επειδή με αυτήν είναι δυνατό να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός πολλών σύνθετων συναρτήσεων.



Σχήμα 3.1.6 - 3: Παράδειγμα 3.1.6 - 1: διάγραμμα της $f(t)$ όταν $t \in [0, 4\pi]$.

Παράδειγμα 3.1.6 - 1 (περιοδικός τετραγωνικός παλμός)

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της περιοδικής συνάρτησης (Σχ. 3.1.6 - 3)

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < t < \pi \\ -1 & \text{αν } \pi < t < 2\pi \end{cases} \quad \text{και } f(t+2\pi) = f(t) \text{ για κάθε } t \geq 0$$

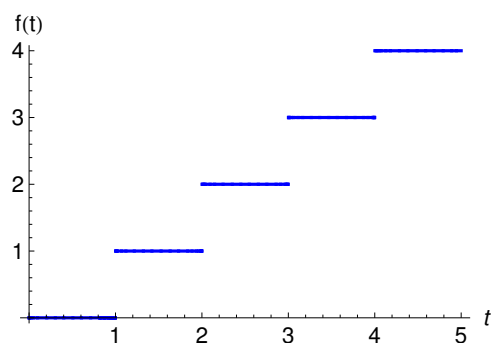
(periodic square wave).

Λύση. Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.6 - 1, τη σχέση (3.1.6 - 3) και το Σχ. 3.1.6 - 3 η $f(t)$ αναλυτικά στα επιμέρους διαστήματα περιγράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} (0, \pi) & : u(t) - u(t - \pi), \\ (\pi, 2\pi) & : -[u(t - \pi) - u(t - 2\pi)] = -u(t - \pi) + u(t - 2\pi), \\ (2\pi, 3\pi) & : u(t - 2\pi) - u(t - 3\pi), \\ (3\pi, 4\pi) & : -[u(t - 3\pi) - u(t - 4\pi)] = -u(t - 3\pi) + u(t - 4\pi), \dots \end{aligned}$$

οπότε

$$f(t) = u(t) - 2u(t - \pi) + 2u(t - 2\pi) - 2u(t - 3\pi) + 2u(t - 4\pi) \dots$$



Σχήμα 3.1.6 - 4: Παράδειγμα 3.1.6 - 2: το διάγραμμα της $f(t)$, όταν $t \in [0, 5]$.

Άρα σύμφωνα με τους τύπους (3.1.6 – 5) - (3.1.6 – 6) έχουμε

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f(t)] &= \frac{1}{s} - 2 \frac{e^{-\pi s}}{s} + 2 \frac{e^{-2\pi s}}{s} - 2 \frac{e^{-3\pi s}}{s} + \dots \\
 &= \frac{1}{s} \left[1 - 2e^{-\pi s} \left(\underbrace{1 - e^{-\pi s} + e^{-2\pi s} - \dots}_{\text{γεωμετρική φθίνουσα πρόοδος με λόγο } e^{-\pi s}} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{s} \left(1 - 2e^{-\pi s} \frac{1}{1 - e^{-\pi s}} \right) = \frac{1}{s} \frac{1 - e^{-\pi s}}{1 + e^{-\pi s}} \\
 &= \frac{1}{s} \frac{e^{-\frac{\pi s}{2}} \left(e^{-\frac{\pi s}{2}} - e^{-\frac{\pi s}{2}} \right)}{e^{-\frac{\pi s}{2}} \left(e^{-\frac{\pi s}{2}} + e^{-\frac{\pi s}{2}} \right)} = \frac{1}{s} \frac{e^{-\frac{\pi s}{2}} - e^{-\frac{\pi s}{2}}}{e^{-\frac{\pi s}{2}} + e^{-\frac{\pi s}{2}}} \\
 &= \frac{1}{s} \tanh \left(\frac{\pi s}{2} \right), \quad \text{όταν } s > 0.
 \end{aligned}$$

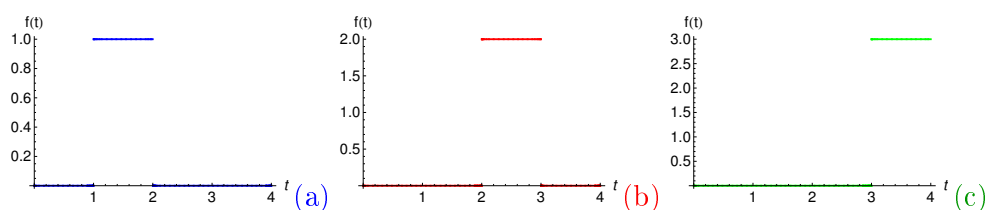
■

Παράδειγμα 3.1.6 - 2 (κλιμακωτή συνάρτηση)

Όμοια της συνάρτησης $g(t)$ με διάγραμμα στο Σχ. 3.1.6 - 4 (staircase function).

Λύση. Η $g(t)$ αναλυτικά περιγράφεται στο Σχ. 3.1.6 - 5. Τότε όμοια σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.6 - 1 και τη σχέση (3.1.6 – 3) έχουμε

$$\begin{aligned}
 g(t) &= u(t) - u(t-1) + 2[u(t-1) - u(t-2)] + 3[u(t-2) - u(t-3)] + \dots \\
 &= u(t) + u(t-1) + u(t-2) + \dots,
 \end{aligned}$$



Σχήμα 3.1.6 - 5: (a) η συνάρτηση $u_1(t) - u_2(t)$ δημιουργεί το διάγραμμα της $f(t) = 1$; $1 < t < 2$ με $f(t) = 0$; $t \leq 1$ ή $t \geq 2$, (b) $2[u_2(t) - u_3(t)]$ της $f(t) = 2$; $2 < t < 3$ με $f(t) = 0$; $t \leq 2$ ή $t \geq 3$ και (c) $3[u_3(t) - u_4(t)]$ της $f(t) = 3$; $3 < t < 4$ με $f(t) = 0$; $t \leq 3$ ή $t \geq 4$ όταν $t \in [0, 4]$.

οπότε

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} + \dots = \frac{1}{s(1 - e^{-s})}, \quad \text{όταν } s > 0.$$

Το Θεώρημα 3.2.2 - 4 με χρήση της μοναδιαίας συνάρτησης γράφεται:

Θεώρημα 3.1.6 - 1 Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ και $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as}F(s) \quad \text{με } t > a > 0. \quad (3.1.6 - 7)$$

Παρατηρήσεις 3.1.6 - 1

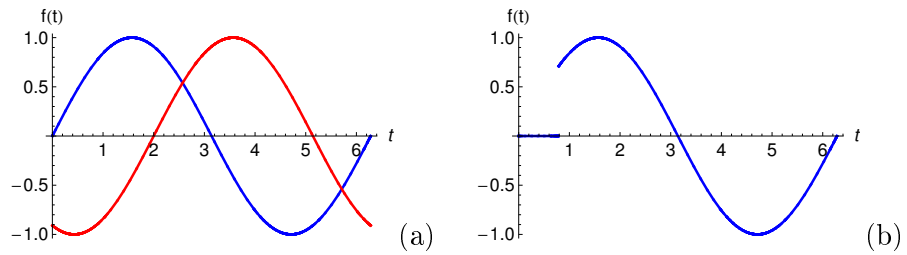
- Το διάγραμμα της $f(t-a)$ με $a > 0$, προκύπτει από το διάγραμμα της $f(t)$ με μετατόπιση παράλληλη προς τη θετική φορά του t -άξονα κατά a μονάδες μήκους (Σχ. 3.1.6 - 6a).
- Η μοναδιαία συνάρτηση $u(t-a)$, όταν πολλαπλασιαστεί με τη συνάρτηση $f(t)$, μηδενίζει το διάγραμμα της $f(t)$, στο τμήμα της που ορίζεται για $t \leq a$ (Σχ. 3.1.6 - 6b).

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.1.6 - 1b και το Θεώρημα 3.2.2 - 4 προκύπτει:

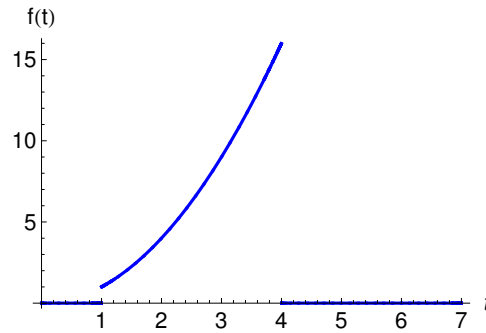
Πόρισμα 3.1.6 - 1 Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$, τότε

$$\mathcal{L}[f(t)u(t-a)] = e^{-as} \mathcal{L}[g(t)] \quad \text{όπου } g(t) = f(t+a), \quad (3.1.6 - 8)$$

όταν $t > a > 0$.



Σχήμα 3.1.6 - 6: (a): η συνάρτηση $\sin t$ μπλε και η $\sin(t-2)$ κόκκινη καμπύλη ($a = 2$). (b): η συνάρτηση $u(t - \pi/4)\sin t$, όπου το διάγραμμα της $f(t)$ μηδενίζεται, όταν $t \leq \pi/4$.



Σχήμα 3.1.6 - 7: Παράδειγμα 3.1.6 - 3: το διάγραμμα της $f(t)$, όταν $t \in [0, 5]$.

Παράδειγμα 3.1.6 - 3

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης (Σχ. 3.1.6 - 7)

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{αν } 1 < t < 4 \\ 0 & \text{αν } t < 1 \text{ ή } t > 4. \end{cases}$$

Λύση. Σύμφωνα με τη σχέση (3.1.6 - 3) έχουμε

$$f(t) = t^2 u(t - 1) - t^2 u(t - 4),$$

οπότε από την (3.1.6 – 8) προκύπτει

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[t^2 u(t-1)] - \mathcal{L}[t^2 u(t-4)] \\
 &= e^{-s} \mathcal{L}[(t+1)^2] - e^{-4s} \mathcal{L}[(t+4)^2] \\
 &= e^{-s} \mathcal{L}[t^2 + 2t + 1] - e^{-4s} \mathcal{L}[t^2 + 8t + 16] \\
 &= e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right) - e^{-4s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{8}{s^2} + \frac{16}{s} \right).
 \end{aligned}$$

■

Ασκήσεις

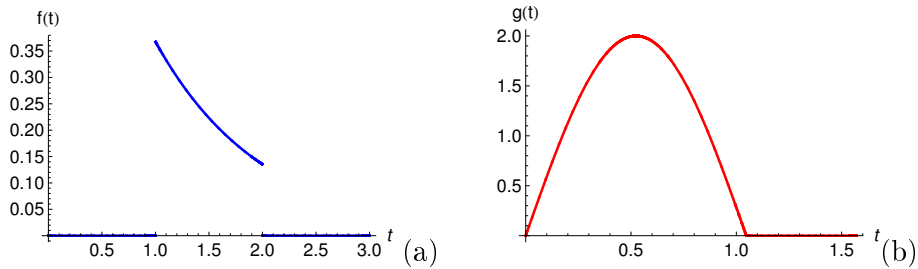
1. Να παρασταθούν με τη συνάρτηση Heaviside και στη συνέχεια να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω περιοδικών συναρτήσεων, που ο περιορισμός στη θεμελιώδη περίοδο είναι ($k, a > 0$):

$$\begin{aligned}
 i) \quad f(t) &= \begin{cases} k & \alpha\text{ν } 0 < t < a \\ 0 & \alpha\text{ν } a < t < 2a \end{cases} & iii) \quad f(t) &= \begin{cases} -1 & \alpha\text{ν } 0 < t < 2 \\ -3 & \alpha\text{ν } 2 < t < 4 \\ 1 & \alpha\text{ν } 4 < t < 6 \end{cases} \\
 ii) \quad f(t) &= \begin{cases} 2 & \alpha\text{ν } 0 < t < 1 \\ 1 & \alpha\text{ν } 1 < t < 2 \\ 0 & \alpha\text{ν } 2 < t < 3 \end{cases} & iv) \quad f(t) &= \begin{cases} 1 & \alpha\text{ν } a < t < 2a \\ 2 & \alpha\text{ν } 2a < t < 3a \\ 3 & \alpha\text{ν } 3a < t < 4a. \end{cases}
 \end{aligned}$$

2. Όμοια των συναρτήσεων (Σχ. 3.1.6 - 8):

$$a) \quad f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \alpha\text{ν } 0 < t < 2 \\ 0 & \alpha\text{ν } t < 1 \text{ ή } t > 2 \end{cases}$$

$$b) \quad f(t) = \begin{cases} 2 \sin 3t & \alpha\text{ν } 0 < t < \frac{\pi}{3} \\ 0 & \alpha\text{ν } t < 0 \text{ ή } t > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$



Σχήμα 3.1.6 - 8: (a) η συνάρτηση $f(t)$ και (b) η $g(t)$.

3.1.7 Συνάρτηση δέλτα του Dirac

Έστω ένας απλός ορθογώνιος παλμός πλάτους

$$d = \epsilon \quad \text{και} \quad \text{ύψους} \quad h = f(a) = \frac{1}{\epsilon}$$

τη χρονική στιγμή $t = a$ (Σχ. 3.1.7 - 1 a), που περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$f_{\epsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{αν} \quad a \leq t \leq a + \epsilon \\ 0 & \text{αν} \quad t < a \quad \text{ή} \quad t > a + \epsilon, \end{cases} \quad \text{όταν} \quad a, \epsilon > 0. \quad (3.1.7 - 1)$$

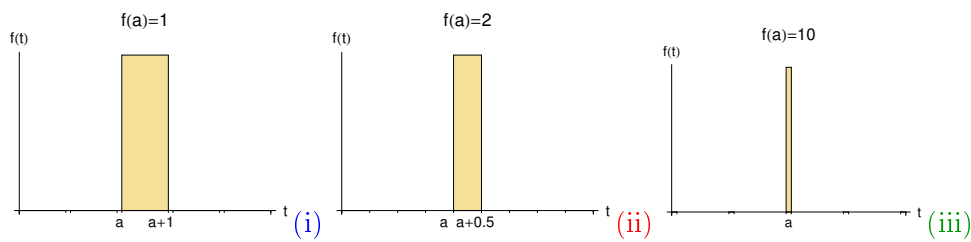
Τότε προφανώς το εμβαδόν E του παλμού θα είναι ίσο με

$$E = d h = 1.$$

Περιορίζοντας τώρα το πλάτος του παλμού σε $\tilde{d} = \epsilon/2$ (Σχ. 3.1.7 - 1 b), διατηρώντας το εμβαδόν ίσο με τη μονάδα, θα πρέπει το ύψος του παλμού να διπλασιαστεί, δηλαδή να γίνει $\tilde{h} = 2/\epsilon$. Συνεχίζοντας τη διαδικασία ελάττωσης του πλάτους (Σχ. 3.1.7 - 1 c), δηλαδή θεωρώντας ότι το πλάτος ϵ τείνει σταδιακά στο μηδέν και διατηρώντας πάντοτε το εμβαδόν του παλμού ίσο με 1, είναι προφανές ότι το ύψος του παλμού τείνει στο άπειρο.

Ορισμός 3.1.7 - 1. Το όριο $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_{\epsilon}(t)$, όταν η $f_{\epsilon}(t)$ δίνεται από την (3.1.7 - 1), ορίζει τη συνάρτηση **συνάρτηση δέλτα του Dirac** (*Dirac delta function*)⁷ ή της **μοναδιαίας ώθησης** (*unit impulse function*), που συμβολίζεται με $\delta(t - a)$.

⁷Βλέπε <http://en.wikipedia.org/wiki/Dirac-delta-function>



Σχήμα 3.1.7 - 1: Συνάρτηση δέλτα του Dirac: ο ορθογώνιος παλμός πλάτους $d = \epsilon$ και ύψους $h = f(a) = 1/\epsilon$ τη χρονική στιγμή $t = a$, όταν (i) $d = \epsilon = 1$, (ii) $\tilde{d} = 0.5$ και (iii) $\hat{d} = 0.1$.

Παρατηρήσεις 3.1.7 - 1

Η συνάρτηση δέλτα του Dirac

- i) δεν είναι συνάρτηση, επειδή καμία συνάρτηση δεν είναι δυνατόν να ικανοποιεί τον Ορισμό 3.1.7 - 1. Μόνο για ιστορικούς λόγους αναφέρεται ως συνάρτηση, ενώ πρόκειται για **γενικευμένη συνάρτηση**.
- ii) Στη θεωρία των παλμών και σε άλλες γενικότερα εφαρμογές, παρά τη φύση της, λόγω των ιδιοτήτων της αντιμετωπίζεται με λογισμό ανάλογο των συνηθισμένων συναρτήσεων.

Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.7 - 1 η συνάρτηση δέλτα περιγράφεται ως εξής:

$$\delta(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t \neq a \\ +\infty & \text{αν } t = a, \end{cases} \quad (3.1.7 - 2)$$

ενώ, όταν πρόκειται για τη χρονική στιγμή $t = 0$, οπότε $a = 0$, ως

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t \neq 0 \\ +\infty & \text{αν } t = 0. \end{cases} \quad (3.1.7 - 3)$$

Από τις (3.1.7 - 2) - (3.1.7 - 3) προκύπτει ότι η συνάρτηση δέλτα του Dirac επαληθεύει την ταυτότητα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - a) dt = 1. \quad (3.1.7 - 4)$$

Ιδιότητες 3.1 - 1

Δίνονται στη συνέχεια οι σημαντικότερες ιδιότητες της συνάρτησης δέλτα $\delta(t)$:

I. Για κάθε k με $k \neq 0$ ισχύει (scaling property)

$$\delta(kt) = \frac{\delta(t)}{|k|}. \quad (3.1.7 - 5)$$

Επομένως

$$\delta(-t) = \delta(t), \quad (3.1.7 - 6)$$

δηλαδή η συνάρτηση $\delta(t)$ είναι **άρτια** συνάρτηση.

II. Αν $f(t)$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-a) dt = f(a) \quad (3.1.7 - 7)$$

(sifting or sampling property).

Μετασχηματισμός Laplace

Η συνάρτηση (3.1.7 - 1) σύμφωνα με τη (3.1.6 - 4) γράφεται

$$f_\epsilon(t) = u(t-a) - u(t-a-\epsilon), \quad (3.1.7 - 8)$$

οπότε έχοντας υπόψη και την (3.1.6 - 5) έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_\epsilon(t)] &= \frac{1}{\epsilon} \mathcal{L}[u(t-a) - u(t-a-\epsilon)] \\ &= \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-(a+\epsilon)s}}{s} \right] = e^{-as} \left(\frac{1 - e^{\epsilon s}}{\epsilon s} \right). \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta(t-a)] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}[f_\epsilon(t)] = e^{-as} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\epsilon s}}{\epsilon s} \\ &= (\text{κανόνας de L'Hôpital}) \quad e^{-as} \cdot 1 = e^{-as}, \end{aligned}$$

δηλαδή ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης δέλτα του Dirac είναι

$$\mathcal{L}[\delta(t - a)] = e^{-as}, \quad (3.1.7 - 9)$$

όταν $a, s > 0$, ενώ, όταν $a = 0$, είναι

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1. \quad (3.1.7 - 10)$$

Παρατήρηση 3.1.7 - 1

Στην (3.1.7 - 9), όταν $a < 0$, τότε

$$\mathcal{L}[\delta(t - a)] = 0.$$

Παράδειγμα 3.1.7 - 1

Από την (3.1.7 - 9) προκύπτει

$$\mathcal{L}[\delta(t - 1)] = e^{-s}, \quad \mathcal{L}[\delta(t - 3)] = e^{-3s},$$

ενώ

$$\mathcal{L}[\delta(t + 2)] = \mathcal{L}[\delta(t - \overbrace{(-2)}^a)] = 0$$

σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.1.7 - 1, κ.λπ.

Από την (3.1.7 - 9) σε συνδυασμό με την (3.1.7 - 7) προκύπτει

$$\mathcal{L}[f(t)\delta(t - a)] = f(a)e^{-as}. \quad (3.1.7 - 11)$$

Από τον τύπο (3.2.2 - 5)⁸ και τον (3.1.7 - 9) έχουμε

$$\mathcal{L}[t^n \delta(t - a)] = (-1)^n [e^{-as}]^{(n)} = (-1)^n [(-1)^n a^n e^{-as}] = a^n e^{-as},$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}[t^n \delta(t - a)] = a^n e^{-as}, \quad (3.1.7 - 12)$$

όταν $a > 0$ και $n = 1, 2, \dots$. Ειδικά όταν $a \leq 0$, τότε

$$\mathcal{L}[t^n \delta(t - a)] = 0. \quad (3.1.7 - 13)$$

⁸ Αν $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε $\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$, όταν $n = 1, 2, \dots$.

Παράδειγμα 3.1.7 - 2

Σύμφωνα με τον τύπο (3.1.7 – 12) είναι

$$\mathcal{L} [t\delta(t - 1)] = e^{-s} \quad (a = 1, n = 1),$$

$$\mathcal{L} [t^2\delta(t - 3)] = 3^2 e^{-3s} = 9 e^{-3s} \quad (a = 3, n = 2),$$

ενώ σύμφωνα με τον (3.1.7 – 13)

$$\mathcal{L} [t^4\delta(t)] = 0 \quad (a = 0, n = 4),$$

$$\mathcal{L} [t^3\delta(t + 2)] = 0 \quad (a = -2, n = 3).$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά τον τύπο (3.2.2 – 5) αποδεικνύεται ότι

$$\mathcal{L} [\delta^{(n)}(t - a)] = s^n e^{-as}, \quad (3.1.7 - 14)$$

όταν $a \geq 0$ και $n = 1, 2, \dots$.

Ειδικά, όταν $a < 0$, είναι

$$\mathcal{L} [\delta^{(n)}(t - a)] = 0. \quad (3.1.7 - 15)$$

Παράδειγμα 3.1.7 - 3

Σύμφωνα με την (3.1.7 – 14) είναι

$$\mathcal{L} [\delta^{(7)}(t - 1)] = s^7 e^{-s}, \quad \mathcal{L} [\delta^{(5)}(t)] = s^5,$$

ενώ σύμφωνα με την (3.1.7 – 15)

$$\mathcal{L} [t^2 \delta(t + 3)] = \mathcal{L} \left[t^2 \delta(t - \overbrace{(-3)}^a) \right] = 0.$$

3.2 Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

3.2.1 Ορισμός και βασικό θεώρημα

Από το Θεώρημα 3.1.2 - 1 προκύπτουν τα εξής:

Παρατηρήσεις 3.2.1 - 1

- i) Αν η συνάρτηση $f(t)$ είναι συνεχής ή τμηματικά συνεχής στο $[0, +\infty)$ και εκθετικής τάξης, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace $\mathcal{L}[f(t)]$.
- ii) Έστω ότι $f(t), g(t)$ δύο συναρτήσεις ορισμένες στο $[0, +\infty)$. Τότε, αν υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ και αν η συνάρτηση $g(t)$ διαφέρει από τη $f(t)$ σε πεπερασμένο μόνο πλήθος σημείων του $[0, +\infty)$, τότε υπάρχει και ο μετασχηματισμός Laplace της $g(t)$ και ισχύει $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$, όπως αυτό προκύπτει από το παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 3.2.1 - 1

Έστω ότι

$$f(t) = e^{-2t} \quad \text{με} \quad \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s+3}$$

και

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad t = 1 \\ e^{-2t} & \text{αν} \quad t \in [0, +\infty) - \{1\}, \end{cases} \quad \text{με} \quad \mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s+3},$$

δηλαδή $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$, ενώ προφανώς $f(t) \neq g(t)$.

Από την Παρατήρηση 3.2.1 - 1 (ii) προκύπτει ότι, αν $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ και υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f(t)$ της $\mathcal{L}^{-1}F(s)$, τότε η $f(t)$ δεν είναι πάντοτε μονοσήμαντα ορισμένη.

Το μονοσήμαντο του αντίστροφου μετασχηματισμού \mathcal{L}^{-1} εξασφαλίζεται με το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.2.1 - 1. Έστω ότι η $f(t)$ είναι μια πραγματική, συνεχής ή τμηματικά συνεχής, εκθετικής τάξης συνάρτηση για κάθε $t \in [0, +\infty)$. Αν για τον μετασχηματισμό Laplace ισχύει ότι $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$ ορίζει μονοσήμαντα την $f(t)$.

Στο εξής θα θεωρείται ότι οι συναρτήσεις πληρούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.2.1 - 1, οπότε η αντίστροφη συνάρτηση του μετασχηματισμού Laplace θα είναι μονοσήμαντα ορισμένη.

3.2.2 Ιδιότητες αντίστροφου μετασχηματισμού

Οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace ισχύουν ανάλογα και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Οι σημαντικότερες από αυτές δίνονται στη συνέχεια.

Θεώρημα 3.2.2 - 1 (γραμμική ιδιότητα). Αν $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ και $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$, τότε αν $k, \lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[kF(s) + \lambda G(s)] &= k\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + \lambda\mathcal{L}^{-1}[G(s)] \\ &= kf(t) + \lambda g(t).\end{aligned}\quad (3.2.2 - 1)$$

Παράδειγμα 3.2.2 - 1

Έστω $f(t) = e^{-3t}$ και $g(t) = e^t$. Τότε

$$\mathcal{L}[e^{-3t}] = \frac{1}{s+3} = F(s) \quad \text{και} \quad \mathcal{L}[e^t] = \frac{1}{s-1} = G(s),$$

οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2 - 1 έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[2F(s) + 5G(s)] &= 2\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + 5\mathcal{L}^{-1}[G(s)] \\ &= 2e^{-3t} + 5e^t.\end{aligned}$$

Θεώρημα 3.2.2 - 2. Αν $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$, τότε

$$\mathcal{L}^{-1}[F(ks)] = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right) \quad \mu\epsilon \quad k > 0. \quad (3.2.2 - 2)$$

Παράδειγμα 3.2.2 - 2

Έστω

$$f(t) = \cos 4t, \quad \text{οπότε} \quad \mathcal{L}[f(t)] = \frac{s}{s^2 + 16} = F(s).$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2 - 2, όταν $k = 2$, έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}[F(2s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{(2s)^2 + 16}\right] = \frac{1}{2} \cos\left(4\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \cos 2t.$$

Θεώρημα 3.2.2 - 3 (προπορείας). Αν $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$, τότε

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s+a)] = e^{-at}f(t), \quad \text{όταν} \quad s+a > 0 \quad \text{και} \quad a > 0. \quad (3.2.2 - 3)$$

Παράδειγμα 3.2.2 - 3

Έστω

$$f(t) = \sin 2t, \quad \text{οπότε} \quad F(s) = \frac{2}{s^2 + 4}.$$

Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2 - 3 έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^2 + 4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s + \underbrace{(-1)}_{a=-1})^2 + 4}\right] = e^{-(-1)t} \sin 2t = e^t \sin 2t.$$

Θεώρημα 3.2.2 - 4 (υστέρησης). Αν $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$, τότε

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] = \begin{cases} f(t-a) & \text{αν} \quad t > a \\ 0 & \text{αν} \quad t < a, \end{cases} \quad \text{όταν} \quad a > 0. \quad (3.2.2 - 4)$$

Παράδειγμα 3.2.2 - 4

Έστω

$$f(t) = \cos t, \quad \text{οπότε} \quad F(s) = \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2 - 4 έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[e^{-s} \overbrace{\pi/3}^{a=\pi/3} F(s) \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s e^{-\pi s/3}}{s^2 + 1} \right] \\ &= \begin{cases} \cos(t - \pi/3) & \text{αν } t > \pi/3 \\ 0 & \text{αν } t < \pi/3. \end{cases} \end{aligned}$$

Θεώρημα 3.2.2 - 5. Αν $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$, τότε

$$\mathcal{L}^{-1} [F^{(n)}(s)] = (-1)^n t^n f(t). \quad (3.2.2 - 5)$$

Παράδειγμα 3.2.2 - 5

Όμοια, έστω

$$f(t) = \cos t, \quad \text{οπότε} \quad F(s) = \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2 - 5 έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} [F^{(2)}(s)] &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{s^2 + 1} \right)^{(2)} \\ &= (-1)^2 t^2 \cos t = t^2 \cos t. \end{aligned}$$

Σημείωση 3.2.2 - 1

Για τον αντίστροφο μετασχηματισμό των Θεωρημάτων 1.2 – 6 και 1.2 – 7 ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

3.2.3 Μέθοδοι υπολογισμού

Δίνονται τώρα οι σημαντικότερες μέθοδοι προσδιορισμού της αντίστροφης συνάρτησης για μορφές της $F(s)$, που κύρια εμφανίζονται στις εφαρμογές.

Πίνακας 3.2.3 - 1: των κυριότερων μετασχηματισμών Laplace.

α/α	$f(t)$	$F(s)$	α/α	$f(t)$	$F(s)$
1	A	$\frac{A}{s}$	11	$e^{bt} \sinh at$	$\frac{a}{(s-b)^2 - a^2}$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	12	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
3	$t^n; n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	13	$t^2 \sin \omega t$	$\frac{2\omega(3s^2 - \omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^3}$
4	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	14	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
5	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	15	$t^2 \cos \omega t$	$\frac{2s(s^2 - 3\omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^3}$
6	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	16	$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
7	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	17	$\delta(t-a)$	e^{-as}
8	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	18	$\delta'(t)$	s
9	$e^{bt} \cosh at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2 - a^2}$	19	$\delta''(t)$	s^2
10	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	20	$\frac{\sin at}{t}$	$\tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)$

Με αναφορά στον Πίνακα 3.2.3 - 1**Παράδειγμα 3.2.3 - 1**

Έστω

$$F(s) = \frac{1}{s^3}$$

που για ευκολία γράφεται και

$$F(s) = \frac{1}{s^{2+1}} = \frac{1}{2!} \frac{2!}{s^{2+1}}.$$

Τότε η $F(s)$ σύμφωνα με τον τύπο 3 του Πίνακα 3.2.3 - 1 και τη γραμμική ιδιότητα 3.2.2 - 1 δίνει ως αντίστροφη συνάρτηση την

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{t^2}{2}.$$

Παράδειγμα 3.2.3 - 2

Έστω

$$F(s) = \frac{2}{s^2 + 4} = \frac{2}{s^2 + 2^2}.$$

Όμοια με τον τύπο 4 του Πίνακα 3.2.3 - 1 είναι

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sin 2t.$$

Παράδειγμα 3.2.3 - 3

Έστω

$$F(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 37}$$

που γράφεται και

$$F(s) = \frac{5}{6} \frac{6}{(s + \underbrace{1}_{a=1})^2 + (\underbrace{6}_{\omega=6})^2}.$$

Τότε ο τύπος 5 του Πίνακα 3.2.3 - 1 δίνει ως αντίστροφη συνάρτηση την

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{5}{6} e^{-t} \sin 6t.$$

Σημειώσεις 3.2.3 - 1

- i) Όταν στον παρονομαστή υπάρχει ως παράγοντας τριώνυμο με ρίζες μιγαδικές ($\Delta < 0$) ή ειδική περίπτωση φανταστικές, τότε ο παρονομαστής μετασχηματίζεται σε άθροισμα τετραγώνων σύμφωνα με τον τύπο

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \quad (3.2.3 - 1)$$

- ii) Η περίπτωση (i) εφαρμόζεται μόνον, όταν ο αριθμητής είναι βαθμού μικρότερου του παρονομαστή.

Παράδειγμα 3.2.3 - 4

Έστω

$$F(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 4s + 5}.$$

Επειδή η διακρίνουσα του παρονομαστή είναι $\Delta = 4^2 - 20 = -4 < 0$ σύμφωνα με τη Σημείωση 3.2.3 - 1 (i) ο παρονομαστής γράφεται:

$$s^2 + 4s + 5 = (s + 2)^2 + 1^2.$$

Στη συνέχεια δημιουργείται στον αριθμητή το $s + 2$ ως εξής:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2s + 1}{s^2 + 4s + 5} = \frac{2s + 1}{(s + 2)^2 + 1^2} = \frac{2s + 4 - 4 + 1}{(s + 2)^2 + 1^2} \\ &= \frac{2s + 4 \overbrace{-4 + 1}^{-3}}{(s + 2)^2 + 1^2} = 2 \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 1^2} - 3 \frac{1}{(s + 2)^2 + 1^2}. \end{aligned}$$

Άρα ο αντίστροφος μετασχηματισμός θα είναι συνδυασμός των τύπων 5 και 7 του Πίνακα 3.2.3 - 1, δηλαδή

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2 e^{-2t} \cos 2t - 3 e^{-2t} \sin t = e^{-2t} (2 \cos 2t - 3 \sin t).$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν οι αντίστροφες των παρακάτω συναρτήσεων $F(s)$:

i) $\frac{2}{s^4}$	vii) $\frac{6}{(s+1)^4}$
ii) $\frac{1}{(s+3)^2}$	viii) $\frac{1}{9s^2+4}$
iii) $\frac{2(s+2)}{s^2+4}$	ix) $\frac{s-1}{4s^2+9}$
iv) $\frac{s-1}{s^2-9}$	x) $\frac{1}{s^2+4s+4}$
v) $\frac{1}{s^2+8s+17}$	xi) $\frac{4s+1}{s^2+2s+1}$
vi) $\frac{s}{s^2-2s+1}$	xii) $\frac{s}{s^2+s+1}$.

Απαντήσεις

(i) $\frac{t^3}{3}$, (ii) $t e^{-3t}$, (iii) $2(\cos 2t + \sin 2t)$, (iv) $\frac{2e^{-3t}}{3} + \frac{e^{3t}}{3}$, (v) $e^{-4t} \sin t$, (vi) $e^t(1+t)$,
 (vii) $t^3 e^{-t}$, (viii) $\frac{1}{6} \sin\left(\frac{2t}{3}\right)$, (ix) $\frac{1}{4} \cos\left(\frac{3t}{2}\right) - \frac{1}{6} \sin\left(\frac{3t}{2}\right)$, (x) $t e^{-2t}$, (xi) $(4-3t)e^{-t}$,
 (xii) $-\frac{1}{3} e^{-t/2} \left[-3 \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \right]$.

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα

Έστω ότι η συνάρτηση $F(s)$ είναι ρητή, δηλαδή είναι της μορφής

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)},$$

όταν $P(s)$ και $Q(s)$ είναι ακέραια πολυώνυμα του s .

Για τον βαθμό του πολυωνύμου $P(s)$ διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

I. Ο βαθμός του $P(s)$ μικρότερος από τον βαθμό του $Q(s)$

Τότε η συνάρτηση $F(s)$ αναλύεται κατά τα γνωστά σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Παράδειγμα 3.2.3 - 5

Έστω

$$F(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2}$$

με ρίζες του παρονομαστή τις -1 και -2 . Τότε

$$\frac{s-1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1}.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με το $(s+1)(s+2)$, έχουμε

$$s-1 = (A+B)s + (A+2B).$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίσων δυνάμεων του s , προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ A + 2B &= -1, \end{aligned} \quad \text{οπότε } A = 3 \text{ και } B = -2.$$

Τότε

$$F(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1}.$$

Άρα

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 3e^{-2t} - 2e^{-t}.$$

Παράδειγμα 3.2.3 - 6

Όμοια, έστω

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2+9)}.$$

Θέτοντας

$$\frac{1}{s(s^2+9)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+9}$$

και σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία, τελικά προκύπτει

$$F(s) = \frac{1}{9} \frac{1}{s} - \frac{1}{9} \frac{s}{s^2+9},$$

οπότε

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} \cos 3t.$$

Παράδειγμα 3.2.3 - 7

Όμοια

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)^2}.$$

Ο παρονομαστής έχει πρωτοβάθμιο όρο υψωμένο σε δύναμη, οπότε στην περίπτωση αυτή η ανάλυση σε απλά κλάσματα έχει την παρακάτω μορφή:⁹

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{\overbrace{B}^{\text{αντί } Bs+C}}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+2},$$

οπότε τελικά προκύπτει

$$F(s) = \frac{1}{9} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{3} \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{1}{9} \frac{1}{s+2}.$$

Άρα

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{9} e^{-2t} (-1 - 3t + e^{3t}).$$

Παράδειγμα 3.2.3 - 8

Όμοια

$$F(s) = \frac{1}{s^3(s^2+4)}.$$

Έχουμε σύμφωνα με την ανάλυση του Παραδείγματος 3.2.3 - 7 ότι

$$\frac{1}{s^3(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+4},$$

οπότε

$$F(s) = -\frac{1}{16} \frac{1}{s} + \frac{1}{4} \frac{1}{s^3} + \frac{1}{16} \frac{s}{s^2+4}.$$

Άρα

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{16} (-1 + 2t^2 + \cos 2t).$$

⁹Βλέπε Μάθημα Αόριστο Ολοκλήρωμα.

II. Ο βαθμός του $P(s)$ μεγαλύτερος ή ίσος από τον βαθμό του $Q(s)$

Τότε γίνεται πρώτα η διαίρεση των πολυωνύμων, οπότε η περίπτωση αυτή ανάγεται τελικά στην προηγούμενη.

Ο υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace στην περίπτωση αυτή θα γίνει μόνο σε ειδικές περιπτώσεις με χρήση της συνάρτησης του Dirac. Για μια γενικότερη μελέτη ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

Παράδειγμα 3.2.3 - 9

Έστω

$$F(s) = \frac{s^4}{(s-1)(s+2)}.$$

Μετά τη διαίρεση και την ανάλυση σε απλά κλάσματα προκύπτει

$$F(s) = s^2 - s + 3 + \frac{1}{3} \frac{1}{s-1} - \frac{16}{3} \frac{1}{s+2}.$$

Τότε σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία και τους τύπους 17, 18 και 19 του Πίνακα 3.2.3 - 1 προκύπτει

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \delta''(t) - \delta'(t) + 3\delta(t) + \frac{1}{3}e^t - \frac{16}{3}e^{-2t}.$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί η συνάρτηση $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, όταν η $F(s)$ είναι ίση με

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| i) $\frac{1}{s(s^2-4)}$ | v) $\frac{1}{s^3+8}$ |
| ii) $\frac{1}{s^3-s}$ | vi) $\frac{s}{s^4-1}$ |
| iii) $\frac{1}{s(s^2-4s+4)}$ | vii) $\frac{s+1}{s^3-1}$ |
| iv) $\frac{1}{s(s^2+\pi^2)}$ | viii) $\frac{s}{(s+2)(s^2+1)}$ |

Απαντήσεις

$$(i) -\frac{1}{4} + \frac{e^{-2t}}{8} + \frac{e^{2t}}{8}, \quad (ii) -1 + \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^t}{2}, \quad (iii) \frac{1}{4} - \frac{e^{2t}}{4} + \frac{1}{2} t e^{2t}, \quad (iv) \frac{1}{\pi^2} - \frac{\cos \pi t}{\pi^2},$$

$$(v) \frac{e^{-2t}}{12} - \frac{1}{12} e^t \cos(\sqrt{3}t) + \frac{e^t \sin(\sqrt{3}t)}{4\sqrt{3}} \quad (vi) \frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^t}{4} - \frac{\cos t}{2},$$

$$(vii) \frac{2e^t}{3} - \frac{2}{3} e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right), \quad (viii) -\frac{2}{5} e^{-2t} + \frac{2\cos t}{5} + \frac{\sin t}{5}.$$

3.3 Εφαρμογές στη λύση Διαφορικών Εξισώσεων

3.3.1 Γραμμική 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές έχει τη μορφή

$$\mathbf{y}' + \mathbf{a} \mathbf{y} = \mathbf{r}(\mathbf{x}), \quad (3.3.1 - 1)$$

όταν α σταθερά, $y = y(x)$ με $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$. Η αντίστοιχη **ομογενής** είναι

$$\mathbf{y}' + \mathbf{a} \mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (3.3.1 - 2)$$

Έστω ότι οι συναρτήσεις $y, r \in D_{\mathcal{L}}$ και ορίζονται για κάθε $x \geq 0$. Θεωρώντας τον μετασχηματισμό Laplace της μη ομογενούς εξίσωσης (3.3.1 - 1) έχουμε

$$\mathcal{L}(y' + ay) = \mathcal{L}[r(x)],$$

που σύμφωνα με γνωστές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace¹⁰ γράφεται

$$s\mathcal{L}(y) - y(0) + a\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}[r(x)].$$

¹⁰Βλέπε Παράγραφος 3.1.3 **Θεώρημα 3.2.2 - 1** (γραμμική ιδιότητα): Έστω $f, g \in D_{\mathcal{L}}$. Τότε αν $k, \lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\mathcal{L}[kf(t) + \lambda g(t)] = k\mathcal{L}[f(t)] + \lambda\mathcal{L}[g(t)]$$

και **Θεώρημα 3.1.3 - 6** (παραγώγου 1ης τάξης): Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ και υπάρχει η πρώτη τάξης παράγωγος της f και είναι συνεχής συνάρτηση ή κατά τμήματα συνεχής για κάθε $t \geq 0$, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου f' και ισχύει

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \quad \text{με} \quad s > a > 0.$$

Θέτοντας

$$Y(s) = \mathcal{L}(y) \quad \text{με} \quad y(0) = y_0 \quad \text{αρχική συνθήκη}$$

και λύνοντας αλγεβρικά ως προς $Y(s)$, τελικά έχουμε τον παρακάτω τύπο υπολογισμού της μετασχηματισμένης συνάρτησης $Y(s)$ της μερικής λύσης της (3.3.1 - 1)

$$Y(s) = \frac{\mathcal{L}[r(x)]}{s+a} + \frac{y_0}{s+a} \quad \text{με} \quad s+a > 0. \quad (3.3.1 - 3)$$

Τότε από την (3.3.1 - 3) προκύπτει η μερική λύση της (3.3.1 - 1) ως εξής:

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)].$$

Παρατηρήσεις 3.3.1 - 1

Η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace:

- i) εφαρμόζεται κυρίως, όταν ζητείται η μερική λύση της (3.3.1-1), δηλαδή έχουν δοθεί και οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος ή όταν η είσοδος $r(x)$ είναι περιοδική, μοναδιαία κρούση, κ.λπ.,¹¹
- ii) δεν εφαρμόζεται, όταν η $f(x)$ δεν είναι σταθερά και γενικότερα δεν εφαρμόζεται σε μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις.

Το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου σε σχέση με την αντίστοιχη κλασική μέθοδο είναι ότι η διαφορική εξίσωση λύνεται με αλγεβρικό τρόπο και εισάγονται στη λύση άμεσα, χωρίς να χρειάζεται επιπλέον υπολογισμός, οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Παράδειγμα 3.3.1 - 1

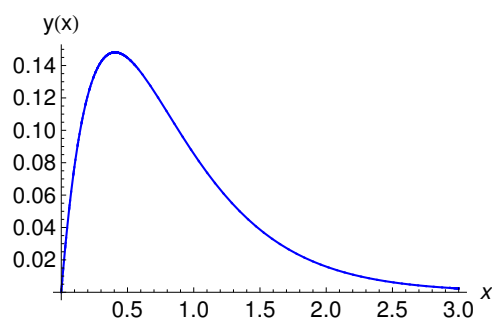
Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + 2y = e^{-3x}, \quad \text{όταν} \quad y(0) = 0. \quad (1)$$

Λύση. Έστω ότι η (1) ορίζεται για κάθε $x \geq 0$. Είναι $r(x) = e^{-3x}$, οπότε σύμφωνα με τον τύπο 2 του Πίνακα 3.2.3 - 1 έχουμε

$$\mathcal{L}[e^{-3x}] = \frac{1}{s+3}, \quad \text{όταν} \quad s+3 > 0.$$

¹¹Βλέπε Μάθημα *Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών*.



Σχήμα 3.3.1 - 1: Παράδειγμα 3.3.1 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-3x}(-1 + e^x)$, όταν $x \in [0, 3]$.

Έστω $y(x)$ η μερική λύση της (1). Επειδή σύμφωνα με την (1) είναι $a = 2$, θέτοντας στην (3.3.1 - 3)

$$Y(s) = \mathcal{L}(y) \quad \text{με} \quad y(0) = y_0 = 0$$

μετά την ανάλυση σε απλά κλάσματα του δεξιού μέλους, προκύπτει

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\frac{1}{s+3}}{s+2} + \frac{0}{s+2} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ &= \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}, \quad \text{όταν} \quad s+2 > 0. \end{aligned}$$

Άρα η μερική λύση είναι (Σχ. 3.3.1 - 1)

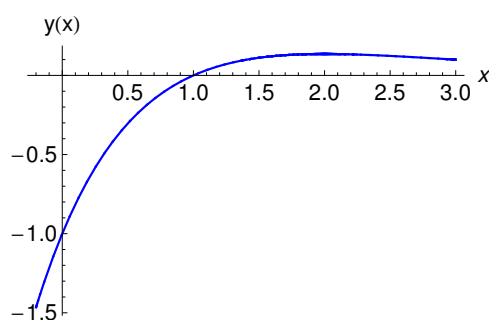
$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{-2x} - e^{-3x} = e^{-3x}(-1 + e^x).$$

■

Παράδειγμα 3.3.1 - 2

Όμοια η διαφορική εξίσωση

$$y' + y = e^{-x} \quad \text{όταν} \quad y(0) = -1. \quad (2)$$



Σχήμα 3.3.1 - 2: Παράδειγμα 3.3.1 - 2: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-x}(-1+x)$, όταν $x \in [-0.2, 3]$.

Λύση.

Αν όμοια υποτεθεί ότι η (2) ορίζεται για κάθε $x \geq 0$ και $r(x) = e^{-x}$, τότε σύμφωνα με τον τύπο 2 του Πίνακα 3.2.3 - 1 θα είναι

$$\mathcal{L}[e^{-x}] = \frac{1}{s+1}, \quad \text{όταν } s+1 > 0.$$

Έστω $y(x)$ η μερική λύση της (2). Επειδή σύμφωνα με την (2) είναι $a = 1$, όμοια θέτοντας

$$Y(s) = \mathcal{L}(y) \quad \text{με} \quad y(0) = y_0 = -1$$

στην (3.3.1 - 3) προκύπτει ότι

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s+1}}{s+1} + \frac{-1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}, \quad \text{όταν } s+1 > 0.$$

Άρα η μερική λύση είναι (Σχ. 3.3.1 - 2)

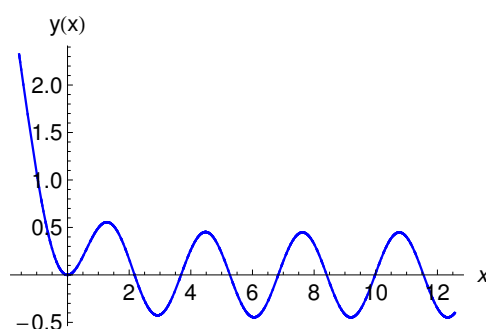
$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = x e^{-x} - e^{-x} = e^{-x}(-1+x).$$

■

Παράδειγμα 3.3.1 - 3

Όμοια η διαφορική εξίσωση

$$y' + y = \sin 2x, \quad \text{όταν } y(0) = 0. \quad (3)$$



Σχήμα 3.3.1 - 3: Παράδειγμα 3.3.1 - 3: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = \frac{2}{5} e^{-x} + \frac{1}{5} (-2 \cos 2x + \sin 2x)$, όταν $x \in [-\pi/3, 10\pi]$.

Λύση. Όμοια έστω ότι η (3) ορίζεται για κάθε $x \geq 0$. Είναι $r(x) = \sin 2x$, οπότε σύμφωνα με τον τύπο 4 του Πίνακα 3.2.3 - 1 θα είναι

$$\mathcal{L}[\sin 2x] = \frac{2}{s^2 + 4}.$$

Αν $y(x)$ η μερική λύση της (3), τότε $a = 1$, οπότε θέτοντας

$$Y(s) = \mathcal{L}(y) \quad \text{με} \quad y(0) = y_0 = 0$$

στην (3.3.1 - 3) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{2}{s^2+4}} = \frac{2}{(s+1)(s^2+4)} = \frac{2}{5} \frac{1}{s+1} - \frac{2}{5} \frac{s-1}{s^2+4} \\ &= \frac{2}{5} \frac{1}{s+1} - \frac{2}{5} \frac{s}{s^2+2^2} + \frac{1}{5} \frac{2}{s^2+2^2}, \quad \text{όταν} \quad s+1 > 0. \end{aligned}$$

Άρα όμοια (Σχ. 3.3.1 - 3)

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{2}{5} e^{-x} + \frac{1}{5} (-2 \cos 2x + \sin 2x),$$

Από τη λύση προκύπτουν τα εξής:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = +\infty,$

ii) όταν $x \geq \pi$, ο όρος e^{-x} πρακτικά μηδενίζεται, οπότε η λύση γράφεται:¹²

$$\begin{aligned} y(x) &\approx \frac{1}{5} (-2 \cos 2x - \sin 2x) = \frac{\sqrt{2^2 + 1^2}}{5} \sin(2x + \phi) \\ &\approx 0.45 \sin(2x + \phi), \quad \text{όταν } \phi = \arctan(-2) \approx -\frac{9\pi}{25}, \end{aligned}$$

δηλαδή περιγράφει μια **αμείωτη περιοδική ταλάντωση** πλάτους 0.45.

■

Άσκηση

Να λυθούν οι παρακάτω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις:

- i) $y' + y = x; y(0) = -1$ v) $y' + 3y = e^{-x} \sin 2x; y(0) = 0$
 ii) $y' + 4y = e^{-3x}; y(0) = 0$ vi) $y' + y = \sin^2 x; y(0) = -1$
 iii) $y' + y = x e^{-x}; y(0) = 0$ vii) $y' + 4y = 1 - \sinh x; y(0) = 0$
 iv) $y' + y = \sin 2x; y(0) = 0$ viii) $y' + y = \sin x \cos 2x; y(0) = 0$.

Απαντήσεις

- i) $y(x) = -1 + x + c e^{-x}$, μερική: $c = 0$,
 ii) $y(x) = e^{-3x} + c e^{-4x}$, μερική: $c = -1$,
 iii) $y(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x} + c e^{-x}$, μερική: $c = 0$,
 iv) $y(x) = c e^{-x} + \frac{1}{2} (-2 \cos 2x + \sin 2x)$, μερική: $c = \frac{2}{5}$,
 v) $y(x) = c e^{-3x} + \frac{e^{-x}}{13} (-3 \cos 3x + 2 \sin 3x)$, μερική: $c = -\frac{1}{13}$,
 vi) $y(x) = c e^{-x} + \frac{1}{10} (5 - \cos 2x - \sin 2x)$, μερική: $c = -\frac{14}{10}$,
 vii) $y(x) = c e^{-4x} - \frac{1}{60} (10 - 15e^x + 6e^{2x})$, μερική: $c = -\frac{19}{60}$,
 viii) $y(x) = c e^{-x} + \frac{1}{20} (5 \cos x - 3 \cos 3x - 5 \sin x + \sin 3x)$, μερική: $c = -\frac{1}{10}$.

¹²Βλέπε Μάθημα Σειρά Fourier - Γραμμικά φάσματα.

3.3.2 Γραμμική 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Ομογενής γραμμική

Η γενική μορφή της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$y'' + ay' + by = 0, \quad (3.3.2 - 1)$$

όταν a, b σταθερές, $y = y(x)$ με $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Αν $y \in D_{\mathcal{L}}$, τότε από την (3.3.2 - 1) έχουμε

$$\mathcal{L}[y'' + ay' + by] = 0,$$

που σύμφωνα με γνωστές ιδιότητες¹³ του μετασχηματισμού Laplace γράφεται

$$s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y_0'(0) + a[s\mathcal{L}(y) - y(0)] + b\mathcal{L}(y) = 0$$

Θέτοντας

$$\mathcal{L}(y) = Y(s) \quad \text{και} \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0' \quad \text{αρχικές συνθήκες}$$

η παραπάνω σχέση, αν λυθεί ως προς $Y(s)$, τελικά δίνει

$$Y(s) = \frac{(s + a)y_0 + y_0'}{s^2 + as + b} \quad (3.3.2 - 2)$$

¹³Ομοια βλέπε Παράγραφος 3.1.3 **Θεώρημα 3.2.2 - 1** (γραμμική ιδιότητα): Έστω $f, g \in D_{\mathcal{L}}$. Τότε αν $k, \lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\mathcal{L}[kf(t) + \lambda g(t)] = k\mathcal{L}[f(t)] + \lambda\mathcal{L}[g(t)]$$

και **Θεώρημα 3.1.3 - 6** (παραγώγου 1ης τάξης): Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ και υπάρχει η πρώτη τάξης παράγωγος της f και είναι συνεχής συνάρτηση ή κατά τμήματα συνεχής για κάθε $t \geq 0$, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου f' και ισχύει

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \quad \text{με} \quad s > a > 0,$$

ενώ με τον τύπο (1.1.3 - 17)

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0), \quad \text{όταν} \quad s > a > 0.$$

Τότε η γενική λύση της (3.3.2 - 1) θα δίνεται από τη σχέση

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]. \quad (3.3.2 - 3)$$

Είναι φανερό ότι η γενική λύση (3.3.2 - 3) εξαρτάται από το είδος των ριζών του παρονομαστή $s^2 + as + \beta$ στην (3.3.2 - 2). Οι Παρατηρήσεις 3.3.1 - 1 ισχύουν ανάλογα και στην περίπτωση αυτή.

Παράδειγμα 3.3.2 - 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad \text{όταν } y_0 = 0 \quad \text{και} \quad y'_0 = 1.$$

Λύση. Σύμφωνα με την (3.3.2 - 2) είναι

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(s+5) \cdot 0 + 1}{s^2 + 5s + 6} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} = \frac{1}{(s+3)(s+2)} \\ &= \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+2} = -\frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+2}. \end{aligned}$$

Άρα (Σχ. 3.3.2 - 1)

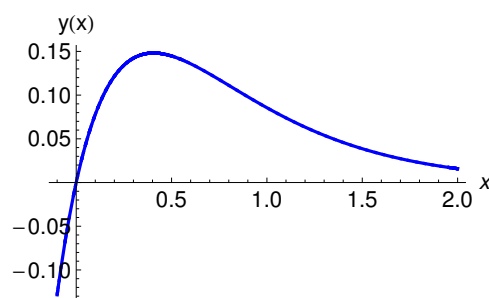
$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = -e^{-3x} + e^{-2x}.$$

Η λύση στην περίπτωση αυτή είναι γνωστή ως **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ισχυρή απόσβεση**. ■

Παράδειγμα 3.3.2 - 2

Όμοια η εξίσωση

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad \text{όταν } y_0 = 1 \quad \text{και} \quad y'_0 = 1.$$



Σχήμα 3.3.2 - 1: Παράδειγμα 3.3.2 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = -e^{-3x} + e^{-2x}$, όταν $x \in [-0.1, 2]$.

Λύση. Σύμφωνα με την (3.3.2 - 2) είναι

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(s-4) \cdot 1 + 1}{s^2 - 4s + 4} \\ &= \frac{s-3}{(s-2)^2} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} \\ &= \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2} = \frac{1}{s-2} + \left(\frac{1}{s-2}\right)' \\ &= \frac{1}{s-2} - (-1)^1 \left(\frac{1}{s-2}\right)' . \end{aligned}$$

Επειδή σύμφωνα με τη γνωστή ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace ισχύει ότι, αν $F(s) = \mathcal{L}[f(x)]$, τότε $\mathcal{L}[x f(x)] = (-1)^1 F'(s)$, από την παραπάνω σχέση προκύπτει τελικά ότι (Σχ. 3.3.2 - 2)

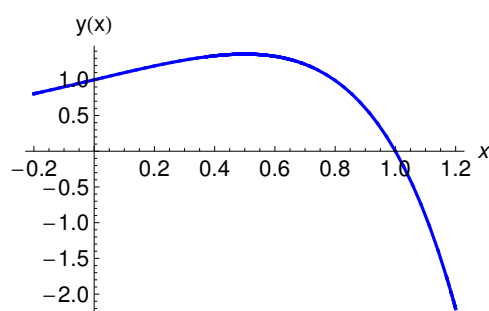
$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{2x}(1-x).$$

Η λύση περιγράφει την **κρίσιμη απόσβεση**. Επειδή $e^{-2x} \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η $y_h(x) = 0$, όταν $x_0 = 1$. Τότε το x_0 είναι το σημείο στατικής ισορροπίας.

Παράδειγμα 3.3.2 - 3

Όμοια η εξίσωση

$$16y'' + 8y' + 17y = 0, \quad \text{όταν } y_0 = 1 \quad \text{και} \quad y'_0 = 0.$$



Σχήμα 3.3.2 - 2: Παράδειγμα 3.3.2 - 2: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-2x}(1-x)$, όταν $x \in [-0.2, 1.2]$.

Λύση. Η εξίσωση γράφεται

$$y'' + \frac{1}{2}y' + \frac{17}{16}y = 0,$$

οπότε σύμφωνα με την (3.3.2 - 2) είναι

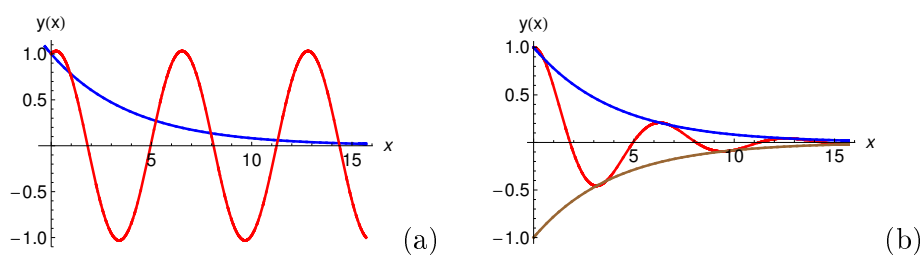
$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(s + \frac{1}{2}) \cdot 1 + 0}{s^2 + \frac{1}{2}s + \frac{17}{16}} = \frac{s + \frac{1}{2}}{s^2 + 2\frac{1}{4}s + \frac{16+1}{16}} \\ &= \frac{s + \frac{1}{2}}{s^2 + 2\frac{1}{4}s + \frac{1}{16} + 1} \\ &= \frac{s + \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{4})^2 + 1} = \frac{s + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{(s + \frac{1}{4})^2 + 1} \\ &= \frac{s + \frac{1}{4}}{(s + \frac{1}{4})^2 + 1^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{(s + \frac{1}{4})^2 + 1^2}. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με τους τύπους 5 και 7 του Πίνακα 2.2-1 είναι (Σχ. 3.3.2 - 3)

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{-x/4} \cos x + \frac{1}{4} e^{-x/4} \sin x,$$

Η λύση περιγράφει μια **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ασθενή απόσβεση**.

■



Σχήμα 3.3.2 - 3: Παράδειγμα 3.3.2 - 2, όταν $x \in [-\pi/10, 4\pi]$: (a) το διάγραμμα της $\frac{1}{4} e^{-x/4}$ μπλε (απόσβεση) και της $4 \cos x + \sin x$ κόκκινη καμπύλη (αμείωτη ταλάντωση), ενώ στο διάγραμμα (b) της μερικής λύσης $y(x) = \frac{1}{4} e^{-x/4} (4 \cos x + \sin x)$. Η απόσβεση προκαλεί τελικά τον μηδενισμό της μερικής λύσης.

Άσκηση

Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

i) $y'' + 4y' + 5y = 0; \quad y'_0 = y_0 = 1,$

ii) $y'' - y' - 12y = 0; \quad y'_0 = 1, \quad y_0 = 0,$

iii) $y'' + 2y' + 10y = 0; \quad y'_0 = 1, \quad y_0 = 0,$

iv) $y'' + 25y = 0; \quad y'_0 = y_0 = 1,$

v) $y'' + 2y' + 4y = 0; \quad y'_0 = 1, \quad y_0 = 0,$

i) $y'' - 2y' + y = 0; \quad y'_0 = -1, \quad y_0 = 1.$

Απαντήσεις

(i) $e^{-2x} (\cos x + 3 \sin x), \quad (ii) \frac{1}{7} (-e^{-3x} + e^{4x}), \quad (iii) \frac{1}{3} e^{-x} \sin 3x,$

(iv) $\frac{1}{5} (5 \cos 5x + \sin 5x), \quad (v) \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-x} \sin(\sqrt{3}x), \quad (vi) -e^x (-1 + 2x).$

Μη ομογενής γραμμική

Η γενική μορφή της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$y'' + ay' + by = r(x), \quad (3.3.2 - 4)$$

όταν $a, b \in \mathbb{R}$, $y = y(x)$, $r(x) \neq 0$ με $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Έστω $y, r \in D_{\mathcal{L}}$. Τότε, ανάλογα με την αντίστοιχη λύση της ομογενούς, θεωρώντας τον μετασχηματισμό Laplace της (3.3.2 - 4), τελικά προκύπτει

$$\mathbf{Y}(s) = \frac{\mathcal{L}[r(x)]}{s^2 + as + b} + \frac{(s + a)y_0 + y_0'}{s^2 + as + b}, \quad (3.3.2 - 5)$$

οπότε η γενική λύση της μη ομογενούς θα δίνεται από τη σχέση

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{Y}(s)]. \quad (3.3.2 - 6)$$

Παράδειγμα 3.3.2 - 4

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - 3y' + 2y = x, \quad \text{όταν } y_0 = y_0' = 0.$$

Λύση. Είναι $a = -3$, $b = 2$ και

$$\mathcal{L}[r(x)] = \mathcal{L}(x) = \frac{1}{s^2}.$$

Αντικαθιστώντας στον τύπο (3.3.2-5) μετά και την ανάλυση σε απλά κλάσματα έχουμε

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2(s^2 - 3s + 2)} = \frac{1}{s^2(s-1)(s-2)} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{\Gamma}{s-1} + \frac{\Delta}{s-2} \\ &= \frac{3}{4s} + \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{4(s-2)}. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με την (3.3.2 – 6) η μερική λύση είναι

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{3}{4} + \frac{x}{2} - e^x + \frac{e^{2x}}{4}.$$

■

Παράδειγμα 3.3.2 - 5

Όμοια της

$$y'' + 2y' + y = e^{-2x}, \quad \text{όταν } y_0 = y'_0 = 0.$$

Λύση. Όμοια είναι $a = 2$, $b = 1$ και

$$\mathcal{L}[r(x)] = \mathcal{L}(e^{-2x}) = \frac{1}{s+2}.$$

Τότε από τον τύπο (3.3.2 – 5) έχουμε

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s+2)(s^2+2s+1)} = \frac{1}{(s+2)(s+1)^2} \\ &= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{\Gamma}{s+1} \\ &= \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα και την (3.3.2 – 6) η μερική λύση είναι

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{-2x} + x e^{-x} - e^{-x} = e^{-2x} (1 + x e^x - e^x).$$

■

Παράδειγμα 3.3.2 - 6

Όμοια η

$$y'' + 4y = x, \quad \text{όταν } y_0 = y'_0 = 0.$$

Λύση. Όμοια είναι $a = 0$, $b = 4$ και

$$\mathcal{L}[r(x)] = \mathcal{L}(x) = \frac{1}{s^2}.$$

Τότε από τον τύπο (3.3.2 – 5) έχουμε

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2(s^2+4)} \\ &= \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{\Gamma s + \Delta}{s^2+4} = \frac{1}{4} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{s^2+4} \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{4 \cdot 2} \frac{2}{s^2+2^2} \end{aligned}$$

μετά την κατάλληλη τροποποίηση του τελευταίου όρου στο δεξιό μέλος στην παραπάνω ισότητα.

Άρα σύμφωνα με την (3.3.2 – 6) η μερική λύση είναι

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} \sin 2x.$$

■

Παράδειγμα 3.3.2 - 7

Όμοια η

$$y'' + 2y' + 10y = 1, \quad \text{όταν } y_0 = y'_0 = 0.$$

Λύση. Είναι $a = 2$, $b = 10$ και

$$\mathcal{L}[r(x)] = \mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}.$$

Τότε από τον τύπο (3.3.2 – 5) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s(s^2+2s+10)} \\ &\text{(επειδή το } s^2+2s+2 \text{ έχει ρίζες μιγαδικές δεν αναλύεται)} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{Bs + \Gamma}{s^2+2s+10} = \frac{1}{10} \frac{1}{s} - \frac{1}{10} \frac{s+2}{s^2+2s+10} \\ &= \frac{1}{10} \frac{1}{s} - \frac{1}{10} \frac{s+2}{(s+1)^2+3^2} \\ &= \frac{1}{10} \frac{1}{s} - \frac{1}{10} \left[\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} + \frac{1}{3} \frac{3}{(s+1)^2+3^2} \right] \end{aligned}$$

μετά την τροποποίηση του παρονομαστή $s^2+2s+10$ σε άθροισμα τετραγώνων.

Άρα η μερική λύση είναι

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{10} - \frac{1}{10} \left(e^{-x} \cos 3x + \frac{1}{3} e^{-x} \sin 3x \right).$$

■

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις, όταν $y = y(x)$ και $y_0 = y'_0 = 0$:

$$i) \quad y'' + 4y' + 13y = e^{-x}$$

$$iv) \quad y'' + 2y' + y = \sin x$$

$$ii) \quad y'' + y = \sin x$$

$$v) \quad y'' + y' = e^{-x} \sin x$$

$$iii) \quad y'' + 3y' + 2y = x$$

$$vi) \quad y'' + 4y' + 3y = 4e^{-x}.$$

2. Δείξτε ότι η διαφορική εξίσωση $y'' + 4y' + 13y = 2\delta(t)$, όπου $y = y(x)$ και $y_0 = y'_0 = 0$, έχει λύση την

$$y(x) = 2e^{-2x} (\cos 3x + \sin 3x).$$

Απαντήσεις

$$(i) \frac{1}{30} e^{-2x} (3e^x - 3 \cos 3x - \sin 3x), \quad (ii) \frac{1}{2} (-x \cos x + \sin x),$$

$$(iii) -\frac{3}{4} - \frac{e^{-2x}}{4} + e^{-x} + \frac{x}{2}, \quad (iv) -\frac{1}{2} e^{-x} (1 + x - e^x \cos x),$$

$$(v) \frac{1}{2} e^{-x} (-2 + e^x + \cos x - \sin x), \quad (vi) e^{-3x} (1 - e^{2x} + 2x e^{2x}).$$

3.4 Βιβλιογραφία

- [1] Αθανασιάδη, Α. (1993). *Μετασχηματισμός Laplace και Σειρές Fourier*. Εκδόσεις Ζήτη. ISBN 960-431-219-7.
- [2] Αλικάκος, Ν. & Καλογερόπουλος, Γ. (2003). *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*. Σύγχρονη Εκδοτική. ISBN 978-960-816-563-2.
- [3] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978-960-351-874-7.
- [4] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960-351-453-5/978-960-351-453-4.
- [5] Spiegel, M. (1965). *Schaum's Outlines - Laplace Transforms*. McGraw-Hill Education - Europe. ISBN 978-007-060-231-1.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- <http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm>
- <http://mathworld.wolfram.com/>
- <http://eom.springer.de/>

Μάθημα 4

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

4.1 Εισαγωγικές έννοιες

4.1.1 Ορισμός διανυσματικής συνάρτησης

¹Υπενθυμίζεται ο ορισμός της πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής, που για ευκολία στη συνέχεια θα λέγεται επίσης και **βαθμωτή** συνάρτηση.

Ορισμός 4.1.1 - 1 (συνάρτησης). Έστω D και T δύο τυχόντα μη κενά υποσύνολα του \mathbb{R} . Τότε λέγεται *συνάρτηση με πεδίο ορισμού το D και πεδίο τιμών το T , μία μονοσήμαντη απεικόνιση, έστω f , του συνόλου D στο T , δηλαδή*

$$D \ni x \longrightarrow y = f(x) \in T \quad (4.1.1 - 1)$$

ή συντομότερα *συνάρτηση $f|D$ με πεδίο τιμών T ή και συνάρτηση $f(x)$, $x \in D$ με τιμές στο T .*

¹Για την καλύτερη κατανόηση των εννοιών του μαθήματος ο αναγνώστης πρέπει να γνωρίζει το Μάθημα Διανύσματα.

Η σχέση $y = f(x)$, που ισχύει για κάθε $x \in D$, ορίζει τον τύπο της συνάρτησης, το γράμμα x την ανεξάρτητη μεταβλητή στο D , ενώ το y την εξαρτημένη μεταβλητή στο T . Τότε ο τύπος της συνάρτησης εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι μεταβλητές y και x .

Επομένως η συνάρτηση $f(x) = x^2$ με πεδίο ορισμού $D = \mathbb{R}$, θα απεικονίζει τα στοιχεία

$$1, 3, 5, \dots \quad \text{στα} \quad 1^2, 3^2, 5^2, \dots$$

Γενικεύοντας το παραπάνω παράδειγμα θεωρούμε ότι είναι δυνατόν να οριστεί επίσης μια μονοσήμαντη απεικόνιση (συνάρτηση) των στοιχείων

$$1, 3, 5, \dots$$

στα

$$(1^2, 1^3), \dots, (3^2, 3^3), \dots, (5^2, 5^3), \dots \quad (4.1.1 - 2)$$

του χώρου $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, αντίστοιχα στα

$$(1^2, 1^3, 1), \dots, (3^2, 3^3, 3), \dots, (5^2, 5^3, 5), \dots \quad (4.1.1 - 3)$$

του $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$. Τότε ο τύπος της συνάρτησης για τα στοιχεία (4.1.1 - 2) πρέπει να είναι της μορφής (x^2, x^3) , ενώ για τα (4.1.1 - 3) της μορφής (x^2, x^3, x) , όταν $x \in \mathbb{R}$.

Έχοντας τώρα υπόψη τις σχέσεις (??) και (??) τα παραπάνω στοιχεία είναι δυνατόν να θεωρηθούν ως οι **συνιστώσες** αντίστοιχων διανυσμάτων, δηλαδή των

$$1^2 \mathbf{i} + 1^3 \mathbf{j}, \dots, \quad \text{αντίστοιχα} \quad 1^2 \mathbf{i} + 1^3 \mathbf{j} + \mathbf{k}, \dots,$$

οπότε ο αντίστοιχος τύπος της συνάρτησης, που λέγεται στην περίπτωση αυτή διανυσματική συνάρτηση μιας μεταβλητής, θα έχει τη μορφή

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{F}(x^2, x^3) = x^2 \mathbf{i} + x^3 \mathbf{j}, \quad \text{αντίστοιχα}$$

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{F}(x^2, x^3, x) = x^2 \mathbf{i} + x^3 \mathbf{j} + x \mathbf{k}, \quad (4.1.1 - 4)$$

όταν $x \in \mathbb{R}$.

Στις συναρτήσεις του είδους αυτού χρησιμοποιείται συνήθως στον συμβολισμό της μεταβλητής το γράμμα t - που συνήθως παριστάνει τον χρόνο - αντί του x .

²Δίνεται στη συνέχεια ο ορισμός της διανυσματικής συνάρτησης.

Ορισμός 4.1.1 - 2 (διανυσματική συνάρτηση). Έστω $D \subseteq \mathbb{R}$ και $T \subseteq \mathbb{R}^2$, αντίστοιχα $T \subseteq \mathbb{R}^3$ δύο τυχαία μη κενά σύνολα. Τότε ορίζεται ως διανυσματική συνάρτηση (vector function ή vector-valued function) μιας μεταβλητής με πεδίο ορισμού το D και πεδίο τιμών το T , μία **μονοσήμαντη απεικόνιση**, έστω \mathbf{F} , του συνόλου D στο T , δηλαδή

$$D \ni t \longrightarrow \mathbf{F}(t) = \mathbf{y} = \langle f_1(t), f_2(t) \rangle \in T \subseteq \mathbb{R}^2, \\ \text{αντίστοιχα} \qquad \qquad \qquad (4.1.1 - 5) \\ \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t) \rangle \in T \subseteq \mathbb{R}^3,$$

όπου κάθε $f_i(t)$ με $i = 1, 2$, αντίστοιχα $i = 1, 2, 3$ είναι μία συνάρτηση με μεταβλητή t , που λέγεται συνιστώσα (argument) της \mathbf{F} .

Σημείωση 4.1.1 - 1

Πολλές φορές, όταν απαιτείται, χρησιμοποιείται και η παράσταση των συνιστωσών με πίνακα διάνυσμα, δηλαδή³

$$D \ni t \longrightarrow \mathbf{F}(t) = \mathbf{y} = [f_1(t), f_2(t)]^T \in T \subseteq \mathbb{R}^2, \\ \text{αντίστοιχα} \\ [f_1(t), f_2(t), f_3(t)]^T \in T \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1.1 - 2, αν Oxy είναι ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων του χώρου των 2-διαστάσεων, αντίστοιχα $Oxyz$ του χώρου των 3-διαστάσεων, τότε η \mathbf{F} εκφράζεται στις περιπτώσεις αυτές συναρτήσεις των

²Ο αναγνώστης, για μια πληρέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 3, 4, 5].

³Βλέπε Μάθημα Γραμμική Άλγεβρα και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 3.

συνιστωσών ως εξής:

$$\mathbf{F}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} = \langle f_1(t), f_2(t) \rangle,$$

αντίστοιχα

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t) &= f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k} \\ &= \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t) \rangle,\end{aligned}\tag{4.1.1 - 6}$$

όταν \mathbf{i} , \mathbf{j} και \mathbf{k} τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων $0x$, $0y$ και $0z$ αντίστοιχα.

Ο προσδιορισμός του πεδίου ορισμού D της \mathbf{F} δεν διαφέρει από εκείνον της συνάρτησης $f(x)$, εφόσον τελικά συνεπάγεται τον υπολογισμό των πεδίων ορισμού καθεμιάς συνιστώσας και στη συνέχεια των κοινών τους σημείων.

Παράδειγμα 4.1.1 - 1

Έστω η διανυσματική συνάρτηση (Σχ. 4.1.1 - 1)

$$\mathbf{F}(t) = \overbrace{\sqrt{t} \cos t}^{f_1(t)} \mathbf{i} + \overbrace{\sin t}^{f_2(t)} \mathbf{j} = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j}.$$

Τότε το πεδίο ορισμού της συνιστώσας

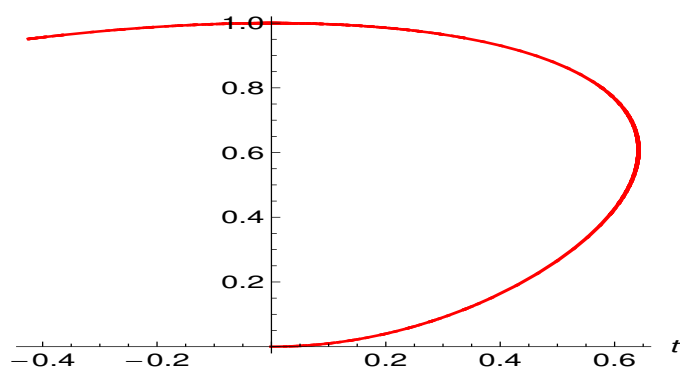
$$f_1(t) = \sqrt{t} \cos t \quad \text{είναι το} \quad D_1 = [0, +\infty),$$

ενώ της

$$f_2(t) = \sin t \quad \text{το} \quad D_2 = \mathbb{R}.$$

Άρα το πεδίο ορισμού D της \mathbf{F} είναι

$$D = D_1 \cap D_2 = [0, +\infty).$$



Σχήμα 4.1.1 - 1: Παράδειγμα 4.1.1 - 1: η καμπύλη με παραμετρική εξίσωση $\mathbf{F}(t) = \sqrt{t} \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}$ με πεδίο ορισμού $D = [0, +\infty)$, όταν $t \in [0, 2\pi]$.

Παράδειγμα 4.1.1 - 2

Όμοια έστω η διανυσματική συνάρτηση (Σχ. 4.1.1 - 2)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) &= \underbrace{\sin t}_{f_1(t)} \mathbf{i} + \underbrace{\cos t}_{f_2(t)} \mathbf{j} + \underbrace{\frac{1}{t}}_{f_3(t)} \mathbf{k} \\ &= f_1(t) \mathbf{i} + f_2(t) \mathbf{j} + f_3(t) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

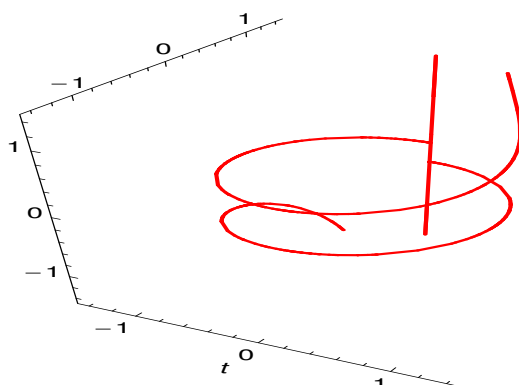
Τότε το πεδίο ορισμού των συνιστωσών

$$f_1(t) = \sin t, \quad f_2(t) = \cos t \quad \text{είναι το } D_1 = \mathbb{R},$$

ενώ της συνιστώσας

$$f_3(t) = \frac{1}{t} \quad \text{το } D_2 = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Άρα το πεδίο ορισμού D της \mathbf{F} είναι $D = D_1 \cap D_2 = \mathbb{R} - \{0\}$.



Σχήμα 4.1.1 - 2: Παράδειγμα 4.1.2 - 1: η καμπύλη με παραμετρική εξίσωση $\mathbf{F}(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \frac{1}{t} \mathbf{k}$ με πεδίο ορισμού $D = \mathbb{R} - \{0\}$, όταν $t \in [-2\pi, 2\pi]$. Η ευθεία αντιστοιχεί στην τιμή $t = 0$.

4.1.2 Οριακή τιμή

Η οριακή τιμή μιας διανυσματικής συνάρτησης υπολογίζεται από την οριακή τιμή των συνιστωσών συναρτήσεων ως εξής:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) \mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) \mathbf{j} \quad \text{αντίστοιχα} \quad (4.1.2 - 1)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) \mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) \mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t) \mathbf{k},$$

όταν $t_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$.

Επομένως ο υπολογισμός της οριακής τιμής ανάγεται στον υπολογισμό των οριακών τιμών καθεμιάς συνιστώσας χωριστά, οπότε εφαρμόζονται στην περίπτωση αυτή οι ήδη γνωστές στον αναγνώστη από το Μάθημα *Οριακή τιμή συνάρτησης - Μέθοδοι υπολογισμού*.

Παράδειγμα 4.1.2 - 1

Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F}(t) = (3 - 2t^2) \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} + \frac{\cos t - 1}{t} \mathbf{k}.$$

Τότε, αν $t_0 = 0$, σύμφωνα με την (4.1.2 - 1) έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{F}(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} (3 - 2t^2) \mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow 0} e^t \mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow 0} \overbrace{\frac{\cos t - 1}{t}}^{\text{de L'Hôpital}} \mathbf{k} \\ &= 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{1} \mathbf{k} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 0\mathbf{k} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}. \end{aligned}$$

4.1.3 Συνέχεια

Η συνέχεια μιας διανυσματικής συνάρτησης σε ένα σημείο $t_0 \in D$ ορίζεται από τη συνθήκη

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(t_0), \quad (4.1.3 - 1)$$

όταν ο υπολογισμός του $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t)$ γίνεται από την (4.1.2 - 1).

Όπως και στην παραπάνω περίπτωση υπολογισμού της οριακής τιμής, η συνέχεια ανάγεται στην εξέταση της συνέχειας καθεμιάς συνιστώσας χωριστά. Οι ήδη γνωστές στον αναγνώστη από το Μάθημα *Συνέχεια συνάρτησης - Ιδιότητες και Θεωρήματα* εφαρμόζονται ανάλογα και στην περίπτωση.

Παράδειγμα 4.1.3 - 1

Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F}(t) = \ln(9 - t^2) \mathbf{i} + \frac{\mathbf{j}}{2 - t} + \sqrt{1 + t} \mathbf{k}.$$

Προφανώς κάθε συνιστώσα είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, οπότε η $\mathbf{F}(t)$ θα είναι συνεχής στο κοινό πεδίο ορισμού των, έστω D , όπου προφανώς θα ισχύει η (4.1.3 - 1). Τότε, επειδή η συνιστώσα

$$f_1(t) = \ln(9 - t^2)$$

έχει πεδίο ορισμού το $D_1 = (-3, 3)$, η

$$f_2(t) = \frac{1}{2 - t} \quad \text{το} \quad D_2 = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

και η

$$f_3(t) = \sqrt{1 + t} \quad \text{το} \quad D_3 = [-1, +\infty),$$

πρέπει το πεδίο στο οποίο η διανυσματική συνάρτηση \mathbf{F} είναι συνεχής να είναι το

$$D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = [-1, 2) \cup (2, 3).$$

4.2 Παραμετρική παράσταση καμπυλών

4.2.1 Ορισμοί

Ο γνωστός μέχρι τώρα προσδιορισμός της αναλυτικής εξίσωσης μιας καμπύλης, έστω C , στον χώρο \mathbb{R}^2 , αντίστοιχα \mathbb{R}^3 με καρτεσιανές συντεταγμένες, δηλαδή σε σύστημα συντεταγμένων Oxy του χώρου των 2-διαστάσεων, αντίστοιχα $Oxyz$ του χώρου των 3-διαστάσεων, πολλές φορές δημιουργεί δυσκολίες στον υπολογισμό διαφόρων φυσικών μεγεθών. Για να αντιμετωπιστούν οι δυσκολίες αυτές αναζητείται ένας άλλος τρόπος περιγραφής της εξίσωσης της παραπάνω καμπύλης C .

Υπενθυμίζεται στο σημείο ότι:

Ορισμός 4.2.1 - 1. Ένα υλικό σημείο κινούμενο στον χώρο και έχοντας έναν βαθμό ελευθερίας διαγράφει γενικά μία καμπύλη γραμμής, ενώ όταν έχει δύο βαθμούς ελευθερίας μια επιφάνεια.

Έστω τώρα ότι ζητείται ο προσδιορισμός της εξίσωσης μιας καμπύλης C του \mathbb{R}^3 . Αν $Oxyz$ είναι ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων και $M_0(x_0, y_0, z_0)$ τυχόν σημείο της καμπύλης C , τότε στο σημείο αυτό αντιστοιχεί ακριβώς ένα **διάνυσμα θέσης**, έστω \mathbf{r}_0 , όπου

$$\mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k} \quad (4.2.1 - 1)$$

και αντίστροφα στο \mathbf{r}_0 αντιστοιχεί το σημείο $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Όμοια σε ένα άλλο σημείο $M_1(x_1, y_1, z_1)$ της C θα αντιστοιχεί το διάνυσμα θέσης

$$\mathbf{r}_1 = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k} \quad (4.2.1 - 2)$$

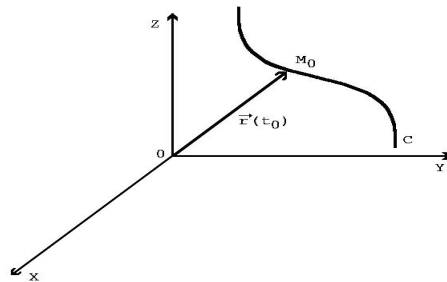
και γενικά στο τυχόν σημείο $M(x, y, z)$, το

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}. \quad (4.2.1 - 3)$$

Έχοντας υπόψη και τον Ορισμό 4.1.1 - 2 τα διανύσματα \mathbf{r}_0 στην (4.2.1 - 1), \mathbf{r}_1 στην (4.2.1 - 2) και γενικά \mathbf{r} στην (4.2.1 - 3) είναι δυνατόν να θεωρηθούν ως οι τιμές μιας κατάλληλης **διανυσματικής συνάρτησης**, έστω (Σχ. 4.2.1 - 1)

$$\mathbf{r}(t), \quad \text{όταν } t \in [\alpha, \beta],$$

με την έννοια ότι: αν



Σχήμα 4.2.1 - 1: παραμετρική παράσταση καμπυλών.

- $t = t_0$, τότε η $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$ θα ισούται με την (4.2.1 - 1),
- $t = t_1$, η $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_1)$ με την (4.2.1 - 2), και γενικά
- $t = t$, η $\mathbf{r}(t)$ με την (4.2.1 - 3).

Η $\mathbf{r}(t)$ θα λέγεται στο εξής **διανυσματική συνάρτηση θέσης**.

Η αναλυτική έκφραση της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{r}(t)$ είναι

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad \text{όταν } t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}. \quad (4.2.1 - 4)$$

Η (4.2.1 - 4) θα λέγεται τότε ότι ορίζει την **παραμετρική εξίσωση** της καμπύλης C με παράμετρο t .

Με όμοιον τρόπο ορίζεται η παραμετρική εξίσωση μιας επίπεδης καμπύλης C ως εξής:

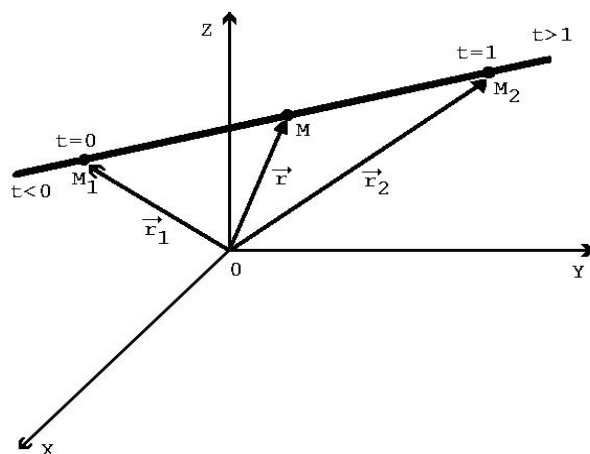
$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad \text{όταν } t \in [\alpha, \beta]. \quad (4.2.1 - 5)$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις των καμπυλών έχουν μεγάλη εφαρμογή στη Φυσική, κυρίως όταν η παράμετρος t συμβολίζει τον χρόνο.

Δίνονται στη συνέχεια ορισμένες παραμετρικές παραστάσεις χρήσιμων καμπυλών.

4.2.2 Ευθεία

Αν M είναι ένα τυχόν σημείο της ευθείας (Σχ. 4.2.2 - 1) που διέρχεται από τα σημεία $M_1(x_1, y_1, z_1)$ και $M_2(x_2, y_2, z_2)$, τότε, επειδή $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$,



Σχήμα 4.2.2 - 1: Παραμετρική εξίσωση ευθείας.

αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση αυτή είναι⁴

$$\mathbf{r}(t) = t \mathbf{r}_2 + (1 - t) \mathbf{r}_1, \quad \text{όταν } t \in \mathbb{R}. \quad (4.2.2 - 1)$$

Η (4.2.2 - 1) ορίζει την **παραμετρική εξίσωση της ευθείας** που διέρχεται από τα σημεία M_1 και M_2 .

Χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές εκφράσεις

$$\mathbf{r}_1 = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}, \quad \text{και}$$

$$\mathbf{r}_2 = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}$$

η (4.2.2 - 1) τελικά γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) = & [tx_2 + (1 - t)x_1] \mathbf{i} + [ty_2 + (1 - t)y_1] \mathbf{j} \\ & + [tz_2 + (1 - t)z_1] \mathbf{k}, \quad \text{όταν } t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.2.2 - 2)$$

⁴Βλέπε Μάθημα *Αναλυτική Γεωμετρία* και βιβλίο Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 1.

Αν $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ από την (4.2.2-2 εξισώνοντας τις αντίστοιχες συντεταγμένες των \mathbf{i} , \mathbf{j} και \mathbf{k} προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} x(t) &= tx_2 + (1-t)x_1 \\ y(t) &= ty_2 + (1-t)y_1 \\ z(t) &= tz_2 + (1-t)z_1. \end{aligned} \quad (4.2.2 - 3)$$

Σημείωση 4.2.2 - 1

Η (4.2.2 - 2), ειδικά όταν $t \in [0, 1]$, ορίζει την παραμετρική εξίσωση των σημείων του **ευθύγραμμου τμήματος** M_1M_2 .

Παράδειγμα 4.2.2 - 1

Να υπολογιστεί η παραμετρική εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2 , όταν $M_1(1, 2, 0)$ και $M_2(2, 4, 3)$ (Σχ.4.2.2 - 1).

Λύση. Έστω $M_1(x_1, y_1, z_1) = M_1(1, 2, 0)$ και $M_2(x_2, y_2, z_2) = M_2(2, 4, 3)$. Τότε προφανώς είναι:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, & y_1 &= 2, & z_1 &= 0. \\ x_2 &= 2, & y_2 &= 4, & z_2 &= 3, \end{aligned}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (4.2.2 - 2) τελικά σύμφωνα και με τη Σημείωση 4.2.2 - 1 προκύπτει ότι η παραμετρική εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2 είναι

$$\mathbf{r}(t) = (1+t)\mathbf{i} + 2(1+t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}, \quad \text{όταν } t \in [0, 1].$$

Για να γίνει κατανοητή η δυσκολία υπολογισμού της αντίστοιχης εξίσωσης του M_1M_2 σε καρτεσιανές συντεταγμένες, ενδεικτικά γράφεται ότι αρχικά πρέπει να υπολογιστεί η εξίσωση της ευθείας στον χώρο, που δίνεται από τις εξισώσεις:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

και στη συνέχεια να περιοριστούν τα x, y, z , έτσι ώστε οι εξισώσεις να περιγράφουν το M_1M_2 . ■

4.2.3 Περιφέρεια κύκλου

Έστω αρχικά ότι το κέντρο του κύκλου συμπίπτει με την αρχή των αξόνων. Τότε η εξίσωση των σημείων της περιφέρειας είναι

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Θέτοντας

$$\begin{aligned} x &= R \cos t, & \text{και} \\ y &= R \sin t, \end{aligned}$$

έχουμε την παρακάτω **παραμετρική εξίσωση**:

$$\mathbf{r}(t) = R \cos t \mathbf{i} + R \sin t \mathbf{j} \quad \text{με } t \in [0, 2\pi). \quad (4.2.3 - 1)$$

Αν το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο (α, β) , τότε η εξίσωση των σημείων της περιφέρειας είναι

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

οπότε στην περίπτωση αυτή έχουμε ως παραμετρική εξίσωση την

$$\mathbf{r}(t) = (\alpha + R \cos t) \mathbf{i} + (\beta + R \sin t) \mathbf{j} \quad \text{με } t \in [0, 2\pi). \quad (4.2.3 - 2)$$

Παράδειγμα 4.2.3 - 1

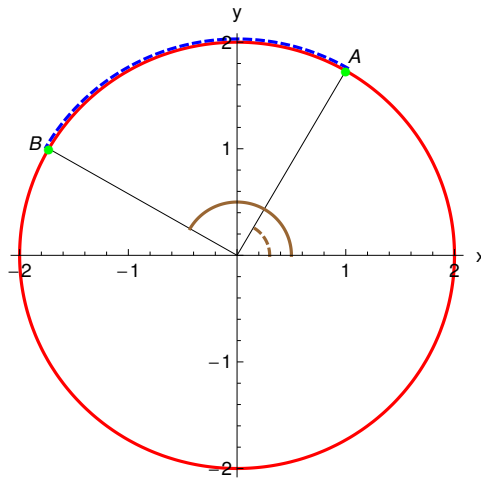
Έστω ότι ζητείται η περιγραφή του τόξου \widehat{AB} της περιφέρειας $x^2 + y^2 = 4$, όταν $A(1, \sqrt{3})$ και $B(-\sqrt{3}, 1)$ (Σχ. 4.2.3 - 1).

Προφανώς $R = 2$, οπότε σύμφωνα με την (4.2.3-1) η παραμετρική εξίσωση της περιφέρειας θα είναι

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} \quad \text{με } t \in [0, 2\pi).$$

Ο προσδιορισμός των γωνιών t_A , που ορίζει το σημείο A , γίνεται ως εξής: επειδή το A είναι σημείο της περιφέρειας, πρέπει οι συντεταγμένες του $(1, \sqrt{3})$ να επαληθεύουν την παραπάνω παραμετρική εξίσωση, δηλαδή

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t_A) &= 2 \cos t_A \mathbf{i} + 2 \sin t_A \mathbf{j} = i + \sqrt{3} j, & \text{οπότε} \\ \cos t_A &= \frac{1}{2} & \text{και } \sin t_A = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \text{οπότε } t_A = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$



Σχήμα 4.2.3 - 1: Παράδειγμα 4.2.3 - 1: η παραμετρική εξίσωση του τόξου \widehat{AB} της περιφέρειας $x^2 + y^2 = 4$, όταν $t_1 = \pi/3$ (διακεκομμένη καφέ καμπύλη) και $t_2 = 5\pi/6$ (καφέ καμπύλη).

Όμοια υπολογίζεται ότι $t_B = 5\pi/6$.

Επομένως η παραμετρική εξίσωση του κυκλικού τόξου \widehat{AB} είναι

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} \quad \text{με} \quad t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6} \right].$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι προφανώς απλούστερη εκείνης που χρησιμοποιεί την αναλυτική εξίσωση $x^2 + y^2 = 4$, επειδή στην περίπτωση αυτή η έκφραση του y συναρτήσει του x είναι $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$ με ότι στη συνέχεια δυσκολία ήθελε προκύψει από τη ρίζα στους περαιτέρω υπολογισμούς.

4.2.4 Έλλειψη

Όμοια για την έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

έχουμε ως **παραμετρική εξίσωση** την

$$\mathbf{r}(t) = \alpha \cos t \mathbf{i} + \beta \sin t \mathbf{j} \quad \text{με} \quad t \in [0, 2\pi). \quad (4.2.4 - 1)$$

4.2.5 Παραβολή

Αν η εξίσωση της παραβολής είναι

$$y = ax^2,$$

τότε μία παραμετρική εξίσωσή της προκύπτει θέτοντας $x = t$, οπότε $y = at^2$ και κατά συνέπεια

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + at^2\mathbf{j} \quad \text{με } t \in \mathbb{R}. \quad (4.2.5 - 1)$$

Σημειώσεις 4.2.5 - 1

- i) Αν είναι γνωστή η εξίσωση της καμπύλης σε καρτεσιανές συντεταγμένες, τότε οι συντεταγμένες της παραμετρικής εξίσωσης που θα προσδιοριστεί, πρέπει να επαληθεύουν την αρχική εξίσωση της καμπύλης.
- ii) Από την παραμετρική εξίσωση της καμπύλης είναι δυνατόν να προσδιοριστεί η αντίστοιχη εξίσωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες, θέτοντας

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{και} \quad z = z(t)$$

και απαλείφοντας την παράμετρο t , εφόσον αυτό είναι δυνατόν.

Παράδειγμα 4.2.5 - 1

Έστω η καμπύλη που δίνεται με παραμετρική εξίσωση ως εξής:

$$\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\mathbf{i} + (2 + \sin t)\mathbf{j} \quad \text{με } t \in [0, \pi].$$

Θέτοντας

$$x = 1 + \cos t, \quad y = 2 + \sin t,$$

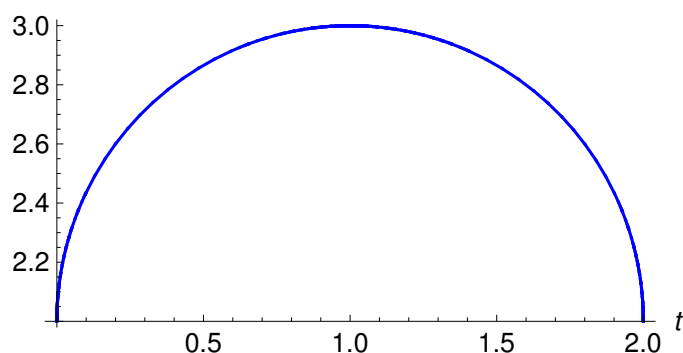
οπότε

$$x - 1 = \cos t, \quad y - 2 = \sin t$$

και απαλείφοντας την παράμετρο t , προκύπτει ότι η εξίσωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1.$$

Επειδή $t \in [0, \pi]$ πρόκειται για το άνω μέρος της περιφέρειας, που έχει κέντρο το σημείο $(1, 2)$ και ακτίνα 1 (Σχ. 4.2.5 - 1).



Σχήμα 4.2.5 - 1: Παράδειγμα 4.2.3 - 1: η καμπύλη με παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\mathbf{i} + (2 + \sin t)\mathbf{j}$, όταν $t \in [0, \pi]$.

4.3 Παράγωγος και ολοκλήρωση

4.3.1 Ορισμός παραγώγου

Ο ορισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης του Μαθήματος *Παράγωγος Συνάρτησης* επεκτείνεται και στην περίπτωση των διανυσματικών συναρτήσεων ως εξής:

Ορισμός 4.3.1 - 1 (κλίσης). Έστω η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F} \mid (a, b)$ και σημείο $t_0 \in (a, b)$. Τότε για κάθε $t \in (a, b) - \{t_0\}$ με τον τύπο

$$\mathbf{K}_{t_0}(x) = \frac{\mathbf{F}(t) - \mathbf{F}(t_0)}{t - t_0} \quad (4.3.1 - 1)$$

ορίζεται μία διανυσματική συνάρτηση, που λέγεται πηλίκο διαφορών ή κλίση της \mathbf{F} στο σημείο t_0 .

Αν $t = t_0 + \Delta t$, οπότε

$$\Delta t = t - t_0 \quad \text{για κάθε } t \in (a, b) - \{t_0\}, \quad (4.3.1 - 2)$$

τότε ο τύπος (4.3.1 - 1) γράφεται

$$\mathbf{K}_{t_0} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}. \quad (4.3.1 - 3)$$

Ορισμός 4.3.1 - 2 (παραγώγου). Έστω η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F} | (a, b)$ και σημείο $t_0 \in (a, b)$. Τότε θα λέγεται ότι η \mathbf{F} παραγωγίζεται στο σημείο $t_0 \in (a, b)$ τότε και μόνον, όταν η οριακή τιμή

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{K}_{t_0}(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{F}(t) - \mathbf{F}(t_0)}{t - t_0}. \quad (4.3.1 - 4)$$

υπάρχει.

Η (4.3.1 - 4) θα λέγεται τότε η **1ης τάξης** διανυσματική παράγωγος της \mathbf{F} στο t_0 και θα συμβολίζεται με $\mathbf{F}'(t_0)$.

Έχοντας υπόψη την (4.3.1 - 2), η (4.3.1 - 4) ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{F}(t) - \mathbf{F}(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{F}(t_0)}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (4.3.1 - 5)$$

Ορισμός 4.3.1 - 3. Έστω η συνάρτηση $\mathbf{F} | (a, b)$ Τότε θα λέγεται ότι η \mathbf{F} παραγωγίζεται στο (a, b) τότε και μόνον, όταν υπάρχει η παράγωγος $\mathbf{F}'(t_0)$ για κάθε $t_0 \in (a, b)$.

Στην περίπτωση αυτή συμβολικά γράφεται

$$\mathbf{F}'(t) = \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{F}) = \frac{d\mathbf{F}(t)}{dt} D^1 \mathbf{F}(t) = D\mathbf{F}(t), \quad (4.3.1 - 6)$$

όπου όμοια το σύμβολο (τελεστής) $D = D^1 = \frac{d}{dt}$ συμβολίζει την 1ης τάξης παράγωγο της \mathbf{F} με μεταβλητή t .

Παρατηρήσεις 4.3.1 - 1

Από τους Ορισμούς 4.3.1 - 2 και 4.3.1 - 3 προκύπτουν τα εξής:

- i) η $\mathbf{F}'(t_0)$, εφόσον υπάρχει, είναι **διάνυσμα**, ενώ
- ii) η $\mathbf{F}'(t)$ είναι **διανυσματική συνάρτηση**.

Ορισμός 4.3.1 - 4. Έστω ότι της συνάρτησης $\mathbf{F} | (a, b)$ υπάρχει η $\mathbf{F}'(t)$ για κάθε $t \in (a, b)$. Τότε θα λέγεται ότι υπάρχει η **2ης τάξης** παράγωγος της \mathbf{F} στο (a, b) τότε και μόνον, όταν υπάρχει η παράγωγος της $\mathbf{F}'(t)$ για κάθε $t \in (a, b)$.

Στην περίπτωση αυτή συμβολικά γράφεται

$$\mathbf{F}''(t) = \mathbf{F}^{(2)}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{F}(t)}{dt} \right) = \frac{d^2\mathbf{F}(t)}{dt^2} = D^2\mathbf{F}(t), \quad (4.3.1 - 7)$$

όπου όμοια το $D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$ συμβολίζει τον τελεστή της 2ης τάξης παραγώγου της \mathbf{F} με μεταβλητή t .

Ανάλογα ορίζονται οι παράγωγοι:

3ης τάξης:

$$\mathbf{F}'''(t) = \mathbf{F}^{(3)}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2\mathbf{F}(t)}{dt^2} \right) = \frac{d^3\mathbf{F}(t)}{dt^3} = D^3\mathbf{F}(t), \quad (4.3.1 - 8)$$

όπου το $D^3 = \frac{d^3}{dt^3}$ συμβολίζει τον τελεστή της 3ης τάξης παραγώγου, και γενικά η

ν - τάξης:

$$\mathbf{F}^{(\nu)}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{\nu-1}\mathbf{F}(t)}{dt^{\nu-1}} \right) = \frac{d^\nu\mathbf{F}(t)}{dt^\nu} = D^\nu\mathbf{F}(t), \quad (4.3.1 - 9)$$

όπου όμοια ο τελεστής $D^\nu = \frac{d^\nu}{dt^\nu}$ συμβολίζει την ν -τάξης παράγωγο μιας συνάρτησης με μεταβλητή t .

Ειδικά ορίζεται ότι

$$\mathbf{F}^{(0)}(t) = \mathbf{F}(t). \quad (4.3.1 - 10)$$

Αν τώρα Oxy , αντίστοιχα $Oxyz$ είναι ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων, τότε για κάθε $t \in (a, b)$ σύμφωνα με την (4.1.1 - 6) είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) &= f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j}, \quad \text{αντίστοιχα} \\ \mathbf{F}(t) &= f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (4.3.1 - 11)$$

Αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 4.3.1 - 1. Η διανυσματική συνάρτηση \mathbf{F} θα έχει 1ης τάξης παράγωγο στο (a, b) τότε και μόνο, όταν υπάρχουν στο (a, b) οι 1ης τάξης παράγωγοι των συνιστωσών συναρτήσεων $f_1(t)$, $f_2(t)$ και $f_3(t)$.

Στην περίπτωση αυτή ισχύει

$$\mathbf{F}'(t) = f_1'(t)\mathbf{i} + f_2'(t)\mathbf{j} = \langle f_1'(t), f_2'(t) \rangle,$$

αντίστοιχα

$$\begin{aligned}\mathbf{F}'(t) &= f_1'(t)\mathbf{i} + f_2'(t)\mathbf{j} + f_3'(t)\mathbf{k} \\ &= \langle f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t) \rangle\end{aligned}\quad (4.3.1 - 12)$$

για κάθε $t \in (a, b)$.

4.3.2 Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου

Είναι ήδη γνωστό από το Μάθημα *Παράγωγος Συνάρτησης* ότι για τη γεωμετρική σημασία της παραγώγου μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής σε ένα σημείο, έστω x_0 , του πεδίου ορισμού της ότι ισχύει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 4.3.2 - 1. Η παράγωγος μιας συνάρτησης $y = f(x)|_{(a,b)}$ στο σημείο $x_0 \in (a,b)$ ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας ή διαφορετικά με τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης του διαγράμματος της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση της **εφαπτόμενης ευθείας** δίνεται από τον τύπο

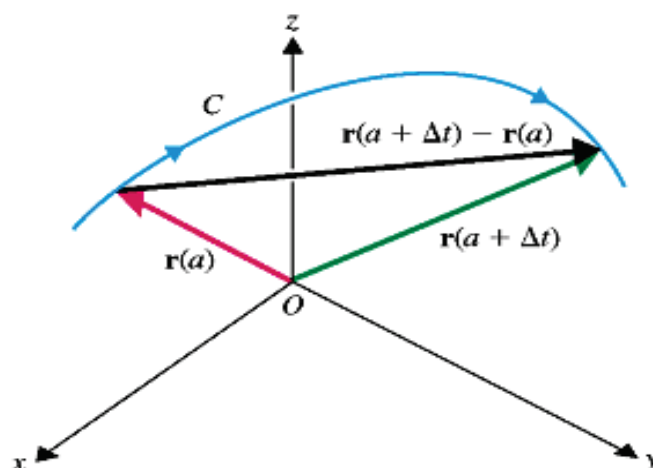
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad (4.3.2 - 1)$$

ενώ της **κάθετης ευθείας** του διαγράμματος της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, εφόσον $(x_0, f(x_0)) \neq 0$, από τον

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (4.3.2 - 2)$$

Για την αντίστοιχη γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου μιας διανυσματικής συνάρτησης θεωρούμε μια καμπύλη, έστω C , που ορίζεται παραμετρικά από τη διανυσματική συνάρτηση θέσης $\mathbf{r}(t)$. Τότε σύμφωνα με την (4.2.1 - 4), αντίστοιχα (4.2.1 - 5) της Παραγράφου 4.2.1 η συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$ ισούται με

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad \text{αντίστοιχα} \\ \mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j},\end{aligned}$$



Σχήμα 4.3.2 - 1: Γεωμετρική ερμηνεία των διανυσμάτων της σχέσης (4.3.2 - 3).

όταν $t \in [t_1, t_2]$.

Αν $t = a$, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.3.1 - 2 και τον τύπο (4.3.1 - 5) είναι (Σχ. 4.3.2 - 1)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(a + \Delta t) - \mathbf{r}(a)}{\Delta t}. \quad (4.3.2 - 3)$$

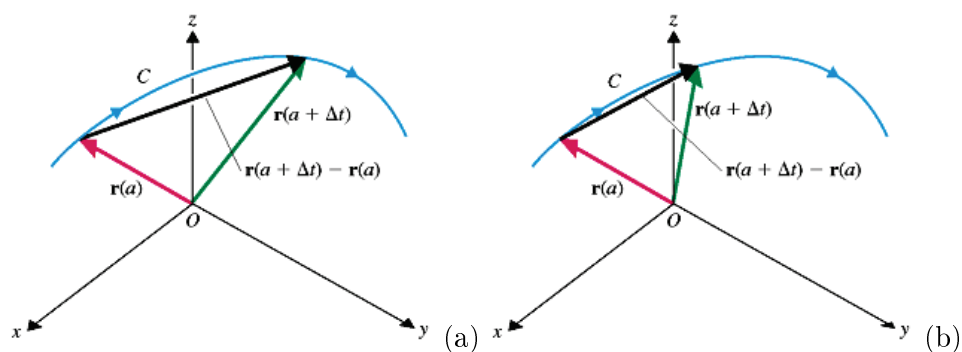
⁵ Έστω $\Delta t > 0$. Τότε, όταν το $\Delta t \rightarrow 0$, το διάνυσμα $\mathbf{r}(a + \Delta t) - \mathbf{r}(a)$ στον αριθμητή του κλάσματος (4.3.2 - 3), που αρχικά ενώνει δύο διαφορετικά σημεία της C (Σχ. 4.3.2 - 2a-b), τελικά στην οριακή τιμή τείνει να έχει ένα κοινό σημείο με την C στο σημείο $\mathbf{r}(a)$, διαφορετικά να γίνει το **εφαπτόμενο διάνυσμα** της C στο σημείο αυτό (Σχ. 4.3.2 - 3).

Επομένως έχει αποδειχθεί ότι:

Πρόταση 4.3.2 - 2. Έστω μια καμπύλη C που ορίζεται παραμετρικά από τη διανυσματική συνάρτηση θέσης $\mathbf{r}(t)$, όταν $t \in D$ με $D = [t_1, t_2]$. Αν $a \in D$, η $\mathbf{r}'(a)$ ορίζει τη **διεύθυνση της εφαπτόμενης** της C στο σημείο $\mathbf{r}(a)$.

Τότε η παραμετρική **εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας** δίνεται από τον

⁵ Ανάλογα συμπεράσματα εξάγονται, όταν $\Delta t < 0$.



Σχήμα 4.3.2 - 2: Διαδοχικές θέσεις του διανύσματος $\mathbf{r}(a + \Delta t) - \mathbf{r}(a)$, όταν το $\Delta t \rightarrow 0$.

τύπο

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a) + t \mathbf{r}'(a), \quad \text{όταν } t \in D. \quad (4.3.2 - 4)$$

Άμεση συνέπεια της παραπάνω πρότασης είναι τότε ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός 4.3.2 - 1. Έστω μια καμπύλη C που περιγράφεται παραμετρικά από τη διανυσματική συνάρτηση θέσης $\mathbf{r}(t)$, όταν $t \in D$ με $D = [t_1, t_2]$. Τότε το **μοναδιαίο εφαπτόμενο** διάνυσμα συμβολίζεται με $\mathbf{T}(t)$ και ορίζεται από τη σχέση

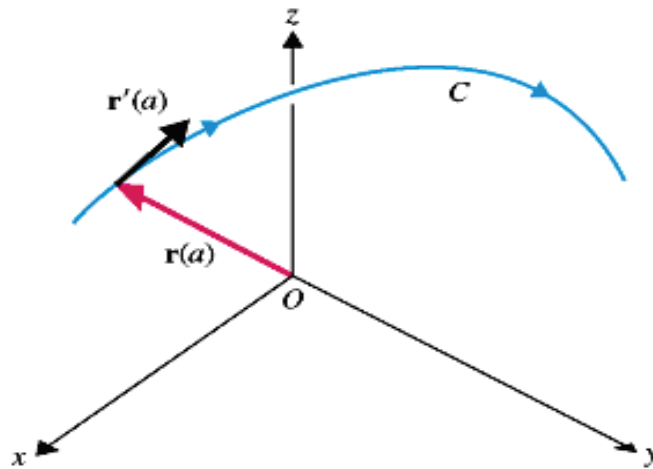
$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \quad \text{για κάθε } t \in D \quad \text{με } \mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}. \quad (4.3.2 - 5)$$

Παράδειγμα 4.3.2 - 1

Έστω η καμπύλη C με παραμετρική εξίσωση

$$\mathbf{r}(t) = -\cos 2t \mathbf{i} + \sin 2t \mathbf{j}.$$

Να γίνει γραφική παράσταση της C και στη συνέχεια να υπολογιστεί το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο της $\mathbf{r}(\pi/4)$ και η παραμετρική εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας.



Σχήμα 4.3.2 - 3: Γεωμετρική ερμηνεία του διανύσματος $\mathbf{r}'(a)$.

Λύση. Σύμφωνα και με την εξίσωση (4.2.3 – 1) της Παραγράφου 4.2.3 η παραπάνω εξίσωση παριστάνει περιφέρεια κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $R = 1$ (Σχ. 4.3.2 - 4).

Επειδή ζητείται το εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο της περιφέρειας που έχει διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}(\pi/4)$, οπότε $t = \pi/4$, διαδοχικά έχουμε

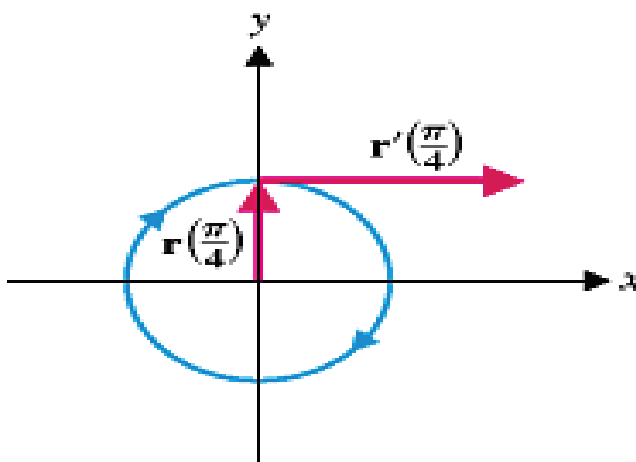
$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= -\cos 2t \mathbf{i} + \sin 2t \mathbf{j}, \quad \text{οπότε} \\ \mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\cos \frac{\pi}{2} \mathbf{i} + \sin \frac{\pi}{2} \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle,\end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= 2 \sin 2t \mathbf{i} + 2 \cos 2t \mathbf{j}, \quad \text{οπότε} \\ \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 2 \sin \frac{\pi}{2} \mathbf{i} + \cos \frac{\pi}{2} \mathbf{j} = \langle 2, 0 \rangle.\end{aligned}$$

Τότε σύμφωνα με την (4.3.2 – 5) το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο $\mathbf{r}(\pi/4)$ είναι

$$\mathbf{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{|\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right)|} = \frac{2\mathbf{i} + 0\mathbf{j}}{\sqrt{2^2 + 0}} = \mathbf{i}.$$



Σχήμα 4.3.2 - 4: Παράδειγμα 4.3.2 - 1.

Σύμφωνα με την (4.3.2 - 4) η παραμετρική εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) + t \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \langle 0, 1 \rangle + t \langle 2, 0 \rangle \\ &= \langle 2t, 1 \rangle = 2t \mathbf{i} + \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για το εσωτερικό γινόμενο των $\mathbf{r}(\pi/4)$ και $\mathbf{r}'(\pi/4)$ ισχύει:

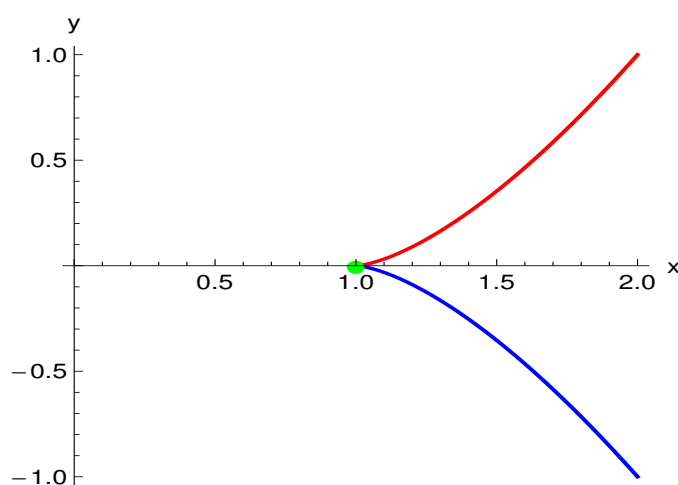
$$\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \langle 0, 1 \rangle \cdot \langle 2, 0 \rangle = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 0,$$

δηλαδή τα διανύσματα $\mathbf{r}(\pi/4)$ και $\mathbf{r}'(\pi/4)$ είναι **κάθετα** μεταξύ τους. ■

Δίνεται στη συνέχεια ο παρακάτω ορισμός, που ορίζει το είδος μιας καμπύλης:

Ορισμός 4.3.2 - 2. Έστω μια καμπύλη C που περιγράφεται παραμετρικά από τη διανυσματική συνάρτηση θέσης $\mathbf{r}(t)$, όταν $t \in D$ με $D = [t_1, t_2]$. Τότε η C θα είναι **λεία** (smooth), όταν

- η $\mathbf{r}'(t)$ είναι συνεχής,
- $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, εκτός ίσως από τα άκρα σημεία του D .



Σχήμα 4.3.2 - 5: Παράδειγμα 4.3.2 - 2: η C , όταν $[-1, 0)$ μπλε και $(0, 1]$ κόκκινη καμπύλη. Στο σημείο $t = 0$, δηλαδή όταν $(x, y) = (1, 0)$, δημιουργείται μια γωνία.

Οι καμπύλες της Παραγράφου 4.2 είναι λείες. Στο σημείο που μια καμπύλη δεν είναι λεία, σχηματίζεται μια γωνία ή διαφορετικά μια **αιχμή** (λέγεται επίσης και οξύ άκρο) (cusp).

Παράδειγμα 4.3.2 - 2

Έστω η καμπύλη C με διανυσματική συνάρτηση θέσης (Σχ. 4.3.2 - 5)

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t^2, t^3 \rangle = (1 + t^2) \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j}.$$

Τότε $\mathbf{r}'(t) = \langle 2t, 3t^2 \rangle$, που προφανώς είναι συνεχής για κάθε $t \in \mathbb{R}$, επειδή οι συνιστώσες συναρτήσεις $2t$ και $3t^2$ είναι συνεχείς. Επειδή όμως $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$, όταν $t = 0$, η $\mathbf{r}(t)$ είναι λεία για κάθε $t \in \mathbb{R} - \{0\}$.

4.3.3 Κανόνες παραγώγισης

Έστω οι διανυσματικές συναρτήσεις \mathbf{F} , \mathbf{G} και \mathbf{W} με κοινό πεδίο ορισμού $D = (a, b)$ και παραγωγίσιμες στο D . Τότε, αν φ είναι μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού όμοια το D , αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω κανόνες παραγώγισης:

- i) Αν $\mathbf{F} = \mathbf{c}$ σταθερά, τότε $\mathbf{F}' = \mathbf{0}$
- ii) $(\mathbf{F} + \mathbf{G})' = \mathbf{F}' + \mathbf{G}'$
- iii) $(k\mathbf{F})' = k\mathbf{F}'$ όταν k σταθερά
- iv) $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})' = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{G} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}'$
- v) $(\mathbf{F} \times \mathbf{G})' = \mathbf{F}' \times \mathbf{G} + \mathbf{F} \times \mathbf{G}'$
- vi) $(\varphi\mathbf{F})' = \varphi'\mathbf{F} + \varphi\mathbf{F}'$ όταν φ βαθμωτή συνάρτηση
- vii) $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \times \mathbf{W})' = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{G} \times \mathbf{W} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}' \times \mathbf{W} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \times \mathbf{W}'$
- viii) $[\mathbf{F} \times (\mathbf{G} \times \mathbf{W})]' = \mathbf{F}' \times (\mathbf{G} \times \mathbf{W}) + \mathbf{F} \times (\mathbf{G}' \times \mathbf{W}) + \mathbf{F} \times (\mathbf{G} \times \mathbf{W}')$.

Οι ιδιότητες (ii)-(iv) γενικεύονται για n -το πλήθος συναρτήσεων.

Παράδειγμα 4.3.3 - 1

Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin^2 t \mathbf{j} + t \mathbf{k}.$$

Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 4.3.1 - 1 και τους γνωστούς τύπους παραγωγίσιμης σύνθετων συναρτήσεων είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'(t) &= (\cos t)' \mathbf{i} + (\sin^2 t)' \mathbf{j} + t' \mathbf{k} = -\sin t \mathbf{i} + \overbrace{2 \sin t \cos t}^{\sin 2t} \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ &= -\sin t \mathbf{i} + \sin 2t \mathbf{j} + \mathbf{k}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}''(t) = -(\sin t)' \mathbf{i} + (\sin 2t)' \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} = -\cos t \mathbf{i} + 2 \cos 2t \mathbf{j}, \quad \text{κ.λπ.}$$

Παράδειγμα 4.3.3 - 2

Όμοια, έστω οι διανυσματικές συναρτήσεις

$$\mathbf{F}(t) = t \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} \quad \text{και} \quad \mathbf{G}(t) = t^3 \mathbf{i} + t \mathbf{j}.$$

Τότε σύμφωνα με τον κανόνα παραγωγίσιμης (iv) είναι

$$\begin{aligned} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})' &= \mathbf{F}' \cdot \mathbf{G} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}' \\ &= (\mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j}) \cdot (t^3 \mathbf{i} + t \mathbf{j}) + (t \mathbf{i} + 2 \mathbf{j}) \cdot (3t^2 \mathbf{i} + \mathbf{j}) \\ &= (1 \cdot t^3 + 0 \cdot t) + (t \cdot 3t^2 + 2 \cdot 1) = 4t^3 + 2. \end{aligned}$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι 1ης και οι 2ης τάξης παράγωγοι των παρακάτω διανυσματικών συναρτήσεων $\mathbf{F}(t)$:

$$i) \quad \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j}$$

$$iv) \quad e^{-t} (\cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j})$$

$$ii) \quad t \mathbf{i} - t^2 \mathbf{j}$$

$$v) \quad \ln(1+t) \mathbf{i} + \sin^2 t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

$$iii) \quad e^{-3t} \mathbf{i} - \cos 2t \mathbf{j}$$

$$vi) \quad \tan^{-1} t \mathbf{i} + e^{-t^2} \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}.$$

2. Δείξτε ότι η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{b}e^{\lambda t} + \mathbf{a}e^{-\lambda t},$$

όταν \mathbf{a}, \mathbf{b} σταθερά διανύσματα, επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$\mathbf{F}''(t) - \lambda^2 \mathbf{F}(t) = \mathbf{0}.$$

3. Αν

$$\mathbf{F}(t) = t \mathbf{i} + \cos 2t \mathbf{j} + \sin 2t \mathbf{k} \quad \text{και} \quad \mathbf{G}(t) = t \mathbf{i} - \sin 2t \mathbf{j} + \cos 2t \mathbf{k},$$

να υπολογιστούν οι παράγωγοι

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})', \quad (\mathbf{F} \times \mathbf{G})'' \quad \text{και} \quad (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F})'.$$

4. Έστω η καμπύλη C με διανυσματική συνάρτηση θέσης $\mathbf{r}(t) = \langle t, e^{t^2}, \sin 2t \rangle$. Να υπολογιστεί η παράγωγος $\mathbf{r}'(t)$, το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα και η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο της $r(0)$.

Απαντήσεις

$$(i) \quad \mathbf{F}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j}, \quad \mathbf{F}''(t) = -\cos t \mathbf{i} - 2 \sin t \mathbf{j},$$

$$(ii) \quad \mathbf{F}'(t) = \mathbf{i} - 2t \mathbf{j}, \quad \mathbf{F}''(t) = -2 \mathbf{j},$$

$$(iii) \quad \mathbf{F}'(t) = -3e^{-3t} \mathbf{i} + 2 \sin 2t \mathbf{j}, \quad \mathbf{F}''(t) = 9e^{-3t} \mathbf{i} + 4 \cos 2t \mathbf{j}$$

$$(iv) \quad \mathbf{F}'(t) = -e^{-t} (\cos t + \sin t) \mathbf{i} + e^{-t} (\cos t - \sin t) \mathbf{j}, \quad \mathbf{F}''(t) = 2e^{-t} \sin t \mathbf{i} - 2e^{-t} \cos t \mathbf{j}$$

$$(v) \quad \mathbf{F}'(t) = \frac{1}{1+t} \mathbf{i} + \sin 2t \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{F}''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2} \mathbf{i} + 2 \cos 2t \mathbf{j}$$

$$(vi) \quad \mathbf{F}'(t) = \frac{1}{1+t^2} \mathbf{i} - 2te^{-t^2} \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}, \quad \mathbf{F}''(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} \mathbf{i} + 2(2t^2 - 1)e^{-t^2} \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}.$$

$$2. \quad \mathbf{F}'(t) = \lambda b e^{\lambda t} \mathbf{i} - \lambda a e^{-\lambda t} \mathbf{j}, \quad \mathbf{F}''(t) = \lambda^2 b e^{\lambda t} \mathbf{i} + \lambda^2 a e^{-\lambda t} \mathbf{j},$$

$$3. \quad (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})' = 2t,$$

$$\mathbf{F} \times \mathbf{G} = \mathbf{i} + t(\sin 2t - \cos 2t) \mathbf{j} - t(\sin 2t + \cos 2t) \mathbf{k},$$

$$(\mathbf{F} \times \mathbf{G})'' = 4[(t+1)\cos 2t - (t-1)\sin 2t] \mathbf{j} + 4[(t-1)\cos 2t + (t+1)\sin 2t] \mathbf{k},$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F})' = 2t.$$

$$4. \mathbf{r}'(t) = \left\langle 1, 2te^{t^2}, 2\cos 2t \right\rangle, \quad \mathbf{T}(0) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle, \text{ εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας}$$

$$\mathbf{r}(t) = \langle t, 1, 2t \rangle.$$

4.3.4 Ολοκλήρωση

Ανάλογα με τους ορισμούς των παραπάνω παραγράφων η ολοκλήρωση των διανυσματικών συναρτήσεων ανάγεται τελικά στην ολοκλήρωση των επιμέρους συνιστωσών σύμφωνα με τους παρακάτω ορισμούς:

Ορισμός 4.3.4 - 1. Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t) \rangle.$$

Τότε η $\mathbf{G}(t)$ θα είναι μια **παράγουσα** (antiderivative) της $\mathbf{F}(t)$, τότε και μόνον όταν $\mathbf{G}'(t) = \mathbf{F}(t)$.

Ορισμός 4.3.4 - 2. Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t) \rangle$$

με πεδίο ορισμού D . Τότε, αν οι συναρτήσεις $f_1(t)$, $f_2(t)$ και $f_3(t)$ είναι ολοκληρώσιμες στο D , το **αόριστο ολοκλήρωμα** $\int \mathbf{F}(t) dt$ υπάρχει και ισούται με

$$\int \mathbf{F}(t) dt = \left\langle \int f_1(t) dt, \int f_2(t) dt, \int f_3(t) dt + \mathbf{C} \right\rangle, \quad (4.3.4 - 1)$$

όταν $\mathbf{C} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ η διανυσματική σταθερά ολοκλήρωσης.

Οι ήδη γνωστοί κανόνες ολοκλήρωσης του Μαθήματος Αόριστο Ολοκλήρωμα εφαρμόζονται και στην περίπτωση αυτή για καθεμιά συνιστώσα χωριστά.

Παράδειγμα 4.3.4 - 1

Αν

$$\mathbf{F}(t) = \left\langle \cos 2t, -2 \sin t, \frac{1}{1+t^2} \right\rangle$$

να υπολογιστεί το άριστο ολοκλήρωμα

$$\mathbf{G}(t) = \int \mathbf{F}(t) dt, \quad \text{όταν} \quad \mathbf{G}(0) = \langle 3, -2, 1 \rangle.$$

Λύση. Σύμφωνα με την (4.3.4 - 1) διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(t) &= \int \mathbf{F}(t) dt \\ &= \left\langle \int \cos 2t dt, -2 \int \sin t dt, \int \frac{1}{1+t^2} dt \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2} \sin 2t + c_1, 2 \cos t + c_2, \tan^{-1} t + c_3 \right\rangle. \end{aligned}$$

Επειδή $\mathbf{G}(0) = \langle 3, -2, 1 \rangle$ από το παραπάνω ολοκλήρωμα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(0) &= \langle 3, -2, 1 \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2} \overbrace{\sin 0}^0 + c_1, 2 \overbrace{\cos 0}^1 + c_2, \overbrace{\tan^{-1} 0}^0 + c_3 \right\rangle \\ &= \langle c_1, 2 + c_2, c_3 \rangle. \end{aligned}$$

Άρα $c_1 = 3$, $c_2 = -4$ και $c_3 = 1$, οπότε

$$\mathbf{G}(t) = \left\langle \frac{1}{2} \sin 2t + 3, 2 \cos t - 4, \tan^{-1} t + 1 \right\rangle.$$

■

Ορισμός 4.3.4 - 3. Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t) \rangle$$

με πεδίο ορισμού $[a, b]$. Τότε, αν οι συναρτήσεις $f_1(t)$, $f_2(t)$ και $f_3(t)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, το **ορισμένο ολοκλήρωμα** $\int_a^b \mathbf{F}(t) dt$ υπάρχει και ισούται με

$$\mathbf{I} = \int_a^b \mathbf{F}(t) dt = \left\langle \int_a^b f_1(t) dt, \int_a^b f_2(t) dt, \int_a^b f_3(t) dt \right\rangle. \quad (4.3.4 - 2)$$

Ανάλογα, όπως και στην παραπάνω περίπτωση του αόριστου ολοκληρώματος, οι ήδη γνωστοί κανόνες ολοκλήρωσης του Μαθήματος Ορισμένο Ολοκλήρωμα εφαρμόζονται και στην περίπτωση αυτή για καθεμιά συνιστώσα χωριστά.

Παράδειγμα 4.3.4 - 2

Αν

$$\mathbf{F}(t) = \langle \sin t, 6, 4t \rangle$$

να υπολογιστεί το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\mathbf{I} = \int_0^1 \mathbf{F}(t) dt.$$

Λύση. Σύμφωνα με την (4.3.4 - 2) διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \int_0^1 \mathbf{F}(t) dt \\ &= \left\langle \int_0^1 \sin t dt, 6 \int_0^1 dt, 4 \int_0^1 t dt \right\rangle \\ &= \langle -\cos t, 6t, 2t^2 \rangle \Big|_0^1 \\ &= \langle -\cos 1, 6, 2 \rangle - \langle -1, 0, 0 \rangle \quad (\text{αφαίρεση διανυσμάτων}) \\ &= \langle 1 - \cos 1, 6, 2 \rangle = (1 - \cos 1) \mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}. \end{aligned}$$

■

4.4 Βιβλιογραφία

- [1] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978-960-351-874-7.
- [2] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960-351-453-5/978-960-351-453-4.
- [3] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός II*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978-960-524-184-1.
- [4] Marsden, J.E. & Tromba, A.J. (2011). *Διανυσματικός Λογισμός*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978-960-730-945-7.
- [5] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960-418-087-8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- <http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm>
- <http://mathworld.wolfram.com/>
- <http://eom.springer.de/>

Μάθημα 5

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

5.1 Εισαγωγή

¹Στο μάθημα αυτό δίνονται οι βασικές έννοιες του Διανυσματικού Διαφορικού Λογισμού, που είναι σχετικές με τις βαθμωτές ή τις διανυσματικές συναρτήσεις μιας ή περισσότερων μεταβλητών και οι οποίες σε ορισμένες περιπτώσεις θεωρούνται ως μια γενίκευση των μέχρι τώρα ήδη γνωστών στον αναγνώστη αντίστοιχων κανόνων του Διαφορικού Λογισμού.

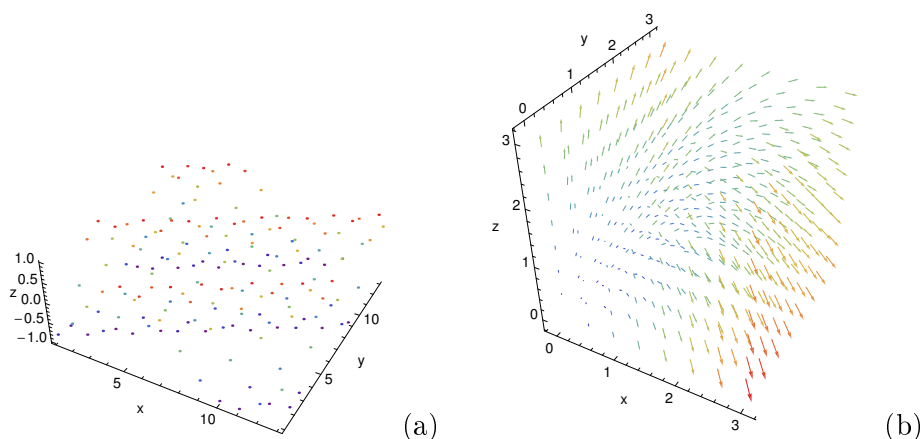
5.1.1 Βαθμωτά και διανυσματικά πεδία

Έστω ότι σε τυχόν σημείο, έστω M , του χώρου που μας περιβάλλει αντιστοιχούν:

- ένας πραγματικός αριθμός, έστω T , που συμβολίζει την τιμή της θερμοκρασίας και (Σχ. 5.1.1 - 1a)

¹Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4, 5].

- ένα διάνυσμα, έστω \mathbf{v} , που συμβολίζει την ταχύτητα του ανέμου στο σημείο αυτό (Σχ. 5.1.1 - 1b).



Σχήμα 5.1.1 - 1: (α) Η θερμοκρασία T (βαθμωτό πεδίο) και (β) η ταχύτητα \mathbf{v} στα διάφορα σημεία M του χώρου (διανυσματικό πεδίο).

Έστω Δ το σύνολο των μετρήσεων της θερμοκρασίας, αντίστοιχα της ταχύτητας στα παραπάνω σημεία M του χώρου. Τότε, όπως είναι γνωστό από τη Φυσική, επειδή οι τιμές της θερμοκρασίας και της ταχύτητας ή θα μεταβάλλονται ή θα είναι σταθερές σε ορισμένα από τα σημεία του M , το σύνολο Δ θα αποτελείται από διαφορετικά εν γένει στοιχεία, που είναι στην πρώτη περίπτωση αριθμοί και στη δεύτερη διανύσματα. Τότε οι τιμές στο Δ είναι δυνατόν να θεωρηθούν ως οι τιμές (πεδίο τιμών) μιας συνάρτησης ή ακριβέστερα **βαθμωτής** συνάρτησης $f(x, y, z)$ για την πρώτη, μιας **διανυσματικής** συνάρτησης $\mathbf{F}(x, y, z)$ για τη δεύτερη περίπτωση.²

Σύμφωνα με τα παραπάνω, όταν περιγράφεται ένα βαθμωτό μέγεθος, όπως είναι η θερμοκρασία, θα λέγεται ότι έχουμε ένα **βαθμωτό πεδίο** (scalar field)³

²Η διανυσματική συνάρτηση δύο μεταβλητών, αντίστοιχα τριών μεταβλητών, θεωρείται ως επέκταση της ήδη γνωστής συνάρτησης μιας μεταβλητής από το Μάθημα *Διανυσματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής*. Η παραγωγή των διανυσματικών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών γίνεται όμοια με εκείνων της μιας μεταβλητής, μόνον που η ολική παράγωγος $\mathbf{F}'(t)$ αντικαθίσταται στην περίπτωση αυτή από τη **μερική παράγωγο** για καθεμιά από τις μεταβλητές.

³Βλέπε βιβλιογραφία και http://en.wikipedia.org/wiki/Scalar_field

και η συνάρτηση που το περιγράφει βαθμωτή συνάρτηση ή απλά για ευκολία στο εξής συνάρτηση, που θα συμβολίζεται με f, g κ.λπ. ενώ, όταν περιγράφεται διανυσματικό μέγεθος, όπως είναι η ταχύτητα, θα λέγεται ότι έχουμε **διανυσματικό** πεδίο (vector field)⁴ και η συνάρτηση που το περιγράφει διανυσματική συνάρτηση και θα συμβολίζεται με \mathbf{F}, \mathbf{G} κ.λπ.

Αν τώρα $Oxyz$ είναι ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων του χώρου \mathbb{R}^3 , τότε η συνάρτηση f γράφεται συναρτήσεως των μεταβλητών x, y και z ως $f = f(x, y, z)$, ενώ η διανυσματική συνάρτηση ως $\mathbf{F}(x, y, z)$, που σε αντιστοιχία με την αναλυτική έκφραση του διανύσματος $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$ της Παραγράφου 5.1 θα γράφεται ως εξής:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}, \quad (5.1.1 - 1)$$

όταν P, Q και R είναι οι συνιστώσες ως προς τον x, y και z -άξονα. Θα πρέπει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι οι τιμές τόσο του βαθμωτού όσο και του διανυσματικού πεδίου είναι ανεξάρτητες από την εκλογή του συστήματος των αξόνων.

Η αντίστοιχη έκφραση της (5.1.1 – 1) στο \mathbb{R}^2 είναι

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y) = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j}. \quad (5.1.1 - 2)$$

Το **μέτρο** ή η **απόλυτη τιμή** της διανυσματικής συνάρτησης (5.1.1 – 1) ορίζεται τότε από τη σχέση

$$|\mathbf{F}| = (P^2 + Q^2 + R^2)^{1/2},$$

ενώ της (5.1.1 – 2) από την

$$|\mathbf{F}| = (P^2 + Q^2)^{1/2}.$$

Παράδειγμα 5.1.1 - 1

Το ήδη γνωστό διάνυσμα θέσης

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} = \mathbf{F}(x, y, z),$$

⁴Βέπε βιβλιογραφία και [http : //en.wikipedia.org/wiki/Vector-field](http://en.wikipedia.org/wiki/Vector-field)

είναι μια διανυσματική συνάρτηση τριών μεταβλητών, ενώ το μέτρο του

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = f(x, y, z)$$

μια βαθμωτή συνάρτηση. Άλλα παραδείγματα διανυσματικών συναρτήσεων θα δοθούν στη συνέχεια του μαθήματος.

5.2 Κατευθυνόμενη παράγωγος

5.2.1 Εισαγωγικές έννοιες

Είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής ή και γενικότερα πολλών μεταβλητών, έστω $f(x, y)$, αντίστοιχα $f(x, y, z)$, ορίζει τον συντελεστή μεταβολής της f ως προς τον αντίστοιχο άξονα συντεταγμένων, δηλαδή η f_x ως προς τον x -άξονα, κ.λπ. Στην παράγραφο αυτή θα γίνει μια γενίκευση της μεταβολής αυτής, θεωρώντας ότι οι μεταβλητές x, y , αντίστοιχα x, y, z μεταβάλλονται ταυτόχρονα. Η έννοια της ταυτόχρονης μεταβολής δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η μεταβολή είναι η ίδια για κάθε μεταβλητή, δηλαδή είναι δυνατόν να έχουμε διαφορετικές μεταβολές ως προς x, y και z .

Παράδειγμα 5.2.1 - 1

Έστω ένα υλικό σημείο που κινείται στον χώρο από το σημείο

$$A(x_0, y_0, z_0) = A(1, -2, 0)$$

στο

$$B(x_1, y_1, z_1) = B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) = B(2, 0, 6).$$

Τότε

$$\Delta x = x_1 - x_0 = 2 - 1 = 1,$$

$$\Delta y = y_1 - y_0 = 0 - (-2) = 2 \quad \text{και}$$

$$\Delta z = z_1 - z_0 = 6 - 3 = 3, \quad \text{δηλαδή} \quad \Delta x \neq \Delta y \neq \Delta z.$$

Σύμφωνα με την Παράγραφο 5.1, η μεταβολή της θέσης του σημείου από το A στο B θα ορίζεται από τη διεύθυνση του διανύσματος

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = \langle 1, 2, 3 \rangle.$$

Επειδή όμως υπάρχουν άπειρα διανύσματα που έχουν την ίδια διεύθυνση με το διάνυσμα \mathbf{a} , ο ακριβής καθορισμός της διεύθυνσης της παραπάνω μεταβολής γίνεται από το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα, έστω \mathbf{n} του \mathbf{a} , δηλαδή στη συγκεκριμένη περίπτωση από το διάνυσμα

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{14}} (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right\rangle \\ &= \langle n_1, n_2, n_3 \rangle. \end{aligned}$$

Σημείωση 5.2.1 - 1

Σύμφωνα με το Παράδειγμα 5.2.1 - 1, αν $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ αντίστοιχα $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$ είναι δύο διαφορετικά σημεία του \mathbb{R}^2 , αντίστοιχα του \mathbb{R}^3 που βρίσκονται σε απόσταση s , τότε, αν $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} κατά τη διεύθυνση \overrightarrow{AB} θα ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{n} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}}{s}.$$

5.2.2 Ορισμός

Έχοντας τώρα υπόψη και τους αντίστοιχους ορισμούς των παραγώγων συνάρτησης μιας ή περισσότερων μεταβλητών, η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο A κατά τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος \mathbf{n} ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 5.2.2 - 1 (κατευθυνόμενη παράγωγος). Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) | S \subseteq \mathbb{R}^2, \quad \text{αντίστοιχα} \quad f(x, y, z) | S \subseteq \mathbb{R}^3$$

με S ανοικτό σύνολο, που υποτίθεται ότι έχει 1ης τάξης μερικές παραγώγους στο S . Αν $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ αντίστοιχα $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$ είναι δύο διαφορετικά σημεία του S , που βρίσκονται σε απόσταση $s = |\overrightarrow{AB}| = |\mathbf{a}|$ και $\mathbf{n} = \langle n_1, n_2 \rangle$, αντίστοιχα $\mathbf{n} = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, η κατευθυνόμενη παράγωγος (directional derivative)⁵ της f στο σημείο A συμβολίζεται με $(D_{\mathbf{n}}f)_A$ και ορίζεται από την παρακάτω οριακή τιμή

$$(D_{\mathbf{n}}f)_A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + s n_1, y_0 + s n_2) - f(x_0, y_0)}{s},$$

αντίστοιχα (5.2.2 - 1)

$$(D_{\mathbf{n}}f)_A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + s n_1, y_0 + s n_2, z_0 + s n_3) - f(x_0, y_0, z_0)}{s},$$

εφόσον υπάρχει.

Ισοδύναμα ο παραπάνω ορισμός γράφεται:

Ορισμός 5.2.2 - 2 (κατευθυνόμενη παράγωγος). Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) \mid S \subseteq \mathbb{R}^2, \quad \text{αντίστοιχα} \quad f(x, y, z) \mid S \subseteq \mathbb{R}^3$$

με S ανοικτό σύνολο, που υποτίθεται ότι έχει πρώτης τάξης μερικές παραγώγους στο S . Αν $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ αντίστοιχα $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$ είναι δύο διαφορετικά σημεία του S , που βρίσκονται σε απόσταση $s = |\overrightarrow{AB}| = |\mathbf{a}|$ και \mathbf{n} το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο A συμβολίζεται με $(D_{\mathbf{n}}f)_A = \left. \frac{df}{ds} \right|_{\mathbf{n}, A}$ και ορίζεται από την παρακάτω οριακή τιμή:

$$(D_{\mathbf{n}}f)_A = \left. \frac{df}{ds} \right|_{\mathbf{n}, A} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)}{s},$$

αντίστοιχα (5.2.2 - 2)

$$(D_{\mathbf{n}}f)_A = \left. \frac{df}{ds} \right|_{\mathbf{n}, A} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_1, y_1, z_1) - f(x_0, y_0, z_0)}{s},$$

εφόσον υπάρχει.

⁵Βλέπε http://en.wikipedia.org/wiki/Directional_derivative

Ορισμός 5.2.2 - 3. Έστω η συνάρτηση $f(x, y) | S \subseteq \mathbb{R}^2$, αντίστοιχα $f(x, y, z) | S \subseteq \mathbb{R}^3$ με S ανοικτό σύνολο, που υποτίθεται ότι έχει πρώτης τάξης μερικές παραγώγους στο S . Αν η κατευθυνόμενη παράγωγος της f υπάρχει σε κάθε σημείο $A(x_0, y_0)$, αντίστοιχα $A(x_0, y_0, z_0)$ του S , τότε λέγεται ότι υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος (*directional derivative*) της f στο S και συμβολίζεται αυτό με

$$D_{\mathbf{n}}f = \left(\frac{df}{ds} \right)_{\mathbf{n}}. \quad (5.2.2 - 3)$$

Παρατηρήσεις 5.2.2 - 1

- i) Η (5.2.2 – 2) ορίζει τον συντελεστή μεταβολής της f στο σημείο A κατά τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος \mathbf{n} .
- ii) Ο τελεστής $\frac{d}{ds}$ στην περίπτωση αυτή έχει ερμηνεία ανάλογη των τελεστών $\frac{d}{dx}$ και $\frac{\partial}{\partial x}$, ενώ το απειροστό ds , όπως το αντίστοιχο dx , ορίζεται από το όριο $\lim_{s \rightarrow 0} s$ (βλέπε γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου συνάρτησης μιας μεταβλητής).
- iii) Η (5.2.2 – 1), αντίστοιχα η (5.2.2 – 2) είναι πραγματικοί αριθμοί, ενώ η (5.2.2 – 3) συνάρτηση (βλέπε Παράδειγμα 5.3.2 - 3).

Στην επόμενη παράγραφο θα γίνει ο υπολογισμός της κατευθυνόμενης παραγώγου.

5.3 Κλίση συνάρτησης

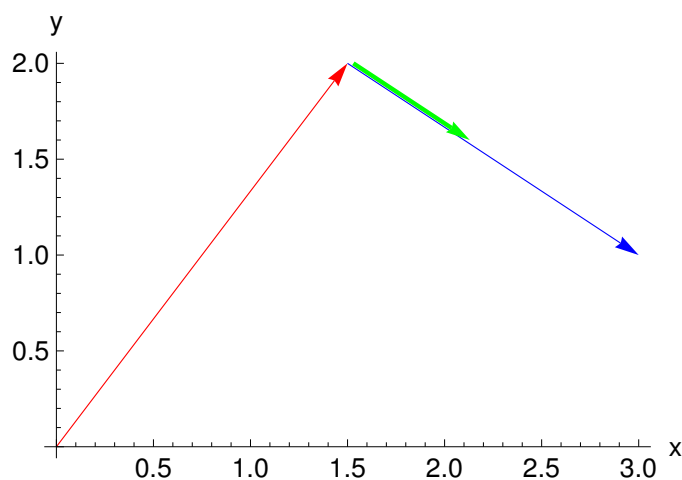
5.3.1 Σχετικοί ορισμοί

Αν

$$\mathbf{r}_A = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$$

το διάνυσμα θέσης του σημείου $A(x_0, y_0, z_0)$, τότε έχοντας υπόψη και τον κανόνα του παραλληλογράμμου για την πρόσθεση διανυσμάτων το διάνυσμα θέσης \mathbf{r}_B του σημείου $B(x_1, y_1, z_1)$ θα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + s \mathbf{n}$$



Σχήμα 5.3.1 - 1: Η Εξίσωση (5.3.1 - 2) στο \mathbb{R}^2 όπου \mathbf{r}_A το κόκκινο, \mathbf{n} το πράσινο και \mathbf{a} το μπλε διάνυσμα.

όταν $\mathbf{n} = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ και $s = |\overrightarrow{AB}|$.

Άρα (βλέπε Σχ. 5.3.1 - 1 για την αντίστοιχη περίπτωση στο \mathbb{R}^2)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_A + s \mathbf{n} & (5.3.1 - 1) \\ &= (x_0 + s n_1) \mathbf{i} + (y_0 + s n_2) \mathbf{j} + (z_0 + s n_3) \mathbf{k} \\ &= x(s) \mathbf{i} + y(s) \mathbf{j} + z(s) \mathbf{k} = \mathbf{r}(s). \end{aligned}$$

Τότε από την (5.3.1 - 1) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{ds} &= \frac{d}{ds} (\mathbf{r}_A + s \mathbf{n}) \\ &= \underbrace{\frac{d\mathbf{r}_A}{ds}}_{=0} + \frac{d(s \mathbf{n})}{ds} = \mathbf{n} \underbrace{\frac{ds}{ds}}_{=1} = \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (5.3.1 - 2)$$

Υπενθυμίζεται για ευκολία στο σημείο αυτό το Θεώρημα 14.2.5 - 2, που αφορούσε τον αλυσιδωτό κανόνα παραγωγίσισης σύνθετης συνάρτησης του Μαθήματος *Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών*:

Θεώρημα 5.3.1 - 1. Έστω η συνάρτηση $f(x, y) | S \subseteq \mathbb{R}^2$, αντίστοιχα $f(x, y, z) | S \subseteq \mathbb{R}^3$ και $x = x(s), y = y(s)$, αντίστοιχα $x = x(s), y = y(s), z = z(s)$ για κάθε $s \in A \subseteq \mathbb{R}$, όπου A ανοικτό σύνολο με τις αντίστοιχες τιμές της f να ανήκουν στο S για κάθε $s \in A$ και επιπλέον ότι υπάρχει η παράγωγος της f στο $(x(s), y(s))$, αντίστοιχα $(x(s), y(s), z(s))$ για κάθε $s \in A$. Τότε η συνάρτηση $f = f(s)$ παραγωγίζεται στο s και ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{df(s)}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} \\ &= f_x \frac{dx}{ds} + f_y \frac{dy}{ds}, \end{aligned} \quad (5.3.1 - 3)$$

αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \frac{df(s)}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{ds} \\ &= f_x \frac{dx}{ds} + f_y \frac{dy}{ds} + f_z \frac{dz}{ds}. \end{aligned} \quad (5.3.1 - 4)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.3.1 - 1, τον τύπο υπολογισμού του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων βάσει του οποίου αν

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \quad \text{και} \quad \mathbf{b} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, \quad \text{τότε} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{aligned}$$

και υποθέτοντας ότι η f έχει τουλάχιστον 1ης τάξης μερικές παραγώγους στο

Σ σύμφωνα και με τις (5.3.1 - 1) και (5.3.1 - 2) έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{n}} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx(s)}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy(s)}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz(s)}{ds} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{dx(s)}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy(s)}{ds} \mathbf{j} + \frac{dz(s)}{ds} \mathbf{k}\right) \\ &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}\right) f\right] \cdot \left[\frac{d}{ds} \overbrace{(x(s) \mathbf{i} + y(s) \mathbf{j} + z(s) \mathbf{k})}^{(5.3.1-1)}\right] \\ &= (\nabla f) \cdot \overbrace{\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}}^{(5.3.1-2)} = (\nabla f) \cdot \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (5.3.1 - 5)$$

όπου το σύμβολο ∇ ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 5.3.1 - 1 (διαφορικός τελεστής). Ορίζεται ως διαφορικός τελεστής⁶ (*del*) στο \mathbb{R}^2 ο

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle, \quad (5.3.1 - 6)$$

αντίστοιχα στο \mathbb{R}^3 ο

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle. \quad (5.3.1 - 7)$$

Από την (5.3.1 - 5) και τις (5.3.1 - 6), αντίστοιχα (5.3.1 - 7) έχουμε τον παρακάτω τύπο υπολογισμού της κατευθυνόμενης παραγώγου:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{n}} f &= \left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{n}} = (\nabla f) \cdot \mathbf{n} = \langle f_x, f_y \rangle \cdot \langle n_1, n_2 \rangle \\ &= f_x n_1 + f_y n_2, \end{aligned} \quad (5.3.1 - 8)$$

αντίστοιχα

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{n}} f &= \left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{n}} = (\nabla f) \cdot \mathbf{n} = \langle f_x, f_y, f_z \rangle \cdot \langle n_1, n_2, n_3 \rangle \\ &= f_x n_1 + f_y n_2 + f_z n_3. \end{aligned} \quad (5.3.1 - 9)$$

⁶Βλέπε <http://en.wikipedia.org/wiki/Del>

Το **ανάδελα** ∇ (nabla), είναι ένα συμβολικό διάνυσμα με πολλές εφαρμογές στην περιγραφή των εξισώσεων διαφόρων προβλημάτων όπως του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (εξισώσεις του Maxwell),⁷ υδροδυναμικής, κυματικής, κ.λπ. και έχει ιδιότητες ανάλογες με εκείνες των γνωστών διανυσμάτων.

Σύμφωνα τώρα και με τους τύπους (5.3.1 – 8), αντίστοιχα (5.3.1 – 9) η κλίση ενός βαθμωτού πεδίου ορίζεται στη συνέχεια ως εξής:

Ορισμός 5.3.1 - 2 (κλίση). Έστω η συνάρτηση $f(x, y) | S \subseteq \mathbb{R}^2$, αντίστοιχα $f(x, y, z) | S \subseteq \mathbb{R}^3$ με S ανοικτό σύνολο, που έχει τουλάχιστον 1ης τάξης μερικές παραγώγους στο S . Τότε ορίζεται ως κλίση (gradient)⁸ της f η διανυσματική συνάρτηση

$$\text{grad } f = \nabla f = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} = \langle f_x, f_y \rangle, \quad (5.3.1 - 10)$$

αντίστοιχα

$$\text{grad } f = \nabla f = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} = \langle f_x, f_y, f_z \rangle. \quad (5.3.1 - 11)$$

Παρατηρήσεις 5.3.1 - 1

- i) Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.3.1 - 2 η κλίση εφαρμόζεται σε βαθμωτή συνάρτηση, δηλαδή συνάρτηση που περιγράφει βαθμωτό πεδίο και δημιουργεί τη διανυσματική συνάρτηση ∇f , δηλαδή συνάρτηση που περιγράφει διανυσματικό πεδίο. Είναι προφανές ότι η κλίση σε σημείο $\nabla f|_A$ είναι διάνυσμα.
- ii Με τη βοήθεια της κλίσης οι **αναγκαίες** συνθήκες

$$f_x = f_y = 0$$

για την ύπαρξη ακρότατων της συνάρτησης $f(x, y)$, αντίστοιχα οι

$$f_x = f_y = f_z = 0$$

⁷ Βλέπε βιβλιογραφία και βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 4.

⁸ Βλέπε [http : //en.wikipedia.org/wiki/Gradient](http://en.wikipedia.org/wiki/Gradient)

για την $f(x, y, z)$, γράφονται

$$\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle = \mathbf{0}, \quad \text{αντίστοιχα}$$

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \mathbf{0}.$$

5.3.2 Ιδιότητες και εφαρμογές

Έστω $f, g|S \subseteq \mathbb{R}^2$, αντίστοιχα $f, g|S \subseteq \mathbb{R}^3$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά. Τότε:

Κατευθυνόμενης παραγώγου Κλίσης

$$1. \quad D_{\mathbf{n}}f = 0 \qquad \nabla f = \mathbf{0}, \text{ όταν } f \text{ σταθερά}$$

$$2. \quad D_{\mathbf{n}}(f + g) = D_{\mathbf{n}}f + D_{\mathbf{n}}g \qquad \nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$$

$$3. \quad D_{\mathbf{n}}(fg) = f D_{\mathbf{n}}g + g D_{\mathbf{n}}f \qquad \nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$$

$$4. \quad D_{\mathbf{n}}(\lambda f) = \lambda D_{\mathbf{n}}f \qquad \nabla(\lambda f) = \lambda \nabla f$$

$$5. \quad D_{\mathbf{n}}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g D_{\mathbf{n}}f - f D_{\mathbf{n}}g}{g^2} \qquad \nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2},$$

όταν $g(\mathbf{x}) \neq 0$.

Η απόδειξη των ιδιοτήτων αφήνεται ως άσκηση.

Παράδειγμα 5.3.2 - 1

Αν

$$f(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2,$$

να υπολογιστεί η κλίση στο σημείο $P(1, -2, -1)$.

Λύση. Είναι

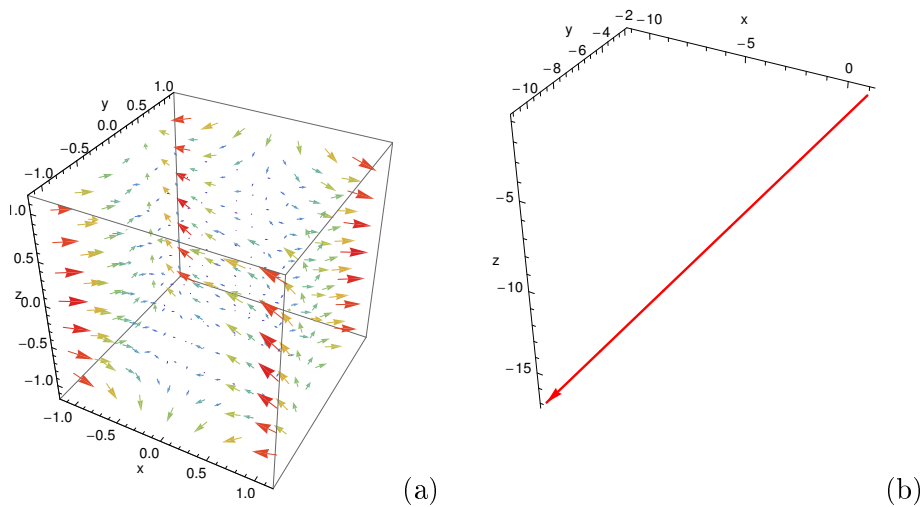
$$f_x = 6xy, \quad f_y = 3x^2 - 3y^2z^2 \quad \text{και} \quad f_z = -2y^3z.$$

Άρα (Σχ. 5.3.2 - 1a)

$$\nabla f = 6xy \mathbf{i} + 3(x^2 - y^2 z^2) \mathbf{j} - 2y^3 z \mathbf{k},$$

οπότε (Σχ. 5.3.2 - 1b)

$$\nabla f_{P(1,-2,-1)} = -12 \mathbf{i} - 9 \mathbf{j} - 16 \mathbf{k} = \langle -12, -9, -16 \rangle.$$



Σχήμα 5.3.2 - 1: (a) Η γραφική παράσταση της κλίσης $\nabla f = 6xy \mathbf{i} + 3(x^2 - y^2 z^2) \mathbf{j} - 2y^3 z \mathbf{k}$, όταν $x, y, z \in [-1, 1]$ και (b) το διάνυσμα $\nabla f_{P(1,-2,-1)} = -12 \mathbf{i} - 9 \mathbf{j} - 16 \mathbf{k} = \langle -12, -9, -16 \rangle$.

Παράδειγμα 5.3.2 - 2

Όμοια, αν

$$f(x, y, z) = \ln |\mathbf{r}|,$$

όπου \mathbf{r} διάνυσμα θέσης, να υπολογιστεί η κλίση της f .

Λύση. Επειδή

$$|\mathbf{r}| = r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad \text{είναι} \quad f(x, y, z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2).$$

Τότε

$$f_x = \frac{1}{2} \frac{\overbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}^{2x}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2},$$

ενώ λόγω της συμμετρίας της f ανάλογοι τύποι υπολογίζονται για τις παραγώγους f_y και f_z .

Άρα

$$\nabla f = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} = \frac{x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\mathbf{r}}{r^2}.$$

Παράδειγμα 5.3.2 - 3

Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

στο σημείο $P(2, 1, 3)$ κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\alpha = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

Λύση. Αρχικά υπολογίζεται η κλίση της f ως εξής:

$$\nabla f = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} = 2x \mathbf{i} + 4y \mathbf{j} + 6z \mathbf{k}, \quad (1)$$

οπότε στο σημείο $P(2, 1, 3)$ θα έχουμε

$$\nabla f|_{P(2,1,3)} = 2 \cdot 2 \mathbf{i} + 4 \cdot 1 \mathbf{j} + 6 \cdot 3 \mathbf{k} = 4 \mathbf{i} + 4 \mathbf{j} + 18 \mathbf{k} = \langle 4, 4, 18 \rangle. \quad (2)$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} κατά τη διεύθυνση του διανύσματος α είναι

$$\mathbf{n} = \frac{\alpha}{|\alpha|} = \frac{\mathbf{i} - 2\mathbf{j}}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}} \mathbf{j} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle. \quad (3)$$

Επομένως σύμφωνα και με τη γνωστή ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου από τις (2) και (3) προκύπτει

$$\begin{aligned} (D_{\mathbf{n}}f)_{P(2,1,3)} &= (4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 18\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}} \mathbf{j} \right) \\ &= \langle 4, 4, 18 \rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right\rangle = \frac{4 \cdot 1}{\sqrt{5}} + \frac{4 \cdot (-2)}{\sqrt{5}} + 18 \cdot 0 \\ &= -\frac{4}{\sqrt{5}} \approx -1.78885, \end{aligned}$$

δηλαδή σύμφωνα και με τις Παρατηρήσεις 5.2.2 - 1 (iii) πραγματικός αριθμός.

Έστω τώρα ότι ζητείται η κατευθυνόμενη παράγωγος κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ γενικά και όχι σε συγκεκριμένο σημείο. Τότε από την (1) και την (3) έχουμε

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{a}}f &= (2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 6z\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j} \right) \\ &= \langle 2x, 4y, 6z \rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right\rangle = \frac{2x \cdot 1}{\sqrt{5}} + \frac{4y \cdot (-2)}{\sqrt{5}} + 6z \cdot 0 \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}(x - 4y), \end{aligned}$$

δηλαδή όμοια σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 5.2.2 - 1 (iii) μια βαθμωτή συνάρτηση.

■

Παράδειγμα 5.3.2 - 4

Όμοια της συνάρτησης

$$f(x, y) = x e^{xy} + y$$

στο σημείο $P(2, 0)$ κατά τη διεύθυνση της γωνίας $\theta = 2\pi/3$.

Λύση. Για τον υπολογισμό της κλίσης της f έχουμε

$$f_x = \overbrace{(x)_x}^1 e^{xy} + x \overbrace{(xy)_x}^y e^{xy} = (1 + xy) e^{xy},$$

$$f_y = x \overbrace{(xy)_y}^x e^{xy} + 1 = x^2 e^{xy} + 1, \quad \text{οπότε}$$

$$\nabla f = (1 + xy) e^{xy} \mathbf{i} + (x^2 e^{xy} + 1) \mathbf{j},$$

οπότε στο σημείο $P(2, 0)$ θα είναι

$$\nabla f|_{P(2,0)} = (1 + 0)e^0 \mathbf{i} + (1 + 2^2 e^0) \mathbf{j} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} = \langle 1, 5 \rangle.$$

Το διάνυσμα κατά τη διεύθυνση της γωνίας $\theta = 2\pi/3$ είναι

$$\mathbf{a} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} = \cos \frac{2\pi}{3} \mathbf{i} + \sin \frac{2\pi}{3} \mathbf{j}$$

$$= -\frac{1}{2} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{j} = \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$$

όπου προφανώς

$$|\mathbf{a}| = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1.$$

Τότε το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} κατά τη διεύθυνση του \mathbf{a} είναι

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j} = \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} (D_{\mathbf{n}}f)_{P(2,0)} &= (\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) \cdot \left(-\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\right) = \langle 1, 5 \rangle \cdot \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle \\ &= 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{3} - 1}{2} \approx 3.830127. \end{aligned}$$

■

Σημείωση 5.3.2 - 1

Γενικότερα το διάνυσμα \mathbf{a} κατά τη διεύθυνση της γωνίας θ είναι

$$\mathbf{a} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} = \langle \cos \theta, \sin \theta \rangle,$$

όπου προφανώς $|\mathbf{a}| = 1$, οπότε το μοναδιαίο διάνυσμα στην περίπτωση αυτή θα είναι $\mathbf{n} = \mathbf{a}$.

Πρόταση 5.3.2 - 1. Η μέγιστη τιμή της κατευθυνόμενης παραγώγου $D_{\mathbf{n}}f$ μιας συνάρτησης f κατά τη διεύθυνση \mathbf{n} ισούται με $|\nabla f|$ και συμβαίνει, όταν τα ∇f και \mathbf{n} έχουν την ίδια διεύθυνση.

Απόδειξη. Έστω θ η γωνία των ∇f και \mathbf{n} . Τότε από την (5.3.1 - 5), σύμφωνα και με τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$D_{\mathbf{n}}f = \nabla f \cdot \mathbf{n} = |\nabla f| |\mathbf{n}| \cos \theta = |\nabla f| \cos \theta. \quad (5.3.2 - 1)$$

Άρα το **μέγιστο** συμβαίνει, όταν $\cos \theta = 1$, δηλαδή $\theta = 0$, που σημαίνει ότι τα ∇f και \mathbf{n} έχουν την ίδια διεύθυνση, ενώ η μέγιστη τιμή στην περίπτωση αυτή ισούται με $|\nabla f|$. ■

Παράδειγμα 5.3.2 - 5

Αν το ύψος h ενός λόφου δίνεται από τον τύπο

$$h = 1000 - 0.01x^2 - 0.02y^2,$$

να υπολογιστεί η διεύθυνση της μέγιστης μεταβολής στο σημείο $(60, 100)$ και η τιμή του.

Λύση. Έστω

$$f(x, y) = 1000 - 0.01x^2 - 0.02y^2.$$

Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 5.3.2 - 1 η μέγιστη μεταβολή γίνεται στη διεύθυνση

$$\nabla f = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} = \langle f_x, f_y \rangle = \langle -0.02x, -0.04y \rangle,$$

οπότε στο σημείο $(60, 100)$ η διεύθυνση είναι

$$\nabla f|_{(60,100)} = \nabla f(60, 100) = -1.2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = \langle -1.2, -4 \rangle$$

με τιμή $|\nabla f(60, 100)| = \sqrt{(-1.2)^2 + (-4)^2} \approx 4.176$. ■

Παράδειγμα 5.3.2 - 6

Όμοια της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = (x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2$$

στο σημείο $(2, -1, 2)$.

Λύση. Έχουμε

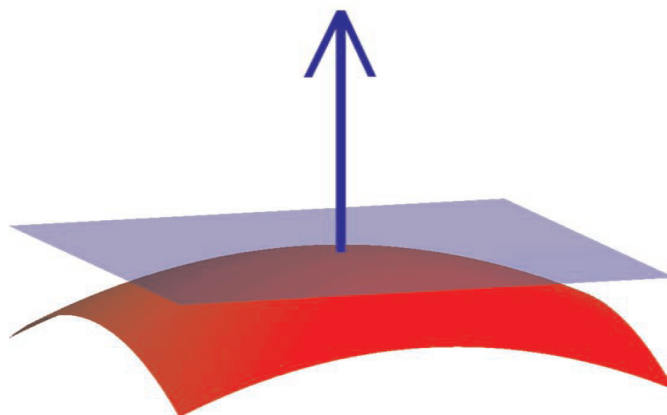
$$f_x = 4x + 2y + 2z$$

και λόγω της συμμετρίας της f όμοια

$$f_y = 4y + 2z + 2x \quad \text{και} \quad f_z = 4z + 2x + 2y.$$

Άρα

$$\nabla f = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} = \langle 4x + 2y + 2z, 4y + 2z + 2x, 4z + 2x + 2y \rangle,$$



Σχήμα 5.3.2 - 2: Το διάνυσμα της κλίσης είναι κάθετο στην επιφάνεια και στο εφαπτόμενο επίπεδο.

οπότε στο σημείο $(2, -1, 2)$ η διεύθυνση είναι

$$\nabla f(2, -1, 2) = 10\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 10\mathbf{k} = \langle 10, 4, 10 \rangle$$

με τιμή

$$|\nabla f(2, -1, 2)| = \sqrt{10^2 + 4^2 + 10^2} \approx 14.696\,940.$$

Από την Πρόταση 5.3.2 - 1 προκύπτει ότι:

Πρόταση 5.3.2 - 2. Το διάνυσμα της κλίσης $\nabla f(x_0, y_0)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια $f(x, y) - k = 0$ στο σημείο (x_0, y_0) , αντίστοιχα το $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ στην $f(x, y, z) - k = 0$ στο (x_0, y_0, z_0) . (Σχ. 5.3.2 - 2)

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.3.2 - 2 είναι το παρακάτω πόρισμα:

Πόρισμα 5.3.2 - 1. Το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια $f(x, y) - k = 0$ στο σημείο (x_0, y_0) , αντίστοιχα στην $f(x, y, z) - k = 0$ στο (x_0, y_0, z_0) είναι κάθετο στο διάνυσμα της κλίσης $\nabla f(x_0, y_0)$, αντίστοιχα $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$.

Σύμφωνα με το παραπάνω πόρισμα αποδεικνύεται ότι:

Πόρισμα 5.3.2 - 2. Έστω το επίπεδο π με εξίσωση

$$f(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = 0.$$

Τότε το διάνυσμα $\nabla f = \langle A, B, C \rangle$ είναι κάθετο στο π .

Παράδειγμα 5.3.2 - 7

Ναδειχθεί ότι η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης

$$g(x, y) = \frac{y^2}{x} \quad \text{όταν} \quad x \neq 0$$

κατά τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος, που είναι κάθετο στην έλλειψη $2x^2 + y^2 = 1$, είναι ίση με μηδέν.

Λύση. Έστω $P = P(x_0, y_0)$ τυχόν σημείο της έλλειψης με εξίσωση

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 1.$$

Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 5.3.2 - 2 το διάνυσμα της κλίσης $\nabla f(x_0, y_0)$ είναι κάθετο στην έλλειψη στο σημείο (x_0, y_0) .

Επειδή

$$\nabla f(x_0, y_0) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle 4x_0, 2y_0 \rangle,$$

το αντίστοιχο μοναδιαίο $\mathbf{n} = \langle n_1, n_2 \rangle$ θα ισούται με

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{4x_0 \mathbf{i} + 2y_0 \mathbf{j}}{\sqrt{16x_0^2 + 4y_0^2}} = \frac{4x_0 \mathbf{i} + 2y_0 \mathbf{j}}{2\sqrt{4x_0^2 + y_0^2}} \\ &= \left\langle \frac{2x_0}{\sqrt{4x_0^2 + y_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{4x_0^2 + y_0^2}} \right\rangle = \langle n_1, n_2 \rangle \end{aligned} \quad (1)$$

Η κλίση της συνάρτησης $g(x, y)$ στο σημείο (x_0, y_0) είναι

$$\nabla g(x_0, y_0) = \langle g_x, g_y \rangle = \left\langle -\frac{y_0^2}{x_0^2}, \frac{2y_0}{x_0} \right\rangle. \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) σύμφωνα και με την (5.3.1 - 8) - τύπος υπολογισμού - προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} (D_{\mathbf{n}}g)_{P(x_0, y_0)} &= g_x n_1 + g_y n_2 \\ &= \frac{2x_0}{\sqrt{4x_0^2 + y_0^2}} \left(-\frac{y_0^2}{x_0^2} \right) + \frac{y_0}{\sqrt{4x_0^2 + y_0^2}} \frac{2y_0}{x_0} = 0, \end{aligned}$$

δηλαδή η αποδεικτέα. ■

5.3.3 Συντηρούμενα διανυσματικά πεδία

Τα πεδία αυτά συναντώνται στη Φυσική και εφαρμογές των θα δοθούν στο Μάθημα *Επικαμπύλια και Επιφανειακά Ολοκληρώματα*.

Ορισμός 5.3.3 - 1 (συντηρητικό πεδίο). Το διανυσματικό πεδίο που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση \mathbf{F} θα λέγεται **συντηρητικό** (*conservative field*),⁹ όταν

$$\mathbf{F} = \nabla\varphi. \quad (5.3.3 - 1)$$

Στις περιπτώσεις αυτές η βαθμωτή συνάρτηση φ ορίζεται ως το **δυναμικό** (potential) του διανυσματικού πεδίου.

Παράδειγμα 5.3.3 - 1

Έστω το διανυσματικό πεδίο που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Ζητείται να υπολογιστεί το δυναμικό του, εφόσον υπάρχει.

Λύση. Έστω ότι το δυναμικό του πεδίου υπάρχει και είναι το $\varphi(x, y, z)$. Τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 5.3.3 - 1 θα πρέπει

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \nabla\varphi = \varphi_x\mathbf{i} + \varphi_y\mathbf{j} + \varphi_z\mathbf{k},$$

οπότε

$$\varphi_x = x, \quad \varphi_y = y \quad \text{και} \quad \varphi_z = z.$$

Τότε, επειδή είναι γνωστό ότι, αν $f = f(x, y, z)$, τότε¹⁰

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz,$$

⁹Βλέπε http://en.wikipedia.org/wiki/Conservative_field

¹⁰Βλέπε Μάθημα *Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών - Η έννοια του διαφορικού*.

θα πρέπει και για το διαφορικό της συνάρτησης φ να ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz = x dx + y dy + z dz \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)_x dx + \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)_y dy \\ &\quad + \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)_z dz = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

Άρα

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) + c,$$

όταν c σταθερά. ■

Παράδειγμα 5.3.3 - 2

Έστω το πεδίο Coulomb (Σχ. 5.3.3 - 1), που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Τότε η \mathbf{F} είναι δυνατόν να θεωρηθεί ως η κλίση της βαθμωτής συνάρτησης

$$\varphi = \varphi(x, y, z) = -\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = -\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2},$$

οπότε η φ ορίζει στην περίπτωση αυτή το δυναμικό του πεδίου Coulomb.¹¹

Είναι προφανές ότι υπάρχουν και διανυσματικά πεδία που δεν είναι οι κλίσεις βαθμωτών πεδίων. Του είδους αυτού τα πεδία λέγονται **μη συντηρούμενα**.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η κλίση των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $e^x \sin y$

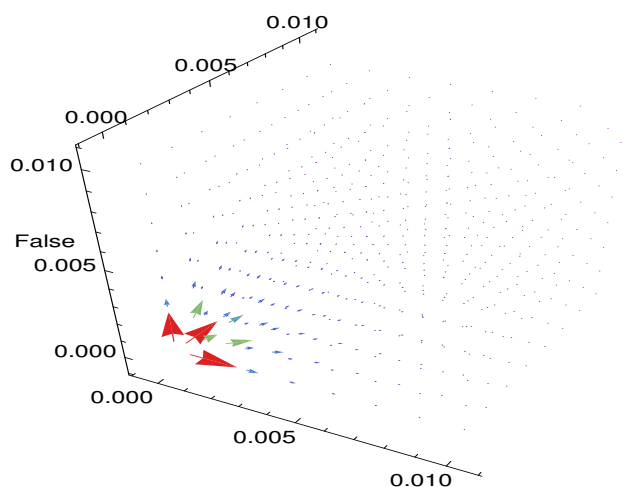
iii) $\ln(x^2 + y^2 - z^2)$

ii) $e^{-x^2} - y^{1/2}$

iv) $\sin(x^2 + y^2) - z^2$

2. Να υπολογιστεί η διευθυνόμενη παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων f στο σημείο P κατά τη διεύθυνση του διανύσματος \mathbf{a} , όταν

¹¹Βλέπε http://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb%27s_Law#Electric_field



Σχήμα 5.3.3 - 1: Παράδειγμα 5.3.3 - 2: η μορφή του πεδίου Coulomb.

i) $f = x^2 + y^2 + z^2$, $P(1, 2, 3)$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

ii) $f = e^{x-y}$, $P(0, -1)$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

iii) $f = e^x \cos 2y$, $P(1, \pi)$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

3. Να βρεθεί η σταθερά γ , έτσι ώστε σε κάθε σημείο τομής των δύο σφαιρών

$$(x - \gamma)^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$$

τα αντίστοιχα εφαπτόμενα επίπεδα να είναι κάθετα μεταξύ τους.

4. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων της επιφάνειας $(y + z)^2 + (z - x)^2 = 16$, στα οποία η ευθεία που είναι κάθετη στην επιφάνεια να είναι παράλληλη στο yz -επίπεδο.

5. Να βρεθούν τα a, b, c , έτσι ώστε οι σφαίρες

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 1 \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

να τέμνονται κάθετα.

6. Να υπολογιστεί το δυναμικό των διανυσματικών πεδίων που περιγράφονται από τις παρακάτω διανυσματικές συναρτήσεις \mathbf{F} :

- i) $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ iv) $(y+z)\mathbf{i} + (z+x)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$
- ii) $6x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ v) $\frac{(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$
- iii) $e^{xyz}(yzi + zxj + xyk)$ vi) $-\frac{(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$.

Απαντήσεις

1. (i) $\nabla f = \langle e^x \sin y, e^x \cos y \rangle$, (ii) $\nabla f = \langle -2xe^{-x^2}, -\frac{1}{2\sqrt{y}} \rangle$,
- (iii) $\nabla f = \langle \frac{2x}{x^2+y^2-z^2}, \frac{2y}{x^2+y^2-z^2}, \frac{2z}{x^2+y^2-z^2} \rangle$,
- (iv) $\nabla f = \langle 2x \cos(x^2 + y^2), 2y \cos(x^2 + y^2), -2z \rangle$.
2. (i) $\nabla f|_P = \langle 2, 4, 6 \rangle$, $\mathbf{n} = \langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \rangle$, $D_{\mathbf{n}}f = 0$,
- (ii) $\nabla f|_P = \langle e, -e \rangle$, $\mathbf{n} = \langle \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \rangle$, $D_{\mathbf{n}}f = -\frac{e}{\sqrt{5}}$,
- (iii) $\nabla f|_P = \langle e, 0 \rangle$, $\mathbf{n} = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \rangle$, $D_{\mathbf{n}}f = \frac{e}{\sqrt{2}}$.
6. $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, (ii) $3x^2 + 2y^2 + z^2$, (iii) e^{xyz} , (iv) $xy + yz + zx$, (v) $(x^2 + y^2)^{1/2}$,
(vi) $(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$.

5.4 Απόκλιση

5.4.1 Ορισμός και ιδιότητες

Ορισμός 5.4.1 - 1 (απόκλιση). Έστω ένα διανυσματικό πεδίο που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, όταν P , Q και R οι συνιστώσες της \mathbf{F} ως προς το ορθογώνιο σύστημα αξόνων $Oxyz$ και ότι η \mathbf{F} έχει τουλάχιστον 1ης τάξης μερικές παραγώγους σε κάθε σημείο (x, y, z) του πεδίου ορισμού της. Τότε ορίζεται ως απόκλιση (divergence)¹² της \mathbf{F} και συμβολίζεται με $\operatorname{div} \mathbf{F}$ ή $\nabla \cdot \mathbf{F}$, η βαθμωτή συνάρτηση

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (5.4.1 - 1)$$

Αντίστοιχος ορισμός δίνεται, όταν $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$.

¹²Βλέπε <http://en.wikipedia.org/wiki/Divergence>

Σημείωση 5.4.1 - 1

Είναι $\nabla \cdot \mathbf{F} \neq \mathbf{F} \cdot \nabla$, διαφορετικά το $\nabla \cdot \mathbf{F}$ είναι συμβολισμός και δεν έχει την έννοια του εσωτερικού γινομένου.

Ορισμός 5.4.1 - 2. Αν $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, τότε το διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} λέγεται **σωληνοειδές**.

Ιδιότητες της απόκλισης

- i) $\nabla \cdot (\lambda \mathbf{F} + \mu \mathbf{G}) = \lambda \nabla \cdot \mathbf{F} + \mu \nabla \cdot \mathbf{G}$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
 ii) $\nabla \cdot (f \mathbf{G}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{G} + f (\nabla \cdot \mathbf{G})$, όταν η f είναι βαθμωτή συνάρτηση.

Παράδειγμα 5.4.1 - 1

Αν

$$\mathbf{F} = x^2 z \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} - z^3 \mathbf{k},$$

να υπολογισθεί η απόκλιση στο σημείο $(1, -1, 2)$.

Λύση. Είναι

$$P(x, y, z) = x^2 z, \quad Q(x, y, z) = y^2 \quad \text{και} \quad R(x, y, z) = -z^3,$$

οπότε

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 2xz + 2y - 3z^2.$$

Τότε $\nabla \cdot \mathbf{F}_{(1,-1,2)} = -10$. ■

5.4.2 Τελεστής Laplace

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x, y, z)$ έχει μερικές παραγώγους τουλάχιστον 2ης τάξης σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Τότε η κλίση της είναι

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k},$$

οπότε για την απόκλιση της διανυσματικής συνάρτησης ∇f έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla f) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (5.4.2 - 1)$$

Δίνονται στη συνέχεια οι παρακάτω ορισμοί:

Ορισμός 5.4.2 - 1 (τελεστής Laplace). *Ο τελεστής Laplace (Laplacian operator) ¹³ είναι ένας διαφορικός τελεστής 2ης τάξης και ορίζεται στο \mathbb{R}^2 ως*

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (5.4.2 - 2)$$

αντίστοιχα στο \mathbb{R}^3 ως

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (5.4.2 - 3)$$

Σύμφωνα και με την (5.4.2 - 1) έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 5.4.2 - 2 (Laplacian συνάρτησης). *Έστω η συνάρτηση $f(x, y)$ $|S \subseteq \mathbb{R}^2$, αντίστοιχα $f(x, y, z) | S \subseteq \mathbb{R}^3$ με S ανοικτό σύνολο, που έχει τουλάχιστον 2ης τάξης μερικές παραγώγους στο S . Τότε η Laplacian της f ορίζεται ως*

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad (5.4.2 - 4)$$

αντίστοιχα

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (5.4.2 - 5)$$

Ειδικά, όταν

$$\nabla^2 f = 0 \quad (5.4.2 - 6)$$

η f λέγεται **αρμονική** και η (5.4.2 - 6) ορίζει την **εξίσωση του Laplace** (Laplace's equation).¹⁴

¹³Βλέπε http://en.wikipedia.org/wiki/Laplacian_operator

¹⁴Βλέπε <http://en.wikipedia.org/wiki/Laplace%27s-equation>

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η απόκλιση των διανυσματικών πεδίων που περιγράφονται από τις παρακάτω διανυσματικές συναρτήσεις \mathbf{F} :

i) $(x^2 + yz)\mathbf{i} + (y^2 + zx)\mathbf{j} + (z^2 + xy)\mathbf{k}$,

ii) $(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) / (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$,

iii) $e^{xy}\mathbf{i} + \cos xy\mathbf{j} + \cos xz\mathbf{k}$,

iv) $x^2 \sin y\mathbf{i} + y^2 \sin xz\mathbf{j} + xy \sin(\cos z)\mathbf{k}$.

2. Αν

$$\mathbf{F} = yz^2\mathbf{i} - 3xz^2\mathbf{j} + 2xyz\mathbf{k}, \quad \mathbf{G} = 3x\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} - xy\mathbf{k}$$

και $f = xyz$, να υπολογισθούν τα

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}), \quad \nabla \cdot (f\mathbf{G}) \quad \text{και} \quad \mathbf{G} \cdot (\nabla f).$$

3. Δείξτε ότι οι παρακάτω διανυσματικές συναρτήσεις περιγράφουν σωληνοειδή πεδία:

i) $\mathbf{F} = 3y^4z^2\mathbf{i} + 4x^3z^2\mathbf{j} - 3x^2y^2\mathbf{k}$,

ii) $\mathbf{G} = (x + 3y)\mathbf{i} + (y - 2z)\mathbf{j} + (x - 2z)\mathbf{k}$.

4. Των παρακάτω συναρτήσεων $f = f(x, y, z)$ να υπολογιστεί το $\nabla^2 f$, όταν

i) $f = 3x^2z - y^2z^3 + 4x^3y + 2x - 3y - 5$ στο σημείο $P(1, -1, 2)$,

ii) $f = \ln r$ όταν $r = |\mathbf{r}|$ διάνυσμα θέσης,

iii) $f = r^n$; $n = 1, 2, \dots$,

iv) $f = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^2} \right)$.

5. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f = r^{-1}$, όταν $r = |\mathbf{r}|$ διάνυσμα θέσης είναι αρμονική.

Απαντήσεις

1. (i) $2(x + y + z)$, (ii) 0, (iii) $ye^{xy} - x(\sin xy + \sin xz)$, (iv) $2(x \sin y + y \sin xz) - xy \cos(\cos z) \sin z$.
2. $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = 3 + 2xy$, $\nabla \cdot (f\mathbf{G}) = y^2z^3 + x^2z(4y^2 - 3z^2)$,
 $\mathbf{G} \cdot (\nabla f) = x[-xy^2 + z(3y + 4z)]$.
3. Προφανής. 4. (i) $\nabla^2 f|_P = [24xy + 6z - 6y^2z - 2z^3]_P = -40$, (ii) $(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$,
 (iii) $n(1+n)(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}-1}$, (iv) $f = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$, $\nabla^2 f = 2(x^2 + y^2 + z^2)^{-2}$.
6. Συμμετρική ως προς x, y, z προφανής.

5.5 Στροβιλισμός

5.5.1 Ορισμός και ιδιότητες

Ορισμός 5.5.1 - 1 (στροβιλισμός). Έστω ένα διανυσματικό πεδίο που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, όπου P, Q και R οι συνιστώσες της \mathbf{F} ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων $Oxyz$ και για την οποία υποτίθεται ότι υπάρχουν τουλάχιστον οι 1ης τάξης μερικές παράγωγοι σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Τότε ορίζεται ως στροβιλισμός (curl)¹⁵ της \mathbf{F} και συμβολίζεται με $\text{curl } \mathbf{F}$ ή $\text{rot } \mathbf{F}$ ή και $\nabla \times \mathbf{F}$, η διανυσματική συνάρτηση

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (5.5.1 - 1)$$

Από την (5.5.1 - 1) προκύπτει ότι

$$\nabla \times \mathbf{F} = (R_y - Q_z)\mathbf{i} + (P_z - R_x)\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\mathbf{k}. \quad (5.5.1 - 2)$$

Ιδιότητες του στροβιλισμού

Οι περισσότερες χρησιμοποιούμενες είναι:

$$\text{i) } \nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G},$$

¹⁵Βλέπε [http://en.wikipedia.org/wiki/Curl_\(mathematics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Curl_(mathematics))

- ii) $\nabla \times (\lambda \mathbf{F}) = \lambda \nabla \times \mathbf{F}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$,
- iii) $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$, δηλαδή
ο στροβιλισμός της κλίσης είναι μηδέν,
- iv) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$
η απόκλιση του στροβιλισμού είναι μηδέν.

Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

Παράδειγμα 5.5.1 - 1

Έστω $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + 2xy\mathbf{k}$. Τότε

$$P(x, y, z) = yz, \quad Q(x, y, z) = zx \quad \text{και} \quad R(x, y, z) = 2xy,$$

οπότε

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & 2xy \end{vmatrix} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j},$$

δηλαδή το διάνυσμα $\nabla \times \mathbf{F}$ ανήκει στο xy -επίπεδο.

5.5.2 Αστρόβιλα διανυσματικά πεδία

Ορισμός 5.5.2 - 1 (αστρόβιλο πεδίο). Έστω ένα διανυσματικό πεδίο που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση \mathbf{F} . Τότε το πεδίο θα λέγεται αστρόβιλο (*irrotational vector field*),¹⁶ όταν ισχύει

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (5.5.2 - 1)$$

Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση το πεδίο θα λέγεται στροβιλό (*vortex field*).

¹⁶Βλέπε http://en.wikipedia.org/wiki/Irrotational_field#Irrotational_vector_fields

Παράδειγμα 5.5.2 - 1

Το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = 4x^3y^3z^2 \mathbf{i} + 3x^4y^2z^2 \mathbf{j} + 2x^4y^3z \mathbf{k}$$

είναι αστρόβιλο, επειδή

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4x^3y^3z^2 & 3x^4y^2z^2 & 2x^4y^3z \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 5.5.2 - 1. Ένα διανυσματικό πεδίο είναι αστρόβιλο, όταν είναι συντηρητικό και αντίστροφο.

Εφαρμογές του θεωρήματος θα δοθούν στο Μάθημα των Επικαμπύλιων και Επιφανειακών Ολοκληρωμάτων.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί ο στροβιλισμός των διανυσματικών πεδίων που περιγράφονται από τις παρακάτω διανυσματικές συναρτήσεις \mathbf{F} :

i) $x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$,

ii) $x \mathbf{i} + yz \mathbf{j} - (x^2 + z^2) \mathbf{k}$.

2. Δείξτε ότι το παρακάτω πεδίο είναι αστρόβιλο

$$\mathbf{F} = 6xy \mathbf{i} + (3x^2 - 3y^2z^2) \mathbf{j} - 2y^3z \mathbf{k}.$$

Απαντήσεις

1. (i) $\mathbf{0}$, (ii) $-y \mathbf{i} + 2x \mathbf{j}$. 2. Προφανής.

5.6 Βιβλιογραφία

- [1] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978-960-351-874-7.
- [2] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960-351-453-5/978-960-351-453-4.
- [3] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός II*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978-960-524-184-1.
- [4] Marsden, J.E. & Tromba, A.J. (2011). *Διανυσματικός Λογισμός*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978-960-730-945-7.
- [5] Spiegel, M. (2009). *Vector Analysis*. McGraw-Hill Education (2nd Ed.). ISBN 978-007-161-545-7.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- <http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm>
- <http://mathworld.wolfram.com/>
- <http://eom.springer.de/>

Μάθημα 6

ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

6.1 Διπλά ολοκληρώματα

6.1.1 Εισαγωγή

Για την καλύτερη κατανόηση του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών, δηλαδή του **διπλού ολοκληρώματος**, κρίνεται απαραίτητο αρχικά να γίνει περιληπτικά μια υπενθύμιση του αντίστοιχου ορισμού του ορισμένου ολοκληρώματος από το Μάθημα *Ορισμένο Ολοκλήρωμα* για τη συνάρτηση, έστω $f(x) \mid [a, b]$, δηλαδή του

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx. \quad (6.1.1 - 1)$$

Τότε υποθέτοντας ότι η $f(x)$ είναι συνεχής και για ευκολία ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, γεωμετρικά ο αριθμός $I(f)$ ισούται με το **εμβαδόν** E του καμπυλόγραμμου τραπεζίου, που ορίζεται από τον x -άξονα, το διάγραμμα της συνάρτησης $y = f(x)$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$ (Σχ. 6.1.1 - 1).

Για την προσέγγιση του E το $[a, b]$ υποδιαιρείται σε διαστήματα πλάτους Δx ως εξής:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

και στη συνέχεια θεωρείται το παρακάτω άθροισμα των εμβαδών των σχηματιζόμενων ορθογωνίων:

$$f(x_1^*) \Delta x + f(x_2^*) \Delta x + \dots + f(x_n^*) \Delta x,$$

όταν x_i^* μια επιλογή ενδιάμεσων σημείων και $f(x_i^*)$; $i = 1, 2, \dots, n$ τα ύψη. Τότε το εμβαδόν E , δηλαδή η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος (6.1.1 - 1), ισούται με την οριακή

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx && (6.1.1 - 2) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x_1^*) \Delta x + f(x_2^*) \Delta x + \dots + f(x_n^*) \Delta x], \end{aligned}$$

εφόσον αυτή υπάρχει.

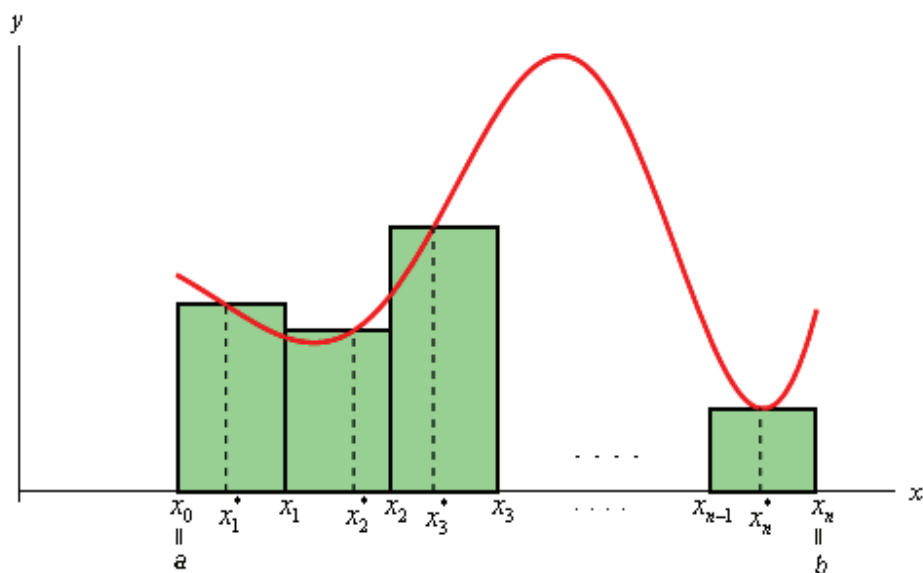
6.1.2 Ορισμός

Γενικεύοντας την παραπάνω εισαγωγή, έστω η συνάρτηση $f(x, y)$ με πεδίο ορισμού το $D = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$, που είναι συνεχής και για ευκολία μη αρνητική για κάθε $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ (Σχ. 6.1.2 - 1). Όπως και στην περίπτωση του ορισμένου ολοκληρώματος (6.1.1 - 1), το διάστημα $[a, b]$ υποδιαιρείται σε n -υποδιαστήματα πλάτους Δx από τα σημεία x_i ; $i = 0, 1, \dots, n$ και το διάστημα $[c, d]$ σε m -υποδιαστήματα πλάτους Δy από τα σημεία y_j ; $j = 0, 1, \dots, m$ (Σχ. 6.1.2 - 2 a).

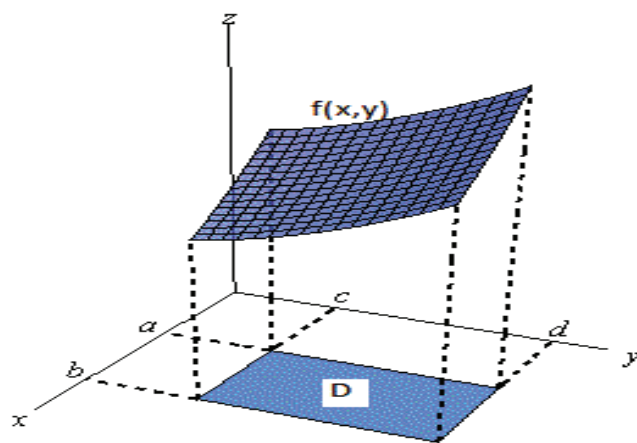
Τότε χρησιμοποιώντας αντίστοιχη γεωμετρική ερμηνεία με εκείνη του ολοκληρώματος (6.1.1 - 1), το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D f(x, y) dx dy \quad (6.1.2 - 1)$$

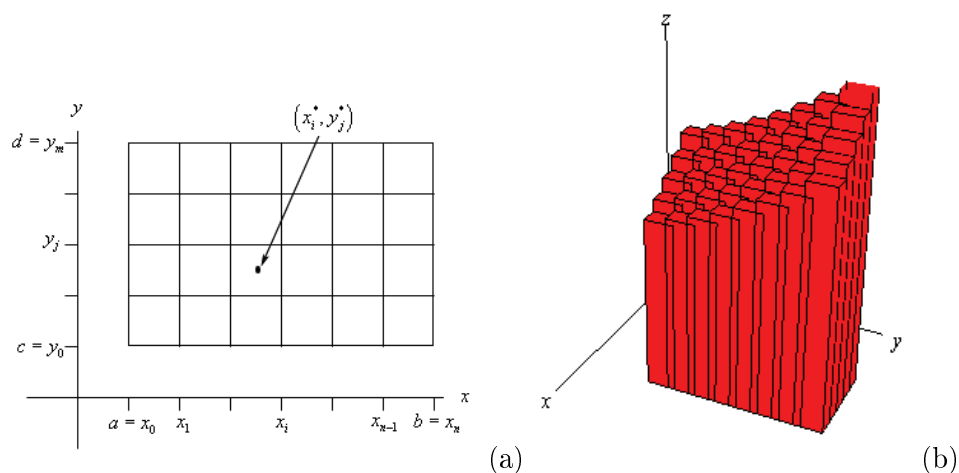
θα ισούται με τον όγκο V του στερεού, που έχει βάσεις το $[a, b] \times [c, d]$ και την επιφάνεια S , ενώ οι ακμές του είναι παράλληλες προς τον z -άξονα. Έστω



Σχήμα 6.1.1 - 1: γεωμετρικός υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος (6.1.1 – 1).



Σχήμα 6.1.2 - 1: το πεδίο ορισμού $D = [a, b] \times [c, d]$ και η επιφάνεια $f(x, y)$.



Σχήμα 6.1.2 - 2: (a) Η διαμέριση του $[a, b] \times [c, d]$ και τα ενδιάμεσα σημεία (x_i^*, y_j^*) . (b) Τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα που προσεγγίζουν τον όγκο V στην (6.1.2 - 2).

$\Delta A = \Delta x \Delta y$ το εμβαδόν του στοιχειώδους ορθογωνίου παραλληλογράμμου της παραπάνω διαμέρισης του $[a, b] \times [c, d]$ και $f(x_i^*, y_j^*)$ το ύψος του ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου που προκύπτει από τα ενδιάμεσα σημεία (x_i^*, y_j^*) και αντιστοιχεί στα επιμέρους ορθογώνια (Σχ. 6.1.2 - 2 b).

Τότε ο όγκος V (Σχ. 6.1.2 - 2 b) προσεγγίζεται ως εξής:

$$V \approx f(x_1^*, y_1^*) \Delta A + f(x_2^*, y_1^*) \Delta A + \dots + f(x_n^*, y_m^*) \Delta A. \quad (6.1.2 - 2)$$

Αποδεικνύεται στην Ανάλυση ότι, όταν η διαγώνιος των παραπάνω ορθογωνίων τείνει στο μηδέν καθώς τα $n, m \rightarrow +\infty$, το άθροισμα (6.1.2 - 2) συγκλίνει προς έναν αριθμό, έστω I , που είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των σημείων (x_i, y_j) .

¹Σύμφωνα και με τα παραπάνω έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 6.1.2 - 1 (διπλού ολοκληρώματος). Ορίζεται ως διπλό ολοκλή-

¹Ο αναγνώστης, για μια πληρέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4] και: http://en.wikipedia.org/wiki/Double_integral

ρωμα (double integral) της $f(x, y)$ στο $D = [a, b] \times [c, d]$, η οριακή τιμή

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A, \quad (6.1.2 - 3)$$

εφόσον αυτή υπάρχει.

Ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται για κάθε φραγμένο πεδίο ορισμού D της f .

6.1.3 Ιδιότητες

Οι κυριότερες ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος που δίνονται στη συνέχεια με τη μορφή θεωρημάτων είναι γενικεύσεις των αντίστοιχων ιδιοτήτων του ορισμένου ολοκληρώματος των συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Το πεδίο ορισμού, έστω D , των συναρτήσεων υποτίθεται ότι είναι κλειστό και φραγμένο, ενώ για την αποφυγή τετριμμένων περιπτώσεων το D υποτίθεται ότι δεν είναι σημείο ή ευθύγραμμο τμήμα.

Θεώρημα 6.1.3 - 1 (γραμμική). Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες επί του D και $k, \lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned} \iint_D [k f(x, y) + \lambda g(x, y)] dx dy &= k \iint_D f(x, y) dx dy \\ &+ \lambda \iint_D g(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Η ιδιότητα γενικεύεται.

Θεώρημα 6.1.3 - 2 (αθροιστική). Αν η περιοχή D αποτελείται από τις χωριστές περιοχές D_1 και D_2 , δηλαδή $D = D_1 \cup D_2$ και $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, τότε

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy,$$

ενώ, αν $D_1 \cap D_2 = \tilde{D}$, δηλαδή υπάρχει επικάλυψη των περιοχών D_1 και D_2 στην περιοχή \tilde{D} , τότε

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy \\ &\quad - \iint_{\tilde{D}} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Εφαρμογή της ιδιότητας θα γίνει στο Παράδειγμα 6.1.4 - 13.

Θεώρημα 6.1.3 - 3 (σύγκρισης). Αν $f(x, y) \geq g(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in D$ και οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες επί του D , τότε

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D g(x, y) dx dy.$$

Ειδικά, αν $g(x, y) > 0$ για κάθε $(x, y) \in D$, τότε

$$\iint_D g(x, y) dx dy > 0.$$

Θεώρημα 6.1.3 - 4. Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη επί του D , τότε

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy.$$

Θεώρημα 6.1.3 - 5. Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη επί του D και το D είναι αμελητέου εμβαδού, τότε

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 0.$$

Θεώρημα 6.1.3 - 6 (μέσης τιμής). Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη επί του D , τότε

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) A,$$

όπου A το εμβαδόν του τόπου D και $(x_0, y_0) \in D$.

6.1.4 Υπολογισμός σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος (6.1.2 - 1) εξαρτάται από τη μορφή του πεδίου ορισμού D . Συγκεκριμένα έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

I. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$

δηλαδή και οι δύο μεταβλητές μεταβάλλονται σε διαστήματα με σταθερά άκρα ή διαφορετικά το πεδίο ορισμού D είναι ένα **ορθογώνιο παραλληλόγραμμο**.

Ο υπολογισμός στην περίπτωση αυτή γίνεται σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 6.1.4 - 1 (Fubini). Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού

$$\begin{aligned} D &= [a, b] \times [c, d] \\ &= \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \end{aligned}$$

είναι ολοκληρώσιμη επί του D , τότε

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy. \end{aligned} \quad (6.1.4 - 1)$$

Παρατηρήσεις 6.1.4 - 1

- i) Σύμφωνα με το Θεώρημα (6.1.4–1) η τιμή του διπλού ολοκληρώματος (6.1.2–1) είναι ανεξάρτητη από τη σειρά ολοκλήρωσης στην (6.1.4–1).
- ii) Στον τύπο (6.1.4–1), όταν γίνεται ολοκλήρωση ως προς μια μεταβλητή, έστω την y , τότε η x θεωρείται **σταθερά**.

Παράδειγμα 6.1.4 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D (x^2y + y^3) dx dy, \quad \text{όταν } D = [0, 1] \times [0, 2].$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο (6.1.4–1) έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[\int_0^2 \overbrace{(x^2y + y^3)}^{x \text{ σταθερά}} dy \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{4} y^4 \right]_{y=0}^{y=2} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^2 2^2 + \frac{1}{4} 2^4 - 0 \right) dx = \int_0^1 (2x^2 + 4) dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^3 + 4x \right]_0^1 = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Εναλλακτικά ο παραπάνω υπολογισμός είναι δυνατόν να γίνει αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης ως εξής:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left[\int_0^1 \overbrace{(x^2y + y^3)}^{y \text{ σταθερά}} dx \right] dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{3} x^3 y + \frac{1}{2} x y^3 \right]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} y + y^3 - 0 \right) dy = \left[\frac{y^2}{6} + \frac{y^4}{4} \right]_0^2 = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Στο εξής θα εφαρμόζεται ο ευκολότερος κατά περίπτωση τύπος στην (6.1.4–1).

Παράδειγμα 6.1.4 - 2

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D x e^{xy} dx dy, \quad \text{όταν } D = [-1, 2] \times [0, 1].$$

Λύση. Έχουμε

$$I = \int_{-1}^2 \left[\int_0^1 x e^{xy} dy \right] dx = \int_{-1}^2 \left[\int_0^1 \overbrace{(xy)_y}^{x=(xy)_y} e^{xy} dy \right] dx$$

επειδή η ολοκλήρωση γίνεται ως προς y πρέπει ναδημιουργηθεί η παράγωγος $(xy)_y$ της e^{xy} ,(μορφή $f'(x)e^{f(x)}$)

$$= \int_{-1}^2 \left[\int_0^1 (xy)_y e^{xy} dy \right] dx = \int_{-1}^2 e^{xy} \Big|_{y=0}^{y=1} dx$$

$$= \int_{-1}^2 (e^x - 1) dx = [e^x - x]_{-1}^2 = e^2 - e^{-1} - 3.$$

Αν η ολοκλήρωση γίνει πρώτα ως προς x , τότε απαιτείται η εφαρμογή της παραγοντικής ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος. ■

Παράδειγμα 6.1.4 - 3

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{(2x + 3y)^2}, \quad \text{όταν } D = [0, 1] \times [1, 2].$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^2 \left[\int_0^1 (2x+3y)^{-2} dx \right] dy \\
 &= \int_1^2 \left[\int_0^1 \frac{1}{2} (2x+3y)_x (2x+3y)^{-2} dx \right] dy \\
 &\quad \text{όμοια επειδή η ολοκλήρωση γίνεται ως προς } x \text{ πρέπει να} \\
 &\quad \text{δημιουργηθεί η παράγωγος } (2x+3y)_x \text{ της } (2x+3y)^{-2}, \\
 &\quad \text{(μορφή } f'(x) f^a(x)) \\
 &= \int_1^2 \left[\frac{1}{2} \frac{(2x+3y)^{-2+1}}{-2+1} dx \right] dy = \int_1^2 \left[-\frac{1}{2} (2x+3y)^{-1} \right]_{x=0}^{x=1} dy \\
 &= -\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dy}{2+3y} - \left(-\frac{1}{2} \right) \int_1^2 \frac{dy}{3y} \\
 &= -\frac{1}{2} \int_1^2 \overbrace{\frac{dy}{2+3y}}^{\frac{1}{3} \ln|2+3y|} + \frac{1}{6} \int_1^2 \overbrace{\frac{dy}{y}}^{\ln|y|} \\
 &= -\frac{1}{6} (\ln 8 - \ln 2 - \ln 5).
 \end{aligned}$$

■

Άσκηση

Να υπολογιστούν τα παρακάτω διπλά ολοκληρώματα:

i)

$$\iint_D xy(x^2 + y^2) dx dy, \quad \text{όταν } (x, y) \in D,$$

$$\text{και } D = [0, 1] \times [0, 1],$$

ii)

$$\iint_D \cos(x + y) dx dy, \quad \text{όταν } D = [0, \pi] \times [0, \pi],$$

iii)

$$\iint_D \sin^2 x \cos y dx dy, \quad \text{όταν } D = [0, \pi/2] \times [0, \pi],$$

iv)

$$\iint_D \frac{x dx dy}{x + y}, \quad \text{όταν } D = [-1, 1] \times [-1, 1],$$

v)

$$\iint_D \frac{dx dy}{4 + y^2}, \quad \text{όταν } D = [-1, 1] \times [0, \pi],$$

vi)

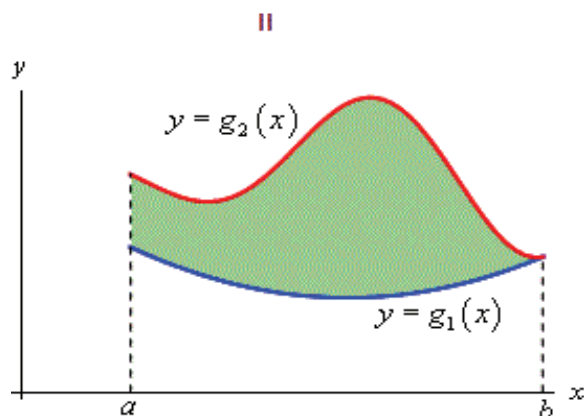
$$\iint_D y^{-3} e^{x/y} dx dy, \quad \text{όταν } D = [0, 1] \times [1, 2],$$

vii)

$$\iint_D xy e^{x^2+y^2} dx dy, \quad \text{όταν } D = [0, 1] \times [0, 1].$$

Απαντήσεις

i) $\frac{1}{4}$, ii) -4 , iii) 0 , iv) 1 , v) $\tan^{-1}(\frac{\pi}{2})$, vi) $-\frac{1}{2} - \sqrt{e} + e$,
vii) $\frac{1}{4}(-1 + e)^2$.



Σχήμα 6.1.4 - 1: Περίπτωση II: το πεδίο ορισμού $D = \{a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ της συνάρτησης $f(x, y)$.

II. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$

Τότε (Σχ. 6.1.4 - 1)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \overbrace{f(x, y)}^{x \text{ σταθερά}} dy \right] dx, \quad (6.1.4 - 1)$$

δηλαδή γίνεται **πρώτα** η ολοκλήρωση ως προς τη μεταβλητή y , που μεταβάλλεται συναρτήσει της x .

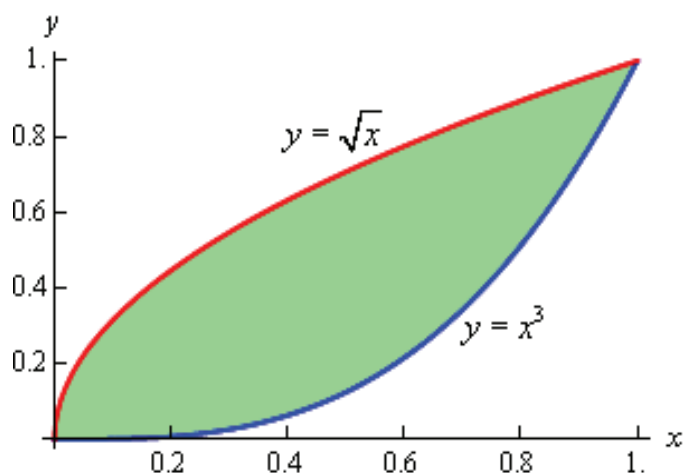
Παράδειγμα 6.1.4 - 4

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D (4xy - y^3) dx dy, \quad \text{όταν}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\} \quad (\text{Σχ. 6.1.4 - 2}).$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο (6.1.4 - 1) έχουμε



Σχήμα 6.1.4 - 2: Παράδειγμα 6.1.4 - 6 με πεδίο ορισμού $D = \{0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \left[\int_{x^3}^{\sqrt{x}} \overbrace{(4xy - y^3)}^{x \text{ σταθερά}} dy \right] dx = \int_0^1 \left[2xy^2 - \frac{y^4}{4} \right]_{y=x^3}^{y=\sqrt{x}} dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{7}{4} x^2 - 2x^7 + \frac{1}{4} x^{12} \right) dx \\
 &= \left[\frac{7}{12} x^3 - \frac{1}{4} x^8 + \frac{1}{52} x^{13} \right]_0^1 = \frac{55}{156}.
 \end{aligned}$$

■

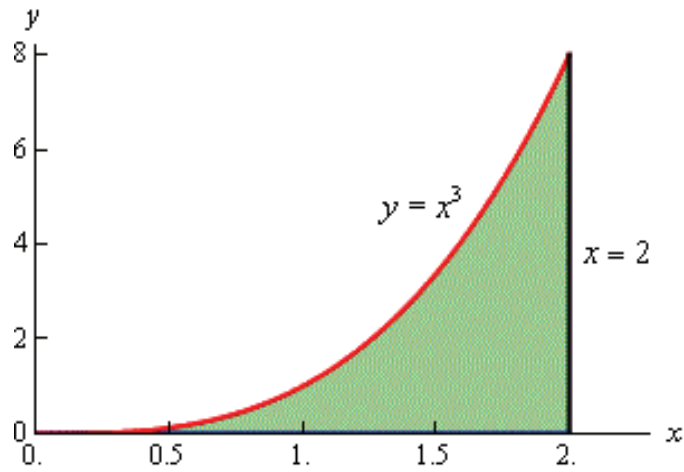
Παράδειγμα 6.1.4 - 5

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D \sqrt{1+x^4} dx dy, \quad \text{όταν}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^3\} \quad (\text{Σχ. 6.1.4 - 3}).$$

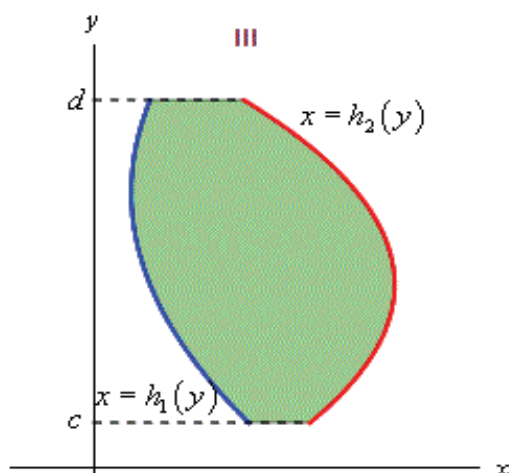
Λύση. Έχουμε



Σχήμα 6.1.4 - 3: Παράδειγμα 6.1.4 - 5 με πεδίο ορισμού $D = \{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^3\}$.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^2 \left[\int_0^{x^3} \sqrt{1+x^4} dy \right] dx = \int_0^2 \sqrt{1+x^4} \left[\int_0^{x^3} dy \right] dx \\
 &= \int_0^2 \sqrt{1+x^4} y \Big|_{y=0}^{y=x^3} dx = \int_0^2 x^3 \sqrt{1+x^4} dx \\
 &= \int_0^2 \overbrace{\frac{1}{4} (1+x^4)^{\frac{1}{2}+1}}^{x^3} dx = \\
 &= \frac{1}{4} \frac{(1+x^4)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{6} (1+x^4)^{3/2} \Big|_0^2 \\
 &= \frac{1}{6} (17^{3/2} - 1) \approx 11.51547.
 \end{aligned}$$

■



Σχήμα 6.1.4 - 4: το πεδίο ορισμού $D = \{c \leq x \leq d, \quad h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$ της συνάρτησης $f(x, y)$.

$$\text{III.} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad c \leq y \leq d, \quad h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

Τότε (Σχ. 6.1.4 - 4)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \overbrace{f(x, y)}^{y \text{ σταθερά}} dx \right] dy, \quad (6.1.4 - 2)$$

δηλαδή γίνεται **πρώτα** η ολοκλήρωση ως προς τη μεταβλητή x , που μεταβάλλεται συναρτήσει της y .

Παράδειγμα 6.1.4 - 6

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy, \quad \text{όταν} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2, \quad y \leq x \leq y^3\}.$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο (6.1.4 – 2) έχουμε

$$I = \int_1^2 \left[\int_y^{y^3} e^{\frac{x}{y}} dx \right] dy = \int_1^2 \left[\int_y^{y^3} y \left(\frac{x}{y} \right)_x e^{\frac{x}{y}} dx \right] dy$$

πρέπει να δημιουργηθεί η παράγωγος $\left(\frac{x}{y} \right)_x$ της $e^{\frac{x}{y}}$

$$= \int_1^2 \left[y e^{\frac{x}{y}} \right]_{x=y}^{x=y^3} dy = \int_1^2 (y e^{y^2} - y e^1)$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{y^2} - \frac{e}{2} y^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2} e^4 - 2e.$$

■

IV. Γενική περίπτωση: φραγμένη περιοχή του \mathbb{R}^2

Έστω D το πεδίο ορισμού. Τότε γίνεται κατάλληλη διαμέριση του D , έτσι ώστε να προκύψει τελικά μια από τις Περιπτώσεις II ή III. Η μεθοδολογία που εφαρμόζεται στις περιπτώσεις δίνεται στη συνέχεια.

Παράδειγμα 6.1.4 - 7

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D (16xy + 200) dx dy,$$

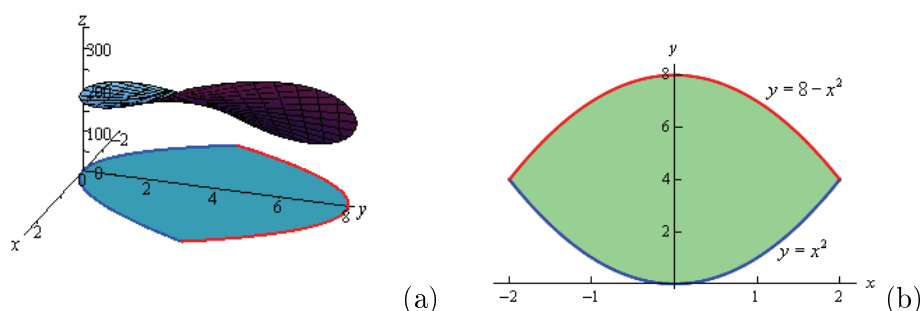
όταν D η περιοχή που περιορίζεται από τις καμπύλες

$$y = x^2 \quad \text{και} \quad y = 8 - x^2 \quad (\text{Σχ. 6.1.4 - 5}).$$

Λύση. Αρχικά υπολογίζονται τα κοινά σημεία των δύο καμπυλών από τις εξισώσεις τους ως εξής:

$$y = x^2 \quad \text{και} \quad y = 8 - x^2 \quad \text{οπότε} \quad x^2 = 8 - x^2,$$

δηλαδή $x = \pm 2$.



Σχήμα 6.1.4 - 5: Παράδειγμα 6.1.4 - 7. Όταν $-2 \leq x \leq 2$, τότε το y μεταβάλλεται από την $y = x^2$ μπλε έως την $y = 8 - x^2$ κόκκινη καμπύλη, δηλαδή $x^2 \leq y \leq 8 - x^2$.

Επειδή το x πρέπει να ανήκει σε φραγμένο διάστημα, προκύπτει ότι

$$-2 \leq x \leq 2.$$

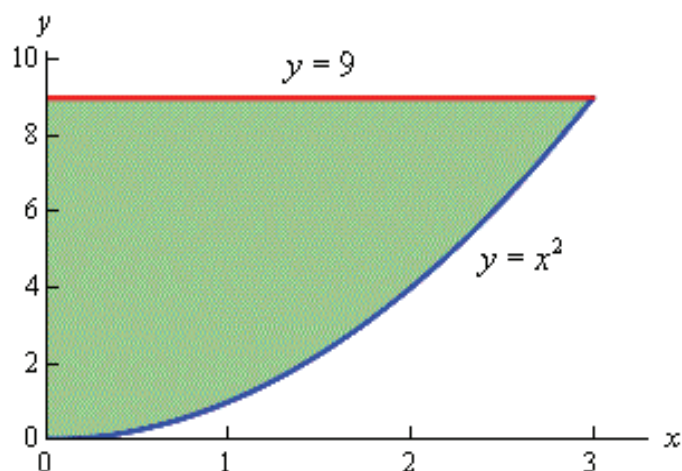
Εφόσον έχει προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού της μεταβλητής x (Περίπτωση II), θα πρέπει το πεδίο ορισμού της y να είναι της μορφής $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$. Επομένως σύμφωνα και με το Σχ. 6.1.4 - 5 b το πεδίο ορισμού D γράφεται ως εξής:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, \quad x^2 \leq y \leq 8 - x^2\}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^2 \left[\int_{x^2}^{8-x^2} (16xy + 200) dy \right] dx = \int_{-2}^2 (8xy^2 + 200y) \Big|_{y=x^2}^{y=8-x^2} dx \\ &= \int_{-2}^2 (-128x^3 - 400x^2 + 512x + 1600) dx \\ &= \left[-32x^4 - \frac{400}{3}x^3 + 256x^2 + 1600x \right]_{-2}^2 = \frac{12800}{3}. \end{aligned}$$

■



Σχήμα 6.1.4 - 6: Παράδειγμα 6.1.4 - 12.

Παράδειγμα 6.1.4 - 8

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D x^2 y \, dx \, dy,$$

όταν D η περιοχή που περιορίζεται από τις καμπύλες

$$y = 9 \quad \text{και} \quad y = x^2 \quad \text{με} \quad x \geq 0.$$

Λύση. Από τις εξισώσεις των καμπυλών προκύπτει $x^2 = 9$, οπότε, επειδή $x \geq 0$, είναι $x = 3$. Άρα πρέπει

$$0 \leq x \leq 3.$$

Όμοια εφόσον έχει προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού της μεταβλητής x (Περίπτωση II), θα πρέπει το πεδίο ορισμού της y να είναι της μορφής $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$. Άρα το πεδίο ορισμού D σύμφωνα και με το Σχ. 6.1.4 - 7) γράφεται:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, \quad x^2 \leq y \leq 9\}.$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \left[\int_{x^2}^9 x^2 y \, dy \right] dx = \int_0^3 \frac{x^2 y^2}{2} \Big|_{y=x^2}^{y=9} dx \\ &= \int_0^3 \left(\frac{81 x^2}{2} - \frac{x^6}{2} \right) dx = \frac{27 x^3}{2} - \frac{x^7}{14} \Big|_0^3 = \frac{1458}{7}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 6.1.4 - 9

Όμοια το

$$I = \iint_D (x^2 + y^3) \, dx \, dy, \quad \text{όταν } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq 9x, x \leq 3\}.$$

Λύση. Επειδή $y^2 \leq 9x$, πρέπει $x \geq 0$. Άρα πρέπει

$$0 \leq x \leq 3.$$

Είναι όμως γνωστό ότι, αν

$$x^2 \leq a \quad \text{με } a > 0, \quad \text{τότε } -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}.$$

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω στην ανισότητα $y^2 \leq 9x$ προκύπτει ότι

$$-3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}.$$

Άρα ο τόπος D γράφεται (Περίπτωση II)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, \quad -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \left[\int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} (x^2 + y^3) \, dy \right] dx = \int_0^3 \left[x^2 y + \frac{y^4}{4} \right]_{y=-3\sqrt{x}}^{y=3\sqrt{x}} dx \\ &= 6 \int_0^3 x^{5/2} dx = \frac{324\sqrt{3}}{7}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 6.1.4 - 10

Όμοια το

$$I = \iint_D (x^4 + y^2) dx dy, \quad \text{όταν } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, x \geq y^2\}.$$

Λύση. Αρχικά, επειδή

- $x \geq y^2$, πρέπει $x \geq 0$, ενώ όμοια από την
- $y \geq x^2$, προκύπτει ότι και $y \geq 0$.

Στη συνέχεια εκφράζονται τα όρια του x συναρτήσει του y ως εξής: από την $x^2 \leq y$ προκύπτει ότι $x \leq \sqrt{y}$, ενώ είναι $x \geq y^2$.

Άρα (Περίπτωση III)

$$y^2 \leq x \leq \sqrt{y}.$$

Για το διάστημα μεταβολών του y , που πρέπει να είναι της μορφής $c \leq y \leq d$, από την παραπάνω ανισότητα έχουμε

$$y^2 \leq \sqrt{y}, \quad \text{οπότε } y^4 - y \leq 0, \quad \text{δηλαδή } y(y^3 - 1) \leq 0.$$

Επειδή $y \geq 0$, πρέπει $y \leq 1$. Επομένως ο τόπος D γράφεται

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\}.$$

Τότε σύμφωνα με τον τύπο (6.1.4 - 2) έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[\int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^4 + y^2) dx \right] dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{6}{5} y^{5/2} - y^4 - \frac{1}{5} y^{10} \right) dy \\ &= \frac{48}{385}. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 6.1.4 - 11

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D x \, dx \, dy,$$

όταν D είναι ο κυκλικός δίσκος $x^2 + y^2 \leq 1$.

Λύση. Προφανώς ο τόπος D είναι ο μοναδιαίος κύκλος με κέντρο το σημείο $(0,0)$ και ακτίνα $R = 1$, που είναι δυνατόν να περιγραφεί ως εξής (Περίπτωση II):

$$D = \left\{ (x, y) : -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1 \right\}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x \, dy \right] dx \\ &\text{το } x \text{ στο μέσα ολοκλήρωμα θεωρείται σταθερά} \\ &= \int_{-1}^1 x \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dy \right] dx = \int_{-1}^1 x y \Big|_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 x \left[\sqrt{1-x^2} - \left(-\sqrt{1-x^2} \right) \right] dx \\ &= \int_{-1}^1 2x \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_{-1}^1 \overbrace{\left[- (1-x^2)' \right]}^{2x} \sqrt{1-x^2} \, dx \\ &= - \int_{-1}^1 (1-x^2)' (1-x^2)^{1/2} \, dx \\ &= - \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = - \frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2} \Big|_{-1}^1 = 0. \end{aligned}$$

Μια ανάλογη περιγραφή του τόπου είναι επίσης η εξής (Περίπτωση III):

$$D = \left\{ (x, y) : -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, \quad -1 \leq y \leq 1 \right\},$$

οπότε το ολοκλήρωμα στην περίπτωση αυτή θα γράφεται

$$\iint_D x \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx \right] dy = \dots = 0.$$

■

Παρατήρηση 6.1.4 - 1 (μεθοδολογία)

Πολλές φορές απαιτείται η διαμέριση του τόπου D σε δύο ή περισσότερους τόπους. Στις περιπτώσεις αυτές ακολουθείται η παρακάτω μεθοδολογία:

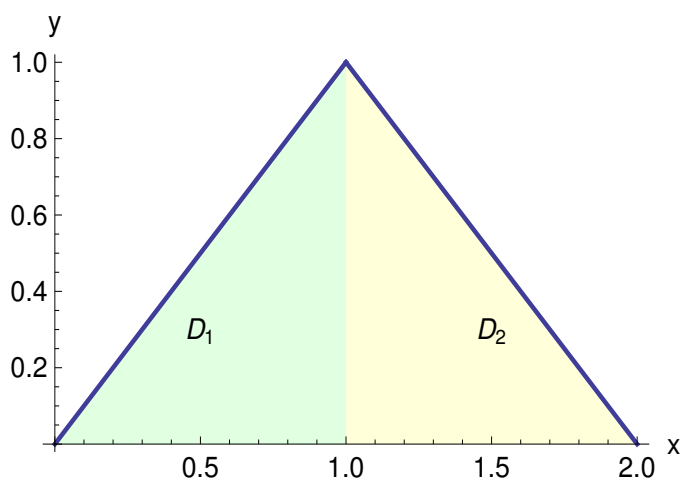
- έστω ότι από τον τόπο D προκύπτει ότι $a \leq x \leq b$ (Περίπτωση II), διαφορετικά προσδιορίζεται το διάστημα αυτό από τα δεδομένα με κατάλληλο συνδυασμό τους.
- Από ένα σημείο $x_0 \in [a, b]$, φέρνουμε κάθετη ευθεία, τέτοια ώστε να τέμνεται ο τόπος D σε δύο τουλάχιστον σημεία, έστω τα A και B .
- Τότε ο τόπος D υποδιαιρείται στους

$$D_1 = \{(x, y) : a \leq x \leq x_0, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

$$D_2 = \{(x, y) : x_0 \leq x \leq b, \quad g_3(x) \leq y \leq g_4(x)\}$$

Ανάλογα, όταν ο τόπος D υποδιαιρείται από ένα σημείο $y_0 \in [c, d]$ (Περίπτωση III).

Εφαρμογές της παραπάνω μεθοδολογίας δίνονται στη συνέχεια.



Σχήμα 6.1.4 - 7: Παράδειγμα 6.1.4 - 12.

Παράδειγμα 6.1.4 - 12

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D y \, dx \, dy,$$

όταν D το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία

$$(0,0), \quad (1,1) \quad \text{και} \quad (2,0).$$

Λύση. Ο τόπος D υποδιαιρείται στους τόπους D_1 και D_2 όπου $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, που περιγράφονται ως εξής (Σχ. 6.1.4 - 7):

$$D_1 = \{(x,y) : 0 \leq y \leq x, \quad 0 \leq x \leq 1\},$$

$$D_2 = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 2-x, \quad 1 \leq x \leq 2\},$$

δηλαδή $x_0 = 1$ (Περίπτωση II).

Επομένως

$$\begin{aligned}
 \iint_D y \, dx \, dy &= \iint_{D_1} y \, dx \, dy + \iint_{D_2} y \, dx \, dy \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^x y \, dy \right] dx + \int_1^2 \left[\int_0^{2-x} y \, dy \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^x dx + \int_1^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{2-x} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx + \int_1^2 \frac{(2-x)^2}{2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{2} \int_1^2 \overbrace{(2-x)^2}^{-(2-x)'(2-x)^2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \frac{(2-x)^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6} \right) = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

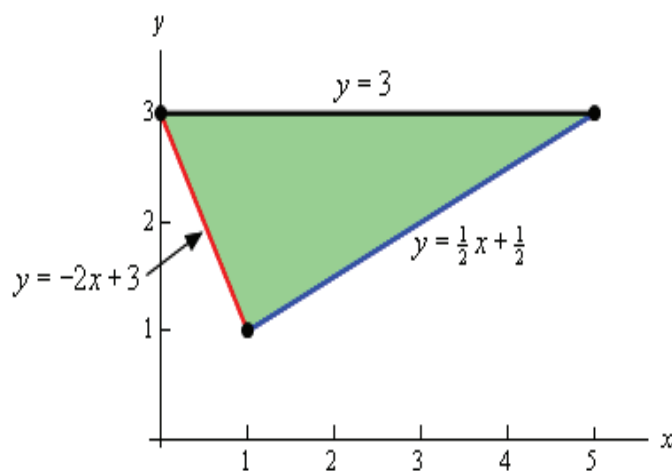
■

Παράδειγμα 6.1.4 - 13

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D (6x^2 - 40y) \, dx \, dy,$$

όταν D το τρίγωνο με κορυφές $(0, 3)$, $(1, 1)$ και $(5, 3)$ (Σχ. 6.1.4 - 8).



Σχήμα 6.1.4 - 8: Παράδειγμα 6.1.4 - 13.

Λύση. Η περιοχή ολοκλήρωσης D είναι δυνατόν να προκύψει στις εξής δύο περιοχές:²

$$D_1 = \{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1, -2x + 3 \leq y \leq 3 \},$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) : 1 \leq x \leq 5, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \leq y \leq 3 \right\},$$

δηλαδή στην περίπτωση αυτή είναι $x_0 = 1$.

²Υπενθυμίζεται ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) δίνεται από τον τύπο

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Τότε σύμφωνα με την αθροιστική ιδιότητα της Παραγράφου 6.1.3 έχουμε:

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{D_1} (6x^2 - 40y) \, dx \, dy + \iint_{D_2} (6x^2 - 40y) \, dx \, dy \\
 &= \int_0^1 \left[\int_{-2x+3}^3 (6x^2 - 40y) \, dy \right] dx \\
 &\quad + \int_1^5 \left[\int_{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}^3 (6x^2 - 40y) \, dy \right] dx \\
 &= \int_0^1 (6x^2y - 20y^2) \Big|_{y=-2x+3}^{y=3} dx + \int_0^1 (6x^2y - 20y^2) \Big|_{y=\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}^{y=3} dx \\
 &= \int_0^1 [12x^3 - 180 + 20(3 - 2x)^2] dx \\
 &\quad + \int_1^5 [-3x^3 + 15x^2 - 180 + 5(x + 1)^2] dx \\
 &= \dots = -\frac{935}{3}.
 \end{aligned}$$

Ένας άλλος τρόπος, που δεν απαιτεί την υποδιαίρεση του τόπου D , αλλά προκύπτει από τις εξισώσεις των ευθειών του τριγώνου είναι ο εξής:

$$y = -2x + 3, \quad \text{οπότε} \quad x = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \quad x = 2y - 1.$$

Άρα (Περίπτωση III)

$$D = \left\{ (x, y) : -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2} \leq x \leq 2y - 1, \quad 1 \leq y \leq 3 \right\},$$

οπότε

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^3 \left[\int_{-\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}}^{2y-1} (6x^2 - 40y) dx \right] dy \\
 &= \int_1^3 (2x^3 - 40xy) \Big|_{x=-\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}}^{x=2y-1} dy \\
 &= \int_1^3 \left[100y - 100y^2 + 2(2y-1)^3 - 2 \left(-\frac{1}{2}y + \frac{3}{2} \right)^3 \right] dy \\
 &\quad \left[50y^2 - \frac{100}{3}y^3 + \frac{1}{4}(2y-1)^4 + \left(-\frac{1}{2}y + \frac{3}{2} \right)^4 \right]_1^3 \\
 &= -\frac{935}{3}.
 \end{aligned}$$

■

6.1.5 Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων

Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

Πολλές φορές για την ευκολία υπολογισμού του ολοκληρώματος

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

απαιτείται να γίνει μετασχηματισμός από καρτεσιανές σε άλλης μορφής συντεταγμένες. Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση των διπλών ολοκληρωμάτων, οι γενικότερες δυνατές είναι οι **καμπυλόγραμμες** (curvilinear coordinates),³ που ορίζονται στη συνέχεια.

³Βλέπε: http://en.wikipedia.org/wiki/Curvilinear_coordinates

Ορισμός 6.1.5 - 1 (καμπυλόγραμμες συντεταγμένες). Ο μετασχηματισμός σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες έχει τη μορφή

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad \text{όταν} \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2. \quad (6.1.5 - 1)$$

Αν οι συναρτήσεις $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ ορίζονται για κάθε $(u, v) \in \tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ και υπάρχουν οι 1ης τάξης μερικές παράγωγοι των x , y ως προς u και v και είναι συνεχείς συναρτήσεις, ενώ για την ορίζουσα του Jacobi του μετασχηματισμού (6.1.5 - 1)

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \quad (6.1.5 - 2)$$

είναι $J(u, v) > 0$ ή $J(u, v) < 0$, τότε ο μετασχηματισμός του τόπου D μέσω των σχέσεων (6.1.5 - 1) στον τόπο \tilde{D} είναι αμφιμονοσήμαντος και εφόσον το ολοκλήρωμα $\int_D f(x, y) dx dy$ υπάρχει, θα ισχύει

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\tilde{D}} F(u, v) |J(u, v)| du dv. \quad (6.1.5 - 3)$$

Σημείωση 6.1.5 - 1

Είναι ήδη γνωστή στον αναγνώστη από το Μάθημα *Αόριστο Ολοκλήρωμα* η μέθοδος της αντικατάστασης για τον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος

$$\int f(x) dx.$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, αν τεθεί $u = g(x)$, τότε πρέπει αφενός να γίνει αντικατάσταση της u στην f και αφετέρου αντικατάσταση του dx με το du . Η διαδικασία αυτή δίνεται στη συνέχεια.

Έστω ότι ζητείται ο υπολογισμός του ολοκληρώματος

$$\int e^{3x} dx.$$

Τότε, αν

$$\begin{aligned} 3x &= u \quad \text{ή} \quad x = \frac{u}{3}, \quad \text{οπότε} \\ dx &= \left(\frac{u}{3}\right)' du = \frac{1}{3} du = J(u) du. \end{aligned} \quad (1)$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int e^{3x} dx = \int e^u \frac{1}{3} du \\ \int F(u) J(u) du &= \dots = \frac{1}{3} e^{3x} + c. \end{aligned} \quad (2)$$

Τότε η (6.1.5 - 2) είναι η αντίστοιχη της $J(u)$ στην (1) και η (6.1.5 - 3) της $\int F(u) J(u) du$ στην (2).

Οι κυριότεροι καμπυλόγραμμοι μετασχηματισμοί, που συνήθως χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές, δίνονται στη συνέχεια.

Γραμμικοί μετασχηματισμοί

Ορισμός 6.1.5 - 2 (γραμμικός μετασχηματισμός).

Ένας γραμμικός μετασχηματισμός (*linear transformation*) έχει γενικά τη μορφή

$$L_T: \quad x = au + bv \quad \text{και} \quad y = cu + dv, \quad (6.1.5 - 4)$$

όταν $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Σύμφωνα με την (6.1.5 - 2) η ορίζουσα του Jacobi είναι

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \quad (6.1.5 - 5)$$

Αν $ad - bc \neq 0$, τότε η (6.1.5 - 4) αντιστρέφεται, οπότε

$$\iint_D f(x, y) dx dy = |ad - bc| \iint_{\bar{D}} F(u, v) du dv. \quad (6.1.5 - 6)$$

Παρατηρήσεις 6.1.5 - 1

Ο μετασχηματισμός (6.1.5 – 4)

- i) ανήκει στην κατηγορία των λεγόμενων **ομογραφικών μετασχηματισμών** (endomorphism ή homomorphism), δηλαδή έχει την ιδιότητα να διατηρεί κατά τον μετασχηματισμό τα σχήματα, δηλαδή ευθείες σε ευθείες, τρίγωνα σε τρίγωνα, κ.λπ.,
- ii) χρησιμοποιείται μόνον, όταν κάνει ευκολότερο τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος. Αυτό θα είναι και το χαρακτηριστικό γνώρισμα κάθε ανάλογου μετασχηματισμού, που χρησιμοποιείται στους υπολογισμούς της παραγράφου αυτής.

Παράδειγμα 6.1.5 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy,$$

όταν D το τρίγωνο με πλευρές τους άξονες συντεταγμένων και την ευθεία $x + y - 2 = 0$.

Άυση. Επειδή η ολοκλήρωση της συνάρτησης $e^{\frac{y-x}{y+x}}$ είναι πρακτικά αδύνατη, για απλοποίηση έστω

$$u = y - x \quad \text{και} \quad v = y + x.$$

Λύνοντας ως προς x και y , δηλαδή λύνοντας το σύστημα

$$x - y = -u$$

$$x + y = v,$$

προκύπτει ότι ο γραμμικός μετασχηματισμός (6.1.5 – 4) για την περίπτωση αυτή γράφεται ως εξής:

$$L_T: \quad x = \frac{v-u}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{v+u}{2}.$$

Τότε σύμφωνα με την (6.1.5 - 2) η ορίζουσα του Jacobi είναι

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Το τρίγωνο έχει για εξισώσεις των πλευρών του τους άξονες των συντεταγμένων, δηλαδή τις ευθείες (Σχ. 6.1.5 - 1a):

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{και την} \quad x + y - 2 = 0.$$

Άρα οι εξισώσεις των πλευρών του σύμφωνα με τον γραμμικό μετασχηματισμό (Σχ. 6.1.5 - 1b) τροποποιούνται ως εξής:

- ευθεία $x = 0$

$$L_T: \quad \begin{aligned} u &= y - 0 = y \\ v &= y + 0 = y, \end{aligned}$$

οπότε $u = v$, δηλαδή η ευθεία $v - u = 0$,

- ευθεία $y = 0$

$$L_T: \quad \begin{aligned} u &= 0 - x = -x \\ v &= 0 + x = x, \end{aligned}$$

οπότε $u = -v$, δηλαδή η ευθεία $v + u = 0$,

- ευθεία $x + y + 2 = 0$

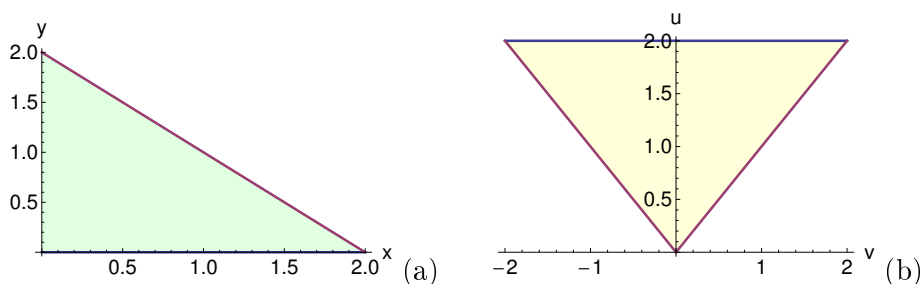
$$L_T: \quad v = \overbrace{y + x}^{x+y=2} = 2,$$

οπότε $v = 2$, δηλαδή η ευθεία $v - 2 = 0$.

Άμεσο συμπέρασμα του παραπάνω μετασχηματισμού είναι η επαλήθευση των Παρατηρήσεων 6.1.5 - 1 (i).

Τότε από τις μετασχηματισμένες εξισώσεις των πλευρών προκύπτει ότι:

- $v = -u$ και $v = u$, οπότε $-u \leq v \leq u$, ενώ
- $u = 2$.



Σχήμα 6.1.5 - 1: (a) Το τρίγωνο του τόπου D και (b) το αντίστοιχο τρίγωνο μετά τον γραμμικό μετασχηματισμό.

Κατά συνέπεια το πεδίο ορισμού D μετασχηματίζεται στο

$$\tilde{D} = \{(v, u) : -v \leq u \leq v, \quad 0 \leq u \leq 2\}.$$

Άρα από τον τύπο (6.1.5 - 6) έχουμε

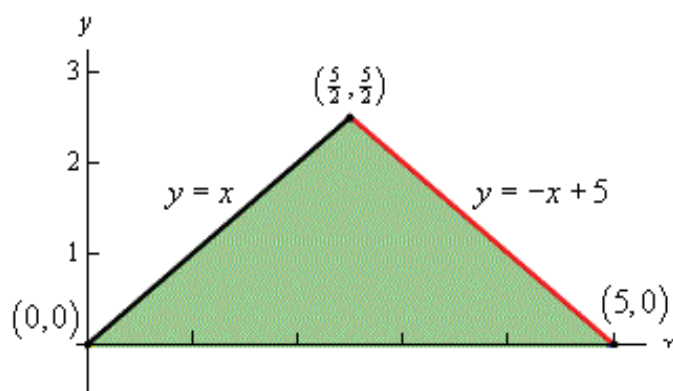
$$\begin{aligned} I &= \left| -\frac{1}{2} \right| \int_0^2 \left[\int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du \right] dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left[\int_{-v}^v v \left(\frac{u}{v} \right)_u e^{\frac{u}{v}} du \right] dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 v \left[e^{\frac{u}{v}} \right]_{u=-v}^{u=v} dv = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) \int_0^2 v dv \\ &= e - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 6.1.5 - 2

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D (x + y) dx dy,$$



Σχήμα 6.1.5 - 2: Παράδειγμα 6.1.5 - 2.

όταν D το τρίγωνο του Σχ. 6.1.5 - 2. Να χρησιμοποιηθεί ο γραμμικός μετασχηματισμός

$$L_T: \quad x = 2u + 3v \quad \text{και} \quad y = 2u - 3v.$$

Λύση. Αρχικά σύμφωνα με την (6.1.5 - 2) η ορίζουσα του Jacobi είναι

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -12.$$

Το τρίγωνο έχει για εξισώσεις των πλευρών του τις ευθείες (Σχ. 6.1.5 - 2):

$$x = 0, \quad y = x \quad \text{και} \quad \text{την} \quad y = -x + 5.$$

Τότε οι εξισώσεις των πλευρών του σύμφωνα με τον γραμμικό μετασχηματισμό τροποποιούνται ως εξής:

- ευθεία $x = 0$

$$L_T: \quad x = 2u + 3v \quad \text{ή} \quad 0 = 2u + 3v,$$

δηλαδή η ευθεία $2u + 3v = 0$,

- ευθεία $y = x$

$$L_T: 2u - 3v = 2u + 3v,$$

δηλαδή η ευθεία $u = 0$,

- ευθεία $y = -x + 5$

$$L_T: 2u - 3v = -(2u + 3v) + 5 \quad \text{ή} \quad 4u = 5,$$

δηλαδή η ευθεία $u = \frac{5}{4}$.

Όμοια από τον παραπάνω μετασχηματισμό υπάρχει επαλήθευση των Παρατηρήσεων 6.1.5 - 1 (i).

Τότε από τις μετασχηματισμένες εξισώσεις των πλευρών προκύπτει ότι:

- $u = 0$ και $u = \frac{5}{4}$, οπότε $0 \leq u \leq \frac{5}{4}$, ενώ
- $v = -\frac{2u}{3}$,

που επειδή είναι $u \geq 0$, τελικά έχουμε ότι το πεδίο ορισμού D μετασχηματίζεται στο

$$\tilde{D} = \{(v, u) : 0 \leq u \leq \frac{5}{4}, -\frac{2u}{3} \leq v \leq 0\},$$

ενώ η ολοκληρωτέα συνάρτηση στην:

$$x + y = (2u + 3v) + (2u - 3v) = 4u.$$

Άρα από τον τύπο (6.1.5 - 6) έχουμε

$$\begin{aligned} I &= |-12| \int_0^{5/4} \left[\int_{-2u/3}^0 4 \, dv \right] u \, du = 48 \int_0^{5/4} \left(\frac{2u}{3} \right) u \, du \\ &= \frac{96}{3} \int_0^{5/4} u^2 \, du = \frac{125}{6}. \end{aligned}$$

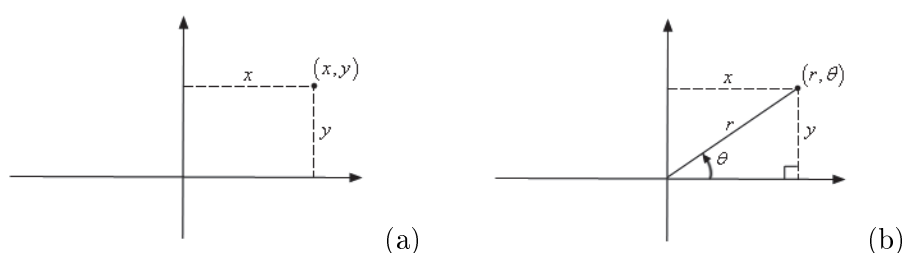
■

Πολικές συντεταγμένες

Όπως είναι ήδη γνωστό οι πολικές (Σχ. 6.1.5 - 3b) συντεταγμένες (r, θ) συνδέονται με τις καρτεσιανές (Σχ. 6.1.5 - 3a) συντεταγμένες (x, y) με τις σχέσεις

$$x = r \cos \theta \quad \text{και} \quad y = r \sin \theta, \quad \text{όταν } r \geq 0 \text{ και } 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (6.1.5 - 7)$$

Ο μετασχηματισμός (6.1.5 - 7) είναι αμφιμονοσήμαντος με την έννοια ότι



Σχήμα 6.1.5 - 3: (a) Καρτεσιανές και (b) πολικές συντεταγμένες.

σε κάθε σημείο $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ αντιστοιχεί ακριβώς ένα σημείο $(r, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ και αντίστροφα, ενώ για την ορίζουσα Jacobi του μετασχηματισμού είναι

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} x_r & y_r \\ x_\theta & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r > 0.$$

Σύμφωνα με τη σχέση (6.1.5 - 3) το ολοκλήρωμα $\int \int_D f(x, y) dx dy$ στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int \int_{\tilde{D}} F(r, \theta) r dr d\theta. \quad (6.1.5 - 8)$$

Παράδειγμα 6.1.5 - 3

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \int_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy,$$

όταν ο τόπος D είναι το άνω ημικύκλιο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $r = 1$.

Λύση. Μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες σύμφωνα με τις σχέσεις (6.1.5 – 7) έχουμε

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - r^2} = F(r, \theta),$$

ενώ είναι $r \in [0, 1]$ και επειδή πρόκειται για το άνω ημικύκλιο $\theta \in [0, \pi]$.

Άρα σύμφωνα με την (6.1.5 – 8) είναι

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \left[\int_0^1 r \sqrt{1 - r^2} dr \right] d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[\int_0^1 -\frac{1}{2} (1 - r^2)' (1 - r^2)^{1/2} dr \right] d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[-\frac{1}{2} \frac{(1 - r^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2} + 1} \right] \Big|_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^\pi (1 - r^2)^{3/2} \Big|_{r=0}^{r=1} d\theta = \frac{1}{3} \int_0^\pi d\theta = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 6.1.5 - 4

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D 2xy \, dx \, dy,$$

όταν ο τόπος D είναι ο κυκλικός τομέας του 1ου τεταρτημορίου μεταξύ των κύκλων κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνων 2 και 5 αντίστοιχα.

Λύση. Μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες η ολοκληρωτέα συνάρτηση γράφεται

$$f(x, y) = 2xy = 2r^2 \sin \theta \cos \theta = r^2 \sin 2\theta = F(r, \theta),$$

όπου $r \in [2, 5]$ και επειδή πρόκειται για το 1ο τεταρτημόριο είναι $\theta \in [0, \pi/2]$.

Άρα σύμφωνα με την (6.1.5 – 8) είναι

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \left[\int_2^5 r (r^2 \sin 2\theta) dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\int_2^5 r^3 dr \right] \sin 2\theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_{r=2}^{r=5} d\theta \\ &= \frac{609}{4} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta = -\frac{609}{4} \frac{1}{2} \cos 2\theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{609}{4}. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 6.1.5 - 5

Όμοια το

$$I = \iint_D e^{x^2+y^2} dx dy,$$

όταν ο τόπος D είναι ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου $(0, 0)$.

Λύση. Όμοια μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες η ολοκληρωτέα συνάρτηση γράφεται

$$f(x, y) = e^{r^2} = F(r, \theta),$$

όπου $r \in [0, 1]$ και $\theta \in [0, 2\pi]$.

Άρα σύμφωνα με την (6.1.5 – 8) είναι

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 r e^{r^2} dr \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} (r^2)_r e^{r^2} dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left[e^{r^2} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \frac{1}{2} (e - 1) \int_0^{2\pi} d\theta = \pi (e - 1). \end{aligned}$$

■

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_D xy \, dx \, dy,$$

όταν ο τόπος D είναι:

i) το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία

$$O(0,0), \quad A(1,0), \quad B(1,1) \quad \text{και} \quad C(0,1),$$

ii) το τρίγωνο με κορυφές

$$O(0,0), \quad A(2,0) \quad \text{και} \quad B(2,2),$$

iii) ο κυκλικός τομέας με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και άκρα τα σημεία $A(2,2)$ και $B(-2,2)$ του κύκλου

$$x^2 + y^2 = 4.$$

2. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο μετασχηματισμό να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_D xy \, dx \, dy,$$

όταν D ο τόπος που ορίζεται από τον άξονα των x και το άνω μέρος του κύκλου

$$(x-1)^2 + y^2 = 4.$$

6.1.6 Υπολογισμός εμβαδών επίπεδων σχημάτων

Ορισμός 6.1.6 - 1. Το **εμβαδόν** E ενός επίπεδου σχήματος D δίνεται από τον τύπο

$$E = \iint_D dx \, dy. \quad (6.1.6 - 1)$$

Τότε, αν το D ορίζεται σε

- **καρτεσιανές συντεταγμένες** από τις σχέσεις

$$a \leq x \leq b \quad \text{και} \quad \phi(x) \leq y \leq \psi(x),$$

είναι

$$E = \int_a^b \left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} dy \right] dx, \quad (6.1.6 - 2)$$

ενώ, αν σε

- **πολικές συντεταγμένες** από τις σχέσεις

$$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \quad \text{και} \quad r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta),$$

είναι

$$E = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r dr \right] d\theta. \quad (6.1.6 - 3)$$

Παράδειγμα 6.1.6 - 1

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής D που βρίσκεται στο εσωτερικό της περιοχής με εξίσωση $r = 3 + 2 \sin \theta$ και στο εξωτερικό του κύκλου κέντρου $(0, 9)$ και ακτίνας $r = 2$ (Σχ. 6.1.6 - 1a).

Λύση. Αρχικά υπολογίζονται τα κοινά σημεία των δύο περιοχών (Σχ. 6.1.6 - 1b) θέτοντας:

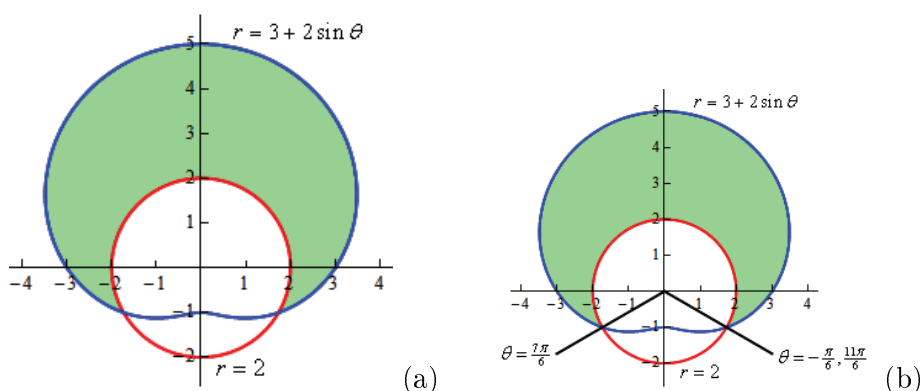
$$3 + 2 \sin \theta = 2, \quad \text{οπότε} \quad \sin \theta = -\frac{1}{2} = \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right).$$

⁴Άρα

$$\theta = -\frac{\pi}{6}, \quad \frac{7\pi}{6},$$

⁴Υπενθυμίζεται ότι

$$\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = 2k\pi + a \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \pi - a, \quad \text{όταν} \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Σχήμα 6.1.6 - 1: Παράδειγμα 6.1.6 - 1: (a) η περιοχή D και (b) τα κοινά σημεία.

οπότε σύμφωνα με την (6.1.6 - 3) είναι

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} dr \right] d\theta = \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \left[\int_2^{3+2\sin\theta} r dr \right] d\theta \\
 &= \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_2^{3+2\sin\theta} d\theta \\
 &= \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \left(\frac{5}{2} + 6 \cos\theta + \overbrace{2 \sin^2\theta}^{1-\cos 2\theta} \right) d\theta \\
 &= \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \left(\frac{7}{2} + 6 \cos\theta - \cos 2\theta \right) d\theta \\
 &= \left[\frac{7}{2} \theta - 6 \cos\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_{-\pi/6}^{7\pi/6} \\
 &= \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{14\pi}{3} \approx 24.187.
 \end{aligned}$$

■

6.1.7 Εμβαδόν επιφάνειας

Ορισμός 6.1.7 - 1. Το **εμβαδόν** A της επιφάνειας S , που ορίζεται από τη συνάρτηση $z = f(x, y)$ της οποίας η προβολή στο επίπεδο xy είναι ο τόπος D , δίνεται από τον τύπο

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (6.1.7 - 1)$$

Παράδειγμα 6.1.7 - 1

Αν

$$f(x, y) = 1 - y^2$$

και

$$D = \{-1 \leq x \leq 1, \quad -0.5 \leq y \leq 0.5\},$$

τότε

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 \left[\int_{-0.5}^{0.5} \sqrt{1 + 4y^2} dy \right] dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[\frac{y}{2} \sqrt{1 + 4y^2} + \frac{\sinh^{-1} 2y}{4} \right]_{y=-0.5}^{y=0.5} dy \\ &= 1.147794 \int_{-1}^1 dx = 2.295587. \end{aligned}$$

Υπολογισμός του ολοκληρώματος $I = \int \sqrt{1+4y^2} dy$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}
 I &= \int \sqrt{1+4y^2} dy = \int (y)' \sqrt{1+4y^2} dy \\
 &= y \sqrt{1+4y^2} - \int y \left[(1+4y^2)^{1/2} \right]' dy \\
 &= y \sqrt{1+4y^2} - \int y \left[\frac{1}{2} \frac{8y}{\sqrt{1+4y^2}} \right] dy \\
 &= y \sqrt{1+4y^2} - \int \frac{4y^2}{\sqrt{1+4y^2}} dy \\
 &= y \sqrt{1+4y^2} - \int \frac{4y^2+1-1}{\sqrt{1+4y^2}} dy \\
 &= y \sqrt{1+4y^2} - \int \frac{4y^2+1}{\sqrt{1+4y^2}} dy - \int \frac{-1}{\sqrt{1+4y^2}} dy \\
 &= y \sqrt{1+4y^2} - \int \sqrt{1+4y^2} dy + \int \frac{\frac{1}{2} \sinh^{-1} 2y}{\sqrt{1+4y^2}} dy \\
 &= y \sqrt{1+4y^2} - I + \frac{1}{2} \sinh^{-1} 2y
 \end{aligned}$$

Άρα

$$\int \sqrt{1+4y^2} dy = \frac{1}{2} y \sqrt{1+4y^2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1} 2y. \quad (6.1.7 - 2)$$

6.1.8 Υπολογισμός μάζας

Ορισμός 6.1.8 - 1. Αν $\rho(x, y)$ με $\rho(x, y) > 0$ για κάθε $(x, y) \in D$ παριστάνει την **πυκνότητα** της μάζας, που κατανέμεται με συνεχή τρόπο στο D , τότε η **συνολική μάζα** M του D δίνεται από τον τύπο

$$M = \iint_D \rho(x, y) dx dy. \quad (6.1.8 - 1)$$

Επιπλέον οι συντεταγμένες (\bar{x}, \bar{y}) του **κέντρου μάζας** δίνονται από τις σχέσεις

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{και} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M},$$

όπου οι

$$M_x = \iint_D y \rho(x, y) dx dy \quad \text{και} \quad M_y = \iint_D x \rho(x, y) dx dy$$

είναι οι **ροπές 1ης τάξης** του D ως προς x και y -άξονα αντίστοιχα.

Τότε η **ροπή αδράνειας** ως προς τον x -άξονα ορίζεται να είναι η

$$I_x = \iint_D x y^2 \rho(x, y) dx dy$$

και ως προς τον y -άξονα η

$$I_y = \iint_D x y^2 \rho(x, y) dx dy.$$

Παράδειγμα 6.1.8 - 1

Να υπολογιστεί το κέντρο μάζας και οι ροπές αδράνειας ως προς τους x και y -άξονες της περιοχής που ορίζεται από το τρίγωνο με κορυφές στα σημεία

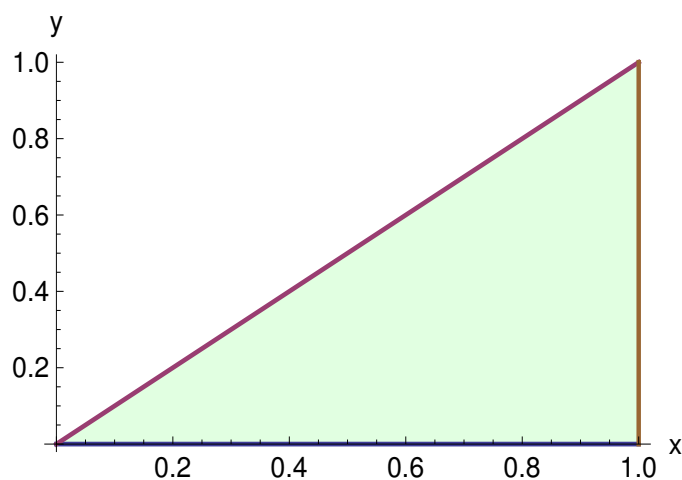
$$(0, 0), \quad (1, 0) \quad \text{και} \quad (1, 1),$$

όταν η πυκνότητα είναι $\rho = x + y^2$.

Λύση. Το τρίγωνο (Σχ. 6.1.8 - 1) περιγράφεται ως εξής:

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x, \quad 0 \leq x \leq 1\},$$

δηλαδή ανήκει στην Περίπτωση II.



Σχήμα 6.1.8 - 1: Παράδειγμα 6.1.8 - 1.

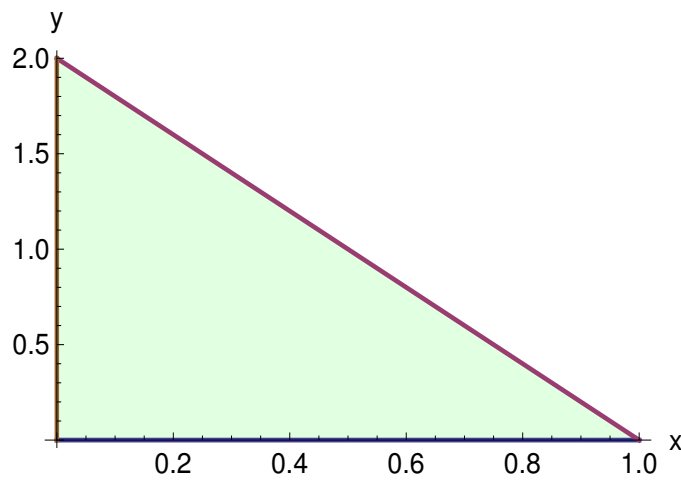
Τότε διαδοχικά έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^1 \left[\int_0^x \overbrace{(x+y^2)}^{x \text{ σταθερά}} dy \right] dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\
 &= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^3}{3} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_0^1 \left[\int_0^x y (x+y^2) dy \right] dx = \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} \right) dx = \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{20} \Big|_0^1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{20} = \frac{7}{40},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= \int_0^1 \left[\int_0^x x (x+y^2) dy \right] dx = \int_0^1 \left[x^2 y + x \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\
 &= \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^4}{3} \right) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{15} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{15} = \frac{19}{60},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_0^1 \left[\int_0^x y^2 (x+y^2) dy \right] dx = \int_0^1 \left[x \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{5} \right) dx = \frac{x^5}{15} + \frac{x^6}{30} \Big|_0^1 = \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{1}{10},
 \end{aligned}$$



Σχήμα 6.1.8 - 2: Παράδειγμα 6.1.8 - 2.

$$\begin{aligned}
 I_y &= \int_0^1 \left[\int_0^x x^2 (x + y^2) dy \right] dx = \int_0^1 \left[x^3 y + x^2 \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\
 &= \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^5}{3} \right) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{18} \Big|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{18} = \frac{23}{90}.
 \end{aligned}$$

Άρα

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{19}{25}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{21}{100}.$$

Παράδειγμα 6.1.8 - 2

Όμοια το κέντρο μάζας της τριγωνικής περιοχής με κορυφές τα σημεία

$$(0, 0), \quad (1, 0) \quad \text{και} \quad (0, 2),$$

όταν η πυκνότητα είναι $\rho = 1 + x + 3y$.

Λύση. Έστω $A(1, 0)$ και $B(0, 2)$. Άρα πρόκειται για ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφή το $(0, 0)$ και υποτεινούσα την AB . Για την εξίσωση της AB

χρησιμοποιείται ο τύπος

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

όπου $A(1, 0) = (x_1, y_1)$ και $B(0, 2) = (x_2, y_2)$, οπότε

$$\frac{x - 1}{0 - 1} = \frac{y - 0}{2 - 0}, \quad \text{δηλαδή} \quad y = 2 - 2x.$$

Άρα το τρίγωνο (Σχ. 6.1.8 - 2) περιγράφεται ως εξής:

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 2 - 2x, \quad 0 \leq x \leq 1\},$$

δηλαδή ανήκει όμοια στην Περίπτωση II.

Τότε διαδοχικά έχουμε ότι

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 \left[\int_0^{2-2x} (1 + x + 3y) dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[y + xy + \frac{3y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx \\ &= \int_0^1 \left[2 - 2x + x(2 - 2x) + \frac{3(2 - 2x)^2}{2} \right] dx \\ &= \int_0^1 (8 - 12x + 4x^2) dx = \\ &= 8x - 6x^2 + \frac{4x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{10}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= \int_0^1 \left[\int_0^{2-2x} x(1+x+3y) dy \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left[x(1+x)y + 3 \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx \\
 &= \int_0^1 (8x - 12x^2 + 4x^3) dx = 4x^2 - 4x^3 + x^4 \Big|_0^1 = 1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_0^1 \left[\int_0^{2-2x} y(1+x+3y) dy \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left[(1+x) \frac{y^2}{2} + 3 \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx \\
 &= \int_0^1 (10 - 26x + 22x^2 - 6x^3) dx = 10x - 13x^2 + \frac{22x^3}{3} - \frac{6x^4}{4} \Big|_0^1 \\
 &= \frac{17}{6}.
 \end{aligned}$$

Άρα

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{3}{10}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{17}{20}.$$

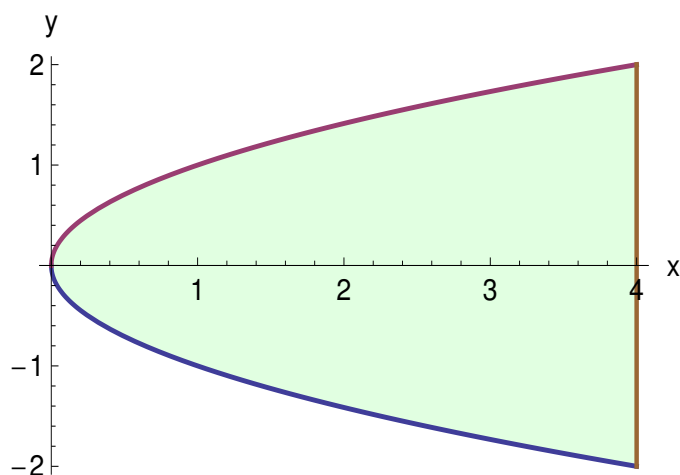
■

Παράδειγμα 6.1.8 - 3

Μια επίπεδη πλάκα στο xy -επίπεδο περικλείεται από την καμπύλη $x = y^2$ και την ευθεία $x = 4$. Αν η πυκνότητα σε κάθε σημείο της είναι ανάλογη από την απόστασή της από τον y -άξονα, να υπολογιστεί η μάζα της πλάκας και το κέντρο μάζας της.

Λύση. Τα κοινά σημεία της καμπύλης και της ευθείας υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 x &= y^2 \\
 x &= 4,
 \end{aligned}
 \quad \text{οπότε} \quad y^2 = 4, \quad \text{δηλαδή} \quad y = \pm 2.$$



Σχήμα 6.1.8 - 3: Παράδειγμα 6.1.8 - 3.

Άρα ο τόπος (Σχ. 6.1.8 - 3) περιγράφεται ως εξής:

$$D = \{(x, y) : y^2 \leq x \leq 4, \quad -2 \leq y \leq 2\},$$

δηλαδή ανήκει στην Περίπτωση III.

Επομένως διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} M &= \int_{-2}^2 \left[\int_{y^2}^4 x \, dx \right] dy = \int_{-2}^2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y^2}^{x=4} dy \\ &= \int_{-2}^2 \frac{1}{2} [4^2 - (y^2)^2] dy = \int_{-2}^2 \frac{1}{2} (16 - y^4) dy \\ &= \left(8y - \frac{y^5}{5} \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{128}{5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= \int_{-2}^2 \left[\int_{y^2}^4 \overbrace{x^2}^{f(x,y)=x} dx \right] dy = \int_{-2}^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=y^2}^{x=4} dy \\
 &= \frac{1}{3} \int_{-2}^2 (64 - y^6) dy = \frac{1}{3} \left[64y - \frac{y^7}{7} \right]_{-2}^2 = \frac{512}{7},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_{-2}^2 \left[\int_{y^2}^4 \overbrace{xy}^{f(x,y)=x} dx \right] dy = \int_{-2}^2 \left[y \frac{x^2}{2} \right]_{x=y^2}^{x=4} dy \\
 &= \int_{-2}^2 \left(8y - \frac{y^5}{2} \right) dy = 0.
 \end{aligned}$$

Άρα

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{20}{7}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = 0.$$

Άσκηση

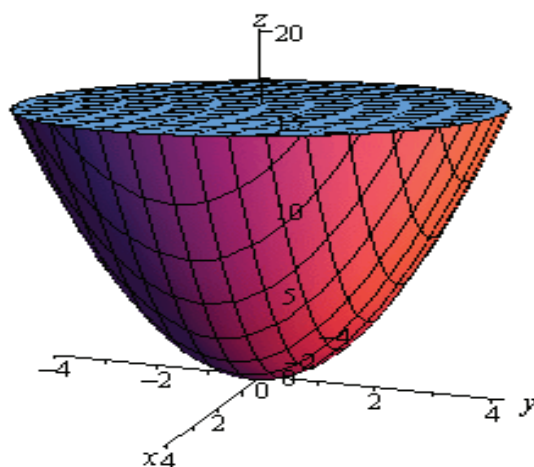
Μία λεπτή πλάκα ορίζεται από την παραβολή $y = 2x - x^2$ και τον άξονα των x . Να προσδιοριστεί η ολική μάζα της και οι συντεταγμένες (\bar{x}, \bar{y}) του κέντρου βάρους της μάζας, όταν η πυκνότητα σε κάθε σημείο της (x, y) είναι

$$\frac{1-y}{1+x}.$$

6.1.9 Υπολογισμός όγκων

Ορισμός 6.1.9 - 1. Ο **όγκος** V του στερεού που ορίζεται από την επιφάνεια S με εξίσωση $z = f(x, y)$, όταν $f(x, y) \geq 0$ για κάθε $(x, y) \in D$, το επίπεδο Oxy και από την κυλινδρική επιφάνεια που έχει οδηγό το σύνορο ∂D του D και γενέτειρες παράλληλες προς τον z -άξονα δίνεται από τον τύπο

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (6.1.9 - 1)$$



Σχήμα 6.1.9 - 1: Παράδειγμα 6.1.9 - 1.

Ορισμός 6.1.9 - 2. Αν $f(x, y) \geq g(x, y) \geq 0$ για κάθε $(x, y) \in D$, τότε ο όγκος V του στερεού που φράσσεται από την επιφάνεια $z = g(x, y)$ και $w = f(x, y)$, από την κυλινδρική επιφάνεια που έχει οδηγό το σύνορο ∂D του D και γενέτιρες παράλληλες προς τον z -άξονα δίνεται από τον τύπο

$$V = \iint_D f(x, y) - g(x, y) \, dx \, dy. \quad (6.1.9 - 2)$$

Παράδειγμα 6.1.9 - 1

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από το στερεό με εξίσωση $z = x^2 + y^2$ και το επίπεδο $z = 16$ (Σχ. 6.1.9 - 1).

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο (6.1.9 - 2) ο ζητούμενος όγκος, έστω V , θα προκύψει από τη διαφορά του όγκου του επιπέδου και του στερεού, δηλαδή

$$\begin{aligned} V &= \iint_D 16 \, dx \, dy - \iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy \\ &= \iint_D [16 - (x^2 + y^2)] \, dx \, dy = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Από τη μορφή της ολοκληρωτέας συνάρτησης $f(x, y)$ προκύπτει τότε ότι ο τόπος είναι ένας κύκλος κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας $r = 4$.

Τότε μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$) έχουμε

$$f(x, y) = 16 - r^2 \sin^2 \theta - r^2 \cos^2 \theta = 16 - r^2 = F(r, \theta),$$

όπου $r \in [0, 4]$ και $\theta \in [0, 2\pi]$ οπότε από τις (6.1.5 – 8) και (6.1.9 – 1) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} V &= \iint_D [16 - (x^2 + y^2)] dx dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^4 r (16 - r^2) dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[8r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_{r=0}^{r=4} d\theta = 64 \int_0^{2\pi} d\theta = 128\pi. \end{aligned}$$

■

6.2 Τριπλά ολοκληρώματα

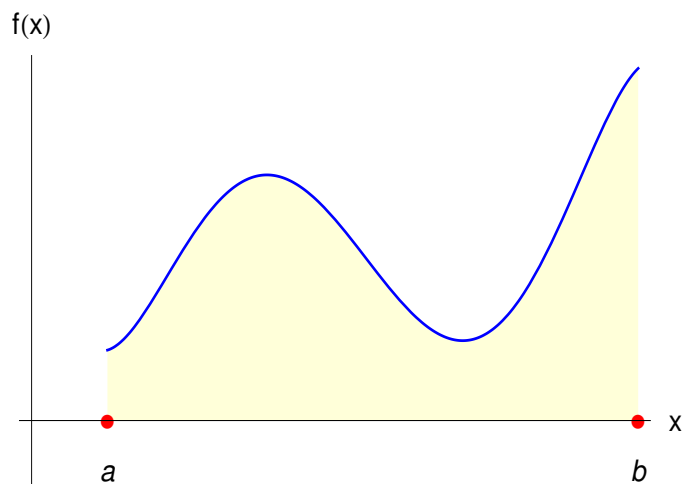
6.2.1 Ορισμός

Είναι ήδη γνωστό από την Εισαγωγή του Μαθήματος (Παράγραφος 6.1.1) ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) dx$ παριστάνει γεωμετρικά το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = f(x)$, τις ευθείες $x = a$, b και τον x -άξονα (Σχ. 6.2.1 - 1), ενώ από τον ορισμό του διπλού ολοκληρώματος (Παράγραφος 6.1.3) ότι το $\iint_D f(x, y) dx dy$ παριστάνει τον όγκο του στερεού που περικλείεται από την επιφάνεια $z = f(x, y)$, το πεδίο ορισμού D και του οποίου οι ακμές είναι παράλληλες προς τον z -άξονα (Σχ. 6.2.1 - 2).

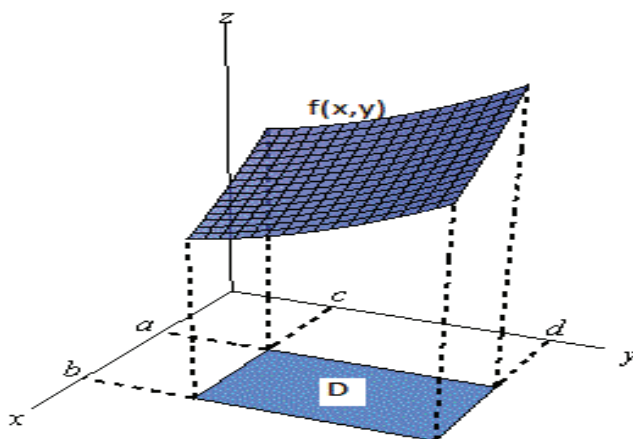
Επεκτείνοντας τις παραπάνω γεωμετρικές ερμηνείες έστω η συνάρτηση $f(x, y, z)$ με πεδίο ορισμού

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \mathbb{R}^3,$$

που υποτίθεται ότι είναι φραγμένη για κάθε $(x, y, z) \in D$. Αν στην περίπτωση



Σχήμα 6.2.1 - 1: γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_a^b f(x) dx$.



Σχήμα 6.2.1 - 2: γεωμετρική ερμηνεία του διπλού ολοκληρώματος $\iint_D f(x, y) dx dy$.

αυτή ο τόπος D υποδιαιρεθεί από τα σημεία

$$\begin{array}{llll} x_i \in [a_1, b_1]; & i = 1, 2, \dots, n & \text{με πλάτος διαμέρισης} & \Delta x, \\ y_j \in [a_2, b_2]; & j = 1, 2, \dots, m & \dots & \Delta y, \\ z_k \in [a_3, b_3]; & k = 1, 2, \dots, p & \dots & \Delta z, \end{array}$$

τότε, έστω $\Delta A = \Delta x \Delta y \Delta z$ ο **όγκος** του στοιχειώδους ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου της παραπάνω διαμέρισης. Η απεικόνιση σε άξονα συντεταγμένων της τιμής $f(x_i^*, y_j^*, z_k^*)$ γίνεται προσθέτοντας στις ήδη γνωστές τρεις διαστάσεις x, y, z μια επιπλέον 4η διάσταση. Τότε έχει έννοια το παρακάτω άθροισμα:

$$V \approx f(x_1^*, y_1^*, z_1^*) \Delta A + \dots + f(x_n^*, y_m^*, z_p^*) \Delta A. \quad (6.2.1 - 1)$$

Αποδεικνύεται στην Ανάλυση ότι, όταν η διαγώνιος των παραπάνω παραλληλεπιπέδων τείνει στο μηδέν καθώς τα $n, m, p \rightarrow +\infty$, το άθροισμα (6.2.1 - 1) συγκλίνει προς έναν αριθμό, έστω I , που είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των σημείων (x_i, y_j, z_k) .

⁵Σύμφωνα με τα παραπάνω δίνεται στη συνέχεια ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός 6.2.1 - 1 (τριπλού ολοκληρώματος).

Ορίζεται ως τριπλό ολοκλήρωμα (*triple integral*) της $f(x, y, z)$ στο $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ η οριακή τιμή

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \lim_{n, m, p \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \Delta A, \quad (6.2.1 - 2) \end{aligned}$$

εφόσον η οριακή τιμή υπάρχει.

Ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται για κάθε φραγμένο πεδίο ορισμού D της f .

⁵Όμοια ο αναγνώστης, για μια πληρέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4] και: http://en.wikipedia.org/wiki/Triple_integral

Γεωμετρική ερμηνεία

Αν η 4η διάσταση συμβολίζει τον χρόνο t , τότε αλλάζοντας τη σειρά των μεταβλητών, έστω ότι η συνάρτηση που ολοκληρώνεται είναι με μεταβλητές x, y, t και η τέταρτη διάσταση είναι η z . Υποθέτοντας ότι οι μεταβλητές x, y είναι επίσης συναρτήσεις του t , τότε δίνοντας μια τιμή στο t , έστω t_0 , το ολοκλήρωμα της $z = \tilde{f}(x, y, t_0)$ θα ορίζει σύμφωνα και με τη γεωμετρική ερμηνεία του διπλού ολοκληρώματος τον όγκο του αντίστοιχου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

Πρόταση 6.2.1 - 1. Το τριπλό ολοκλήρωμα συμβολίζει γεωμετρικά την τιμή του όγκου, που δημιουργείται σε δεδομένη χρονική στιγμή t από τα αντίστοιχα $(x, y, z) \in D$.

6.2.2 Ιδιότητες

Δίνονται στη συνέχεια με τη μορφή θεωρημάτων οι κυριότερες ιδιότητες του τριπλού ολοκληρώματος. Το πεδίο ορισμού, έστω D , των συναρτήσεων υποτίθεται ότι είναι κλειστό και φραγμένο.

Θεώρημα 6.2.2 - 1 (γραμμική). Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες επί του D και $k, \lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned} & \iiint_D [k f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)] dx dy dz \\ &= k \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \\ &+ \lambda \iiint_D g(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

Η ιδιότητα γενικεύεται.

Θεώρημα 6.2.2 - 2 (αθροιστική). Αν η περιοχή D αποτελείται από τις χωριστές περιοχές D_1 και D_2 , δηλαδή $D = D_1 \cup D_2$ και $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, τότε

$$\begin{aligned} & \iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_{D_1} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz + \iiint_{D_2} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \end{aligned}$$

ενώ, αν $D_1 \cap D_2 = \tilde{D}$, δηλαδή υπάρχει επικάλυψη των περιοχών D_1 και D_2 στην περιοχή \tilde{D} , τότε

$$\begin{aligned} & \iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_{D_1} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz + \iiint_{D_2} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ & \quad - \iiint_{\tilde{D}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz. \end{aligned}$$

Θεώρημα 6.2.2 - 3 (σύγκρισης). Αν $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$ για κάθε $(x, y, z) \in D$ και οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες επί του D , τότε

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \geq \iiint_D g(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Ειδικά, αν $g(x, y, z) > 0$ για κάθε $(x, y, z) \in D$, τότε

$$\iiint_D g(x, y, z) \, dx \, dy \, dz > 0.$$

Θεώρημα 6.2.2 - 4. Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη επί του D , τότε

$$\left| \iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \right| \leq \iiint_D |f(x, y, z)| \, dx \, dy \, dz.$$

Θεώρημα 6.2.2 - 5. Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη επί του D και το D είναι **αμελητέου εμβαδού**, τότε

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = 0.$$

Θεώρημα 6.2.2 - 6 (μέσης τιμής). Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη επί του D , τότε

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = f(x_0, y_0, z_0) V,$$

όπου V ο όγκος του τόπου D και $(x_0, y_0, z_0) \in D$.

6.2.3 Μέθοδοι υπολογισμού

Ο υπολογισμός του τριπλού ολοκληρώματος (6.2.1 – 2) εξαρτάται από τη μορφή του πεδίου ορισμού. Από τις υπάρχουσες μεθόδους υπολογισμού θα εξεταστούν μόνον οι παρακάτω δύο.⁶

I. $D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3 \},$

δηλαδή και οι τρεις μεταβλητές μεταβάλλονται σε διαστήματα με σταθερά άκρα ή διαφορετικά το πεδίο ορισμού είναι ένα **ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο**.

Τότε ο υπολογισμός γίνεται σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 6.2.3 - 1 (Fubini). Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού

$$\begin{aligned} D &= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \\ &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3 \} \end{aligned}$$

⁶Ο αναγνώστης για εκτενέστερη μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 4].

είναι ολοκληρώσιμη επί του D , τότε

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \int_{a_1}^{b_1} \left\{ \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) \, dz \right] dy \right\} dx \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \left\{ \int_{a_3}^{b_3} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z) \, dx \right] dz \right\} dy \\ &= \int_{a_3}^{b_3} \left\{ \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{a_2}^{b_2} f(x, y, z) \, dy \right] dx \right\} dz. \end{aligned}$$

Το θεώρημα αυτό είναι μια γενίκευση του αντίστοιχου θεωρήματος του Fubini για τα διπλά ολοκληρώματα. Σύμφωνα με το θεώρημα, η τιμή του τριπλού ολοκληρώματος είναι **ανεξάρτητη** από τη σειρά ολοκλήρωσης.

Παράδειγμα 6.2.3 - 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iiint_D 8xyz \, dx \, dy \, dz,$$

όταν

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2 \leq x \leq 3, \quad 1 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 1\}.$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο (6.2.3 - 1) έχουμε

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_D 8xyz \, dx \, dy \, dz \\
 &= \int_1^2 \left\{ \int_2^3 \left[\int_0^1 \overbrace{8xyz}^{xy \text{ σταθερές}} dz \right] dx \right\} dy \\
 &= \int_1^2 \left\{ \int_2^3 [4xyz^2]_{z=0}^{z=1} dx \right\} dy = \int_1^2 \left[\int_2^3 \overbrace{4xy}^{y \text{ σταθερά}} dx \right] dy \\
 &= \int_1^2 [2x^2y]_{x=2}^{x=3} dy = \int_1^2 10y \, dy = 15.
 \end{aligned}$$

■

II.

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 \leq x \leq b_1, \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) \\
 z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

Τότε ισχύει

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad (6.2.3 - 1) \\
 &= \int_{a_1}^{b_1} \left\{ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right] dy \right\} dx,
 \end{aligned}$$

δηλαδή η ολοκλήρωση γίνεται πρώτα από τη μεταβλητή που εξαρτάται από τις άλλες δύο μεταβλητές.

Παράδειγμα 6.2.3 - 2

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iiint_D x^3 y^2 z \, dx \, dy \, dz,$$

όταν

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x, \quad 0 \leq z \leq xy\}.$$

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο (6.2.3 - 3) έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D x^3 y^2 z \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \left\{ \int_0^x \left[\int_0^{xy} x^3 y^2 z \, dz \right] dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^x \left[\frac{1}{2} x^3 y^2 z^2 \right]_{z=0}^{z=xy} dy \right\} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\int_0^x x^5 y^4 dy \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{5} x^5 y^5 \right]_{y=0}^{y=x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{10} dx = \frac{1}{110}. \end{aligned}$$

■

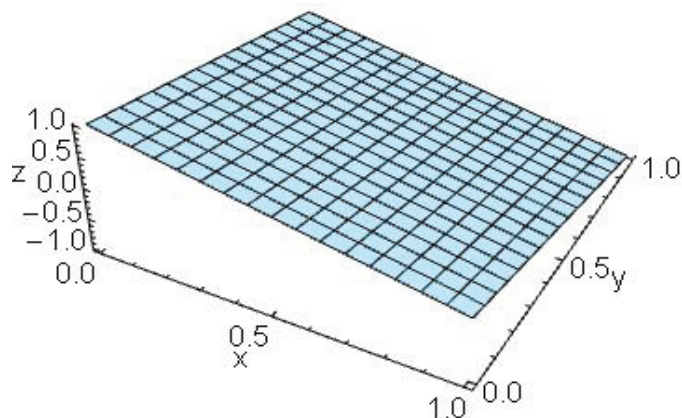
Παράδειγμα 6.2.3 - 3

Όμοια το ολοκλήρωμα

$$I = \iiint_D (x^2 + y^2 - z^2) \, dx \, dy \, dz,$$

όταν

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x + y + z \leq 1, \quad x, y, z \geq 0\}.$$



Σχήμα 6.2.3 - 1: Ο τόπος D του Παραδείγματος 6.2.3 - 3.

Λύση. Ο τόπος D περιγράφεται ως εξής (Σχ. 6.2.3 - 1):

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \\ 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

Τότε όμοια με τον τύπο (6.2.3 - 3) έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D (x^2 + y^2 - z^2) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} (x^2 + y^2 - z^2) \, dz \right] dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[x^2 z + y^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{1}{60}. \end{aligned}$$

■

Παρατήρηση 6.2.3 - 1

Στην κατηγορία αυτή υπάρχουν οι παρακάτω άλλοι δύο τύποι παράστασης του τόπου D :

•

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 \leq y \leq b_1, \quad \phi_1(y) \leq z \leq \phi_2(y) \\ z_1(y, z) \leq x \leq z_2(y, z)\}$$

Τότε ισχύει

$$I = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \quad (6.2.3 - 2) \\ = \int_{a_1}^{b_1} \left\{ \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} \left[\int_{z_1(y, z)}^{z_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dz \right\} dy.$$

•

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 \leq z \leq b_1, \quad \phi_1(z) \leq x \leq \phi_2(z) \\ z_1(x, z) \leq y \leq z_2(x, z)\}$$

Τότε ισχύει

$$I = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \quad (6.2.3 - 3) \\ = \int_{a_1}^{b_1} \left\{ \int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} \left[\int_{z_1(x, z)}^{z_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dx \right\} dz.$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν τα τριπλά ολοκληρώματα

$$I = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz,$$

όταν η συνάρτηση f ισούται με:

i) xy και

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad -2 \leq z \leq 3\},$$

ii) $(x + y + z + 1)^{-1}$ και D το στερεό μεταξύ των επιπέδων

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad \text{και} \quad x + y + z = 1.$$

iii) $z\sqrt{x^2 + y^2}$ και D το στερεό μεταξύ των επιφανειών

$$x = z, \quad z \geq 0, \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

iv) $x^2 + y^2 + z^2$ και D το εσωτερικό της μοναδιαίας σφαίρας με κέντρο το σημείο $(0, 0, 0)$.

v) xyz και D το εσωτερικό του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{όταν} \quad x, y, z \geq 0.$$

Απαντήσεις

$$(i) I = \int_0^1 \int_{-2}^3 \int_{-1}^1 xy \, dx \, dz \, dy = \frac{15}{4}, \quad (ii) \frac{8 \ln 2 - 5}{16}, \quad (iii) \frac{\pi}{20}, \quad (iv) \frac{4\pi}{5}, \quad (v) \frac{a^2 b^2 c^2}{48}.$$

6.2.4 Εφαρμογές των τριπλών ολοκληρωμάτων

Υπολογισμός όγκων

Ορισμός 6.2.4 - 1. Αν ο τόπος D είναι κλειστό και φραγμένο στερεό, τότε ο όγκος V του D ισούται με την τιμή του τριπλού ολοκληρώματος

$$V = \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz. \quad (6.2.4 - 1)$$

Υπολογισμός μάζας

Ορισμός 6.2.4 - 2. Αν $\rho(x, y, z)$ με $\rho(x, y, z) > 0$ για κάθε $(x, y, z) \in D$ παριστάνει την **πυκνότητα** της μάζας, που κατανέμεται με συνεχή τρόπο στο D , τότε η **συνολική μάζα** M του D δίνεται από τον τύπο

$$M = \iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz. \quad (6.2.4 - 2)$$

Στην περίπτωση αυτή το **κέντρο βάρους** (x_0, y_0) δίνεται από τις σχέσεις

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} \quad \text{και} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M},$$

όπου οι

$$M_{yz} = \iiint_D x \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$M_{xz} = \iiint_D y \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad \text{και}$$

$$M_{xy} = \iiint_D z \rho(x, y, z) dx dy dz$$

είναι οι **ροπές 1ης τάξης** του D .

6.3 Βιβλιογραφία

- [1] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960-351-453-5/978-960-351-453-4.
- [2] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός II*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978-960-524-184-1.
- [3] Marsden, J.E. & Tromba, A.J. (2011). *Διανυσματικός Λογισμός*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978-960-730-945-7.
- [4] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960-418-087-8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- <http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm>
- <http://mathworld.wolfram.com/>
- <http://eom.springer.de/>

Μάθημα 7

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

7.1 Επικαμπύλια ολοκληρώματα

7.1.1 Ορισμός σε διανυσματικό πεδίο

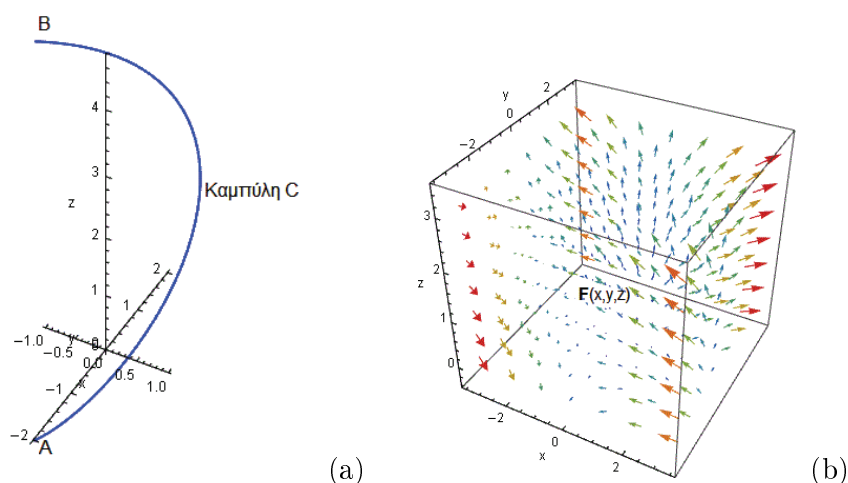
Στο μάθημα αυτό γίνεται μια γενίκευση της μέχρι τώρα γνωστής στον αναγνώστη έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx,$$

σύμφωνα με την οποία το διάστημα ολοκλήρωσης $[\alpha, \beta]$ αντικαθίσταται από μια καμπύλη, έστω C (Σχ. 7.1.1 - 1a), με πεπερασμένο μήκος, που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση¹ $\mathbf{r}(t)$, ενώ η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(x)$

¹Βλέπε Μάθημα Διανυσματική συνάρτηση - Παραμετρική παράσταση καμπυλών.

από ένα διανυσματικό πεδίο, που περιγράφεται επίσης από μία ²διανυσματική συνάρτηση, έστω \mathbf{F} (Σχ. 7.1.1 - 1b), που ορίζεται επί της C (Σχ. 7.1.1 - 2c), δηλαδή τα σημεία (x, y) , αντίστοιχα (x, y, z) στα οποία ορίζεται η \mathbf{F} , είναι επίσης σημεία της C (Σχ. 7.1.1 - 2d). Τα ολοκληρώματα αυτά λέγονται τότε **επικαμπύλια** και η καμπύλη C **δρόμος ολοκλήρωσης**.



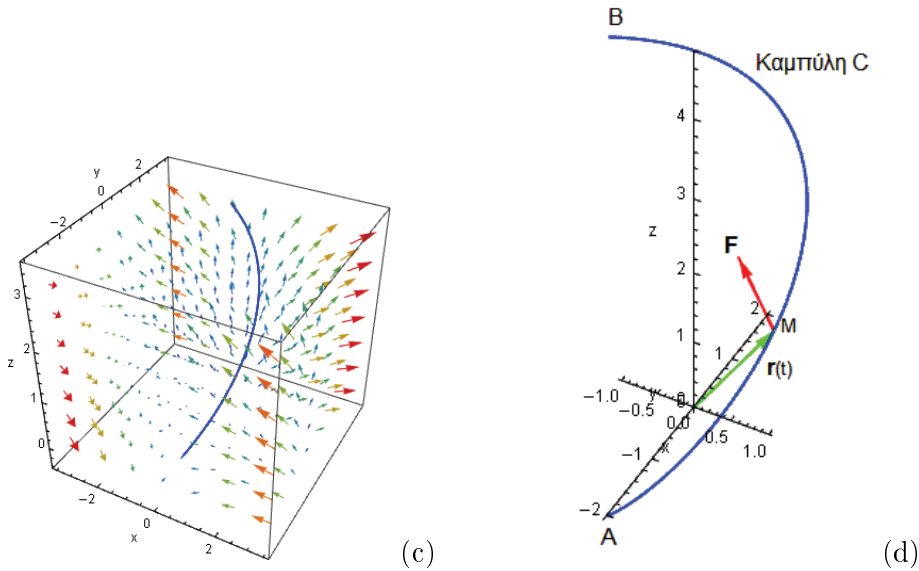
Σχήμα 7.1.1 - 1: (a) η καμπύλη C και (b) το διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} .

Δίνεται στη συνέχεια ο παρακάτω ορισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος:

Ορισμός 7.1.1 - 1 (επικαμπύλιο ολοκλήρωμα). Έστω C μία καμπύλη με πεπερασμένο μήκος που περιγράφεται με παραμετρική μορφή από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$ για κάθε $t \in [\alpha, \beta]$ και ένα διανυσματικό πεδίο, έστω \mathbf{F} , που είναι ορισμένο επί της C (Σχ. 7.1.1 - 2). Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της \mathbf{F} επί της C , συμβολίζεται με

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

²Βλέπε Μάθημα Διανυσματικός Διαφορικός Λογισμός - Βαθμωτά και διανυσματικά πεδία.



Σχήμα 7.1.1 - 2: (c) το διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} με την καμπύλη C και (d) το πεδίο \mathbf{F} επί της C , δηλαδή, όταν τα σημεία (x, y, z) στα οποία ορίζεται η διανυσματική συνάρτηση \mathbf{F} , είναι επίσης σημεία της C .

και ορίζεται από τον τύπο

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^\beta \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t) dt, \quad (7.1.1 - 1)$$

όταν το τελευταίο ολοκλήρωμα υπάρχει.

Αν η καμπύλη C είναι **κλειστή**, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος της C συμβολίζεται με

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

όπου στο σύμβολο της ολοκλήρωσης τίθεται πολλές φορές και βέλος για να καθοριστεί η φορά διαγραφής της C .

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα έχουν πολλές εφαρμογές στις θετικές επιστήμες, όπως:

- στο έργο δυνάμεων,
- τη δυναμική ενέργεια,
- τη ροή θερμότητας,
- την εντροπία,
- τη ροή ρευστών κ.λπ.³

Σημείωση 7.1.1 - 1

Στη βιβλιογραφία τα επικαμπύλια ολοκληρώματα που ορίζονται από ένα διανυσματικό πεδίο επί μιας καμπύλης, είναι επίσης γνωστά και ως επικαμπύλια ολοκληρώματα του 2ου είδους.

7.1.2 Τύπος υπολογισμού

Έστω ότι η διανυσματική συνάρτηση που περιγράφει το πεδίο \mathbf{F} , εκφράζεται συναρτήσει των συντεταγμένων του στον χώρο των 3-διαστάσεων ως εξής:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x, y, z) &= P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} \\ &= \langle P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z), \rangle\end{aligned}\quad (7.1.2 - 1)$$

ενώ η ⁴διανυσματική συνάρτηση \mathbf{r} ως

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.\quad (7.1.2 - 2)$$

Υπενθυμίζεται στο σημείο αυτό ότι: αν $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ και $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα, τότε το **εσωτερικό γινόμενο** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ υπολογίζεται από τον τύπο

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.\quad (7.1.2 - 3)$$

³Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4, 5, 6] και στη μαθηματική βάση δεδομένων http://en.wikipedia.org/wiki/Line_integral

⁴Βλέπε Μάθημα Διανυσματική συνάρτηση.

Τότε σύμφωνα με τις (7.1.2 – 1) και (7.1.2 – 2) λαμβάνοντας υπόψη και τον τύπο (7.1.2 – 3) το ολοκλήρωμα (7.1.1 – 1) γράφεται

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(t) \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= \int_C P dx + Q dy + R dz, \end{aligned} \quad (7.1.2 - 4)$$

ενώ, αν

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j},$$

η αντίστοιχη της (7.1.2 – 4) έκφραση στον χώρο των 2-διαστάσεων είναι

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(t) \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) \\ &= \int_C P dx + Q dy. \end{aligned} \quad (7.1.2 - 5)$$

Σύμφωνα με την υποσημείωση 4 η παραμετρική παράσταση της καμπύλης C θα ορίζεται από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$ και θα είναι της μορφής

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \\ &= \langle x(t), y(t), z(t) \rangle, \quad \text{όταν } t \in [\alpha, \beta]. \end{aligned} \quad (7.1.2 - 6)$$

Αντικαθιστώντας στην (7.1.2–1) τα x, y, z με τις αντίστοιχες παραμετρικές εκφράσεις τους $x(t), y(t)$ και $z(t)$, που δίνονται από την (7.1.2–6), προκύπτει η παρακάτω παραμετρική έκφραση του διανυσματικού πεδίου:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) &= \langle P(x(t), y(t), z(t)), Q(x(t), y(t), z(t)), \\ &= R(x(t), y(t), z(t)) \rangle. \end{aligned} \quad (7.1.2 - 7)$$

Υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις $x(t), y(t)$ και $z(t)$ είναι παραγωγίσιμες για κάθε $t \in [\alpha, \beta]$, από την (7.1.2 – 6) έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k} \\ &= \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle, \quad \text{όταν } t \in [\alpha, \beta]. \end{aligned} \quad (7.1.2 - 8)$$

Σύμφωνα με τις (7.1.2 – 7) και (7.1.2 – 8), λαμβάνοντας υπόψη και τον ήδη γνωστό τύπο (7.1.2 – 3) υπολογισμού του εσωτερικού γινομένου

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

η ολοκληρωτέα συνάρτηση στην (7.1.1 – 1), δηλαδή στην

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t) dt,$$

γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) &= P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) \\ &\quad + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) \\ &= P(t) x'(t) + Q(t) y'(t) + R(t) z'(t). \end{aligned} \quad (7.1.2 - 9)$$

Τότε από την (7.1.2 – 9) προκύπτει ο παρακάτω τύπος υπολογισμού του επικαμπύλιου ολοκληρώματος (7.1.1 – 1) για τον χώρο των 3-διαστάσεων

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\alpha}^{\beta} [P(t)x'(t) + Q(t)y'(t) + R(t)z'(t)] dt, \quad (7.1.2 - 10)$$

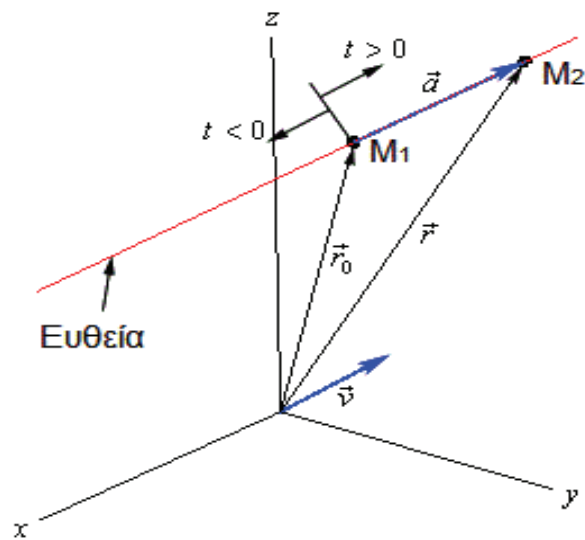
ενώ, αν

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j},$$

ο αντίστοιχος τύπος για τον χώρο των 2-διαστάσεων είναι

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\alpha}^{\beta} [P(t)x'(t) + Q(t)y'(t)] dt. \quad (7.1.2 - 11)$$

Κρίνεται απαραίτητο στο σημείο αυτό να γίνει υπενθύμιση των παρακάτω χρήσιμων για τα επόμενα παραμετρικών παραστάσεων:



Σχήμα 7.1.2 - 1: παραμετρική παράσταση ευθείας.

Ευθεία

Οι παραμετρικές μορφές των $x(t)$, $y(t)$, αντίστοιχα $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ της παραμετρικής εξίσωσης του **ευθύγραμμου τμήματος** M_1M_2 για την περίπτωση του χώρου των

- **2-διαστάσεων**, όταν $M_1(x_1, y_1)$ η αρχή και $M_2(x_2, y_2)$ το τέλος, είναι

$$x(t) = tx_2 + (1-t)x_1,$$

$$y(t) = ty_2 + (1-t)y_1 \quad \text{με } t \in [0, 1]. \quad (7.1.2 - 12)$$

- **3-διαστάσεων**, όταν $M_1(x_1, y_1, z_1)$ - αρχή και $M_2(x_2, y_2, z_2)$ - τέλος (Σχ. 7.1.2 - 1), είναι

$$x(t) = tx_2 + (1-t)x_1,$$

$$y(t) = ty_2 + (1-t)y_1,$$

$$z(t) = tz_2 + (1-t)z_1 \quad \text{με } t \in [0, 1]. \quad (7.1.2 - 13)$$

Περιφέρεια κύκλου

Έστω αρχικά ότι το κέντρο του κύκλου συμπίπτει με την αρχή των αξόνων. Τότε, αν R η ακτίνα, η εξίσωση των σημείων της περιφέρειας γράφεται

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

οπότε παραμετρικές μορφές των $x(t)$ και $y(t)$ είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= R \cos t \quad \text{και} \\ y(t) &= R \sin t \quad \mu\epsilon \quad t \in [0, 2\pi). \end{aligned} \quad (7.1.2 - 14)$$

Αν το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο (α, β) , τότε η εξίσωση των σημείων της περιφέρειας γράφεται

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

οπότε

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha + R \cos t \quad \text{και} \\ y(t) &= \beta + R \sin t \quad \mu\epsilon \quad t \in [0, 2\pi). \end{aligned} \quad (7.1.2 - 15)$$

Σημείωση 7.1.2 - 1

Σε κάθε άλλη διαφορετική των παραπάνω περίπτωση η παραμετρική παράσταση της καμπύλης C θα δίνεται.

Παράδειγμα 7.1.2 - 1

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, όταν

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + (xz + y)\mathbf{k}$$

και C το ευθύγραμμο τμήμα AB με αρχή το $A(1, -1, 2)$ και τέλος το $B(3, 1, -1)$.

Λύση. Έστω

$$A(x_1, y_1, z_1), \quad \text{όπου} \quad x_1 = 1, \quad y_1 = -1, \quad z_1 = 2, \quad \text{και}$$

$$B(x_2, y_2, z_2) \quad x_2 = 3, \quad y_2 = 1, \quad z_2 = -1.$$

Τότε το ευθύγραμμο τμήμα AB σύμφωνα με τον τύπο (7.1.2–13):

$$x(t) = tx_2 + (1-t)x_1,$$

$$y(t) = ty_2 + (1-t)y_1,$$

$$z(t) = tz_2 + (1-t)z_1 \quad \text{με } t \in [0,1]$$

εκφράζεται παραμετρικά ως εξής:

$$x(t) = t \cdot 3 + (1-t) \cdot 1 = 2t + 1 \quad (1)$$

$$y(t) = t \cdot 1 + (1-t) \cdot (-1) = 2t - 1 \quad (2)$$

$$z(t) = t \cdot (-1) + (1-t) \cdot 2 = -3t + 2, \quad \text{όταν } t \in [0,1]. \quad (3)$$

Επομένως

$$x'(t) = 2 \quad (4)$$

$$y'(t) = 2 \quad (5)$$

$$z'(t) = -3. \quad (6)$$

Από το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + (xz + y)\mathbf{k} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

προκύπτει ότι: $P = x$, $Q = -y$ και $R = xz + y$.

Άρα σύμφωνα με τις (1)-(3) έχουμε

$$P(t) = x = 2t + 1,$$

$$Q(t) = -y = -2t + 1, \quad \text{και}$$

$$\begin{aligned} R(t) &= xz + y = (2t + 1)(-3t + 2) + 2t - 1 \\ &= -6t^2 + 3t + 1. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στον τύπο (7.1.2–10) προκύπτει

ότι

$$\begin{aligned}
 \int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 [P(t)x'(t) + Q(t)y'(t) + R(t)z'(t)] dt, \\
 &= \int_0^1 \left[(2t+1) \cdot \overbrace{\frac{1}{2}}^{\text{Εξ. (4)}} + (-2t+1) \cdot \overbrace{\frac{1}{2}}^{\text{Εξ. (5)}} \right. \\
 &\quad \left. + (-6t^2+3t+1) \cdot \overbrace{(-3)}^{\text{Εξ. (6)}} \right] dt \\
 &= \left. t - \frac{9t^2}{2} + 6t^3 \right|_0^1 = \frac{5}{2}.
 \end{aligned}$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA γίνεται με το παρακάτω πρόγραμμα:

Πρόγραμμα 7.1.2 - 1 (επικαμπύλιου ολοκληρώματος 2ου είδους)

```

x1 = 1; y1 = 1; x2 = 2; y2 = 3; z1=2; z2=-1;
x[t_] := t x2 + (1 - t) x1
y[t_] := t y2 + (1 - t) y1
z[t_] := t z2 + (1 - t) z1
Print["x(t) = ", x[t], " , y(t) = ", y[t], " , z(t) = ", z[t]]
xd[t_] := D[x[t], t]; yd[t_] := D[y[t], t]; zd[t_] := D[z[t], t];
Print["x'(t) = ", xd[t], " , y'(t) = ", yd[t], " , z'(t) = ", zd[t]]
P[t_] := y[t]; Q[t_] := - y[t]; R[t_] := x[t] z[t] + y[t]
Print["P(t) = ", Simplify[P[t]]]
Print["Q(t) = ", Simplify[Q[t]]]
Print["R(t) = ", Simplify[R[t]]]
Print["P(t)x'(t)+Q(t)y'(t) = ",
Simplify[P[t] xd[t] + Q[t] yd[t] + R[t] zd[t]]]
w = Integrate[P[t] xd[t] + Q[t] yd[t] + R[t] zd[t], {t, 0, 1}];
Print["Linear Integral: ", w]

```

■

Παράδειγμα 7.1.2 - 2

Όμοια το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, όταν

$$\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$$

και C η περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο $(0, 0)$, όταν η περιφέρεια διαγράφεται δεξιόστροφα, δηλαδή αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Λύση. Επειδή ο κύκλος είναι μοναδιαίος, πρέπει $R = 1$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο (7.1.2–14) η περιφέρεια έχει την παρακάτω παραμετρική παράσταση:

$$x(t) = \cos t, \quad \text{και} \quad (1)$$

$$y(t) = \sin t \quad \text{με} \quad t \in [0, 2\pi), \quad (2)$$

οπότε

$$x'(t) = -\sin t, \quad \text{και} \quad (3)$$

$$y'(t) = \cos t. \quad (4)$$

Το διανυσματικό πεδίο γράφεται

$$\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j},$$

οπότε $P = x - y$ και $Q = x + y$.

Άρα σύμφωνα με τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$P(t) = x - y = \cos t - \sin t, \quad \text{και}$$

$$Q(t) = x + y = \cos t + \sin t.$$

Τότε από τον τύπο (7.1.2 – 11) έχουμε

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} [P(t)x'(t) + Q(t)y'(t)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left[(\cos t - \sin t) \cdot \overbrace{(-\sin t)}^{\text{Εξ. (3)}} + (\cos t + \sin t) \cdot \overbrace{\cos t}^{\text{Εξ. (4)}} \right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

■

7.1.3 Ιδιότητες

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα έχουν ιδιότητες ανάλογες με εκείνες των ήδη γνωστών ολοκληρωμάτων. Οι βασικότερες από αυτές που δίνονται στη συνέχεια με τη μορφή θεωρημάτων είναι:

Θεώρημα 7.1.3 - 1 (γραμμική). Έστω \mathbf{F} και \mathbf{G} διανυσματικά πεδία, που είναι ορισμένα επί μιας καμπύλης C με πεπερασμένο μήκος και παραμετρική παράσταση $\mathbf{r}(t)$ για κάθε $t \in [\alpha, \beta]$. Τότε, αν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα των \mathbf{F} και \mathbf{G} επί της C υπάρχουν, για κάθε $k, \lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\int_C (k\mathbf{F} + \lambda\mathbf{G}) \cdot d\mathbf{r} = k \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \lambda \int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$$

Η ιδιότητα γενικεύεται.

Θεώρημα 7.1.3 - 2 (προσθετική). Έστω \mathbf{F} διανυσματικό πεδίο, που είναι ορισμένο επί μιας καμπύλης C με πεπερασμένο μήκος και παραμετρική παράσταση $\mathbf{r}(t)$ για κάθε $t \in [\alpha, \beta]$. Τότε, αν C_1 και C_2 είναι δύο διαφορετικά τόξα της C , τέτοια ώστε το άθροισμά τους να είναι η C και να διαγράφονται από το ίδιο διάνυσμα $\mathbf{r}(t)$ που διαγράφεται και η C , ισχύει ότι

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Η ιδιότητα γενικεύεται για ν το πλήθος επιμέρους τόξα της C .

Θεώρημα 7.1.3 - 3. Έστω \mathbf{F} διανυσματικά πεδίο, που είναι ορισμένο επί μιας καμπύλης C με πεπερασμένο μήκος και παραμετρική παράσταση $\mathbf{r}(t)$ για κάθε $t \in [\alpha, \beta]$. Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα παραμένει αμετάβλητο σε μία αλλαγή της παραμέτρου t , που διατηρεί τον προσανατολισμό της C και αλλάζει πρόσημο, όταν η αλλαγή αυτή αντιστρέψει τον προσανατολισμό, δηλαδή

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Η ιδιότητα αυτή εκφράζει την ανεξαρτησία του επικαμπύλιου ολοκληρώματος από την εκλογή της παραμέτρου.

7.1.4 Σχέση επικαμπύλιου ολοκληρώματος και κλίσης

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

δεν είναι γενικά ανεξάρτητο από τον δρόμο της ολοκλήρωσης C , δηλαδή, αν υποθεθεί ότι η C έχει αρχή το σημείο A και τέλος το B , τότε η τιμή του, όταν ο δρόμος είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB , είναι διαφορετική εκείνης, όταν ο δρόμος είναι μια οποιαδήποτε άλλη καμπύλη με αρχή το A και τέλος το B .

Τα παραπάνω δεν ισχύουν και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα έχει την ίδια τιμή ανεξάρτητα του τρόπου διαγραφής της C από το A στο B , μόνον όταν το διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} είναι συντηρητικό.⁵

Σχετικά αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα:

⁵

Ορισμός (συντηρητικό πεδίο). Το διανυσματικό πεδίο που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση \mathbf{F} θα λέγεται **συντηρητικό**, όταν

$$\mathbf{F} = \nabla\phi.$$

Βλέπε Μάθημα Διανυσματικός Διαφορικός Λογισμός - Συντηρούμενα πεδία.

Θεώρημα 7.1.4 - 1 (ανεξαρτησίας επικαμπύλιου ολοκληρώματος).

Έστω

$$\mathbf{F} = \nabla\phi,$$

όπου ϕ βαθμωτή συνάρτηση της οποίας υπάρχουν τουλάχιστον οι 1ης τάξης μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (7.1.4 - 1)$$

όταν C η καμπύλη από το σημείο $A(x_1, y_1, z_1)$ στο $B(x_2, y_2, z_2)$ του πεδίου, είναι ανεξάρτητο από τον δρόμο της ολοκλήρωσης και ισχύει

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A(x_1, y_1, z_1)}^{B(x_2, y_2, z_2)} d\phi = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1). \quad (7.1.4 - 2)$$

Αντίστροφα: αν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (7.1.4-1) είναι ανεξάρτητο από τον δρόμο της ολοκλήρωσης, τότε υπάρχει μία βαθμωτή συνάρτηση, έστω ϕ , έτσι ώστε $\mathbf{F} = \nabla\phi$.

Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι το:

Πόρισμα 7.1.4 - 1. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός συντηρητικού διανυσματικού πεδίου κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης είναι μηδέν.

Κρίνεται απαραίτητο στο σημείο αυτό για ευκολία των παρακάτω ασκήσεων, να γίνει υπενθύμιση των παρακάτω εννοιών:⁶

Ορισμός 7.1.4 - 2. Έστω ένα διανυσματικό πεδίο που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση \mathbf{F} . Τότε το πεδίο θα λέγεται **αστρόβιλο** (irrotational field), όταν ισχύει

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (7.1.4 - 3)$$

Θεώρημα 7.1.4 - 2. Ένα διανυσματικό πεδίο είναι αστρόβιλο, όταν είναι συντηρητικό και αντίστροφα.

⁶Βλέπε επίσης Μάθημα Διανυσματικός Διαφορικός Λογισμός - Αστρόβιλα πεδία.

Παρατήρηση 7.1.4 - 1

Αν στην αναλυτική περιγραφή του διανυσματικού πεδίου \mathbf{F} λείπει κάποια συνιστώσα, τότε στον υπολογισμό του στροβιλισμού $\nabla \times \mathbf{F}$ η συνιστώσα αυτή υπολογίζεται με την τιμή της ίση με το 0.

Παράδειγμα 7.1.4 - 1

Έστω το διανυσματικό πεδίο (Σχ. 7.1.4 - 1a)

$$\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + 2y^2)\mathbf{j}.$$

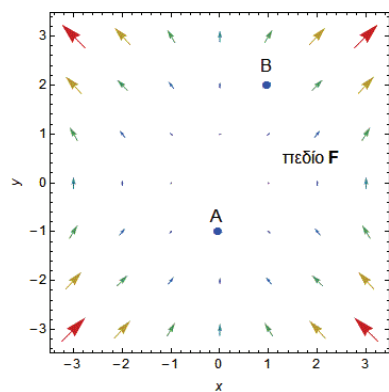
Δείξτε ότι

- i) το πεδίο \mathbf{F} είναι συντηρητικό.
- ii) Στη συνέχεια να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

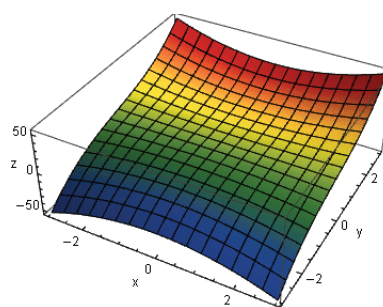
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

όταν C ο δρόμος ολοκλήρωσης από το σημείο $A(0, -1)$ στο $B(1, 2)$.

Λύση.



(a)



(b)

Σχήμα 7.1.4 - 1: (a) το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + 2y^2)\mathbf{j}$ και τα σημεία $A(0, -1)$, $B(1, 2)$ και (b) το δυναμικό $\phi(x, y) = x^2y + y^3$.

- i) Σύμφωνα με τα Θεωρήματα 7.1.4 - 1 - 7.1.4 - 2 και τον Ορισμό 7.1.4 - 2 αρκεί να δειχθεί ότι

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Αν

$$\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + 2y^2)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

(υποχρεωτικά η συνιστώσα που λείπει πρέπει να είναι

ίση με μηδέν - Παρατήρηση 7.1.4 - 1)

$$= P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

τότε

$$P = 2xy, \quad Q = x^2 + 2y^2 \quad \text{και} \quad R = 0. \quad (1)$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + 2y^2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (0 - Q_z)\mathbf{i} + (P_z - 0)\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Τότε από το Θεώρημα 7.1.4 - 2 προκύπτει ότι το πεδίο \mathbf{F} είναι συντηρητικό, δηλαδή

$$\mathbf{F} = \nabla\varphi,$$

όπου φ το δυναμικό.

- ii) Εφόσον το πεδίο είναι συντηρητικό, για τον υπολογισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος πρέπει να υπολογιστεί το δυναμικό του.

Υπολογισμός του δυναμικού

Σύμφωνα με την (i), αν

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k} \\ &= \nabla\varphi = \varphi_x\mathbf{i} + \varphi_y\mathbf{j} + \varphi_z\mathbf{k},\end{aligned}$$

τότε από την (1) προκύπτει ότι

$$\varphi_x = P = 2xy \quad \varphi_y = Q = x^2 + 3y^2 \quad \text{και} \quad \varphi_z = R = 0.$$

Για να προσδιοριστεί το δυναμικό φ , πρέπει να ολοκληρωθούν οι παραπάνω σχέσεις ως προς x , y και z αντίστοιχα. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια του ολικού διαφορικού της φ ως εξής:

$$\begin{aligned}d\varphi &= \varphi_x dx + \varphi_y dy + 0 dz \\ &= 2xy dx + (x^2 + 3y^2) dy \\ &= d_x(x^2y) + d_y(x^2y + y^3) \\ &= d_x(x^2y + \overbrace{y^3}^{d_x(y^3)=0}) + d_y(x^2y + y^3) \\ &= d(x^2y + y^3).\end{aligned}$$

Επομένως το δυναμικό του πεδίου \mathbf{F} είναι

$$\phi(x, y) = x^2y + y^3 + c,$$

όταν c σταθερά (Σχ. 7.1.4 - 1b).

Άρα από το Θεώρημα 7.1.4 - 1 και τον τύπο (7.1.4 - 2) έχουμε

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A(0,-1)}^{B(1,2)} d\varphi = \varphi(1,2) - \varphi(0,-1) = 11.$$

■

Παράδειγμα 7.1.4 - 2

Όμοια το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, όταν

$$\mathbf{F} = 3x^2z\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + (x^3 + 2yz)\mathbf{k}.$$

και C ο δρόμος ολοκλήρωσης από το σημείο $A(-1, 1, 2)$ στο $B(1, 2, 4)$.

Λύση. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 7.1.4 - 1, αν

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= 3x^2z\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + (x^3 + 2yz)\mathbf{k} \\ &= P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},\end{aligned}$$

τότε

$$P = 3x^2z, \quad Q = z^2 \quad \text{και} \quad R = x^3 + 2yz. \quad (2)$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2z & z^2 & x^3 + 2yz \end{vmatrix} \\ &= (R_y - Q_z)\mathbf{i} + (P_z - R_x)\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\mathbf{k} = \mathbf{0},\end{aligned}$$

οπότε όμοια σύμφωνα με το γνωστό Θεώρημα 7.1.4 - 2 το πεδίο \mathbf{F} είναι συντηρητικό.

Υπολογισμός του δυναμικού

Έστω

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k} = \nabla\varphi = \varphi_x\mathbf{i} + \varphi_y\mathbf{j} + \varphi_z\mathbf{k},$$

τότε σύμφωνα με τη (2) είναι

$$\varphi_x = 3x^2z, \quad \varphi_y = z^2 \quad \text{και} \quad \varphi_z = x^3 + 2yz.$$

Ολοκληρώνοντας τις παραπάνω σχέσεις ως προς x , y και z προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 d\varphi &= \varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz \\
 &= 3x^2z dx + z^2 dy + (x^3 + 2yz) dz \\
 &= d_x(x^3z) + d_y(yz^2) + d_z(x^3z + y^2z) \\
 &= d_x(x^3z + \overbrace{y^2z}^{d_x(y^2z)=0}) + d_y(yz^2 + \overbrace{x^3z}^{d_y(x^3z)=0}) + d_z(x^3z + y^2z) \\
 &= d(x^3z + y^2z).
 \end{aligned}$$

Άρα το δυναμικό του πεδίου \mathbf{F} είναι

$$\phi(x, y, z) = x^3z + y^2z + c,$$

όταν c σταθερά

Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 7.1.4 - 1 και τον τύπο (7.1.4 - 2) έχουμε

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A(-1,1,2)}^{B(1,2,4)} d\varphi = \varphi(1, 2, 4) - \varphi(-1, 1, 2) = 6.$$

■

Ασκήσεις

1. Αφού πρώτα δειχθεί ότι τα παρακάτω πεδία είναι συντηρούμενα, στη συνέχεια να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

όταν το C είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB και \mathbf{F} :

i) $y^4z^2 \mathbf{i} + 4xy^3z^2 \mathbf{j} + 2xy^4z \mathbf{k}$ από το σημείο $A(-1, 2, 4)$ στο $B(3, 2, 2)$,

ii) $(y \mathbf{i} + x \mathbf{j}) e^{xy}$ από το $A(1, 0)$ στο $B(2, 2)$,

iii) $(4xy - 3x^2z^2) \mathbf{i} + 2x^2 \mathbf{j} - 2x^3z \mathbf{k}$ από το $A(0, 1, 1)$ στο $B(2, 2, 4)$,

iv) $(2x \cos y + z \sin y) \mathbf{i} + (xz \cos y - x^2 \sin y) \mathbf{j} + x \sin y \mathbf{k}$ από το $(1, \pi, 3)$ στο $(-1, 0, 1)$,

v) $(y^2z^3 \cos x - 4x^3z) \mathbf{i} + 2yz^3 \sin x \mathbf{j} + (3y^2z^2 \sin x - x^4) \mathbf{k}$ από το $(\pi/2, 1, 1)$ στο $(\pi, 3, 3)$.

2. Να προσδιοριστεί το δυναμικό των πεδίων:

$$i) \mathbf{E} = r \mathbf{r} \qquad ii) \mathbf{E} = r^2 \mathbf{r},$$

όταν \mathbf{r} διάνυσμα θέσης. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r},$$

όταν C το άνω τμήμα της περιφέρειας $x^2 + y^2 = 4$.

Απαντήσεις

1. Το αντίστοιχο δυναμικό ϕ είναι:

(i) xy^4z^2 , (ii) e^{xy} (αρχικά $P = ye^{xy}$, $Q = xe^{xy}$, $R = 0$), (iii) $2x^2y - x^3z^2$,
(iv) $x^2 \cos y + xz \sin y$, (v) $y^2z^3 \sin x - x^4z$.

2. Είναι $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, οπότε $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Τότε:

(i) $\phi_x = x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\phi_y = y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ και $\phi_z = z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, οπότε τελικά $\phi(x, y, z) = \frac{1}{3} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος έχουμε ως δρόμο ολοκλήρωσης το άνω μέρος της περιφέρειας ακτίνας $R = 2$ από το σημείο $A(2, 0)$ στο $B(-2, 0)$. Επειδή $z = 0$, πρέπει $\phi(x, y) = \frac{1}{3} \sqrt{x^2 + y^2}$. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 7.1.4 - 1 και τον τύπο (7.1.4 - 2) έχουμε

$$I = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A(2,0)}^{B(-2,0)} d\phi = \phi(2, 0) - \phi(-2, 0) = 0.$$

(ii) $\phi_x = x(x^2 + y^2 + z^2)$ κ.λπ., οπότε τελικά

$$\phi = \frac{1}{4} (x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2).$$

Για το ολοκλήρωμα είναι όμοια $z = 0$, οπότε $\phi = \frac{1}{4} (x^4 + y^4 + 2x^2y^2) = \frac{1}{4} (x^2 + y^2)^2$ με $I = 0$.

7.1.5 Ορισμός σε βαθμωτό πεδίο

Έστω C μία καμπύλη με παραμετρική εξίσωση

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad \text{όταν } t \in [\alpha, \beta],$$

όπου οι συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ είναι παραγωγίσιμες για κάθε $t \in (\alpha, \beta)$.

Είναι ήδη γνωστό από το Μάθημα Διανυσματικές Συναρτήσεις - Γεωμετρική σημασία παραγώγου ότι:

- η παράγωγος $\mathbf{r}'(t)$ ορίζει τη διεύθυνση της εφαπτομένης της C , και
- το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{T}(t)$ ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}, \quad \text{όταν } \mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}. \quad (7.1.5 - 1)$$

Επομένως, αν η παράμετρος t παριστάνει τον χρόνο, είναι προφανές ότι η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}'(t)$ θα παριστάνει το **διάνυσμα της ταχύτητας**, έστω $\mathbf{v}(t)$, οπότε

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$$

σε κάθε σημείο της C και θα έχει **μέτρο**

$$v(t) = |\mathbf{r}'(t)| = |\mathbf{v}(t)|.$$

Έστω $s = s(t)$ το μήκος του τόξου επί της C που διαγράφεται σε χρόνο t . Τότε σύμφωνα και με τους παραπάνω τύπους είναι:

$$\frac{ds(t)}{dt} = v(t) = |\mathbf{r}'(t)|, \quad \text{οπότε } ds(t) = v(t) dt = |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (7.1.5 - 2)$$

Η (7.1.5 - 1) σύμφωνα με την (7.1.5 - 2) διαδοχικά γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \\ &= \frac{1}{v(t)} \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{1}{\frac{ds(t)}{dt}} \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{ds(t)}, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{ds(t)}.$$

Άρα

$$d\mathbf{r} = \mathbf{T} ds, \quad (7.1.5 - 3)$$

Επομένως σύμφωνα με την (7.1.5-3) το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ τελικά γράφεται

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_C f ds, \quad (7.1.5 - 4)$$

όπου η $f = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ λόγω του εσωτερικού γινομένου είναι **βαθμωτή συνάρτηση**.

Η (7.1.5 - 4) δίνει μία άλλη έκφραση του επικαμπύλιου ολοκληρώματος, που αναλυτικά ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 7.1.5 - 1 (επικαμπύλιου ολοκληρώματος). Αν η f περιγράψει ένα βαθμωτό πεδίο, που είναι ορισμένο επί μιας καμπύλης C με πεπερασμένο μήκος, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f ως προς ένα τόξο s της C , συμβολίζεται με $\int_C f ds$ και ισούται με

$$\int_C f ds = \int_a^\beta f[\mathbf{r}(t)] ds(t) = \int_a^\beta f[\mathbf{r}(t)] s'(t) dt, \quad (7.1.5 - 5)$$

όταν το τελευταίο ολοκλήρωμα υπάρχει.

Σημείωση 7.1.5 - 1

Στη βιβλιογραφία τα επικαμπύλια ολοκληρώματα που ορίζονται από ένα βαθμωτό πεδίο επί μιας καμπύλης, είναι επίσης γνωστά και ως επικαμπύλια ολοκληρώματα του 1ου είδους.

7.1.6 Εφαρμογές

Οι σημαντικότερες εφαρμογές ανάλογα με τη φυσική σημασία της βαθμωτής συνάρτησης f δίνονται στη συνέχεια.

- $f = 1$

Τότε το ολοκλήρωμα $\int_C ds$ παριστάνει το μήκος της καμπύλης C .

Επειδή σύμφωνα με τον τύπο (7.1.5 - 5) είναι

$$\frac{ds}{dt} = v(t) = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$$

το μήκος L της C θα δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} L &= \int_C ds = \int_{\alpha}^{\beta} s'(t) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt. \end{aligned} \quad (7.1.6 - 1)$$

- Αν η f παριστάνει την **πυκνότητα** ρ σε κάθε σημείο της C , τότε η **ολική μάζα** M δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$M = \int_C \rho ds = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) s'(t) dt. \quad (7.1.6 - 2)$$

Στην περίπτωση αυτή οι συντεταγμένες $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ του **κέντρου μάζας** είναι

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{M} \int_C x \rho ds = \frac{1}{M} \int_{\alpha}^{\beta} x(t) \rho(t) s'(t) dt, \\ \bar{y} &= \frac{1}{M} \int_C y \rho ds = \frac{1}{M} \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \rho(t) s'(t) dt, \quad \text{και} \\ \bar{z} &= \frac{1}{M} \int_C z \rho ds = \frac{1}{M} \int_{\alpha}^{\beta} z(t) \rho(t) s'(t) dt, \end{aligned} \quad (7.1.6 - 3)$$

ενώ η **ροπή αδράνειας** I_l ως προς άξονα l ισούται με

$$I_l = \int_C \delta^2 \rho ds = \int_{\alpha}^{\beta} \delta^2(t) \rho(t) s'(t) dt, \quad (7.1.6 - 4)$$

όπου με $\delta = \delta(x, y, z)$ συμβολίζεται η απόσταση του τυχόντος σημείου της C από τον l .

Παράδειγμα 7.1.6 - 1

Έστω C η σπείρα ενός ελατηρίου με σχήμα ένα τόξο της κυκλικής έλικας με παραμετρική εξίσωση (Σχ. 7.1.6 - 1a)

$$\mathbf{r}(t) = \alpha \cos t \mathbf{i} + \alpha \sin t \mathbf{j} + \beta t \mathbf{k}, \quad \text{όταν } \alpha > 0 \text{ και } t \in [0, 2\pi].$$

Αν η πυκνότητα του ελατηρίου είναι

$$\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

ζητείται να υπολογιστεί το μήκος, η μάζα και οι συντεταγμένες $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ του κέντρου μάζας του ελατηρίου.

Λύση. Έχουμε

$$x(t) = \alpha \cos t, \quad y(t) = \alpha \sin t \quad \text{και} \quad z(t) = \beta t,$$

οπότε

$$x'(t) = -\alpha \sin t, \quad y'(t) = \alpha \cos t \quad \text{και} \quad z'(t) = \beta.$$

Τότε

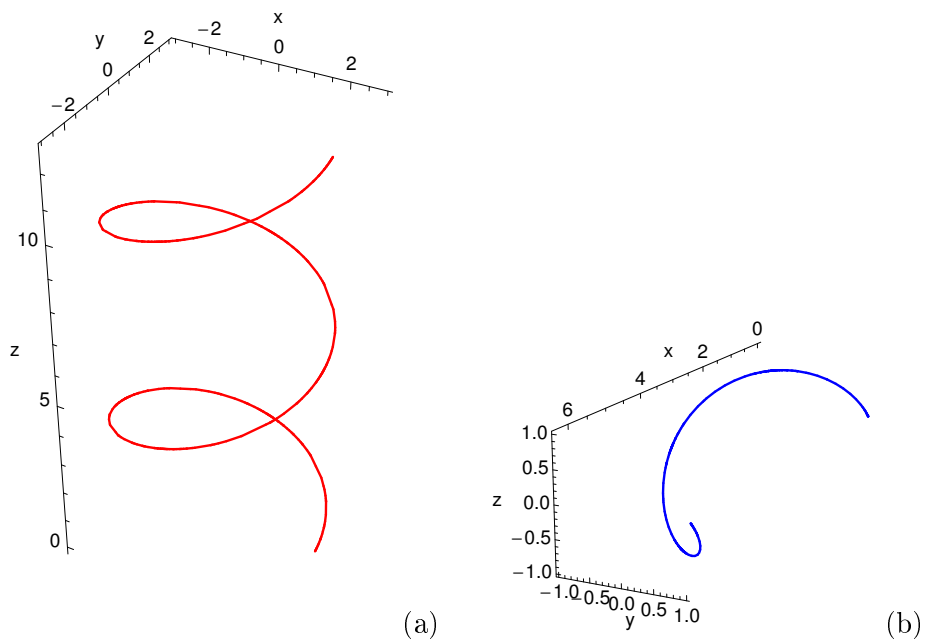
$$s'(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

Σύμφωνα με τον τύπο (7.1.6 - 1) το μήκος L του ελατηρίου είναι

$$\begin{aligned} L &= \int_C ds = \int_{\alpha}^{\beta} s'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} dt = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \end{aligned}$$

Επειδή $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ είναι

$$\begin{aligned} \rho[\mathbf{r}(t)] &= \rho(x(t), y(t), z(t)) = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) \\ &= \alpha^2 \cos^2 t + \alpha^2 \sin^2 t + \beta^2 t^2 \\ &= \alpha^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) + \beta^2 t^2 = \alpha^2 + \beta^2 t^2. \end{aligned}$$



Σχήμα 7.1.6 - 1: Η καμπύλη C σε: (a) Παράδειγμα 7.1.6 - 1, όταν $\alpha = 3, \beta = 1$ και $t \in [0, 4\pi]$, (b) Άσκηση 1 (i), όταν $\alpha = 3, \beta = 1$ και $t \in [0, 2\pi]$.

Επομένως η ολική μάζα M σύμφωνα με την (7.1.6 – 2) είναι

$$\begin{aligned}
 M &= \int_C \rho ds = \int_0^{2\pi} \rho [\mathbf{r}(t)] s'(t) dt = \int_0^{2\pi} \rho(t) s'(t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (\alpha^2 + \beta^2 t^2) \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} dt \\
 &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \int_0^{2\pi} (\alpha^2 + \beta^2 t^2) dt \\
 &= \frac{2\pi}{3} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} (3\alpha^2 + 4\pi^2 \beta^2).
 \end{aligned}$$

Επίσης από τους τύπους (7.1.6 – 3) διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned}
 \int_C x \rho ds &= a \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) \cos t dt \\
 &= a \sqrt{a^2 + b^2} \{2b^2 t \cos t + [a^2 + b^2 (t^2 - 2)] \sin t\} \Big|_0^{2\pi} \\
 &= 4ab^2 \pi \sqrt{a^2 + b^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_C y \rho ds &= a \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) \sin t dt \\
 &= a \sqrt{a^2 + b^2} \{2b^2 t \sin t - [a^2 + b^2 (t^2 - 2)] \cos t\} \Big|_0^{2\pi} \\
 &= -4ab^2 \pi^2 \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \text{και}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_C z \rho ds &= a \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} t (a^2 + b^2 t^2) dt \\
 &= b \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a^2 t^2}{2} + \frac{b^2 t^4}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} \\
 &= 2b (a^2 + 2b^2 \pi^2) \pi^2 \sqrt{a^2 + b^2},
 \end{aligned}$$

οπότε το κέντρο μάζας θα είναι

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{6ab^2}{3a^2 + 4b^2\pi^2}, -\frac{6ab^2\pi}{3a^2 + 4b^2\pi^2}, \frac{3b\pi(a^2 + 2b^2\pi^2)}{3a^2 + 4b^2\pi^2} \right).$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA έγινε με το παρακάτω πρόγραμμα:

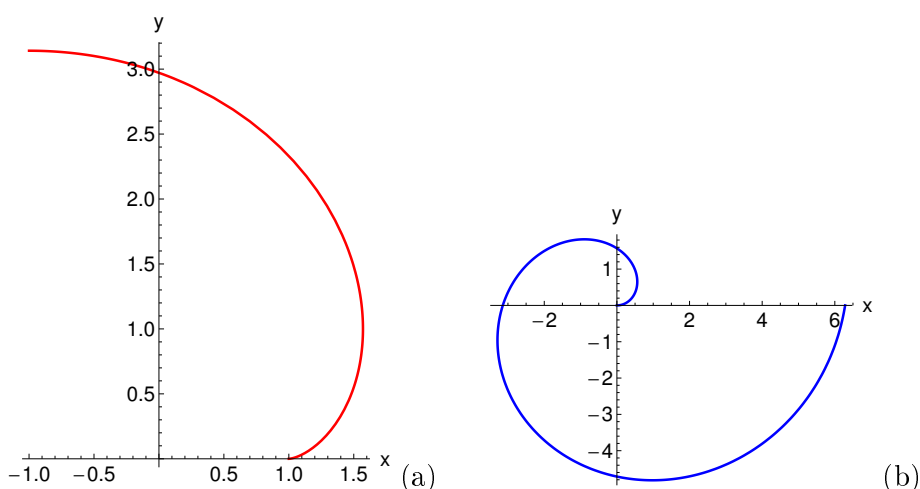
Πρόγραμμα 7.1.6 - 2 (επικαμπύλιου ολοκληρώματος 1ου είδους)

```
x[t_] := a Cos[t]
y[t_] := a Sin[t]
z[t_] := b t
f[t_] := (x[t])^2 + (y[t])^2 + (z[t])^2
Print["x'(t) = ", D[x[t], t], " , ", "y'(t) = ",
  D[y[t], t], " , ", "z'(t) = ", D[z[t], t]]
Print["s'(t) = ",
  Simplify[Sqrt[(D[x[t], t])^2 + (D[y[t], t])^2 + (D[z[t], t])^2]]]
Print["Length L = ", Integrate[Sqrt[(D[x[t], t])^2 + (D[y[t], t])^2
+ (D[z[t], t])^2], {t, 0, 2 Pi}]]
Print["f(t) = ", Simplify[f[t]]]
M = Simplify[Integrate[f[t] Sqrt[(D[x[t], t])^2 + (D[y[t], t])^2
+ (D[z[t], t])^2], {t, 0, 2 Pi}]];
Print["Mass M = ", M]
x1 = Simplify[Integrate[x[t] f[t] Sqrt[(D[x[t], t])^2 + (D[y[t], t])^2
+ (D[z[t], t])^2], {t, 0, 2 Pi}]];
y1 = Simplify[Integrate[y[t] f[t] Sqrt[(D[x[t], t])^2 + (D[y[t], t])^2
+ (D[z[t], t])^2], {t, 0, 2 Pi}]];
z1 = Simplify[Integrate[z[t] f[t] Sqrt[(D[x[t], t])^2
+ (D[y[t], t])^2 + (D[z[t], t])^2], {t, 0, 2 Pi}]];
Print["Center of mass x = ", Simplify[x1/M], " , y = ",
  Simplify[y1/M], " , z = ", Simplify[z1/M]]
ParametricPlot3D[{x[t], y[t], z[t]}, {t, 0, 4 Pi},
  PlotStyle -> {Red, Thick}, Boxed -> False,
  AxesLabel -> {"x", "y", "z"},
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 16}]
```

■

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το μήκος L , η ολική μάζα M και οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας του σύρματος στις παρακάτω περιπτώσεις:



Σχήμα 7.1.6 - 2: Η καμπύλη C στην: (α) Άσκηση 1 (ii), όταν $t \in [0, \pi]$ και (β) Άσκηση 1 (iii), όταν $t \in [0, 2\pi]$.

i) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k}$ και $t \in [0, 2\pi]$, όταν η πυκνότητα του σύρματος είναι $\rho(x, y, z) = x^2$ (Σχ. 7.1.6 - 1b).

ii) $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}$ με $t \in [0, \pi]$ και η πυκνότητα του σύρματος είναι $\rho(x, y) = x^2 + y^2$ (Σχ. 7.1.6 - 2a).

iii) $\mathbf{r}(t) = t \cos t\mathbf{i} + t \sin t\mathbf{j}$ με $t \in [0, 2\pi]$ και $\rho(x, y) = x^2$ (Σχ. 7.1.6 - 2b).

2. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα των z της σπείρας του Παραδείγματος 7.1.6 - 1.

3. Ναδειχθεί ότι η ροπή αδράνειας ενός ομογενούς κυκλικού σύρματος με ακτίνα R ως προς έναν άξονα που περνά από το κέντρο του είναι $MR^2/2$, όταν M η μάζα του σύρματος. Κατόπιν να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας ως προς άξονα, που απέχει από το κέντρο του απόσταση ίση με d .

Απαντήσεις

1. (i) $s'(t) = \sqrt{2}$, $L = 2\sqrt{2}\pi$, $\rho(t) = t^2$, $M = \frac{8\sqrt{2}\pi^3}{3}$, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\frac{3\pi}{2}, \frac{3}{2\pi^2}, -\frac{3}{2\pi})$.
 (ii) $s'(t) = t$, $L = \frac{\pi^2}{2}$, $\rho(t) = 1 + t^2$, $M = \frac{1}{4}\pi^2(1 + 2\pi^2)$,

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{4(54-14\pi^2+\pi^4)}{\pi^2(\pi^2+2)}, \frac{4(5\pi^2-27)}{\pi(\pi^2+2)} \right).$$

(iii) $s'(t) = \sqrt{1+t^2}$, $L = \pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2} \sinh^{-1} 2\pi$, $\rho(t) = t^2 \cos^2 t$. Οι υπόλοιποι υπολογισμοί των ολοκληρωμάτων γίνονται μόνον προσεγγιστικά, όπως με ανάπτυγμα κατά Maclaurin ή με προσεγγιστικές μεθόδους (βλέπε βιβλιογραφία). $M = 214.42$ κ.λπ.

Ανάλογα οι Ασκήσεις 2 και 3.

7.1.7 Σχέση επικαμπύλιου και διπλού ολοκληρώματος

Στην παράγραφο αυτή θα εξεταστεί η σχέση που υπάρχει μεταξύ του επικαμπύλιου και του διπλού ολοκληρώματος.

Σχετικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:⁷

Θεώρημα 7.1.7 - 1 (Green στο επίπεδο). Έστω D ένας κλειστός τόπος του επιπέδου που περικλείεται από μία κλειστή και απλή καμπύλη C του xy -επιπέδου (Σχ. 7.1.7 - 1). Τότε, αν P και Q είναι συνεχείς συναρτήσεις στο D , ισχύει

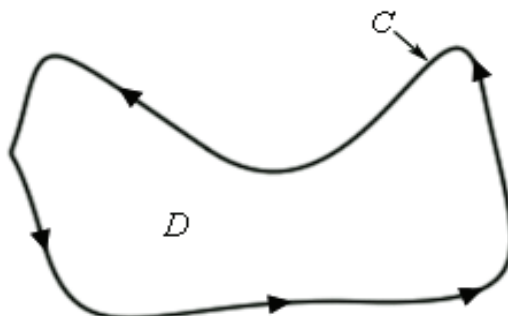
$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (7.1.7 - 1)$$

όταν η καμπύλη C διαγράφεται κατά τη θετική φορά.

Σημειώσεις 7.1.7 - 1

- i) Υπενθυμίζεται ότι ως θετική φορά διαγραφής ή διαφορετικά δεξιόστροφη φορά θεωρείται αυτή που είναι αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.
- ii) Μία καμπύλη C είναι κλειστή, όταν η αρχή και το τέλος της συμπίπτουν.
- iii) Με τον όρο απλή καμπύλη εννοείται ότι η διαγραφή της γίνεται με συνεχή τρόπο και ότι η C καλύπτει πλήρως τον τόπο D . Το θεώρημα γενικεύεται και αποδεικνύεται στη βιβλιογραφία ότι ισχύει και για άλλες μορφές της καμπύλης C και του τόπου D .

⁷Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, και απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 4.



Σχήμα 7.1.7 - 1: Θεώρημα του Green.

Έστω τώρα ότι στο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$, οι συνιστώσες του P και Q επαληθεύουν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 7.1.7 - 1. Τότε έχοντας υπόψη τον τύπο (7.1.2 - 10), οπότε ο τύπος (7.1.7 - 1) γράφεται

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C P dx + Q dy \\ &= \iint_D (Q_x - P_y) dx dy. \end{aligned} \quad (7.1.7 - 2)$$

Ο τύπος (7.1.7 - 2) θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια για τους υπολογισμούς.

Παράδειγμα 7.1.7 - 1

Με το Θεώρημα του Green να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, όταν

$$\mathbf{F} = (5 - xy - y^2)\mathbf{i} + (x^2 - 2xy)\mathbf{j}$$

και C το τετράγωνο με κορυφές $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ και $(0, 1)$, που διαγράφεται δεξιόστροφα.

Λύση. Από την έκφραση του διανυσματικού πεδίου έχουμε ότι, αν

$$F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} = (5 - xy - y^2)\mathbf{i} + (x^2 - 2xy)\mathbf{j},$$

τότε

$$P = 5 - xy - y^2 \quad \text{και} \quad Q = x^2 - 2xy. \quad (1)$$

Η καμπύλη C προφανώς πληροί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 7.1.7 - 1, ενώ το τετράγωνο D που ορίζει, περιγράφεται ως εξής:

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \}.$$

Επομένως στο διπλό ολοκλήρωμα έχουμε την ολοκληρωτέα συνάρτηση $Q_x - P_y$ να ορίζεται σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο⁸ από τους τύπους (7.1.7-2) και (1) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot dr &= \iint_D (Q_x - P_y) dx dy \\ &= \iint_D [(2x - 2y) - (-x - 2y)] dx dy \\ &= 3 \int_0^1 \left[\int_0^1 x dx \right] dy = 3 \int_0^1 \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 dy = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 7.1.7 - 2

Όμοια με το Θεώρημα του Green να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\oint_C xy dx + x^2 y^3 dy,$$

όταν C το τρίγωνο με κορυφές $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(1, 2)$, που διαγράφεται δεξιό-στροφα (Σχ. 7.1.7 - 2).

Λύση. Προφανώς είναι

$$P = xy \quad \text{και} \quad Q = x^2 y^3. \quad (2)$$

⁸Βλέπε Μάθημα Πολλαπλά ολοκλήρωματα Κεφ. Διπλά ολοκλήρωματα - Μέθοδοι υπολογισμού Περίπτωση I.

Όμοια η καμπύλη C πληροί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 7.1.7 - 1, ενώ το τρίγωνο D που ορίζει, σύμφωνα και με το (Σχ. 7.1.7 - 2) περιγράφεται ως εξής:

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x \}.$$

Επομένως από τους τύπους (7.1.7 - 1) και (2) προκύπτει ότι⁹

$$\begin{aligned} \oint_C xy \, dx + x^2 y^3 \, dy &= \iint_D (Q_x - P_y) \, dx \, dy \\ &= \iint_D (2xy^3 - x) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{2x} (2xy^3 - x) \, dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} xy^4 - xy \right]_{y=0}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^1 (8x^5 - 2x^2) \, dx = \left[\frac{4}{3} x^6 - \frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

■

7.2 Επιφανειακά ολοκληρώματα

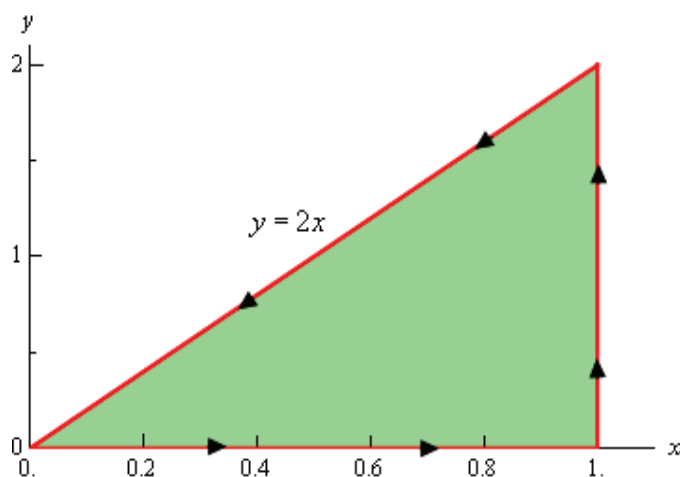
7.2.1 Παραμετρικός ορισμός επιφάνειας

¹⁰Είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη ότι η έννοια της καμπύλης ορίστηκε με τη βοήθεια της κίνησης ενός υλικού σημείου που έχει έναν βαθμό ελευθερίας. Με τη βοήθεια τώρα μιας ανάλογης κίνησης δίνεται ο παρακάτω ορισμός της επιφάνειας:

⁹Όμοια βλέπε Μάθημα Πολλαπλά ολοκληρώματα Κεφ. Διπλά ολοκληρώματα - Μέθοδοι υπολογισμού Περίπτωση II.

¹⁰Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 3, 4, 5, 6] και στη μαθηματική βάση δεδομένων

<http://en.wikipedia.org/wiki/Surface-integral>



Σχήμα 7.1.7 - 2: Παράδειγμα 7.1.7 - 2.

Ορισμός 7.2.1 - 1 (επιφάνειας). Ορίζεται ως επιφάνεια ο γεωμετρικός τόπος των θέσεων ενός υλικού σημείου, που κινείται στον χώρο και έχει δύο βαθμούς ελευθερίας.

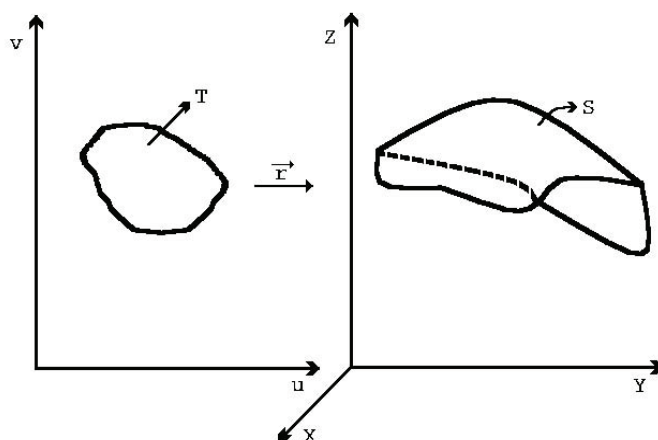
Αν λοιπόν για την παραμετρική παράσταση μιας καμπύλης απαιτείται η χρήση μιας παραμέτρου, τώρα για την παραμετρική παράσταση μιας επιφάνειας (Σχ. 7.2.1 - 1) απαιτούνται δύο παράμετροι, που συνήθως συμβολίζονται με u και v . Επομένως, αν $M(x, y, z)$ είναι ένα τυχόν σημείο μιας επιφάνειας S , οι καρτεσιανές συντεταγμένες x , y και z θα εκφράζονται συναρτήσει των παραμέτρων u και v ως εξής:

$$x = X(u, v), \quad y = Y(u, v) \quad \text{και} \quad z = Z(u, v), \quad (7.2.1 - 1)$$

οπότε για το διάνυσμα θέσης \mathbf{r} του σημείου M πρέπει

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = X(u, v)\mathbf{i} + Y(u, v)\mathbf{j} + Z(u, v)\mathbf{k}, \quad (7.2.1 - 2)$$

όταν $(u, v) \in T$ με T έναν τόπο του χώρου των δύο διαστάσεων στον οποίο μεταβάλλονται οι παράμετροι u και v , αντίστοιχα. Η (7.2.1 - 2) ορίζει τότε την **παραμετρική εξίσωση** των σημείων της επιφάνειας S .



Σχήμα 7.2.1 - 1: παραμετρική παράσταση επιφάνειας.

Παράδειγμα 7.2.1 - 1

Ζητείται η παραμετρική εξίσωση των σημείων της επιφάνειας της σφαίρας με εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Λύση. Είναι γνωστό ότι οι **σφαιρικές συντεταγμένες** (r, θ, ϕ) ορίζονται από τις σχέσεις (Σχ. 7.2.1 - 2)

$$x = r \cos \theta \cos \phi, \quad y = r \cos \theta \sin \phi, \quad z = r \sin \theta \quad (7.2.1 - 3)$$

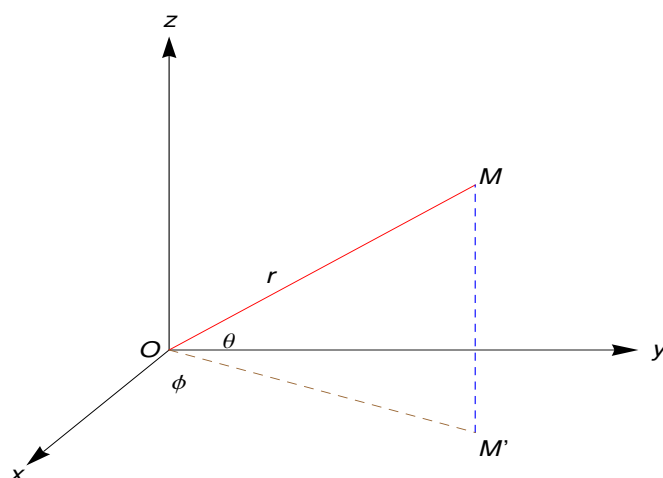
$$\text{με } r \geq 0 \quad \text{και} \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Επομένως αντιστοιχώντας τους τύπους (7.2.1-3) με τους τύπους (7.2.1-1), δηλαδή

$$\phi \rightarrow u \quad \text{και} \quad \theta \rightarrow v$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} x &= R \cos u \cos v = X(u, v), \\ y &= R \sin u \cos v = Y(u, v), \quad \text{όταν } (u, v) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \\ z &= R \sin v = Z(u, v), \end{aligned}$$



Σχήμα 7.2.1 - 2: οι σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ) .

Ο τόπος που μεταβάλλονται οι παράμετροι u και v είναι στην περίπτωση αυτή το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ (Σχ. 7.2.1 - 3).

Τότε η **παραμετρική εξίσωση της επιφάνειας της σφαίρας** θα είναι

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = R \cos u \cos v \mathbf{i} + R \sin u \cos v \mathbf{j} + R \sin v \mathbf{k}. \quad (7.2.1 - 4)$$

■

Σημείωση 7.2.1 - 1

Στην περίπτωση που ζητείται η παραμετρική εξίσωση των σημείων του **άνω ημισφαιρίου**, χρησιμοποιείται όμοια ο τύπος (7.2.1 - 4) με

$$(u, v) \in [0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

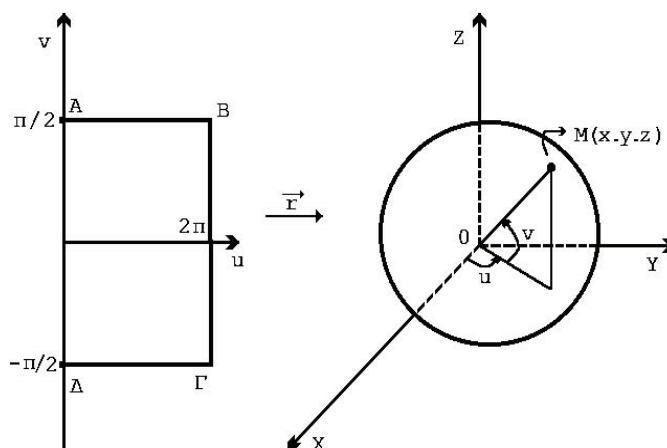
7.2.2 Θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο

Έστω μία επιφάνεια S με παραμετρική εξίσωση της μορφής (7.2.1-2), δηλαδή

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = X(u, v) \mathbf{i} + Y(u, v) \mathbf{j} + Z(u, v) \mathbf{k}.$$

Υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις X , Y και Z έχουν τουλάχιστον 1ης τάξης μερικές παραγώγους ως προς u και v , από την παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial Z}{\partial u} \mathbf{k},$$



Σχήμα 7.2.1 - 3: παραμετρική παράσταση σφαίρας.

ή

$$\mathbf{r}_u = X_u \mathbf{i} + Y_u \mathbf{j} + Z_u \mathbf{k}.$$

Τότε σύμφωνα με τη γεωμετρική σημασία της παραγώγου το διάνυσμα \mathbf{r}_u είναι **κάθετο** στο \mathbf{r} στο σημείο M και ορίζει το διάνυσμα της **ταχύτητας** κατά την u -καμπύλη.

Όμοια υπολογίζεται το

$$\mathbf{r}_v = X_v \mathbf{i} + Y_v \mathbf{j} + Z_v \mathbf{k},$$

που είναι επίσης **κάθετο** στο \mathbf{r} στο σημείο M και ορίζει το διάνυσμα ταχύτητας κατά την v -καμπύλη.

Έστω τώρα το **εξωτερικό γινόμενο**

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \quad (7.2.2 - 1)$$

που κατά τα γνωστά,¹¹ όταν

$$\mathbf{w} \neq \mathbf{0},$$

δηλαδή τα διανύσματα

$$\mathbf{r}_u \text{ και } \mathbf{r}_v$$

¹¹Βλέπε Μάθημα Ανώτερα Μαθηματικά - Διανύσματα.

δεν είναι συγγραμμικά, οπότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε το εξωτερικό γινόμενο

- ορίζει ένα διάνυσμα \mathbf{w} κάθετο στα διανύσματα \mathbf{r}_u και \mathbf{r}_v , τέτοιο ώστε μαζί με αυτά να αποτελεί δεξιόστροφο σύστημα, και
- το μέτρο του $|\mathbf{w}|$ ισούται με το **εμβαδόν** του παραλληλογράμμου που ορίζεται με πλευρές τα μέτρα των διανυσμάτων \mathbf{r}_u και \mathbf{r}_v .

Στην (7.2.2 – 1) το \mathbf{w} λέγεται **θεμελιώδες διάνυσμα** (fundamental vector), ενώ το εξωτερικό γινόμενο του 2ου μέλους **θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο** (fundamental vector product).

Αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 7.2.2 - 1. Αν $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ είναι το διάνυσμα θέσης τυχόντος σημείου M της επιφάνειας S , τότε το θεμελιώδες διάνυσμα είναι **κάθετο** σε κάθε συνεχή καμπύλη, που διέρχεται από το M .

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 7.2.2 - 1 (εφαπτόμενο επίπεδο). Έστω ότι $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ είναι το διάνυσμα θέσης τυχόντος σημείου M της επιφάνειας S . Τότε ορίζεται ως **εφαπτόμενο επίπεδο** (tangent plane) της επιφάνειας S στο σημείο της $M(u, v)$ και συμβολίζεται με $T(M)$, το επίπεδο που ορίζεται από τις διευθύνσεις των \mathbf{r}_u και \mathbf{r}_v στο M .

Τότε το διάνυσμα που ορίζει το εξωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{w} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$$

θα είναι **κάθετο** στο επίπεδο $T(M)$ και θα έχει αντίστοιχο **μοναδιαίο διάνυσμα** (unit normal vector) το

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}. \quad (7.2.2 - 2)$$

Έστω τώρα ότι η παράμετρος u είναι σταθερή και η παράμετρος v παριστάνει τον χρόνο. Τότε

- το

$$|\mathbf{r}_v|$$

παριστάνει την **επιτρόχια ταχύτητα**, ενώ

- το γινόμενο

$$|\mathbf{r}_v| \Delta v$$

το **διανυθέν διάστημα** κατά τη **v -καμπύλη**.

- Όμοια το

$$|\mathbf{r}_u| \Delta u$$

θα παριστάνει το διανυθέν διάστημα κατά την **u -καμπύλη**.

Σύμφωνα και με το Σχ. 7.2.2 - 1 πρέπει στην περίπτωση αυτή το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις Δu και Δv να απεικονίζεται μέσω της \mathbf{r} σε ένα παραλληλόγραμμο - με την ευρεία έννοια του όρου - επί της επιφάνειας S , που ορίζεται από τα διανύσματα

$$\mathbf{r}_u \Delta u \quad \text{και} \quad \mathbf{r}_v \Delta v$$

και το οποίο έχει εμβαδόν

$$\Delta S = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v. \quad (7.2.2 - 3)$$

Το ΔS είναι δυνατόν να θεωρηθεί τότε ως το **στοιχειώδες εμβαδόν** της επιφάνειας S .

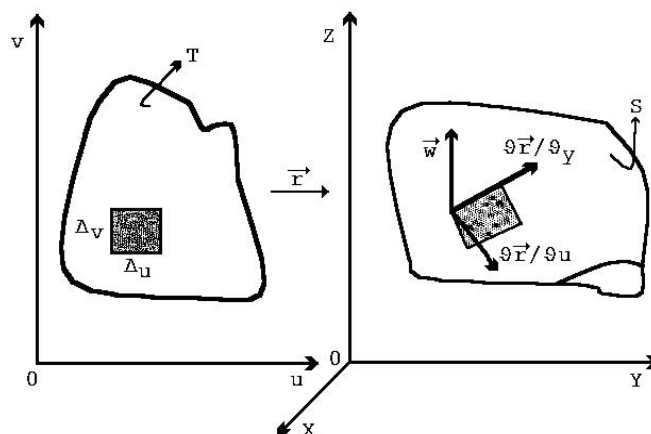
Παράδειγμα 7.2.2 - 1

Ζητείται το θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο της επιφάνειας με διανυσματική εξίσωση (Σχ. 7.2.2 - 2a)

$$\mathbf{r}(u, v) = (u + v) \mathbf{i} + (u - v) \mathbf{j} + v^2 \mathbf{k}.$$

Λύση. Είναι

$$X(u, v) = u + v, \quad Y(u, v) = u - v \quad \text{και} \quad Z(u, v) = v^2.$$



Σχήμα 7.2.2 - 1: το θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο \vec{w} και αντίστοιχο θεμελιώδες εμβαδόν.

Τότε

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} \quad \text{και} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2v \mathbf{k},$$

οπότε

$$\mathbf{w} = 2v \mathbf{i} - 2v \mathbf{j} - 2 \mathbf{k}.$$

■

Άσκηση

Να υπολογιστεί το θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο των παρακάτω επιφανειών με παραμετρικές εξισώσεις:

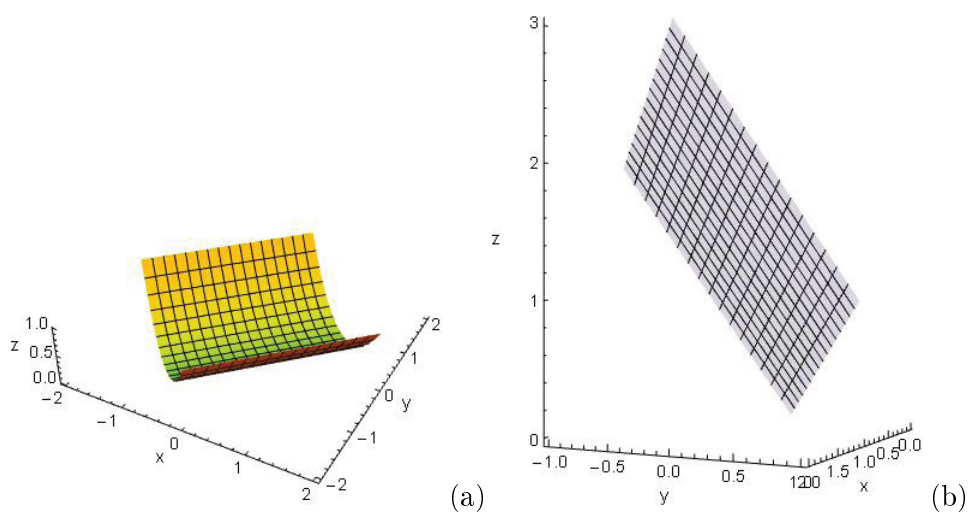
i) $\mathbf{r}(u, v) = (x_0 + a_1 u + b_1 v) \mathbf{i} + (y_0 + a_2 u + b_2 v) \mathbf{j} + (z_0 + a_3 u + b_3 v) \mathbf{k}$

επίπεδο - plane - (Σχ. 7.2.2 - 2b).

ii) $\mathbf{r}(u, v) = au \cos v \mathbf{i} + bu \sin v \mathbf{j} + u^2 \mathbf{k}$

ελλειπτικό παραβολοειδές - elliptic paraboloid - (Σχ. 7.2.2 - 3a),

ενώ το αντίστοιχο **υπερβολικό παραβολοειδές** - elliptic paraboloid



Σχήμα 7.2.2 - 2: Η επιφάνεια S στο: (a) Παράδειγμα 7.2.2 - 1 και (b) στην Άσκηση (i), όταν $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, $a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = 1$, $b_2 = -1$, και $b_3 = 2$.

$$\mathbf{r}(u, v) = a(u + v) \mathbf{i} \pm bv \mathbf{j} + (u^2 + 2uv) \mathbf{k}.$$

iii) $\mathbf{r}(u, v) = u \mathbf{i} + a \sin v \mathbf{j} + a \cos v \mathbf{k}$

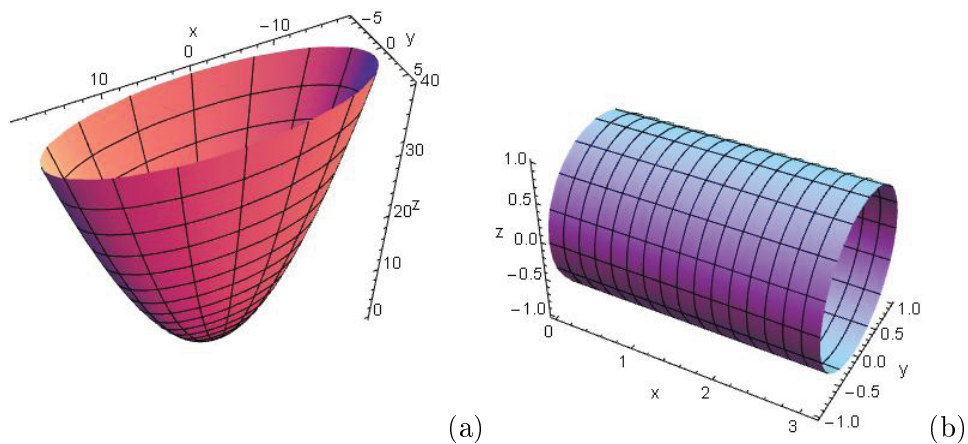
κυκλικός κύλινδρος (cylinder) με βάση στο yz -επίπεδο ακτίνας a (Σχ. 7.2.2 - 3b). Ο αντίστοιχος κυκλικός κύλινδρος με βάση στο xy -επίπεδο ακτίνας a έχει παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(u, v) = a \sin v \mathbf{i} + a \cos v \mathbf{j} + u \mathbf{k}$, ενώ ο **ελλειπτικός κύλινδρος** με βάση στο xy -επίπεδο και ημιάξονες a, b την $\mathbf{r}(u, v) = a \sin v \mathbf{i} + b \cos v \mathbf{j} + u \mathbf{k}$

iv) $\mathbf{r}(u, v) = R \cos v \cos u \mathbf{i} + R \sin u \cos v \mathbf{j} + R \sin v \mathbf{k}$

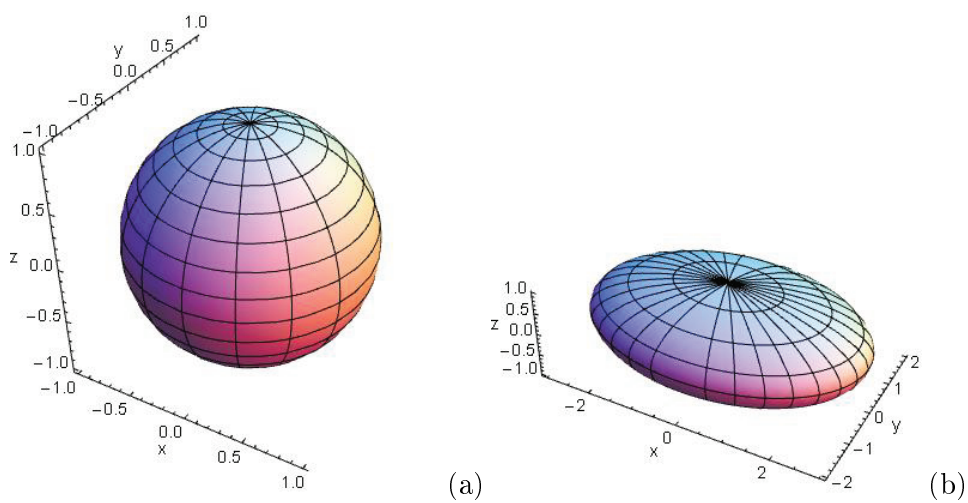
σφαίρα (sphere) ακτίνας R - (Σχ. 7.2.2 - 4a),

v) $\mathbf{r}(u, v) = a \sin u \cos v \mathbf{i} + b \sin u \sin v \mathbf{j} + c \cos u \mathbf{k}$

ελλειψοειδές -ellipsoid - (Σχ. 7.2.2 - 4b).



Σχήμα 7.2.2 - 3: Η επιφάνεια S στην: (a) Άσκηση (ii), όταν $a=3$, $b=1$ και (b) Άσκηση (iii), όταν $a=1$.



Σχήμα 7.2.2 - 4: Η επιφάνεια S στην: (a) Άσκηση (iv), όταν $R=1$ και (b) Άσκηση (v), όταν $a=2$, $b=2$ και $c=1$.

Η εντολή υπολογισμού του θεμελιώδους διανυσματικού γινομένου της Άσκησης (v) με το MATHEMATICA είναι:

```
X[u_, v_] := a Sin[u] Cos[v]
Y[u_, v_] := b Sin[u] Sin[v]
Z[u_, v_] := c Cos[u]
Ru = {D[X[u, v], u], D[Y[u, v], u], D[Z[u, v], u]}
Rv = {D[X[u, v], v], D[Y[u, v], v], D[Z[u, v], v]}
w = Simplify[Cross[Ru, Rv]]
|w| = FullSimplify[Sqrt[vct.vct]]
```

ενώ του αντίστοιχου τριδιάστατου γραφικού

```
a = 3; b = 2; c = 1;
ParametricPlot3D[{X[u, v], Y[u, v], Z[u, v]},
{u, 0, 2 Pi}, {v, -Pi/2, Pi/2}, Boxed -> False,
  AxesLabel -> {"x", "y", "z"},
  PlotStyle -> {LightYellow, Thick},
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 14}]
```

Απαντήσεις

- (i) $\mathbf{w} = (-a_3b_2 + a_2b_3) \mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3) \mathbf{j} + (-a_2b_1 + a_1b_2) \mathbf{k}$,
(ii) $\mathbf{w} = -2bu^2 \cos v \mathbf{i} - 2au^2 \sin v \mathbf{j} + abu \mathbf{k}$, (iii) $\mathbf{w} = a \sin v \mathbf{j} + a \cos v \mathbf{k}$,
(iv) $\mathbf{w} = R^2 \cos u \cos^2 v \mathbf{i} + R^2 \sin u \cos^2 v \mathbf{j} + R^2 \sin u \cos v \mathbf{k}$,
(v) $\mathbf{w} = bc \sin^2 u \cos v \mathbf{i} + ac \sin^2 u \sin v \mathbf{j} + ab \cos u \sin u \mathbf{k}$.

7.2.3 Φυσική ερμηνεία και ορισμός

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η έννοια, το επιφανειακό ολοκλήρωμα δίνεται ως ένα παράδειγμα από τη μελέτη της ροής των ρευστών.

Αν (x, y, z) είναι ένα τυχόν σημείο του ρευστού, τότε έστω $\rho = \rho(x, y, z)$ η πυκνότητα και $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$ η αντίστοιχη ταχύτητα, που θεωρείται ότι μεταβάλλονται σε κάθε σημείο του ρευστού και ορίζουν η 1η ένα βαθμωτό πεδίο (πυκνοτήτων) και η 2η ένα διανυσματικό πεδίο (ταχυτήτων).

Τότε ορίζεται το διανυσματικό πεδίο **πυκνοτήτων ροής** του ρευστού ως

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \rho(x, y, z)\mathbf{v}(x, y, z)$$

και μετρά τη μεταβολή της μάζας του ρευστού ανά μονάδα εμβαδού στο σημείο (x, y, z) .

Έστω τώρα ότι ζητείται να υπολογιστεί η **ολική μάζα** του ρευστού, που διέρχεται από μία επιφάνεια S στη μονάδα του χρόνου. Υποτίθεται ότι η παραμετρική εξίσωση της S είναι της μορφής (7.2.1 – 2), δηλαδή

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = X(u, v)\mathbf{i} + Y(u, v)\mathbf{j} + Z(u, v)\mathbf{k}, \quad \text{όταν } (u, v) \in T \quad (7.2.3 - 1)$$

και ότι ο τόπος T έχει το σχήμα ορθογώνιου παραλληλογράμμου, όπου οι συναρτήσεις X, Y και Z παραγωγίζονται ως προς u και v αντίστοιχα.

Έστω επίσης ότι ο τόπος T έχει διαμεριστεί στα επιμέρους ορθογώνια παραλληλόγραμμα

$$T_1, T_2, \dots, T_\nu. \quad (7.2.3 - 2)$$

Τότε, επειδή μέσω της $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, όπως αυτή ορίζεται στην (7.2.3 – 1), είναι

$$\mathbf{r} : T \longrightarrow S,$$

σύμφωνα με τις διαμερίσεις (7.2.3 – 2) θα έχουμε

$$\mathbf{r} : T_1 \rightarrow S_1, \quad \mathbf{r} : T_2 \rightarrow S_2, \dots, \mathbf{r} : T_\nu \rightarrow S_\nu,$$

δηλαδή η επιφάνεια S διαμερίζεται στις επιμέρους επιφάνειες

$$S_1, S_2, \dots, S_\nu$$

με αντίστοιχα εμβαδά

$$E_1, E_2, \dots, E_\nu.$$

Υποθέτοντας ότι η πυκνότητα ρ και η ταχύτητα \mathbf{v} στην επιφάνεια S_k για κάθε $k = 1, 2, \dots, \nu$ είναι σταθερές, ο όγκος του ρευστού που διέρχεται από την επιφάνεια S_k , θα ισούται με τον όγκο του στερεού, που έχει βάση E_k παράπλευρες ακμές παράλληλες προς το διάνυσμα \mathbf{v} και ύψος $h_k = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$, όπου $\mathbf{n} = \mathbf{w}/|\mathbf{w}|$ το **μοναδιαίο διάνυσμα** κατά τη διεύθυνση του θεμελιώδους διανύσματος

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

και το οποίο όπως είναι ήδη γνωστό από την Παράγραφο 7.2.2 είναι **κάθετο** στην επιφάνεια S_k για κάθε $k = 1, 2, \dots, \nu$ (Σχ. 7.2.3 - 1).

Η μάζα του ρευστού που διέρχεται από την επιφάνεια S_k στην περίπτωση αυτή είναι

$$m_k = \rho V_k = \rho (E_k h_k) = \rho E_k (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) = E_k (\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) = E_k (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})$$

για κάθε $k = 1, 2, \dots, \nu$ και κατά συνέπεια η ολική μάζα M ισούται με

$$M = \sum_{k=1}^{\nu} m_k = \sum_{k=1}^{\nu} E_k (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}).$$

Έστω

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \varphi,$$

όταν λόγω του εσωτερικού γινομένου το φ είναι **βαθμωτό μέγεθος**. Τότε σύμφωνα με τον τύπο (7.2.2 - 3) είναι

$$E_k = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \Delta u_k \Delta v_k,$$

οπότε τελικά

$$M = \sum_{k=1}^n \varphi \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \Delta u_k \Delta v_k. \quad (7.2.3 - 3)$$

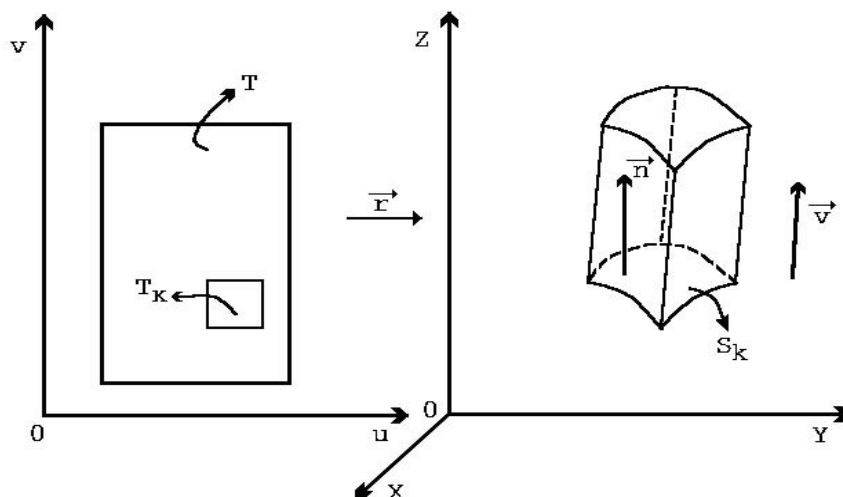
Υποθέτοντας ότι το γινόμενο

$$\varphi \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|$$

έχει **σταθερή τιμή** σε κάθε ανοικτό ορθογώνιο T_k , η ποσότητα αυτή ορίζει μία κλιμακωτή συνάρτηση, οπότε με ανάλογο συλλογισμό εκείνου του ορισμού του διπλού ολοκληρώματος,¹² όταν το ν τείνει στο άπειρο, δηλαδή ο διαμερισμός του T γίνεται, έτσι ώστε οι αντίστοιχες μέσω της \mathbf{r} επιφάνειες S_k να έχουν διαγώνιο που τείνει στο μηδέν, δηλαδή **απειροστή επιφάνεια** ds , η (7.2.3 - 3) εκφράζεται με τη μορφή ενός διπλού ολοκληρώματος με μεταβλητές u και v , δηλαδή

$$M = \iint_T \varphi \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv. \quad (7.2.3 - 4)$$

¹²Βλέπε Μάθημα Πολλαπλά Ολοκληρώματα - Διπλά ολοκληρώματα.



Σχήμα 7.2.3 - 1: φυσική ερμηνεία επιφανειακού ολοκληρώματος.

Σύμφωνα και με την (7.2.3 - 4) έχουμε τους παρακάτω ορισμούς του επιφανειακού ολοκληρώματος.

Σε βαθμωτό πεδίο (1ο είδος)

Ορισμός 7.2.3 - 1. Έστω S μία επιφάνεια με παραμετρική εξίσωση

$$\mathbf{r}(u, v) = X(u, v)\mathbf{i} + Y(u, v)\mathbf{j} + Z(u, v)\mathbf{k}, \quad \text{όταν } (u, v) \in T$$

και φ μία **βαθμωτή** συνάρτηση που ορίζεται επί της S . Τότε ορίζεται ως επιφανειακό ολοκλήρωμα του 1ου είδους της φ επί της S το

$$\iint_S \varphi \, ds = \iint_T \varphi[\mathbf{r}(u, v)] \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du \, dv, \quad (7.2.3 - 5)$$

όταν το τελευταίο ολοκλήρωμα υπάρχει.

Εφαρμογές του επιφανειακού ολοκληρώματος του 1ου είδους θα δοθούν στην Παράγραφο 7.2.4, που ακολουθεί.

Σε διανυσματικό πεδίο (2ο είδος)**Ορισμός 7.2.3 - 2.** Έστω S μία επιφάνεια με παραμετρική εξίσωση

$$\mathbf{r}(u, v) = X(u, v)\mathbf{i} + Y(u, v)\mathbf{j} + Z(u, v)\mathbf{k}, \quad \text{όταν } (u, v) \in T$$

και \mathbf{F} μία **διανυσματική** συνάρτηση που ορίζεται επί της S . Τότε ορίζεται ως επιφανειακό ολοκλήρωμα του 2ου είδους της \mathbf{F} επί της S το

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_T \mathbf{F}[\mathbf{r}(u, v)] \cdot \mathbf{w} \, du \, dv, \quad (7.2.3 - 6)$$

όταν

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

το διάνυσμα του θεμελιώδους γινομένου και το ολοκλήρωμα (7.2.3–6) υπάρχει.

Σημειώσεις 7.2.3 - 1

- Στην περίπτωση που η επιφάνεια είναι κλειστή, τότε χρησιμοποιείται ο συμβολισμός

$$\oint \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (7.2.3 - 7)$$

- Το επιφανειακό ολοκλήρωμα (7.2.3 – 6) εκφράζει τη **ροή** (flux) του πεδίου F στην επιφάνεια S (βλέπε Παράγραφο 7.2.3).

Παράδειγμα 7.2.3 - 1

Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα

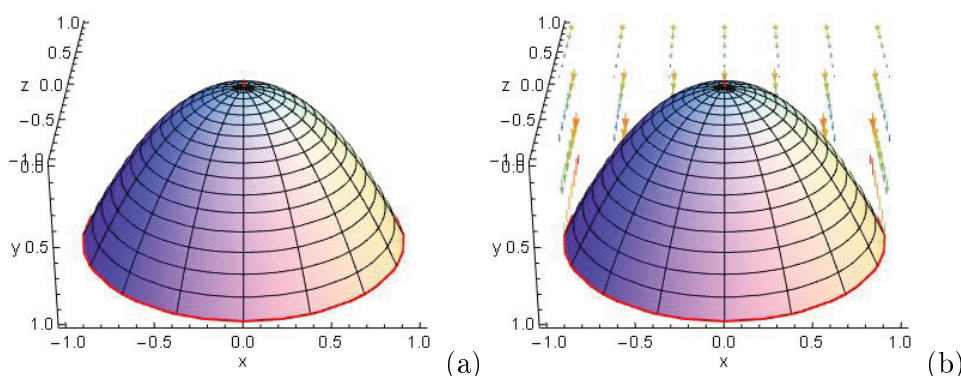
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

όταν S το παραβολοειδές (Σχ. 7.2.3 - 2a)

$$y = x^2 + z^2, \quad y \in [0, 1] \quad \text{και} \quad x^2 + z^2 \leq 1, \quad \text{όταν } y = 1$$

και F το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = y\mathbf{j} - z\mathbf{k} \quad (\text{Σχ. 7.2.3 - 2a}).$$



Σχήμα 7.2.3 - 2: Παράδειγμα 7.2.3 - 1: (a) η επιφάνεια S - παραβολοειδές με βάση (κόκκινη καμπύλη) στο xz -επίπεδο και θετική φορά διαγραφής - με παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(u, v) = v \sin u \mathbf{i} + v^2 \mathbf{j} + v \cos u \mathbf{k}$ και (b) η ροή του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F} = y \mathbf{j} - z \mathbf{k}$ στην S .

Λύση. Η εξίσωση του παραβολοειδούς είναι της μορφής $y = g(x, z)$, οπότε μια παραμετρική εξίσωσή του είναι δυνατόν να προκύψει από την παραμετρική εξίσωση της $g(x, z)$, που είναι στην περίπτωση αυτή ο κυκλικός δίσκος στο xz -επίπεδο κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας $R = 1$.

Άρα χρησιμοποιώντας τους γνωστούς τύπους για την παραμετρική μορφή περιφέρειας (πολικές συντεταγμένες)¹³ έχουμε

$$x = R \cos \theta, \quad z = R \sin \theta, \quad \text{όταν } \theta \in [0, 2\pi], \quad R \in [0, 1].$$

Έστω

$$\theta \rightarrow u \quad \text{και} \quad R = v.$$

Επειδή η εξίσωση του παραβολοειδούς είναι $y = x^2 + z^2$, σύμφωνα με την παραπάνω παραμετρική μορφή των x, y πρέπει $y = v^2 \sin^2 u + v^2 \cos^2 u = v^2$, οπότε η παραμετρική εξίσωση είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= X(u, v) \mathbf{i} + Y(u, v) \mathbf{j} + Z(u, v) \mathbf{k} \\ &= v \sin u \mathbf{i} + v^2 \mathbf{j} + v \cos u \mathbf{k}, \end{aligned}$$

¹³Βλέπε Μάθημα Διανυσματικές Συναρτήσεις.

όταν

$$T = \{(u, v) : u \in [0, 2\pi] \text{ και } v \in [0, 1]\}.$$

Τότε

$$x = X(u, v) = v \sin u, \quad y = Y(u, v) = v^2 \quad \text{και}$$

$$z = Z(u, v) = v \cos u.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \mathbf{F}[\mathbf{r}(u, v)] &= \mathbf{F} = y\mathbf{j} - z\mathbf{k} \\ &= v^2\mathbf{j} - v \cos u \mathbf{k} = \langle 0, v^2, -v \cos u \rangle. \end{aligned} \quad (7.2.3 - 8)$$

Είναι

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = v \cos u \mathbf{i} + 0\mathbf{j} - v \sin u \mathbf{k},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \sin u \mathbf{i} + 2v\mathbf{j} + \cos u \mathbf{k},$$

οπότε το θεμελιώδες γινόμενο θα ισούται με

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v \cos u & 0 & -v \sin u \\ \sin u & 2v & \cos u \end{vmatrix} \\ &= 2v^2 \sin u \mathbf{i} - v\mathbf{j} + 2v^2 \cos u \mathbf{k} \\ &= \langle 2v^2 \sin u, -v, 2v^2 \cos u \rangle. \end{aligned} \quad (7.2.3 - 9)$$

Από τις (7.2.3 - 8) και (7.2.3 - 9) προκύπτει τότε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} &= \langle 0, v^2, -v \cos u \rangle \cdot \langle 2v^2 \sin u, -v, 2v^2 \cos u \rangle \\ &= -v^3 (1 + 2 \cos^2 u), \end{aligned} \quad (7.2.3 - 10)$$

οπότε αντικαθιστώντας στον τύπο (7.2.3 – 6) διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned}
 \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \iint_T \mathbf{F}[\mathbf{r}(u, v)] \cdot \mathbf{w} \, du \, dv \\
 &= - \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos^2 u) \left[\int_0^1 v^3 \, dv \right] du \\
 &= - \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos^2 u) \left[\frac{v^4}{4} \right] du \\
 &= - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos^2 u) \, du \\
 &= - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left[1 + 2 \left(\frac{1 + \cos 2u}{2} \right) \right] du \\
 &= - \frac{1}{4} \left[2u + \frac{1}{2} \sin 2u \right]_0^{2\pi} = -\pi.
 \end{aligned}$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA έγινε με το παρακάτω πρόγραμμα:

Πρόγραμμα 7.2.3 - 1 (επιφανειακού ολοκληρώματος 2ου είδους)

```

Z[u_, v_] := v Cos[ u]
X[u_, v_] := v Sin[u]
Y[u_, v_] := v^2
Ru = {D[X[u, v], u], D[Y[u, v], u], D[Z[u, v], u]};
Rv = {D[X[u, v], v], D[Y[u, v], v], D[Z[u, v], v]};
Print["r_u = ", Ru]; Print["r_v = ", Rv];
vct = Simplify[Cross[Ru, Rv]];
Print["Fundamental Product = ", Simplify[Cross[Ru, Rv]]]
F[u_, v_] := {0, Y[u, v], -Z[u, v]}
Print["F[r(u,v)].w = ", F[u, v].vct]
Integrate[F[u, v].vct, {u, 0, 2 Pi}, {v, 0, 1}]

```

της επιφάνειας S με την εντολή:

```
S = ParametricPlot3D[{X[u, v], Y[u, v], Z[u, v]}, {u, 0, 2 Pi},
  {v, 0, 1}, Boxed -> False, AxesLabel -> {" x ", "y ", "z "},
  PlotStyle -> {LightYellow, Thick},
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 14},
  ViewPoint -> {0, -2, -4}, BoundaryStyle -> Directive[Red, Thick]]
```

και του διανυσματικού πεδίου \mathbf{F} επί της S :

```
F = VectorPlot3D[{0, y, -z}, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, 0, 1},
  AxesLabel -> {"x", "y", "z"}, BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial",
  FontSize -> 14}, VectorPoints -> 7, VectorScale -> Medium,
  VectorColorFunction -> "Rainbow"]
Show[S, F]
```

Άσκηση

Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

όταν S το παραβολοειδές $z = 16 - x^2 - y^2$ (Σχ. 7.2.3 - 3a) με $z \geq 0$ και \mathbf{F} το διανυσματικό πεδίο

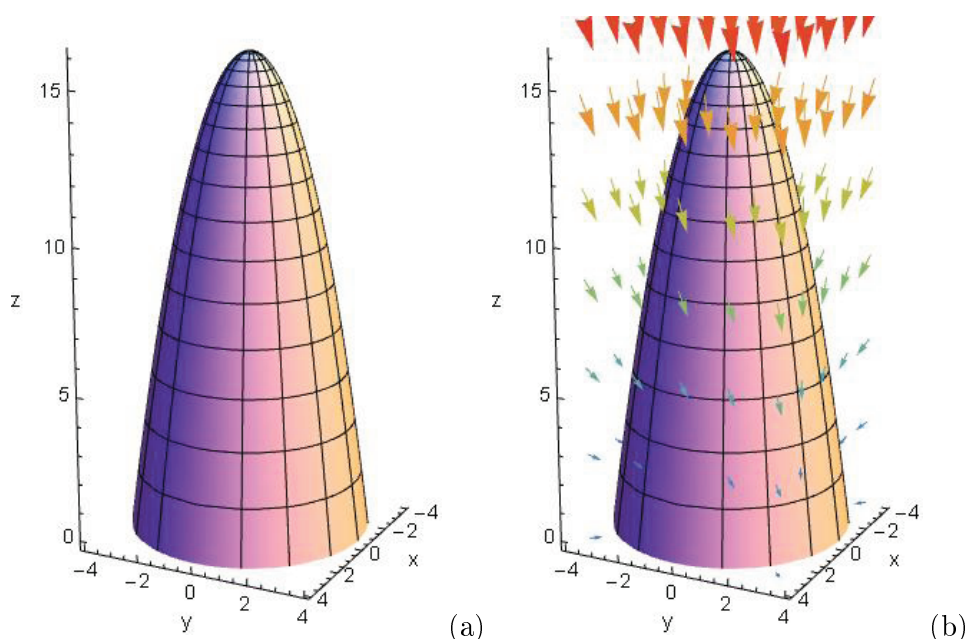
$$\mathbf{F} = y\mathbf{j} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (\text{Σχ. 7.2.3 - 3b})$$

με κατεύθυνση την αρνητική φορά του z -άξονα.

Απαντήσεις

Θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο $w = -2v^2 \cos u \mathbf{i} - 2v^2 \sin u \mathbf{j} - v \mathbf{k}$, οπότε

$$\iint_T \mathbf{F}[\mathbf{r}(u, v)] \cdot w \, du \, dv = \int_0^4 \int_0^{2\pi} [-v(16 - v^2) - 4v^3 \cos u \sin u] \, du \, dv = -128\pi.$$



Σχήμα 7.2.3 - 3: Παράδειγμα 7.2.3 - 1: (a) η επιφάνεια S - παραβολοειδές με βάση στο xy -επίπεδο και θετική φορά διαγραφής - με παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(u, v) = v \cos u \mathbf{i} + v \sin u \mathbf{j} + (16 - v^2) \mathbf{k}$ και (b) η ροή του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F} = y\mathbf{j} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ στην S .

7.2.4 Εφαρμογές επιφανειακού ολοκληρώματος

Οι σημαντικότερες ανάλογα με τη φυσική ερμηνεία της συνάρτησης φ δίνονται στη συνέχεια.

- **εμβαδόν** $\varphi = 1$

Τότε ο τύπος (7.2.3 - 5) γράφεται

$$\iint_S ds = \iint_T \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv \quad (7.2.4 - 1)$$

και εκφράζει το **εμβαδόν** της επιφάνειας S .

- **ολική μάζα**

Αν η φ παριστάνει την **πυκνότητα** ρ της μάζας ανά μονάδα εμβαδού για

το υλικό ενός λεπτού κελύφους, που έχει το σχήμα της επιφανείας S , τότε η **ολική μάζα** M του κελύφους δίνεται από τον τύπο

$$M = \iint_S \rho ds = \iint_T \rho [\mathbf{r}(u, v)] \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv. \quad (7.2.4 - 2)$$

Στην περίπτωση αυτή οι συντεταγμένες $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ του κέντρου μάζας δίνονται από τους τύπους

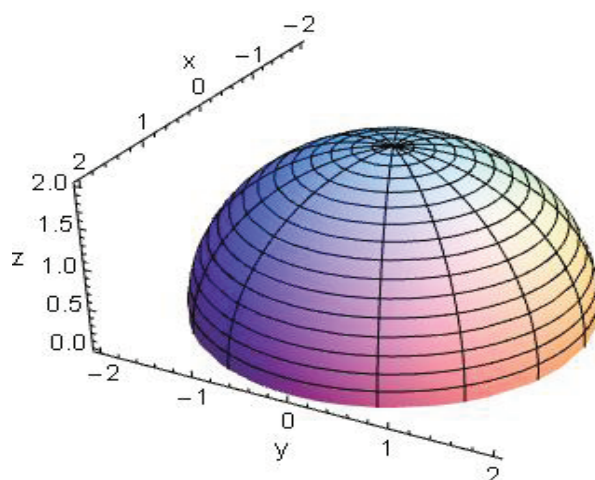
$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{M} \iint_S x \rho(x, y, z) ds \\ &= \frac{1}{M} \iint_T X(u, v) \rho [\mathbf{r}(u, v)] \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{M} \iint_S y \rho(x, y, z) ds \\ &= \frac{1}{M} \iint_T Y(u, v) \rho [\mathbf{r}(u, v)] \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{M} \iint_S z \rho(x, y, z) ds \\ &= \frac{1}{M} \iint_T Z(u, v) \rho [\mathbf{r}(u, v)] \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv. \end{aligned} \quad (7.2.4 - 3)$$

- **ροπή αδράνειας**

Αν $d = d(x, y, z)$ είναι η κάθετη απόσταση από τον άξονα l τυχόντος σημείου $M(x, y, z)$ της επιφάνειας S , τότε η **ροπή αδράνειας** I της S



Σχήμα 7.2.4 - 1: Το άνω ημισφαίριο της σφαίρας του Παραδείγματος 7.2.4 - 1, όταν $R = 2$.

ως προς τον άξονα l είναι

$$\begin{aligned}
 I_l &= \iint_S d^2(x, y, z) \varphi(x, y, z) ds & (7.2.4 - 4) \\
 &= \iint_T d^2[\mathbf{r}(u, v)] \varphi[\mathbf{r}(u, v)] \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv.
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.2.4 - 1

Ζητείται να υπολογιστεί η επιφάνεια S , η ολική μάζα M και οι συντεταγμένες $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ του κέντρου της μάζας του άνω ημισφαιρίου της σφαίρας (Σχ. 7.2.4 - 1)

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

όταν η πυκνότητα $\rho(x, y, z) = c$ σταθερά.

Λύση. Μια παραμετρική εξίσωση της σφαίρας δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(u, v) &= X(u, v) \mathbf{i} + Y(u, v) \mathbf{j} + Z(u, v) \mathbf{k} \\
 &= R \cos u \cos v \mathbf{i} + R \sin u \cos v \mathbf{j} + R \sin v \mathbf{k},
 \end{aligned}$$

όταν $u \in [0, 2\pi]$ και $v \in [0, \pi/2]$, επειδή πρόκειται για το άνω ημισφαίριο.

Άρα

$$\begin{aligned}x &= X(u, v) = R \cos u \cos v, \\y &= Y(u, v) = R \sin u \cos v \quad \text{και} \\z &= R \sin v.\end{aligned}\tag{7.2.4 - 5}$$

Τότε

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= -R \sin u \cos v \mathbf{i} + R \cos u \cos v \mathbf{j} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= -R \cos u \sin v \mathbf{i} - R \sin u \sin v \mathbf{j} + R \cos v \mathbf{k},\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R \sin u \cos v & R \cos u \cos v & 0 \\ -R \cos u \sin v & -R \sin u \sin v & R \cos v \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} R \cos u \cos v & 0 \\ -R \sin u \sin v & R \cos v \end{vmatrix} \mathbf{i} \\ &\quad - \begin{vmatrix} -R \sin u \cos v & 0 \\ -R \sin u \sin v & R \cos v \end{vmatrix} \mathbf{j} \\ &\quad + \begin{vmatrix} -R \sin u \cos v & R \cos u \cos v \\ -R \cos u \sin v & -R \sin u \sin v \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= R^2 \cos u \cos^2 v \mathbf{i} + R^2 \sin u \cos^2 v \mathbf{j} + R^2 \sin v \cos v \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{w}| &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \\
 &= R^2 \sqrt{\cos^2 u \cos^4 v + \sin^2 u \cos^4 v + \sin^2 v \cos^2 v} \\
 &= R^2 \sqrt{\cos^4 v (\cos^2 u + \sin^2 u) + \sin^2 v \cos^2 v} \\
 &= R^2 \sqrt{\cos^2 v (\cos^2 v + \sin^2 v)} \\
 &= R^2 \cos v.
 \end{aligned} \tag{7.2.4 - 6}$$

Τότε το εμβαδόν E της επιφάνειας S σύμφωνα με τον τύπο (7.2.4 - 1) είναι

$$\begin{aligned}
 E(s) = \iint_S ds &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} R^2 \cos v \, du \, dv \\
 &= R^2 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \cos v \, dv \right] du = 2\pi R^2
 \end{aligned}$$

και η ολική μάζα M με τον τύπο (7.2.4 - 2)

$$M = \iint_S \rho(x, y, z) \, ds = cR^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos v \, du \, dv = 2\pi R^2 c,$$

όπου $\rho(x, y, z) = c$ σταθερά.

Επειδή πρόκειται για το άνω ημισφαίριο, λόγω συμμετρίας πρέπει

$$\bar{x} = \bar{y} = 0,$$

οπότε αρκεί να υπολογιστεί το \bar{z} . Τότε σύμφωνα με τον τύπο (7.2.4 - 5) είναι

$$z = Z(u, v) = R \sin v,$$

ενώ με τον (7.2.4 - 6)

$$|\mathbf{w}| = R^2 \cos v,$$

διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned}
 \bar{z} &= \frac{1}{M} \iint_S z \overbrace{\rho(x, y, z)}^{c \text{ σταθερά}} ds = \frac{c}{M} \iint_S z ds \\
 &= \frac{c}{M} \iint_T \underbrace{Z(u, v)}_{R \sin v} \overbrace{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|}_{R^2 \cos v} du dv \\
 &= \frac{cR^3}{M} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \cos v \sin v dv \right] du = \frac{cR^3}{2M} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2v dv \right] du \\
 &= \frac{cR^3}{2M} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} \cos 2v \right]_0^{\pi/2} du = \frac{cR^3}{2M} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} du = \frac{cR^3}{2M} \int_0^{2\pi} du \\
 &= \frac{2\pi cR^3}{4M} = \frac{R}{2}, \quad \text{όταν } M = 2\pi R^2 c.
 \end{aligned}$$

Άρα

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{R}{2} \right).$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA έγινε με το παρακάτω πρόγραμμα:

Πρόγραμμα 7.2.4 - 2 (επιφανειακού ολοκληρώματος 1ου είδους)

```

X[u_, v_] := R Cos[u] Cos[v]
Y[u_, v_] := R Sin[u] Cos[v]
Z[u_, v_] := R Sin[v]
Ru = {D[X[u, v], u], D[Y[u, v], u], D[Z[u, v], u]}
Rv = {D[X[u, v], v], D[Y[u, v], v], D[Z[u, v], v]}
vct = Simplify[Cross[Ru, Rv]]
Print["Modulus Fundamental Product = ", Simplify[Sqrt[vct.vct]]]
f[u_, v_] := c
Print["Density = ", f[u, v]]
Print["Surface Area = ",

```

```

Integrate[R^2 Cos[v], {u, 0, 2 Pi}, {v, 0, Pi/2}]
Print["Mass = ",
  Integrate[R^2 Cos[v] f[u, v], {u, 0, 2 Pi}, {v, 0, Pi/2}]]
Print["Centre of mass z = ",
  Integrate[
    Z[u, v] R^2 Cos[v] f[u, v], {u, 0, 2 Pi}, {v, 0,
    Pi/2}]/(2 c Pi R^2)]
ParametricPlot3D[{X[u, v], Y[u, v], Z[u, v]}, {u, 0, 2 Pi}, {v, 0,
  Pi/2}, Boxed -> False, AxesLabel -> {"x ", "y ", "z "},
  PlotStyle -> {LightYellow, Thick},
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 14},
  ViewPoint -> {Pi, Pi/2, 2}]

```

■

Άσκηση

Έστω S το τμήμα της επιφάνειας της σφαίρας

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

που περιορίζεται από τους θετικούς ημιάξονες Ox , Oy και Oz (Σχ. 7.2.4 - 2).

Αν η πυκνότητα της μάζας ανά μονάδα εμβαδού είναι

$$\rho(x, y, z) = x - 3y + 4,$$

να υπολογιστεί το εμβαδόν S , η μάζα και οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας.

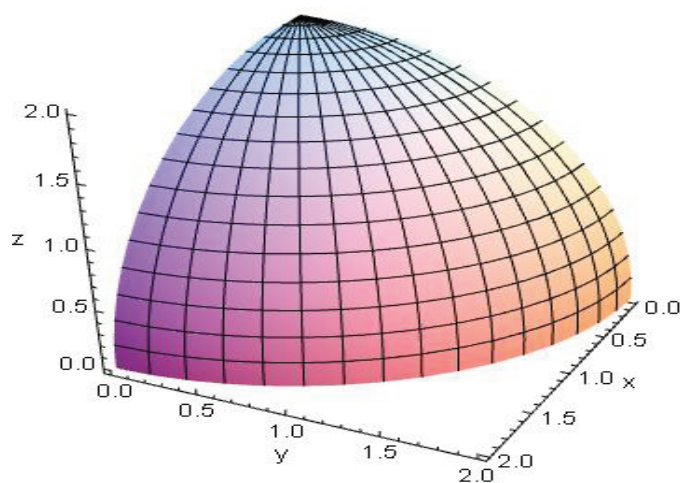
Απαντήσεις

Σύμφωνα με την (7.2.4 - 6) είναι $|\mathbf{w}| = R^2 \cos v$, ενώ από την παραμετρική παράσταση της σφαίρας προκύπτει ότι

$$\rho(x, y, z) = x - 3y + 4 = 2 \cos u \cos v - 6 \sin u \cos v + 4.$$

Άρα $S = 2\pi$, $M = 4\pi$ και

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{\pi}, \frac{4}{3\pi}, 2 - \frac{8}{3\pi} \right).$$



Σχήμα 7.2.4 - 2: Ο τύπος μεταβολής των παραμέτρων είναι $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$ και $v \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

7.2.5 Σχετικά θεωρήματα

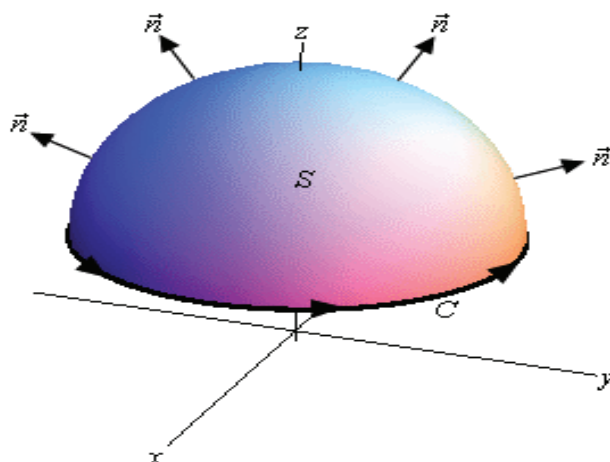
Δίνονται στη συνέχεια ορισμένα βασικά θεωρήματα σχετικά με τα επικαμπύλια και τα επιφανειακά ολοκληρώματα με σημαντικές εφαρμογές στις θετικές επιστήμες, ενώ ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

Θεώρημα 7.2.5 - 1 (Stokes). ¹⁴Αν S είναι μία επιφάνεια, που έχει για σύνορο μία απλή κλειστή καμπύλη C και \mathbf{F} ένα διανυσματικό πεδίο, που ορίζεται πάνω στην S (Σχ. 7.2.5 - 1) και έχει παραγώγους 1ης τάξης συνεχείς συναρτήσεις, τότε αν \mathbf{n} είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S και η φορά διαγραφής της καμπύλης C είναι η θετική, ισχύει

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (7.2.5 - 1)$$

Ο τύπος (7.2.5 - 1) είναι γνωστός ως **τύπος του Stokes**.

¹⁴Βλέπε επίσης http://en.wikipedia.org/wiki/Stoke%27_theorem και γενικότερη αναζήτηση σε **Stokes' theorem**.



Σχήμα 7.2.5 - 1: Θεώρημα του Stokes.

Παρατηρήσεις 7.2.5 - 1

- το θεώρημα εκφράζει μία σχέση μεταξύ ενός επιφανειακού ολοκληρώματος με ένα ή περισσότερα, σε πιο γενικές περιπτώσεις, επικαμπύλια ολοκληρώματα, που ορίζονται επάνω σε μία ή περισσότερες καμπύλες, που αποτελούν το σύνορο της επιφάνειας,
- το θεώρημα του Green αποτελεί μία ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Stokes.

Τύπος υπολογισμού

Έστω

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) \quad \text{και} \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{F}.$$

Τότε

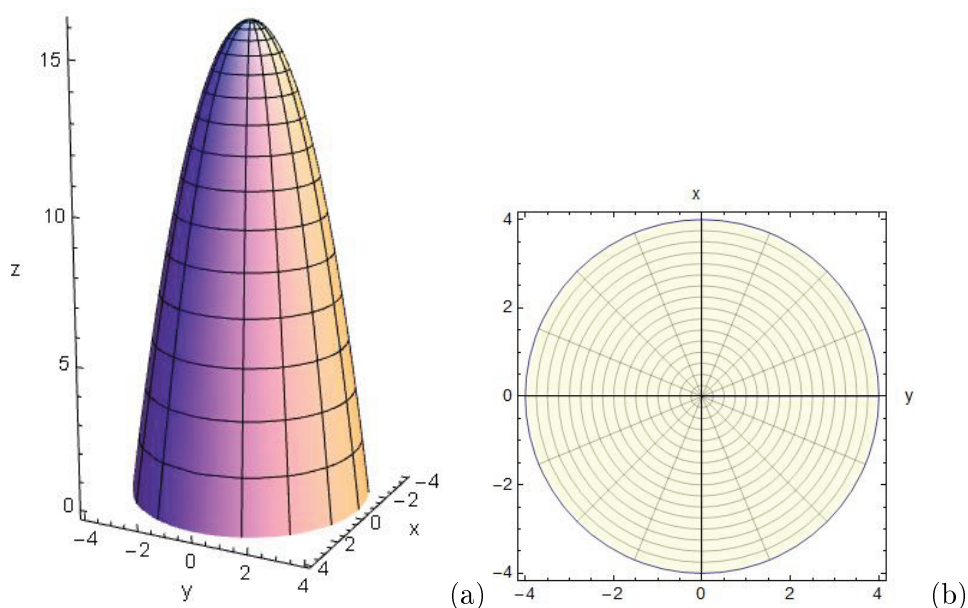
- αν η επιφάνεια S στο επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s}$ του τύπου του Stokes έχει παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(u, v)$, όταν $(u, v) \in T$ με θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο $\mathbf{w} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$, ενώ
- η κλειστή καμπύλη C στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ έχει παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(t)$,

ο τύπος του Stokes γράφεται

$$\oint_C \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \iint_T \mathbf{G}[\mathbf{r}(u, v)] \cdot \mathbf{w} du dv. \quad (7.2.5 - 2)$$

Παράδειγμα 7.2.5 - 1

Να επαληθευτεί (7.2.5 - 2) του Θεωρήματος του Stokes, όταν S είναι η επιφάνεια του παραβολοειδούς $z = 16 - x^2 - y^2$ με $z \geq 0$ (Σχ. 7.2.5 - 2a) και \mathbf{F} το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} - 6x\mathbf{k}$.



Σχήμα 7.2.5 - 2: Παράδειγμα 7.2.3 - 1: (a) η επιφάνεια S - παραβολοειδές στο xy -επίπεδο και θετική φορά διαγραφής - με παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(u, v) = v \cos u \mathbf{i} + v \sin u \mathbf{j} + (16 - v^2) \mathbf{k}$ και (b) ο κυκλικός δίσκος κέντρου $(0, 0)$ ακτίνας $R = 4$. Η παραμετρική εξίσωση της περιφέρειας είναι $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t \mathbf{j} + 4 \sin t \mathbf{j}$, όταν $t \in [0, 2\pi)$.

Υπολογισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία λύσης των αντίστοιχων επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων του 2ου είδους της Παραγράφου 7.1.1 στην περίπτωση αυτή η καμπύλη

C , που είναι η βάση του παραβολοειδούς είναι περιφέρεια κύκλου κέντρου $(0, 0)$ ακτίνας $R = 4$ (Σχ. 7.2.5 - 2b), έχει παραμετρική εξίσωση

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{j} + y(t)\mathbf{j} = 4 \cos t \mathbf{j} + 4 \sin t \mathbf{j}, \quad (7.2.5 - 3)$$

όταν $t \in [0, 2\pi)$.

Επομένως

$$x = x(t) = 4 \cos t, \quad y = y(t) = 4 \sin t \quad \text{και} \quad z = z(t) = 0,$$

οπότε

$$x'(t) = -4 \sin t, \quad y'(t) = 4 \cos t \quad \text{και} \quad z'(t) = 0. \quad (7.2.5 - 4)$$

Το διανυσματικό πεδίο γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} \\ &= 3y\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} - 6x\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα και με την (7.2.5 - 4) είναι

$$P(x, y, z) = 3y = 12 \sin t = P(t), \quad Q(x, y, z) = 4z = 16 \sin t = Q(t)$$

$$R(x, y, z) = 0 = R(t),$$

οπότε σύμφωνα με το 1ο μέλος του τύπου (7.2.5 - 2) είναι

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} [P(t)x'(t) + Q(t)y'(t) + R(t)z'(t)] dt \\ &= -48 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = -48\pi. \end{aligned} \quad (7.2.5 - 5)$$

Υπολογισμός του επιφανειακού ολοκληρώματος

Αρχικά υπολογίζεται ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου $F = 3y\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} - 6x\mathbf{k}$ ως εξής:

$$\mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & 4z & -6x \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

¹⁵Η εξίσωση του παραβολοειδούς είναι της μορφής $z = g(x, y)$, οπότε μια παραμετρική εξίσωσή του είναι δυνατόν να προκύψει από την παραμετρική εξίσωση της $g(x, y)$, που είναι στην περίπτωση αυτή ο κυκλικός δίσκος στο xy -επίπεδο κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας $R = 4$ (Σχ. 7.2.5 - 2b).

Άρα χρησιμοποιώντας τους τύπους (7.2.5 - 3) έχουμε

$$x = R \cos \theta, \quad z = R \sin \theta, \quad \text{όταν } \theta \in [0, 2\pi), \quad R \in [0, 4].$$

Έστω

$$\theta \rightarrow u \quad \text{και} \quad R = v.$$

Επειδή η εξίσωση του παραβολοειδούς είναι $z = 16 - x^2 - y^2$, σύμφωνα με την παραπάνω παραμετρική μορφή των x, y πρέπει

$$z = 16 - v^2 \sin^2 u - v^2 \cos^2 u = 16 - v^2,$$

οπότε η παραμετρική εξίσωση είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= X(u, v)\mathbf{i} + Y(u, v)\mathbf{j} + Z(u, v)\mathbf{k} \\ &= v \sin u \mathbf{i} + v \cos u \mathbf{j} + (16 - v^2)\mathbf{k}, \end{aligned}$$

όταν

$$T = \{(u, v) : u \in [0, 2\pi] \quad \text{και} \quad v \in [0, 4]\}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} x &= X(u, v) = v \sin u, & y &= Y(u, v) = v \cos u, & \text{και} \\ z &= Z(u, v) = 16 - v^2. \end{aligned}$$

¹⁵Βλέπε ανάλογη λύση στο Παράδειγμα 7.2.3 - 1.

Προφανώς είναι

$$\mathbf{G}[\mathbf{r}(u, v)] = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k} = \langle -4, 6, -3 \rangle. \quad (7.2.5 - 6)$$

Είναι

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = -v \sin u \mathbf{i} + v \cos u \mathbf{j} + 0 \mathbf{k},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \cos u \mathbf{i} + \sin u \mathbf{j} - 2v \mathbf{k},$$

οπότε το θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο θα ισούται με

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -v \sin u & v \cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & -2v \end{vmatrix} \\ &= -2v^2 \cos u \mathbf{i} - 2v^2 \sin u \mathbf{j} - v \mathbf{k} \\ &= \langle -2v^2 \cos u, -2v^2 \sin u, -v \rangle. \end{aligned} \quad (7.2.5 - 7)$$

Επειδή πρέπει το διάνυσμα \mathbf{w} να έχει τη θετική διεύθυνση του z -άξονα, από τις (7.2.5 - 6) και (7.2.5 - 7) προκύπτει τότε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \cdot (-\mathbf{w}) &= \langle -4, 6, -3 \rangle \cdot \langle 2v^2 \cos u, 2v^2 \sin u, v \rangle \\ &= -8v^2 \cos u + 12v^2 \sin u - 3v, \end{aligned} \quad (7.2.5 - 8)$$

οπότε αντικαθιστώντας στο 2ο μέλος του τύπου (7.2.5 - 2) διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} &= \iint_T \mathbf{G}[\mathbf{r}(u, v)] \cdot (-\mathbf{w}) \, du \, dv \\ &= - \int_0^{2\pi} \left[\int_0^4 (-3v - 8v^2 \cos u + 12v^2 \sin u) \, dv \right] du \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(-24 - \frac{512}{3} \cos u + 256 \sin u \right) du \end{aligned} \quad (7.2.5 - 9)$$

$$= -48\pi \quad (7.2.5 - 10)$$

Από τις (7.2.5 – 5) και (7.2.5 – 10) προκύπτει τότε ότι ισχύει ο τύπος του Stokes.

Η γραφική παράσταση του κυκλικού δίσκου στο Σχ. 7.2.5 - 2b έγινε με την παρακάτω εντολή του MATHEMATICA:

```
ParametricPlot[{X[u, v], Y[u, v]}, {u, 0, 2 Pi}, {v, 0, 4},
  AxesLabel -> {" y ", "x "},
  PlotStyle -> Directive[Opacity[0.7], LightYellow],
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 14}]
```

Θεώρημα 7.2.5 - 2 (απόκλισης). ¹⁶ Έστω V ένα ¹⁷ συμπαγές (compact) στερεό που περιβάλλεται εξωτερικά από μία κλειστή κατά τμήματα λεία επιφάνεια S . Τότε, αν \mathbf{F} είναι ένα διανυσματικό πεδίο που ορίζεται στο V και έχει παραγωγούς πρώτης τάξης συνεχείς συναρτήσεις, ισχύει

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds, \quad (7.2.5 - 11)$$

όταν \mathbf{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην S με φορά προς το εξωτερικό της S .

Σημείωση 7.2.5 - 1

Το θεώρημα εκφράζει μία σχέση μεταξύ ενός τριπλού ολοκληρώματος, που ορίζεται σε ένα στερεό και ενός ολοκληρώματος που ορίζεται σε μία επιφάνεια S και περιβάλλει το στερεό.

Τύπος υπολογισμού

Αν

•

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}, \quad \text{τότε} \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = P_x + Q_y + R_z$$

βαθμωτή συνάρτηση, δηλαδή το 1ο μέλος είναι ένα τριπλό ολοκλήρωμα.

¹⁶Βλέπε επίσης http://en.wikipedia.org/wiki/Divergence_theorem και γενικότερη αναζήτηση σε **divergence theorem**. Είναι γνωστό επίσης και ως **θεώρημα του Gauss** ή και **θεώρημα του Ostrogradsky**.

¹⁷**Συμπαγές** θεωρείται ένα στερεό, όταν είναι κλειστό και φραγμένο.

- Η επιφάνεια S στο επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ του τύπου (7.2.5–11) έχει παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(u, v)$, όταν $(u, v) \in T$ με θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο $\mathbf{w} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$,

τότε ο τύπος (7.2.5 – 11) γράφεται

$$\iiint_V (P_x + Q_y + R_z) dV = \iint_T \mathbf{F}[\mathbf{r}(u, v)] \cdot \mathbf{w} du dv. \quad (7.2.5 - 12)$$

Παράδειγμα 7.2.5 - 2

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα της απόκλισης να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad \text{όταν} \quad \mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

και S η μοναδιαία σφαίρα με εξίσωση $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Λύση. Έστω

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k} = 2x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

οπότε $P = 2x$, $Q = y^2$ και $R = z^2$.

Τότε

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = P_x + Q_y + R_z = 2 + 2y + 2z.$$

Άρα σύμφωνα με τον τύπο (7.2.5 – 12) έχουμε

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \iiint_V (P_x + Q_y + R_z) dV \\ &= 2 \iiint_V (1 + y + z) dV \\ &= 2 \iiint_V 1 dV + 2 \iiint_V y dV + 2 \iiint_V z dV \\ &= 2 \frac{4\pi}{3} + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = \frac{8\pi}{3}, \end{aligned}$$

επειδή ο όγκος V της σφαίρας ακτίνας r είναι¹⁸

$$V = \iiint_V 1 dV = \frac{4\pi r^3}{3} \stackrel{r=1}{=} \frac{4\pi}{3}$$

και λόγω συμμετρίας

$$\iiint_V y dV = \iiint_V z dV = 0.$$

Με τη βοήθεια του Θεωρήματος 7.2.5 - 2 αποδεικνύεται το παρακάτω σημαντικό θεώρημα:

Θεώρημα 7.2.5 - 3 (Gauss). Έστω S μία τυχούσα κλειστή επιφάνεια. Αν $Oxyz$ είναι ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων και \mathbf{r} το διάνυσμα θέσης τυχόντος σημείου (x, y, z) της S , τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} ds, \quad (7.2.5 - 13)$$

όπου \mathbf{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην S , ισούται με

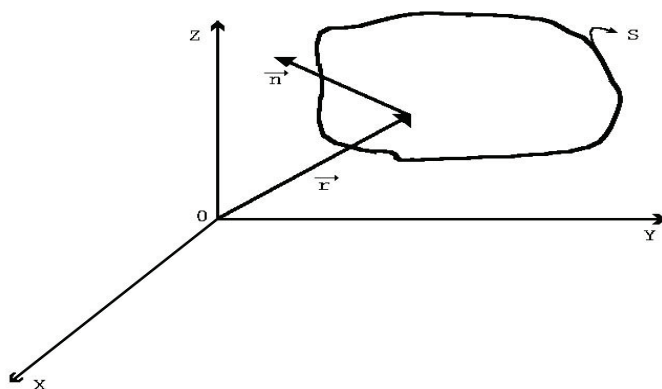
i) το μηδέν, αν το O βρίσκεται έξω από την S (Σχ. 7.2.5 - 3),

ii) 4π , όταν το O βρίσκεται στο εσωτερικό της S (Σχ. 7.2.5 - 4).

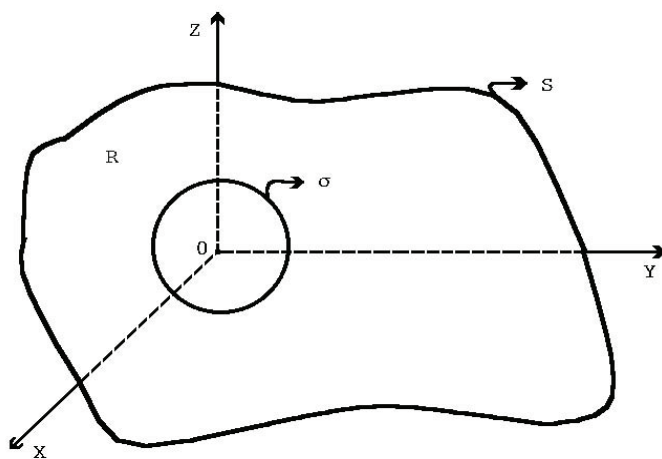
Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Gauss

Αν dS είναι μία στοιχειώδης επιφάνεια, τότε ενώνονται όλα τα σημεία που αποτελούν το σύνορό της με την αρχή O και με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται ένας κώνος με βάση dS και κορυφή το O (Σχ. 7.2.5 - 5). Στη συνέχεια ο κώνος αυτός τέμνεται με μία σφαίρα που έχει κέντρο το O και ακτίνα r και συμβολίζεται με $d\Omega$ η τομή αυτή. Τότε, όπως είναι γνωστό, η στερεά γωνία $d\omega$, που αντιστοιχεί στην επιφάνεια dS και έχει κορυφή το O , ισούται με

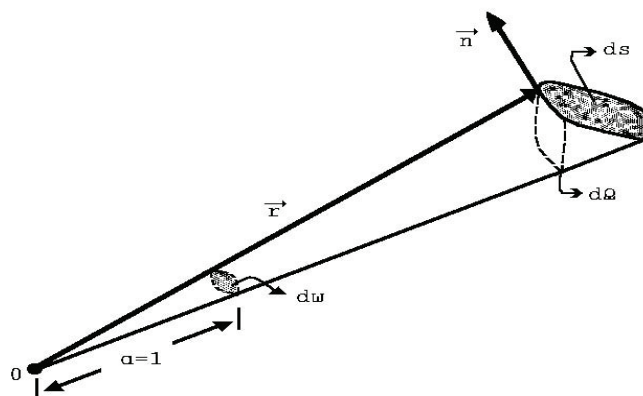
¹⁸Βλέπε Μάθημα Πολλαπλά Ολοκληρώματα - Εφαρμογές τριπλού ολοκληρώματος και <http://en.wikipedia/wiki/Volume>



Σχήμα 7.2.5 - 3: Θεώρημα 7.2.5 - 3 του Gauss - περίπτωση (i).



Σχήμα 7.2.5 - 4: Θεώρημα 7.2.5 - 3 του Gauss - περίπτωση (ii).



Σχήμα 7.2.5 - 5: γεωμετρική ερμηνεία θεωρήματος 7.2.5 - 3 του Gauss.

$$d\omega = \frac{d\Omega}{r^2}, \quad (7.2.5 - 14)$$

ενώ η αριθμητική της τιμή θα είναι ίση με το εμβαδόν της τομής του κώνου με τη σφαίρα που έχει για κέντρο το O και ακτίνα $a = 1$.

Έστω \mathbf{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια dS και έστω επίσης ότι θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα \mathbf{r} και \mathbf{n} . Τότε από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{r}| |\mathbf{n}| \cos \theta = r \cos \theta,$$

δηλαδή

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r},$$

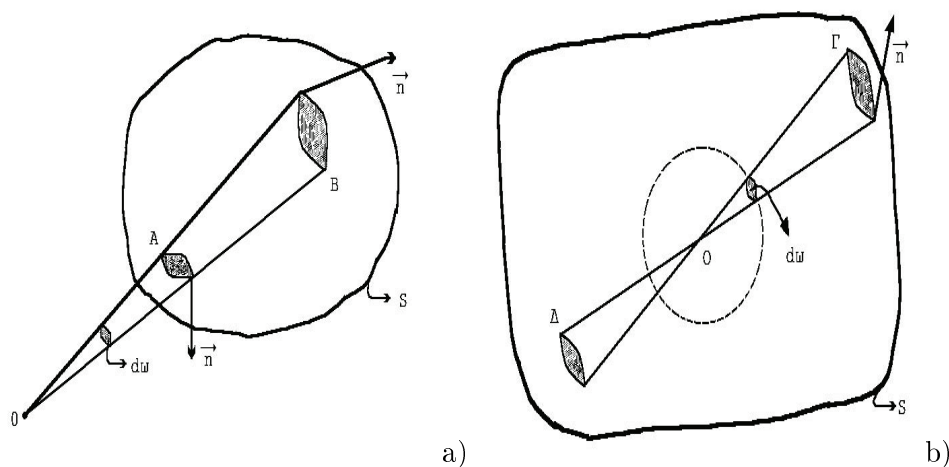
οπότε

$$d\Omega = \pm \cos \theta dS = \pm \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} dS.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην (7.2.5 - 14) προκύπτει

$$d\omega = \pm \frac{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta}}{r^3} dS,$$

όπου το πρόσημο εξαρτάται από το είδος της γωνίας θ (τίθεται το $+$, αν η γωνία θ είναι δεξιόστροφη, διαφορετικά το $-$).



Σχήμα 7.2.5 - 6: γεωμετρική ερμηνεία Θεωρήματος 7.2.5 - 3 του Gauss - περιπτώσεις: (i) Σχ. (a) και (ii) Σχ. (b).

Αν τώρα το O βρίσκεται έξω από την επιφάνεια S (Σχ. 7.2.5 - 6a), τότε η στερεά γωνία $d\omega$ στη θέση A είναι ίση με

$$d\omega = - \left(\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{n}}{r^3} \right) dS,$$

ενώ στη θέση B ίση με

$$d\omega = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} ds.$$

Προφανώς τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα υπεράνω των επιφανειών αυτών είναι 0.

Αν, τέλος, το σημείο O βρίσκεται στο εσωτερικό της S (Σχ. 7.2.5 - 6b), τότε στις θέσεις Γ και Δ είναι

$$d\omega = \left(\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{n}}{r^3} \right) dS,$$

οπότε τα επιφανειακά ολοκληρώματα υπεράνω και των δύο αυτών επιφανειών θα προστίθενται.

Η ολική στερεά γωνία, όταν η ολοκλήρωση γίνεται υπεράνω της S , ισούται με το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας με κέντρο το O και ακτίνα $a = 1$, δηλαδή είναι ίση με 4π .

¹⁹Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή αναπαραγωγή του παρόντος στο σύνολό του ή τμημάτων του χωρίς τη γραπτή άδεια του Καθ. Α. Μπράτσου.

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: <http://users.teiath.gr/bratsos/>

7.3 Βιβλιογραφία

- [1] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978-960-351-874-7.
- [2] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960-351-453-5/978-960-351-453-4.
- [3] Apostol, T. (1962). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός II*. Εκδόσεις Ατλαντίς-Μ. Πεχλιβανίδης. ISBN 61-11601.
- [4] Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). *Απειροστικός Λογισμός II*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978-960-524-184-1.
- [5] Marsden, J.E. & Tromba, A.J. (2011). *Διανυσματικός Λογισμός*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978-960-730-945-7.
- [6] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960-418-087-8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- <http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm>
- <http://mathworld.wolfram.com/>
- <http://eom.springer.de/>

Ευρετήριο

- ακρότατο
 - απόλυτο, 76
 - θεώρημα, 76
 - υπολογισμός, 76
 - με 1 συνθήκη, 81
 - με 2 συνθήκες, 90
 - με συνθήκη, 80
 - τοπικό, 57, 65
 - ελάχιστο, 59, 65
 - κρίσιμο σημείο, 59, 66
 - μέγιστο, 59, 65
 - ολικό, 58
 - ορισμός, 57
 - σημείο καμπής, 59
 - συνθήκη, 58, 65
- απόκλιση
 - ιδιότητες, 296
 - ορισμός, 295
- απόσβεση
 - ασθενής, 161
 - ισχυρή, 157
 - κρίσιμη, 159
- βελτιστοποίηση, 76
- γινόμενο
 - θεμελιώδες διανυσματικό, 407
- διάνυσμα
 - εφαπτόμενο, 261
 - μοναδιαίο, 262
 - θεμελιώδες, 407
- διαφορική
 - εξίσωση
 - εφαρμογές στη μηχανική, 163
 - διαφορική εξίσωση
 - Bernoulli, 140
 - Riccati, 143
 - εμβαδόν
 - επίπεδου σχήματος, 342
 - επιφάνειας, 345
 - εξίσωση
 - διαφορική
 - 1ης τάξης, 101
 - 1ης τάξης γραμμική μη ομογενής, 132, 146
 - 1ης τάξης γραμμική ομογενής, 132
 - 1ης τάξης εφαρμογές, 151
 - 2ης τάξης, 155
 - 2ης τάξης γραμμική μη ομογενής, 155
 - 2ης τάξης γραμμική ομογενής, 155, 156
 - 2ης τάξης μη ομογενής, 169
 - γενική λύση, 96
 - γραμμική 1ης τάξης, 131, 146
 - θεώρημα λύσης μη ομογενούς, 100
 - ιδιάζουσα λύση, 103
 - μέθοδος του Lagrange, 132
 - με μερικές παραγώγους, 95
 - μερική λύση, 97
 - μη γραμμική, 99
 - μη ομογενής γραμμική, 99, 100
 - ολοκληρωτική καμπύλη, 96
 - ομογενής, 125
 - ομογενής γραμμική, 99, 100

- πλήρης, 111
 συνήθης, 95
 χωρισμένες μεταβλητές, 102
 χαρακτηριστική, 101, 156
- εξισώσεις
 διαφορικές
 γραμμικές, 99
- επίπεδο
 εφαπτόμενο, 38, 40
 κάθετο, 38, 40
- επιφάνεια
 απειροστή, 414
 εμβαδόν
 στοιχειώδες, 408
 ορισμός, 403
 παραμετρική παράσταση, 403
- ευθεία
 εξίσωση
 εφαπτομένης, 260
 κάθετης, 260
- θεώρημα
 Fubini, 311
 Gauss, 436
 Green, 399
 Schwarz, 33
 Stokes, 428
 ακροτάτων
 2 μεταβλητών, 58
 3 μεταβλητών, 65
 ανεξαρτησίας επικαμπύλιου ολοκληρώματος, 384
 απόκλισης Gauss, 434
 απόλυτων ακρότατων, 76
 λύσης μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης, 100
 μετασχηματισμού Laplace
 παραγώγου, 197
 περιοδικής συνάρτησης, 200
 προπορείας, 194, 217
 υστέρησης, 195, 217
- παράγωγος σύνθετης συνάρτησης, 26, 45
- ύπαρξης
 αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, 216
 μετασχηματισμού Laplace, 191
- κέντρο βάρους
 επιφάνειας, 347
 όγκου, 367
- καμπύλη
 λεία, 264
 μήκος, 393
 ολοκληρωτική, 96
- κλίση
 ιδιότητες, 284
 ορισμός, 283
- κύκλωμα
RC, 151
RL, 153
RLC, 167
 Thompson, 167
- μάζα
 ελατηρίου, 394
 κέντρο, 347
 κελύφους, 422
 στερεού, 367
 συντεταγμένες κέντρου, 393
 υπολογισμός, 346, 393
- μέθοδος
 Lagrange, 81, 170
 ελάχιστων τετραγώνων, 67
 διακριτή 1ου βαθμού, 68
 διακριτή 1ου-βαθμού, 69
 διακριτή m-βαθμού, 71, 73
- μήκος
 ελατηρίου, 394
- μετασχηματισμός
 Laplace
 αντίστροφος, 190

- θεώρημα ύπαρξης, 191
 ορισμός, 190
 πίνακας μετασχηματισμών, 219
 συνθήκες Dirichlet, 192
 Laplace αντίστροφος
 μέθοδοι υπολογισμού, 218, 222
 γραμμικός, 333
 ομογραφικός, 334
- νόμος Hooke, 164
- όγκος στερεού, 353, 366
- ολοκλήρωμα
 $\int \sqrt{1+4x^2} dx$, 346
 διπλό
 αλλαγή συντεταγμένων, 331
 ιδιότητες, 309
 ορισμός, 308
 υπολογισμός, 311
 επικαμπύλιο
 1ο είδος, 392
 2ο είδος, 374
 ιδιότητες, 382
 μορφές, 391
 ορισμός, 373, 392
 συνθήκη ανεξαρτησίας, 383
 σχετικά θεωρήματα, 428
 υπολογισμός, 374
 επιφανειακό
 εμβαδόν επιφάνειας, 421
 ορισμός, 415, 416
 σχετικά θεωρήματα, 428
 φυσική ερμηνεία, 412
 τριπλό
 γεωμετρική ερμηνεία, 358
 ιδιότητες, 358
 ορισμός, 357
 υπολογισμός, 360
- ολοκληρωτικός παράγοντας, 117
- όνομα
 Bernoulli, 140
 Clairaut, 33
 Dirac, 210
 Dirichlet, 192
 Euler, 117
 Fubini, 311
 Gauss, 434, 436
 Green, 399
 Heaviside, 202
 Hooke, 164
 Jacobi, 332
 Lagrange, 81, 132, 170
 Laplace, 190, 296
 Newton, 164
 Ostrogradsky, 434
 Riccati, 143
 Schwarz, 33
 Stokes, 428
- ορίζουσα
 Jacobi, 332
- ορθογώνιες τροχιές, 109
- παράγωγος
 γεωμετρική σημασία, 260
 διανυσματικής συνάρτησης
 κανόνες, 265
 κατευθυνόμενη
 ιδιότητες, 284
 ορισμός, 277
 ορισμός, 258
- παραμετρική παράσταση
 επιφάνειας
 ελλειψοειδές, 410
 επίπεδο, 409
 κύλινδρος, 410
 ορισμός, 403
 παραβολοειδές, 410
 σφαίρα, 410
 καμπύλης
 έλλειψης, 255
 ευθείας, 252
 κύκλου, 254, 378

- ορισμός, 251
- παραβολής, 256
- σφαίρας, 405
- πεδίο
 - αστρόβιλο, 300, 384
 - βαθμωτό, 274
 - διανυσματικό, 275
 - πυκνοτήτων ροής, 412
 - συντηρητικό, 292
 - σωληνοειδές, 296
- πίνακας
 - μετασχηματισμών Laplace, 219
 - ολοκληρωτικών παραγόντων, 118, 119
 - παραγώγων
 - σύνθετων συναρτήσεων, 28
- πολλαπλασιαστής
 - Euler, 117
- πρόβλημα
 - αρχικής τιμής 1ης τάξης, 102
- πρόγραμμα MATHEMATICA
 - Bernoulli equation, 142
 - Ricatti equation, 145
 - εξίσωση
 - διαφορική, 106
 - εξίσωση διαφορική
 - ολοκληρωτικός παράγοντας, 121–123, 128, 130
 - πλήρης, 115, 116
 - μετασχηματισμού
 - Laplace, 199
 - ολοκληρώματος
 - επικαμπύλιου 1ου είδους, 397
 - επικαμπύλιου 2ου είδους, 380
 - επιφανειακού 1ου είδους, 426
 - επιφανειακού 2ου είδους, 419
- ροπή αδράνειας, 347, 393, 422, 423
- στροβιλισμός
 - ιδιότητες, 299
 - ορισμός, 299
- συνάρτηση
 - Heaviside, 202
 - Laplacian, 297
 - αρμονική, 297
 - βαθμωτή, 274
 - γάμμα
 - ορισμός, 201
 - δέλτα, 210
 - διανυσματική, 274
 - γεωμετρική σημασία παραγώγου, 261
 - θέσης, 251
 - μέτρο, 275
 - ολοκλήρωση, 268
 - οριακή τιμή, 248
 - ορισμός, 245, 275
 - παράγουσα, 268
 - παράγωγος, 258
 - συνέχεια, 249
 - εκθετικής τάξης, 190
 - κλιμακωτή, 206
 - μοναδιαία, 202
 - μοναδιαίας χρούσης, 210
 - παράγουσα, 111
 - περιοδική
 - τετραγωνικού παλμού, 205
 - πραγματική
 - κλίση, 257
 - ορισμός, 243
 - παράγωγος, 258
- συνθήκη
 - Dirichlet
 - μετασχηματισμού Laplace, 192
 - αρχική, 97
- συντεταγμένες
 - καμπυλόγραμμες, 332
 - πολικές, 339
- σχήμα
 - γεωμετρικής ερμηνείας
 - διπλού ολοκληρώματος, 307, 356
 - ορισμένου ολοκληρώματος, 307, 356
 - διάνυσμα

- κλίσης, 290
- θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο, 409
- θεώρημα
 - Gauss, 438, 439
 - Green, 400
 - Stokes, 429
- κλίση, 290
- κλιμακωτή συνάρτηση, 206
- παραμετρική εξίσωση
 - ευθείας, 252
- παραμετρική παράσταση
 - επιφάνειας, 404
 - ευθείας, 377
 - καμπύλων, 251
 - σφαίρας, 406
- πεδίο
 - Coulomb, 294
- πολικές συντεταγμένες, 339
- συντεταγμένες
 - κυλινδρικές, 56
 - πολικές, 52
 - σφαιρικές, 56, 405
- φυσική ερμηνεία
 - Θεωρήματος του Gauss, 437
 - επιφανειακού ολοκληρώματος, 415
- σύστημα
 - κανονικών εξισώσεων, 70, 73
- ταλάντωση
 - αρμονική
 - ελεύθερη, 157, 161, 164, 165
 - ελεύθερη με απόσβεση, 165
 - εξαναγκασμένη, 185
- τελεστής
 - Laplace
 - ορισμός, 296
 - διαφορικός
 - ορισμός, 282
 - παραγώγου
 - ν -τάξης, 259
 - 1ης, 258
 - 2ης, 259
 - 3ης, 259
- τελεστής Laplace
 - ορισμός, 51
 - συντεταγμένες
 - καρτεσιανές, 51
 - κυλινδρικές, 55
 - πολικές, 54
 - σφαιρικές, 55
- τύπος
 - Stokes, 428
- φυσική ερμηνεία
 - θεωρήματος
 - Gauss, 436
 - Stokes, 429
 - ολοκληρώματος
 - επιφανειακού, 412
- φόρτιση πυκνωτή, 151

Ευρετήριο Ξενόγλωσσων Ονομάτων

- del, 282
- determinant
 - Jacobian, 332
- differential equation, 95
 - Bernoulli, 140
 - characteristic equation, 101
 - Euler multiplier, 117
 - exact, 111
 - explicit, 102
 - homogeneous, 99, 125
 - initial value problem, 102
 - integrating factor, 117
 - linear, 99
 - linear 1st order, 131, 146
 - linear 2nd order, 155
 - potential function, 111
 - Riccati, 143
 - separation of variables, 102
 - trivial solution, 103
- directional derivative, 277
- divergence, 295
- field
 - conservative, 292
 - scalar, 274
 - vector, 275
 - vortex, 300
- function
 - Dirac, 211
 - gamma, 201
- Heaviside, 202
- real-valued, 9
 - absolute extremes, 76
 - chain rule, 45
 - conditional extremes, 80
 - continuity, 18
 - extremes, 57
 - limit, 16
 - local extremes, 57
 - partial derivative, 21
- unit impulse, 211
- unit step, 202
- vector-valued
 - continuity, 249
 - definition, 245
 - differentiation, 258
 - integration, 268
 - limit, 248
- gradient, 283
- integral
 - double, 305
 - definition, 309
 - evaluation, 311, 331
 - properties, 309
- linear, 371
 - applications, 392
 - definition, 371, 391
 - evaluation, 374

- Green theorem, 399
 - properties, 382
- surface, 402
 - applications, 421
 - definition, 415
- Gauss theorem, 434
- Ostrogradsky theorem, 434
- Stokes' theorem, 428
- triple, 355
 - definition, 357
 - evaluation, 360
 - properties, 358
- Lagrange multipliers, 81
- Laplace
 - equation, 297
 - transform
 - definition, 189
 - inverse, 215
 - properties, 193
 - theorem, 190
- Laplacian operator, 297
- method
 - Lagrange, 81, 170
 - least squares, 67
- name
 - Bernoulli, 140
 - Clairaut, 33
 - Dirac, 210
 - Dirichlet, 192
 - Euler, 117
 - Fubini, 311
 - Gauss, 434, 436
 - Green, 399
 - Heaviside, 202
 - Hooke, 164
 - Jacobi, 332
 - Lagrange, 81, 132, 170
 - Laplace, 190, 296
 - Newton, 164
 - Ostrogradsky, 434
 - Riccati, 143
 - Schwarz, 33
 - Stokes, 428
 - normal equations, 70
 - product
 - vector fundamental, 407
 - tangent plane, 37
 - transform
 - endomorphism, 334
 - homomorphism, 334
 - Laplace, 190
 - inverse, 190, 215
 - linear, 333
 - vector
 - fundamental, 407