ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
(Τ.Ε.Ι.) ΑΘΗΝΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Δρ Α. Μπράτσος
E-mail: bratsos@teiath.gr **URL:** http://users.teiath.gr/bratsos/

ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ **ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

ΠΕΡΙΟΔΟΥ **ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2014** ΤΜΗΜΑΤΟΣ

ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ & ΓΕΩΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ Τ.Ε.

1^o

ii) Έστω το πρόβλημα αρχικής $y' = f(t, y)$, όταν $t \in [a, b]$ με $y_0 = y(a)$. Θεωρώντας ότι το $[a, b\,]$ έχει υποδιαιρεθεί σε N το πλήθος ίσα υποδιαστήματα πλάτους ℓ, να γραφεί η λύση του παραπάνω προβλήματος με τη μέθοδο του Euler, αντίστοιχα του Taylor τάξης 2.

ii) Να λυθεί με τη μέθοδο Runge-Kutta 3ης τάξης το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = y - t^2 + 1, \quad \text{όταν} \quad t \in [0,\, 0.1], \quad \ell = 0.1, \quad \text{θεωρητική λύση } y(t) = (t+1)^2 - \frac{1}{2}\, e^t,$$

όταν η αρχική τιμή y_0 ισούται με την αντίστοιχη θεωρητική.

Υπόδειξη: Αν $y' = f(t, y)$, τότε $y_{i+1} = y_i + \frac{\ell}{6}\,(k_1 + 4k_2 + k_3)$, όταν

$$k_1 = f\,(t_i, y_i)\,; \quad k_2 = f\left(t_i + \frac{\ell}{2}\,,\, y_i + \frac{\ell}{2}\, k_1\right); \quad k_3 = f\,(t_i + \ell,\, y_i - \ell k_1 + 2\ell k_2)\,.$$

2^o

i) Δώστε τον ορισμό της spline. Αιτιολογείστε γιατί η προσέγγιση με spline πρέπει να είναι τουλάχιστον κυβική. Στη συνέχεια δείξτε ότι η συνάρτηση

$$s(x) = -x - 3x^2 + 2(x-1)_+^3, \quad \text{όταν} \quad x \in [-1, 2]$$

ορίζει μια spline.

ii) Με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου και του Simpson να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{0.6} \sqrt{1+x^2}\, dx, \quad \text{όταν} \quad h = 0.1$$

και τα αποτελέσματα να συγκριθούν με τη θεωρητική τιμή 0.634 2696.

Υπόδειξη: Σύνθετος τραπεζίου: $I(f) \approx \frac{h}{2}\left\{f\,(x_0) + 2\,[f\,(x_1) + \ldots + f\,(x_{N-1})] + f\,(x_N)\right\}$ και Simpson:

$$I(f) \approx \frac{h}{3}\left\{f\,(x_0) + 4\,[f\,(x_1) + f\,(x_3) + \ldots + f\,(x_{2N-1})] + 2\,[f\,(x_2) + f\,(x_4) + \ldots + f\,(x_{2N-2})] + f\,(x_{2N})\right\}$$

3^o

i) Εξετάστε αν το θεώρημα που εξασφαλίζει τη σύγκλιση της μεθόδου των Gauss-Seidel για τη λύση γραμμικών συστημάτων, εφαρμόζεται στην περίπτωση του συστήματος

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 5; \quad 3x_1 - x_2 = 5; \quad x_2 + 2x_3 = 1. \tag{1}$$

Στη συνέχεια εφαρμόστε την παραπάνω μέθοδο στη λύση του συστήματος (1) δυο φορές.

ii) Να γραφεί το σύστημα υπολογισμού των συντελεστών του πολυωνύμου 2ου βαθμού, που προσεγγίζει με τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων τα σημεία: $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ και $(2, 1.5)$.

Αθήνα 10 Φεβρουαρίου 2014

Α. Μπράτσος

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
(Τ.Ε.Ι.) ΑΘΗΝΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Δρ Α. Μπράτσος
E-mail: bratsos@teiath.gr **URL:** http://users.teiath.gr/bratsos/

ΘΕΜΑΤΑ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΥ **ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**
ΠΕΡΙΟΔΟΥ **ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2014** ΤΜΗΜΑΤΟΣ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ & ΓΕΩΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ Τ.Ε.

1^o

Να λυθεί με τη μέθοδο του Newton η εξίσωση

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0, \quad \text{όταν} \quad x_0 = 1.8.$$

Η διαδικασία να σταματήσει στη 4η επανάληψη.

2^o

Να υπολογιστεί με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου και των 3/8 του Simpson το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{0.6} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \text{όταν} \quad h = 0.1$$

και τα αποτελέσματα να συγκριθούν με τη θεωρητική τιμή 0.568 825.
Υπόδειξη: Τραπεζίου: $I(f) \approx \frac{h}{2}\left\{f(x_0) + 2\left[f(x_1) + \ldots + f(x_{N-1})\right] + f(x_N)\right\}$ και 3/8 του Simpson:

$$\begin{aligned} I(f) \quad \approx \quad & \frac{3h}{8}\left\{f(x_0) + 3\left[f(x_1) + f(x_4) + \ldots + f(x_{3N-2})\right] + 3\left[f(x_2) + f(x_5) + \ldots + f(x_{3N-1})\right]\right. \\ & \left. +2\left[f(x_3) + f(x_6) + \ldots + f(x_{3N-3})\right] + f(x_{3N})\right\}. \end{aligned}$$

3^o

Να λυθεί με τη μέθοδο του Euler το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = y - t^2 + 1, \quad \text{όταν} \quad t \in [0,\, 0.2], \quad \ell = 0.1, \quad \text{θεωρητική λύση } y(t) = (t+1)^2 - \frac{1}{2}\,e^t,$$

όταν η αρχική τιμή είναι $y_0 = 0.5$. Να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με την αντίστοιχη θεωρητική.

4^o

Να γραφεί η μορφή του συστήματος υπολογισμού της κυβικής φυσικής spline παρεμβολής στα σημεία

$$(-1, 1), \quad (0, 1.5) \quad \text{και} \quad (2, 0).$$

Υπόδειξη: Όσοι φοιτητές δεν έχουν παραδώσει ή έχουν παραδώσει ορισμένες μόνον εργασίες.

Αθήνα 10 Φεβρουαρίου 2014

Α. Μπράτσος