ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΡΓΑΣΙΑ 3η: Προσεγγιστικές μέθοδοι

ΣΤΑΣΙΝΟΠΟΥΛΟΣ ΦΙΛΙΠΠΟΣ (12097)

8/12/2013

Ασκήσεις 3.1-1

1i)

Αρχικά για να γίνει η προσέγγιση της ολοκληρωτέας συνάρτησης με το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange θα πρέπει:

Έχουμε ότι το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange είναι ίσο με:

$$\boldsymbol{P_3(x) = l_0(x)f(x_0) + l_1(x)f(x_1) + l_2(x)f(x_2) + l_3(x)f(x_3)}$$

Επίσης γνωρίζουμε τα χ_0, χ_1, χ_2, χ_3 και με την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ θα υπολογίσουμε τα y_0, y_1, y_2, y_3.

Οπότε:

χ_i	0	0.3	0.6	1.0
y_i	1.0	0.99597	0.94089	0.70711

$$\boldsymbol{l_0(x)} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \boldsymbol{\frac{x^3 - 1.9x^2 + 1.08x - 0.18}{-0.18}}$$

$$\boldsymbol{l_1(x)} = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \boldsymbol{\frac{x^3 - 1.6x^2 + 0.6x}{0.063}}$$

$$\boldsymbol{l_2(x)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \boldsymbol{\frac{x^3 - 1.3x^2 + 0.3x}{-0.072}}$$

$$\boldsymbol{l_3(x)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \boldsymbol{\frac{x^3 - 0.9x^2 + 0.18x}{0.28}}$$

Άρα το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange είναι ίσο με :

$$\boldsymbol{P_3(x)} = -\left(\frac{x^3 - 1.9x^2 + 1.08x - 0.18}{0.18}\right) + \left(\frac{x^3 - 1.6x^2 + 0.6x}{0.063}\right)(0.99597) - \left(\frac{x^3 - 1.3x^2 + 0.3x}{0.072}\right)(0.94089) + \left(\frac{x^3 - 0.9x^2 + 0.18x}{0.28}\right)(0.70711)$$

Στη συνέχεια για να γίνει η προσέγγιση της ολοκληρωτέας συνάρτηση με το πολυώνυμο παρεμβολής του Newton θα πρέπει:

Έχουμε ότι το πολυώνυμο παρεμβολής του Newton είναι ίσο με:

$$\boldsymbol{P_3(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1) + A_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}$$

Επίσης θα πρέπει να φτιάξουμε τον εξής πίνακα:

χ_i	$f(\chi_i)$	f[,]	f[, ,]
0	1.0	f[x_0,x_1]= $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$=-0.01343	f[x_0,x_1,x_2]= $\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$=-0.28362
0.3	0.99597	f[x_1,x_2]= $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$=-0.18360	
0.6	0.94089	f[x_2,x_3]= $\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$=-0.58445	f[x_1,x_2,x_3]= $\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$=-0.57264
1.0	0.70711		

f[, , ,]
f[x_0,x_1,x_2,x_3]= $\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$=-0.28902

Οπότε τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε το πολυώνυμο παρεμβολής του Newton:

$$\boldsymbol{A_0} = f[x_0] = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{A_1} = f[x_0, x_1] = \mathbf{-0.01343}$$

$$\boldsymbol{A_2} = f[x_0, x_1, x_2] = \mathbf{-0.28362}$$

$$\boldsymbol{A_3} = f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \mathbf{-0.28902}$$

$$\boldsymbol{P_3(x) = -0.28902x^3 - 0.023502x^2 + 0.0196324x + 1}$$

1ii)

Το ολοκλήρωμα είναι ίσο με:

$$\int_0^1 (-0.28902x^3 - 0.023502x^2 + 0.0196324x + 1)dx =$$

$$= \left[x + \frac{0.0196324}{2}x^2 - \frac{0.023502}{3}x^3 - \frac{0.28902}{4}x^4\right]_0^1 = \mathbf{0.9297272}$$

Η τιμή του ολοκληρώματος που υπολογίσαμε είναι μεγαλύτερη από τη θεωρητική τιμή.

2)

$$\mathbf{2!\,f[x_0,x_1,x_2]} = 2!\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = 2!\frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{(x_2-x_1)+(x_1-x_0)}$$

$$= 2!\frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{2h^2} = \boldsymbol{\frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{h^2}}$$

$$\mathbf{3!\,f[x_0,x_1,x_2,x_3]} = 3!\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$$

$$= 3!\frac{\frac{1}{2!}\left\{\left[\frac{f(x_1)-2f(x_2)+f(x_3)}{h^2}\right]-\left[\frac{f(x_0)-2f(x_1)+f(x_2)}{h^2}\right]\right\}}{(x_3-x_2)+(x_2-x_1)+(x_1-x_0)}$$

$$= 3!\frac{-f(x_0)+3f(x_1)-3f(x_2)+f(x_3)}{2!\,3h*h^2} = 3!\frac{-f(x_0)+3f(x_1)-3f(x_2)+f(x_3)}{3!\,h^3}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{h^3}[-f(x_0)+3f(x_1)-3f(x_2)+f(x_3)]}$$

Άσκηση 3.2.1

i)

Αρχικά για να υπολογίσουμε με τη διακριτή μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων τα πολυώνυμα 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού θα πρέπει να φτιάξουμε τον εξής πίνακα:

χ_i	y_i	χ_i^2	$\chi_i y_i$	$e_i=a\chi_i+b$	χ_i^3	χ_i^4	$y_i\,\chi_i^2$
0.3	0.0647	0.09	0.01941	-0.143735	0.027	0.0081	0.005823
0.5	0.0985	0.25	0.04925	0.136895	0.125	0.0625	0.024625
0.7	0.2490	0.49	0.17430	0.417525	0.343	0.2401	0.122010
1.4	1.0395	1.96	1.45530	1.399730	2.744	3.8416	2.037420
1.8	1.5393	3.24	2.77074	1.960990	5.832	10.4976	4.987332
2.2	3.5941	4.84	7.90702	2.522250	10.648	23.4256	17.395444
3.5	4.0549	12.25	14.19215	4.346345	42.875	150.0625	49.672525
10.4	**10.6400**	**23.12**	**26.56817**		**62.594**	**188.1380**	**74.245179**

Έπειτα έχουμε:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{7(\sum_1^7 x_i y_i) - (\sum_1^7 x_i)(\sum_1^7 y_i)}{7(\sum_1^7 x_i^2) - (\sum_1^7 x_i)^2} = \mathbf{1.40315}$$

$$\boldsymbol{b} = \frac{(\sum_1^7 x_i^2)(\sum_1^7 y_i) - (\sum_1^7 x_i\, y_i)(\sum_1^7 x_i)}{7(\sum_1^7 x_i^2) - (\sum_1^7 x_i)^2} = \mathbf{-0.56468}$$

Άρα το πολυώνυμο 1ου βαθμού είναι ίσο με:

$$\boldsymbol{P_1(x)} = ax + b = \mathbf{1.40315x - 0.56468}$$

Οπότε το σφάλμα της προσέγγισης του πολυωνύμου του 1ου βαθμού είναι ίσο:

$$\widetilde{\boldsymbol{E}} = \sum_1^7 (|y_i - e_i|)$$

$$= 0.208435 + 0.038395 + 0.168525 + 0.36023 + 0.42169 + 1.07185 + 0.291445$$

$$= \mathbf{2.56057}$$

Επίσης έχουμε ότι:

$$\boldsymbol{E} = \sum_1^7 (|y_i - e_i|^2)$$

$$= 0.043445 + 0.001474 + 0.028401 + 0.129766 + 0.177822 + 1.148862 + 0.08494$$

$$= \mathbf{1.61471}$$

Στη συνέχεια έχουμε ότι το πολυώνυμο 2ου βαθμού είναι ίσο:

$$\boldsymbol{P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

Οπότε έχουμε ότι:

$$\alpha_0 \sum_1^7 x_i^{\,0} + \alpha_1 \sum_1^7 x_i^{\,1} + \alpha_2 \sum_1^7 x_i^{\,2} = \sum_1^7 y_i x_i^{\,0}$$

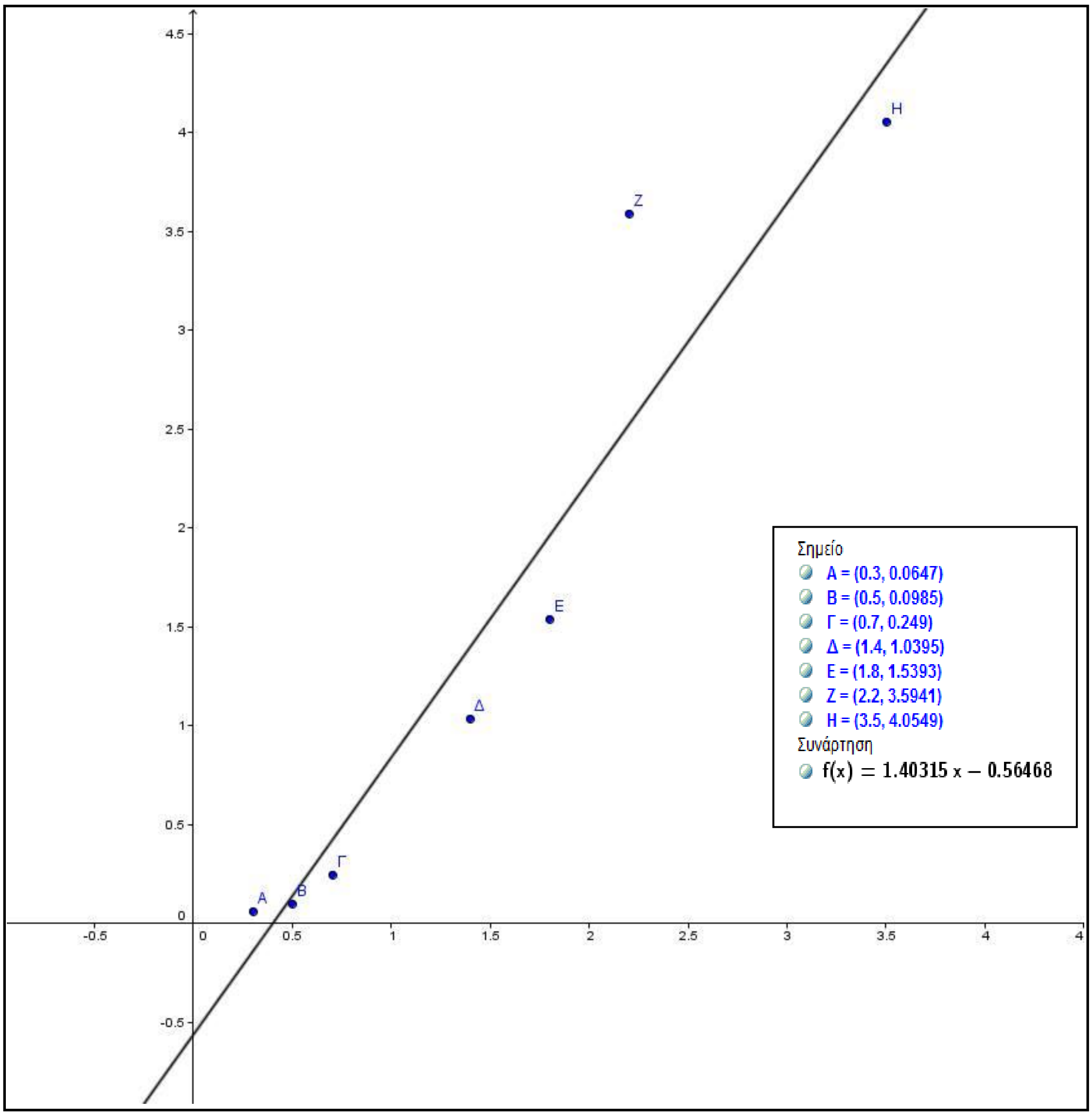
$$\alpha_0 \sum_1^7 x_i^{\,1} + \alpha_1 \sum_1^7 x_i^{\,2} + \alpha_2 \sum_1^7 x_i^{\,3} = \sum_1^7 y_i x_i^{\,1}$$

$$\alpha_0 \sum_1^7 x_i^{\,2} + \alpha_1 \sum_1^7 x_i^{\,3} + \alpha_2 \sum_1^7 x_i^{\,4} = \sum_1^7 y_i x_i^{\,2}$$

Άρα έχουμε το εξής σύστημα:

$$\begin{cases} 7\alpha_0 + 10.4a_1 + 23.12a_2 = 10.64 \\ 10.4\alpha_0 + 23.12a_1 + 62.594a_2 = 26.56817 \\ 23.12\alpha_0 + 62.594a_1 + 188.138a_2 = 74.245179 \end{cases}$$

ii)



Άσκηση 3.3.1

i)

Αρχικά για να υπολογίσουμε την κλασική Spline θα χρησιμοποιήσουμε τον εξής τύπο:

$$\boldsymbol{S(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + c_1 (x - x_1)_+^3 + c_2 (x - x_2)_+^3}$$

Επίσης έχουμε τα εξής σημεία:

χ_i	0	0.3	0.6	1.0
y_i	1	0.99597	0.94089	0.70711

$$S(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + c_1 (x - 0.3)_+^3 + c_2 (x - 0.6)_+^3$$

Οπότε έχουμε ότι:

$$\boldsymbol{S(0)} = b_0 + c_1(-0.3)^3 + c_2(-0.6)^3 = \boldsymbol{1}$$

$$\boldsymbol{S(0.3)} = b_0 + 0.3b_1 + 0.09b_2 + 0.027b_3 + c_2(-0.3)^3 = \boldsymbol{0.99597}$$

$$\boldsymbol{S(0.6)} = b_0 + 0.6b_1 + 0.36b_2 + 0.216b_3 + c_1(0.3)^3 = \boldsymbol{0.94089}$$

$$\boldsymbol{S(1)} = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + c_1(0.7)^3 + c_2(0.4)^3 = \boldsymbol{0.70711}$$

Επιπλέον για τις άκρες έχουμε ότι:

$$\boldsymbol{S'(x) = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + 3c_1 (x - x_1)_+^2 + 3c_2 (x - x_2)_+^2}$$

$$\boldsymbol{S'(0)} = b_1 = \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{S'(1)} = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 1.47c_1 = \boldsymbol{b}$$

Τέλος λύνουμε το σύστημα των έξι εξισώσεων έτσι ώστε να βρούμε τα: $\boldsymbol{b_0}$, $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$, $\boldsymbol{b_3}$, $\boldsymbol{c_1}$, $\boldsymbol{c_2}$.

ii)

Στη συνέχεια για να υπολογίσουμε την φυσική Spline θα χρησιμοποιήσουμε τον εξής τύπο:

$$\boldsymbol{S(x) = \alpha_0 + a_1 x + c_0 (x - x_0)_+^3 + c_1 (x - x_1)_+^3 + c_2 (x - x_2)_+^3 + c_3 (x - x_3)_+^3}$$

Επίσης έχουμε τα εξής σημεία:

χ_i	0	0.3	0.6	1.0
y_i	1	0.99597	0.94089	0.70711

$$S(x) = \alpha_0 + a_1 x + c_0(x)_+^3 + c_1(x-0.3)_+^3 + c_2(x-0.6)_+^3 + c_3(x-1)_+^3$$

Οπότε έχουμε ότι:

$$\boldsymbol{S(0)} = a_0 = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{S(0.3)} = a_0 + 0.3a_1 + c_0(0.3)^3 = \mathbf{0.99597}$$

$$\boldsymbol{S(0.6)} = a_0 + 0.6a_1 + c_0(0.6)^3 + c_1(0.3)^3 = \mathbf{0.94089}$$

$$\boldsymbol{S(1)} = a_0 + a_1 + c_0 + c_1(0.7)^3 + c_2(0.4)^3 = \mathbf{0.70711}$$

Τέλος έχουμε ότι:

$$\boldsymbol{c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 0}$$

$$c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0 \leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{0.3c_1 + 0.6c_2 + c_3 = 0}$$